Bidang Matematika

PROSIDING SENDIKA

Vol. 5, No. 2, 2019

Diselenggarakan oleh:
Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Purworejo

2019

Purworejo, 27 April 2019

ISSN. 2459-962X

ISSN: 2459-962X

DEWAN REDAKSI

Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
(SENDIKA 2019)
Online: http://eproceedings.umpwr.ac.id/index.php/sendika/issue/archive
Sekretariat: Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Purworejo
Jalan KH. Ahmad Dahlan No. 3 Purworejo 54111
Email : *matematika@umpwr.ac.id*
Website : *http://pmat.umpwr.ac.id*

ISSN: 2459-962X

TIM PROSIDING

Editor

Heru Kurniawan, M.Pd., Dita Yuzianah, M.Pd.,
Isnaeni Mariyam, M.Pd.,
Mita Hapsari Jannah, S.Si., M.Pd.

Tim Teknis

Bagus Suryo Kusumo, Tyas Esti Rahayu,
Syafarina Nadilah

Layout* & *Cover

Desmita Ratriana, Eko Lutfi Alhafiz

ISSN: 2459-962X

TIM *REVIEWER*

Prof. Dr. S. Eko Putro Widoyoko, M.Pd.
Dr. Bambang Priyo Darminto, M. Kom.
Dr. Teguh Wibowo, M.Pd.
Dr. Mujiyem Sapti, M.Si.
Dr. Sriyono, M.Pd.
Drs. Supriyono, M.Pd.
Drs. Budiyono, M.Si
Riawan Yudi Purwoko, S.Si., M.Pd.
Nila Kurniasih, M.Si.

ISSN: 2459-962X

KEYNOTE SPEAKERS

Prof. Dr. rer. nat Widodo, M.S.
(Universitas Gadjah Mada)

Ariyadi Wijaya, M.Sc., Ph.D.
(Universitas Negeri Yogyakrya)

Dr. Teguh Wibowo, M.Pd.
(Universitas Muhammadiyah Purworejo)

Dr. Mujiyem Sapti, M.Si.
(Universitas Muhammadiyah Purworejo)

ISSN: 2459-962X

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum wr. wb.

Mengawali pengantar ini, marilah kita panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya. Alhamdulillahirobbil'alamin Program Studi Pendidikan Matematika UMPurworejo telah menyelenggarakan Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (Sendika) 2019 dengan tema *"Matematika, Pembelajaran, dan Risetnya di Era Revolusi Industri 4.0".* Tema ini dipilih karena didasari akan pentingnya peran matematika dan pendidikan matematika dalam menghadapi era revolusi industri 4.0 saat ini. Pada Sendika kali ini, kami mengundang tiga pembicara utama yaitu Dr. Teguh Wibowo, M.Pd. dari UMPurworejo, Prof. Dr. rer. nat. Widodo, M.S. dari Universitas Gadjah Mada, dan Ariyadi Wijaya, M.Sc., Ph.D. dari Universitas Negeri Yogyakarta.

Seminar Nasional kali ini dihadiri oleh mahasiswa S1, S2, dan S3, guru, praktisi matematika, statistika, dan pendidikan matematika, serta teman-teman dosen dari berbagai perguruan tinggi di Indonesia sebagai pemakalah pendamping. Jumlah makalah terseleksi sebanyak 162 judul baik dari bidang pendidikan matematika maupun bidang matematika.

Kami berharap Prosiding ini dapat berguna dalam rangka menambah wawasan serta pengetahuan kita mengenai pembelajaran dan riset terbaru dari bidang matematika dan pendidikan matematika. Kami juga menyadari sepenuhnya bahwa di dalam Prosiding ini terdapat kekurangan dan jauh dari kata sempurna. Oleh sebab itu, kami berharap adanya kritik, saran dan usulan demi perbaikan untuk masa yang akan datang, mengingat tidak ada sesuatu yang sempurna tanpa saran yang membangun.

Akhirnya, panitia mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penyelenggaraan seminar ini. Kami juga minta maaf jika sebagai panitia ada kekurangan dalam menyelenggarakan seminar ini. Kepada semua narasumber dan peserta seminar kami mengucapkan terimakasih atas partisipasinya, selamat berseminar, dan semoga bermanfaat.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Purworejo, 27 April 2019
Ketua Panitia,

Erni Puji Astuti, M.Pd.

PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB SISI KUAT PADA GABUNGAN DUA GRAF SIKEL

Dominikus Arif Budi Prasetyo
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma
email: dominic_abp@usd.ac.id

Abstract

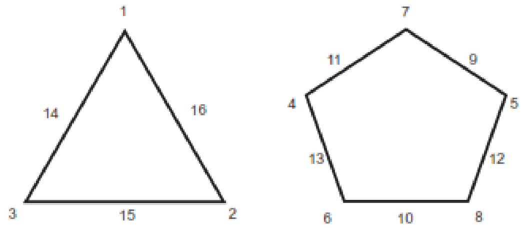
Pelabelan graf merupakan salah satu bagian dari teori graf. Pelabelan total adalah pemetaan bijektif seluruh unsur graf ke himpunan bilangan asli $\{1,2,\dots,|v|+|e|\}$ dengan titik $|v|$ dan $|e|$ berturut-turut banyaknya titik dan sisi. Pelabelan total tak ajaib sisi kuat (a,d) adalah pelabelan total dengan label-label titiknya adalah anggota himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|v|\}$ dan bobot sisi-sisinya membentuk barisan aritmetika dengan suku awal a dan selisih d. Bobot dari sisi diperoleh dengan menjumlahkan label sisi dan label-label titik yang terkait dengan sisi tersebut. Gabungan dua graf sikel adalah penggabungan dua buah sikel yang tidak terhubung dan dinyatakan sebagai $C_m \cup C_n$ dengan m dan n berturut-turut menyatakan banyaknya titik pada sikel pertama dan sikel kedua. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (a,d) pada graf $C_m \cup C_n$ dan batasan nilai a dan d serta pola pelabelannya. Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka dengan mengkaji beberapa hasil penelitian sebelumnya. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pada graf $C_m \cup C_n$ berlaku pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (a,d). Pelabelan pada gabungan dua graf sikel yang berhasil ditemukan adalah pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$ dan $\left(\frac{3m+3n+5}{2},2\right)$.

Kata kunci: *Gabungan dua graf sikel, Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat, dan Pola Pelabelan.*

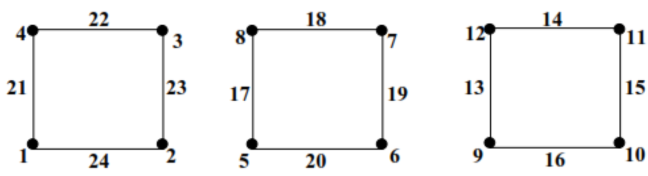
1. PENDAHULUAN

Salah satu bidang kajian pada teori graf yang masih dikembangkan saat ini adalah pelabelan graf [1]. Dalam hal ini, pelabelan graf diartikan sebagai suatu pemetaan satu-satu dari unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke sekumpulan bilangan bulat positif. Pelabelan ini dilakukan pada graf sederhana dan tak berarah. Kotzig dan Rosa [2] mengenalkan pelabelan graf sebagai cara memberikan label pada unsur-unsur sebuah graf dengan bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai dengan sebanyak unsur graf yang akan diberi label dan menghasilkan bobot setiap titik atau setiap sisinya yang dievaluasi sama.

Selanjutnya, pelabelan total tak-ajaib sisi dikenalkan oleh Baca, dkk [3] sebagai fungsi bijektif yang memetakan setiap unsur graf ke bilangan bulat positif dengan bobot semua titik atau semua sisinya berbeda dan membentuk barisan aritmetika naik. Terkait dengan pelabelan kuat, Wallis [4] menyebutkan bahwa pelabelan kuat sebagai pelabelan yang memberikan label {1, 2, 3, …, |*v*|} pada titik-titik dari graf yang dilabeli. Kajian mengenai pelabelan total tak-ajaib sisi kuat telah dilakukan oleh Sanjaya. Sanjaya [5] telah meneliti tentang keberlakuan pelabelan total takajaib sisi kuat pada graf multisikel. Sedangkan Prasetyo [6] telah mengkaji pelabelan total takajaib titik kuat pada gabungan dua graf sikel.



Gambar 1. Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Kuat (26,1) pada $C_3 \cup C_5$



Gambar 2. Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat (26,1) pada $3C_4$

Pada artikel ini, penulis menggabungkan kajian yang telah dilakukan Sanjaya [5] dan Prasetyo [6] dengan mengkaji keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat pada gabungan dua graf sikel.

2. KAJIAN LITERATUR

Sebelum mengkaji keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat pada gabungan dua graf sikel, berikut ini disajikan beberapa kajian yang terkait.

Definisi 1 (Baca, dkk [3])
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p+q\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib sisi pada graf G(*p*,*q*) jika bobot dari setiap sisinya berbeda.

Bobot sisi *uv* dihitung dengan menjumlahkan label sisi dan label dua titik yang terhubung dengan sisi tersebut, yakni $w_f(uv) = f(u) + f(u) + f(uv)$, untuk setiap $u, v \in V(G)$ dan $uv \in E(G)$.

Definisi 2 (Baca, dkk [3])
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p+q\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib sisi (*a*, *d*) pada graf *G*(*p*,*q*) jika bobot dari setiap sisinya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama *a* dan beda *d*.

$$W = \{w_f(u) \mid u \in V\}$$
$$= \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(p-1)d\}.$$

Dari Definisi 1 dan Definisi 2, Baca [3] juga mengatakan bahwa pelabelan total takajaib tersebut juga berlaku pada titik sebagai unsur yang dievaluasi.

Definisi 3 (Wallis [6])
Misalkan terdapat pelabelan pada graf G(V,E). Pelabelan dikatakan kuat jika label titik-titiknya berupa bilangan dari himpunan {1, 2, 3, …, |*v*|}.

Berikut ini disajikan beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai pelabelan total tak-ajaib titik (*a*, *d*) pada gabungan dua graf sikel dan pelabelan total takajaib sisi pada graf multisikel.

Teorema 4. (Prasetyo [5])
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m, n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $(3m + 3n + 2, 1)$.

Teorema 5 (Prasetyo [5])
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m, n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $\left(\frac{5m + 5n + 5}{2}, 2\right)$.

Teorema 6 (Sanjaya [4])
Pada graf multisikel mC_p untuk $m \geq 1$ dan $p \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2mp + 2, 1)$.

Teorema 7 (Sanjaya [4])
Pada graf multisikel $3C_p$ untuk $p \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $\left(\frac{9p + 5}{2}, 2\right)$.

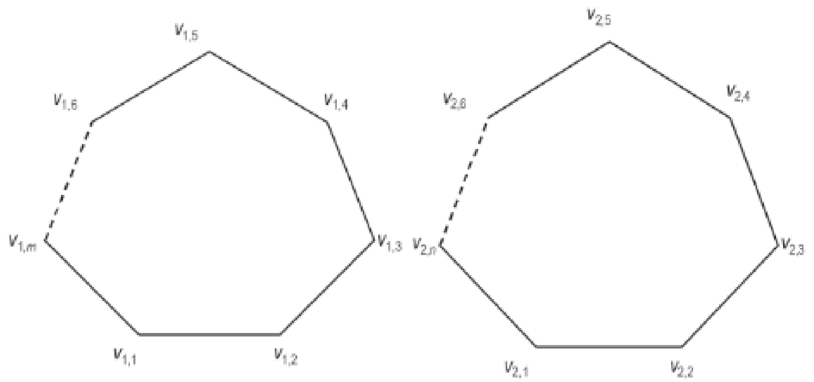
3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi pustaka dengan melakukan pengkajian dari beberapa hasil penelitian yang terkait sebelumnya. Kajian ini menggabungkan kajian yang telah dilakukan Sanjaya [4] dan Prasetyo [5] yang telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (*a*, *d*) pada graf multisikel dan pelabelan total takajaib titik kuat pada gabungan dua graf sikel dengan hasil pada Teorema 4, Teorema 5, Teorema 6, dan Teorema 7.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan Definisi 1 untuk memperoleh jumlahan bobot sisi pada pelabelan total tak-ajaib sisi, label semua sisi dihitung sebanyak dua kali dan label semua titik dihitung satu kali. Hal tersebut berakibat jumlahan bobot semua sisi adalah $S_W = 2S_V + S_e$, dimana S_w adalah jumlahan semua bobot sisi, S_v adalah jumlahan label semua titik dan S_e adalah jumlahan label semua sisi.

Prasetyo [5] mengkaji gabungan dua graf sikel dengan menggabungkan dua buah graf sikel dimana kedua graf tersebut tidak terhubung. Kajian graf tersebut disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Gabungan Dua Graf Sikel $C_m \cup C_n$ (Prasetyo [5])

Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$, terdapat sebanyak $m+n$ titik dan sebanyak $m+n$ sisi. Sehingga berdasarkan Definisi 2 diperoleh bahwa:

$$a+(a+d)+\cdots+(a+(m+n-1)d)=2S_v+S_e$$

$$(m+n)a+\frac{(m+n)(m+n-1)d}{2}=2S_v+S_e \quad (1)$$

Dari Definisi 3, diperoleh bahwa label titiknya $\{1,2,\cdots,m+n\}$, maka label sisinya adalah $\{m+n+1, m+n+2,\cdots,2m+2n\}$. Akibatnya diperoleh $S_v=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ dan $S_e=\frac{(m+n)(3m+3n+1)}{2}$. (2)

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) diperoleh bahwa

$$a+\frac{(m+n-1)d}{2}=m+n+1+\frac{3m+3n+1}{2}$$

$$2a+(m+n-1)d=5m5n+3 \quad (3)$$

Sekarang kita tentukan nilai a terkecil, yakni $m + n + 4$ karena pada pelabelan total takajaib sisi kuat. Jadi diperoleh bahwa $a \geq m+n+4$. Hasil ini disubstusikan ke persamaan (3) dan diperoleh pertidaksamaan untuk nilai *d*.

$$5m+5n+3-(m+n-1)d \geq 2m+2n+8$$

$$d \leq 3$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai-nilai a berdasarkan nilai d yang terkait.

a. Untuk nilai d = 1.

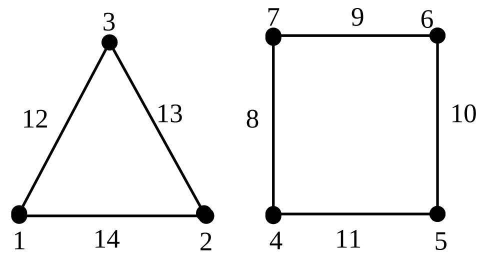
Berdasarkan persamaan (3) diperoleh bahwa nilai a adalah

$$a=\frac{5m+5n+3-(m+n-1)}{2}$$

$$=2m+2n+2$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat sebelumnya bahwa $a \geq m+n+4$ sehingga pelabelan bisa dilakukan pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk pelabelan total takajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$

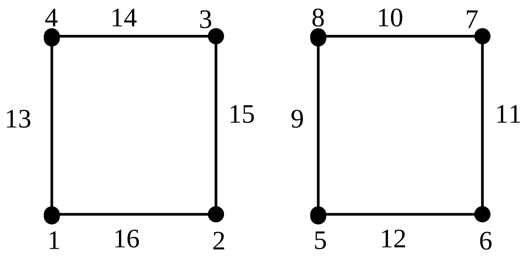
Berikut ini pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$ pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.



Gambar 4. Pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (16, 1) pada $(C_3 \cup C_4)$

Dari pelabelan pada Gambar 4 diperoleh bahwa label sisinya $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan label titiknya $\{8,9,10,11,12,13,14\}$. Bobot masing-masing sisinya adalah $\{16,17,18,19,20,21,22\}$, yakni bobot sisi dengan label 8 adalah 4+7+8 = 19, bobot sisi dengan label 9 adalah 6+7+9 = 22, bobot sisi dengan label 10 adalah 5+6+10 = 21, bobot sisi dengan label 11 adalah 4+5+11 = 20, bobot sisi dengan label 12 adalah 1+3+12 = 16, bobot sisi dengan label 13 adalah 2+3+13 = 18, dan bobot sisi dengan label 14 adalah 1+2+14 = 17.

Selanjutnya diberikan contoh pelabelan untuk $(C_4 \cup C_4)$.



Gambar 5. Pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (18, 1) pada $(C_4 \cup C_4)$

Dari pelabelan pada Gambar 5 diperoleh bahwa label titiknya $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dan label titiknya $\{9,10,11,12,13,14,15,16\}$. Bobot masing-masing sisinya adalah $\{18,19,20,21,22,23,24,25\}$, yakni bobot sisi dengan label 9 adalah 5+8+9 = 22, bobot sisi dengan label 10 adalah 7+8+10 = 25, bobot sisi dengan label 11 adalah 6+7+11 = 24, bobot sisi dengan label 12 adalah 5+6+12 = 23, bobot sisi dengan label 13 adalah 1+4+13 = 18, bobot sisi dengan label 14 adalah 3+4+14 = 21, bobot sisi dengan label 15 adalah 2+3+15 = 20, dan bobot sisi dengan label 16 adalah 1+2+16 = 19.

Berdasarkan pada pelabelan tersebut, dapat diketahui bahwa pada semua gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$ untuk semua $m,n \geq 3$. Misalkan fungsi pelabelan tersebut adalah f untuk graf pertaman dan g untuk graf kedua, maka diperoleh konsistensi rumus f untuk label titik graf pertama adalah $f(v_{1,i}) = i$ dengan $i = 1,2,\cdots,m$ dan rumus g untuk label titik graf kedua adalah $g(v_{2,j}) = m + j$ dengan $j = 1,2,\cdots,n$. Sedangkan rumus f untuk label sisi graf pertama adalah $f(v_{1,1}v_{1,m}) = m + 2n + 1$ dan $f(v_{1,i}v_{1,i+1}) = 2m + 2n + 1 - i$ dengan $i = 1,2,\cdots,m-1$, $f(v_1) = 2p + 4$ dan rumus g untuk label sisi graf kedua adalah $g(v_{2,1}v_{2,n}) = m + n + 1,$ dan $g(v_{2,j}v_{2,j+1}) = m + 2n + 1 - j$ untuk $j = 1,2,\cdots,n-1$.

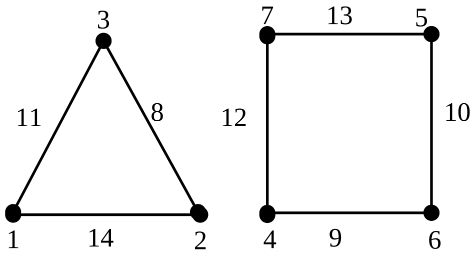
b. Untuk nilai d = 2.

Berdasarkan persamaan (3) diperoleh bahwa nilai a adalah

$$a = \frac{5m + 5n + 3 - 2(m + n - 1)}{2}$$
$$= \frac{3m + 3n + 5}{2}$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat sebelumnya bahwa $a \geq m + n + 4$ sehingga pelabelan bisa dilakukan pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk pelabelan total takajaib sisi kuat $\left(\frac{3m+3n+5}{2}, 2\right)$. Nilai a ini akan diperoleh berupa bilangan bulat jika m dan n salah satunya ganjil.

Berikut ini pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $\left(\frac{3m+3n+5}{2}, 2\right)$ pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.



Gambar 6. Pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (13, 2) pada $(C_3 \cup C_4)$

Dari pelabelan pada Gambar 6 diperoleh bahwa label sisinya $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan label titiknya $\{8,9,10,11,12,13,14\}$. Bobot masing-masing sisinya adalah $\{13,15,17,19,21,23,25\}$, yakni bobot sisi dengan label 8 adalah 2+3+8 = 13, bobot sisi dengan label 9 adalah 4+6+9 = 19, bobot sisi dengan label 10 adalah 5+6+10 = 21, bobot sisi dengan label 11 adalah 1+3+11 = 15, bobot sisi dengan label 12 adalah 4+7+12 = 23, bobot sisi dengan label 13 adalah 5+7+13 = 25, dan bobot sisi dengan label 14 adalah 1+2+14 = 17.

Berdasarkan pada pelabelan tersebut, dapat diketahui bahwa pada semua gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $\left(\frac{3m+3n+5}{2},2\right)$ untuk $m,n \geq 3$ dengan salah satu dari *m* atau *n* ganjil. Sampai sejauh ini, rumus pelabelannya belum dapat ditemukan secara tepat.

c. Untuk nilai *d* = 3.

Berdasarkan persamaan (3) diperoleh bahwa nilai *a* adalah

$$a = \frac{5m+5n+3-3(m+n-1)}{2}$$
$$= m+n+3$$

Hasil ini bertentangan dengan syarat sebelumnya bahwa $a \geq m+n+4$ sehingga pelabelan tidak bisa dilakukan pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.

5. KESIMPULAN

Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (*a*, *d*). Pelabelan yang dapat dilakukan adalah pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$ untuk semua $m,n \geq 3$ dan $\left(\frac{3m+3n+5}{2},2\right)$ untuk $m,n \geq 3$ dengan salah satu dari *m* atau *n* ganjil.

Pembaca yang tertarik dengan pelabelan ini dapat melanjutkan dengan pelabelan pada graf lain atau pelabelan lain pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.

6. REFERENSI

[1] Gallian, J.A, 2017. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics. #DS6.

[2] Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). *Magic Valuations of Finite Graphs*. Canad. Math. Bull

[3] Baca, M., dkk. 2003. *Vertex-Antimagic Total Labelings of Graphs*. Discussiones Mathematicae. Graph Theory 23 P. 67-83.

[4] Wallis, W. (2001). *Magic Graph*. Birkhauser.

[5] Sanjaya, Ryan. (2013). *Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat pada Graf Multisikel* (mC_p). Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

[6] Prasetyo, D. Arif Budi. (2018). *Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Super pada Gabungan Dua Graf Sikel*. Jurnal Penelitian. Volume 22, No. 1, Mei 2018 hlm. 44-50.

PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB TITIK KUAT (a, d) PADA GRAF SIKEL (C_n) DENGAN TAMBAHAN n ANTING $(C_n + nA_1)$

Lusia Deni Nur Reni[1]), Dominikus Arif Budi Prasetyo[2]).
[1]Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma
email: lucia_deny@yahoo.co.id
[2]Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma
email: dominic_abp@usd.ac.id

Abstract

Salah satu kajian dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan pemetaan dari unsur-unsur pada graf ke suatu bilangan. Salah satu jenis dari pelabelan graf yaitu pelabelan total tak-ajaib titik kuat (a, d). Pelabelan total merupakan pemetaan dengan domain titik dan sisi. Pelabelan total tak ajaib titik dari $G = (V, E)$ merupakan pemetaan bijektif λ: $V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, |v| + |e|\}$ dengan banyaknya titik $|v|$ dan banyaknya sisi $|e|$ dan–bobot setiap titik $wt(x)$, $x \in V$ berbeda. Bobot titik dicari dengan menjumlahkan label titik tersebut dengan label semua sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Pada pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) himpunan bobot titiknya membentuk suatu barisan aritmatika naik $W = \{wt(x) | x \in V\} = \{a, a + d, \dots, a + (|v| - 1)d\}$ dengan suku pertama a dan beda d. Pelabelan titik dikatakan kuat, jika label-label sisinya $\{1,2, \dots, |e|\}$ dan label-label titiknya $\{|e| + 1, |e|+2, \dots, |e| + |v|\}$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik kuat (a, d) pada graf $C_n + nA_1$ dan mencari rumus umum atau pola pelabelannya. Graf $C_n + nA_1$ merupakan perkembangan dari graf sikel (C_n) yang ditambahkan n titik di luar C_n dan masing-masing titik terdapat sisi yang menghunungkan titik tersebut ke titik yang berbeda pada C_n. Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka dengan mengkaji beberapa penelitian sebelumnya. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pada graf $C_n + nA_1$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat (a, d), untuk nilai $d = 1$ dengan $a = 4n + 2$ dan $d = 3$ dengan $a = 2n + 3$.

Keywords: *Graf, Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Kuat, Graf Sikel dengan Tambahan n Anting.*

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan salah satu kajian dari graf. Pelabelan graf merupakan pemetaan dari unsur-unsur pada graf ke suatu bilangan positif atau bilangan non-negatif [7]. Pelabelan disini dilakukan pada graf sederhana dan tak berarah. Kotzing dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib sebagai pelabelan total dimana labelnya merupakan bilangan bulat dari 1 sampai banyaknya unsur pada graf [3]. Pelabelan ajaib ini merupakan generalisasi dari persegi ajaib.

Pada tahun 1990, Hartsfield dan Ringel memperkenalkan konsep mengenai pelabelan anti ajaib pada graf. Pelabelan anti ajaib dari suatu graf merupakan pelabelan sisi dari suatu graf dengan bilangan bulat positif $\{1,2, \dots, e\}$ sehingga setiap bobot titiknya berbeda, dimana bobot titiknya didefinisikan sebagai jumlahan label sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Mereka sudah membuktikan bahwa terdapat pelabelan anti ajaib pada beberapa graf, yaitu *path* P_m, *star* S_m, *cycle* C_m, *complete graph* K_m, *wheel* W_m, dan *bipartite graph* $K_{2,m}, m \geq 3$. Kemudian, pada tahun 1993, Bodendiek dan Walter mendefinisikan konsep (a, d) tak ajaib graf sebagai suatu pelabelan tak ajaib yang bobot titiknya membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d.

Selanjutnya, [2] Martin Baca, dkk. telah menunjukkan keberlakukan pelabelan total tak ajaib titik untuk *path*, graf petersen, dan sikel ganjil. Selain itu, telah banyak dilakukan penelitian untuk menunjukkan keberlakuan pelabelan ajaib maupun tak ajaib pada graf, seperti [8] Beni telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting. [6] Septian telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan satu anting. [4] Ayu telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan n anting untuk $n \geq 3$ dan n ganjil. [1] Rini (2014) telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total tak ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting. [5] Arif telah menunjukkan pelabelan total tak-ajaib titik $(a,\ d)$ pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_p + 2A_1)$ untuk $d = 3$ dan $d = 4$.

Berdasarkan hasil dari penelitianpenelitian sebelumnya, penulis ingin mengembangkan hasil penelitian yang berkaitan dengan pelabelan total tak ajaib titik. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai bentuk graf sikel dengan tambahan n anting $(C_n + nA_1)$, kemudian menentukan keberlakuan pelabelan total tak ajaib titik dan mencari pola $(a,\ d)$ *VATL* pada graf $C_n + nA_1$.

2. KAJIAN LITERATUR DAN PENGEMBANGAN HIPOTESIS

Pelabelan graf merupakan pemetaan dari unsur-unsur pada graf ke suatu bilangan. Terdapat beberapa macam pelabelan graf, yaitu pelabelan dengan domain himpunan titik yang dinamakan pelabelan titik, pelabelan yang domainnya sisi yang dinamakan pelabelan sisi dan pelabelan yang domainnya titik dan sisi yang dinamakan pelabelan total. Berikut ini akan dijelaskan beberapa definisi mengenai pelabelan total.

Definisi 1 [7]

Vertex magic total labeling adalah pemetaan bijektif λ dari $E \cup V$ ke bilangan bulat $\{1,2,\dots, |e| + |v|\}$ jika terdapat konstanta h sehingga untuk setiap titik x, $\lambda(x) + \sum \lambda(xy) = h$, dimana untuk semua titik y yang *adjecent* dengan x. Konstanta h disebut *magic constant* untuk λ. Selanjutnya, graf yang memenuhi *vertex magic total labeling* disebut *vertex magic total graph*.

Definisi 2 [2]

Suatu pemetaan bijektif $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots, |v| + |e|\}$ disebut *vertex antimagic total labeling* dari $G = G(V,\ E)$ jika bobot setiap titik $wt(x)$, $x \in V$ berbeda.

Definisi 3 [2]

Suatu pemetaan bijektif $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots, |v| + |e|\}$ disebut $(a,\ d)$ *vertex antimagic total labeling* dari G adalah jika himpunan bobot titik membentuk suatu barisan aritmatika naik $W = \{wt(x)|x \in V\} = \{a, a + d, \dots, a + (|v| - 1)d\}$ untuk a dan d bilangan bulat positif.

Definisi 4 [2]

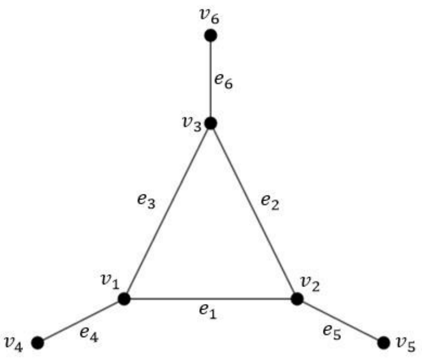
Suatu pelabelan total titik dikatakan kuat (super) jika label sisi-sisinya $\{1,\ 2,\dots, |e|\}$ dan label titiknya $\{|e| + 1, |e| + 2, \dots, |e| + |v|\}$ dengan $|e|$ banyaknya sisi dan $|v|$ banyaknya titik pada graf tersebut.

3. METODE PENELITIAN

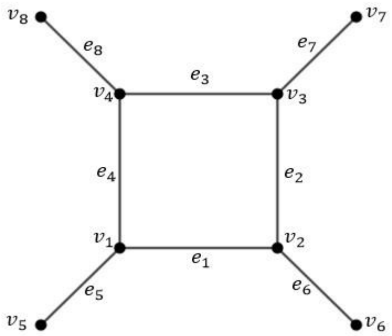
Penelitian ini merupakan penelitian kajian pustaka. Langkah-langkah penelitian dilakukan dengan (1) mengumpulkan berbagai literatur atau penelitian terkait pelabelan graf, (2) mempelajari literatur, (3) membangun pelabelan total baru yaitu pada graf $C_n + nA_1$, (4) menganalisa keberlakuan pelabelan pada graf tersebut dengan menggunakan perhitungan dasar, (5) mencari pola pelabelan, (6) menentukan rumusan pola pelabelan total tak-ajaib titik kuat pada graf $C_n + nA_1$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN Graf $C_n + nA_1$

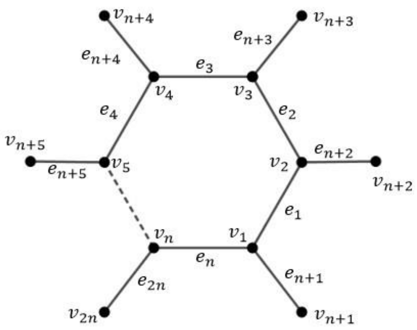
Pada graf sikel (C_n) dengan tambahan n anting $(C_n + nA_1)$, terdapat $2n$ buah titik dan $2n$ buah sisi, sehingga $|v| + |e| = 2n + 2n = 4n$, dengan $|v|$ yaitu banyaknya titik pada graf $C_n + nA_1$ dan $|e|$ yaitu banyaknya sisi pada $C_n + nA_1$. Berikut merupakan contoh dari beberapa graf sikel dengan tambahan n anting $(C_n + nA_1)$.



Gambar 1. Graf $C_3 + 3A_1$



Gambar 2. Graf $C_4 + 4A_1$



Gambar 3. Graf $C_n + nA_1$

Perhitungan Dasar Pelabelan Total Tak Ajaib Titik Kuat (a, d)

Pelabelan total tak ajaib titik merupakan pemetaan bijektif dari unsur-unsur pada graf (titik dan sisi), sehingga kita dapat menjumlahkan jumlah semua label titik dan jumlah label sisi dengan:

$$
\begin{aligned}
S_v + S_e &= 1 + 2 + \cdots + 4n \\
&= \binom{4n+1}{2} \\
&= \frac{(4n+1)4n}{2} \\
&= (4n+1)2n \qquad \ldots (1)
\end{aligned}
$$

Dimana S_v yaitu jumlah semua label titik dan S_e yaitu jumlah semua label sisi. Pada pelabelan total tak ajaib titik, bobot titiknya membentuk barisan aritmatika akibatnya:

$$
\begin{aligned}
S_w &= a + (a+d) + (a+2d) + \cdots \\
&\quad + (a + (2n-1)d) \\
&= 2na + (d + 2d + \cdots + (2n-1)d) \\
&= 2na + \big(1 + 2 + \cdots + (2n-1)\big)d \\
&= 2na + \binom{2n}{2} d \\
&= 2na + \frac{2n(2n-1)}{2} d \\
&= 2na + n(2n-1)d \qquad \ldots (2)
\end{aligned}
$$

Pada pelabelan total tak ajaib titik, bobot suatu titik dicari dengan menjumlahkan label titik tersebut dengan label sisi yang memiliki ujung di titik tersebut, sehingga label titik dihitung satu kali dan label sisi dihitung dua kali, dengan menggunakan persamaan (1) dan (2) didapatkan:

$$S_w = S_v + 2S_e$$

$$S_w = (S_v + S_e) + S_e$$

$$2na + n(2n-1)d = (4n+1)2n + S_e \ldots (3)$$

Berdasarkan definisi pelabelan kuat, labellabel untuk sisinya yaitu $\{1,2,\ldots\ ,2n\}$ dan label-label untuk titiknya yaitu $\{2n+1, 2n+2,\ \ldots\ ,4n\}$. Oleh karena itu, persamaan (3) menjadi:

$$2na + n(2n-1)d = (4n+1)2n + S_e$$

$$2na + n(2n-1)d = (4n+1)2n + \binom{2n+1}{2}$$

$$2na + n(2n-1)d = (4n+1)2n + \frac{(2n+1)2n}{2}$$

$$2na + n(2n-1)d = (4n+1)2n + (2n+1)n$$

$$2a + (2n-1)d = (4n+1)2 + (2n+1)$$

$$2a = (4n+1)2 + (2n+1) - (2n-1)d$$

$$2a = 8n + 2 + 2n + 1 - (2n-1)d$$

$$2a = 10n + 3 - (2n-1)d$$

$$a = \frac{10n + 3 - (2n-1)d}{2} \qquad \ldots(4)$$

Bobot titik pada pelabelan total titik dihitung dari bobot titik tersebut ditambah dengan bobot sisi yang bersisian dengan titik tersebut, sehingga untuk mencari bobot terkecil ambil titik dengan sisi yang bersisian paling sedikit. Pada graf $C_n + nA_1$ titik untuk menghitung bobot terkecil dipilih titik pada anting graf, karena hanya terdapat 1 titik dan 1 sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Pada pelabelan total tak ajaib titik kuat label pada sisi terdiri dari bilangan bulat positif dari 1 sampai total sisi maka untuk mencari batasan bobot titik terkecil kita ambil bilangan 1 untuk label sisi dan $2n + 1$ untuk label titik, sehingga:

$a \geq$ bobot titik terkecil

$a \geq 1 + 2n + 1$

$a \geq 2n + 2$

Berbeda dengan mencari bobot titik terkecil yang menggunakan titik dengan sisi yang bersisian paling sedikit, untuk mencari batasan bobot terbesar, dipilih titik dengan sisi yang bersisian paling banyak. Pada graf $C_n + nA_1$, titik untuk menghitung bobot terbesar dipilih titik pada sikel. Hal ini dikarenakan titik pada sikel memuat 3 sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Selain itu, untuk menentukan bobot yang terbesar, ambil label-label yang besar pula, akibatnya batasan bobot titik terbesar dapat dicari dengan:

$a + (2n-1)d \leq$ bobot titik terbesar

$a + (2n-1)d \leq 4n + 2n + (2n-1) + (2n-2)$

$a + (2n-1)d \leq 10n - 3$

Untuk $a = 2n + 2$

$a + (2n-1)d \leq 10n - 3$

$(2n+2) + (2n-1)d \leq 10n - 3$

$(2n-1)d \leq 10n - 3 - (2n+2)$

$(2n-1)d \leq 8n - 5$

$$d \leq \frac{8n-5}{2n-1} \approx 4$$

Jadi, $a \geq 2n + 2$ dan $d \leq 4$ untuk sebarang $n \geq 3$. Namun, untuk d genap pada persamaan (4), akan dihasilkan nilai a yang tidak bulat, sehingga tidak sesuai dengan definisi. Jadi, untuk sebarang $n \geq 3$ didapat
$a \geq 2n + 2$ dan $d \leq 4$ dengan d bilangan ganjil ($d = 1$ dan 3).

Selanjutnya akan dicari batasan nilai a dengan $d = 1$ dan 3 menggunakan batasan bobot titik terbesar,

Untuk $d = 1$, diperoleh:

$a + (2n-1)d \leq 10n - 3$

$a + (2n-1)1 \leq 10n - 3$

$a + 2n - 1 \leq 10n - 3$

$a \leq 10n - 2n - 3 + 1$

$a \leq 8n - 2$

Jadi, batasan untuk nilai a agar dapat dilakukan pelabelan yaitu $2n + 2 \leq a \leq 8n - 2$.

Untuk $d = 3$, diperoleh:

$a + (2n - 1)d \leq 10n - 3$

$a + (2n - 1)3 \leq 10n - 3$

$a + 6n - 3 \leq 10n - 3$

$a \leq 10n - 6n - 3 + 3$

$a \leq 4n$

Jadi, batasan untuk nilai a agar dapat dilakukan pelabelan yaitu $2n + 2 \leq a \leq 4n$.

Pada persamaan (4) telah ditunjukkan bahwa $a = \frac{10n+3-(2n-1)d}{2}$ dan berdasarkan hasil perhitungan a dan d sebelumnya, maka pelabelan total tak ajaib titik kuat pada graf $C_n + nA_1$ dapat dilakukan ketika $d = 1$ dan $d = 3$, maka akan dicari nilai a untuk $d = 1$ dan $d = 3$ dengan $n \geq 3$.
Untuk $d = 1$ dengan $n \geq 3$

$$a = \frac{10n + 3 - (2n - 1)d}{2}$$
$$a = \frac{10n + 3 - (2n - 1)1}{2}$$
$$a = \frac{10n + 3 - 2n + 1}{2}$$
$$a = \frac{8n + 4}{2}$$
$$a = 4n + 2$$

Jadi, pada graf sikel dengan n anting ($C_n + nA_1$) terdapat $(4n + 2,1)$ $SVATL$ untuk $n \leq 3$.

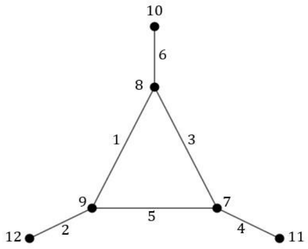
Untuk $d = 3$ dengan $n \geq 3$

$$a = \frac{10n + 3 - (2n - 1)d}{2}$$
$$a = \frac{10n + 3 - (2n - 1)3}{2}$$
$$a = \frac{10n + 3 - 6n + 3}{2}$$
$$a = \frac{4n + 6}{2}$$
$$a = 2n + 3$$

Jadi, pada graf sikel dengan n anting ($C_n + nA_1$) terdapat $(2n + 3,3)$ $SVATL$ untuk $n \geq 3$.

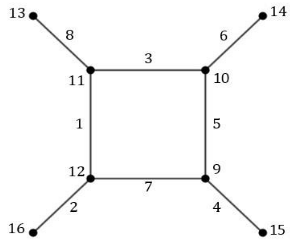
Pelabelan Total Tak-Ajaib Titik Kuat $(4n + 2, 1)$ pada Graf $C_n + nA_1$

Berikut ini akan diperlihatkan pelabelan total tak ajaib titik kuat pada beberapa graf $C_n + nA_1$.



Gambar 4. Pelabelan total tak ajaib titik kuat (14,1) pada $C_3 + 3A_1$

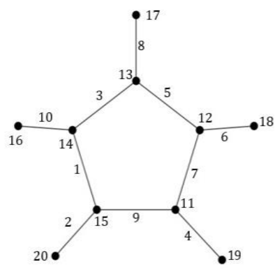
Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa label untuk sisinya $\{1, 2,3, 4, 5, 6\}$ dan label untuk titiknya $\{7,8, 9, 10,11, 12\}$. Bobot masing-masing titiknya $\{14, 15, 16, 17, 18, 19\}$ yaitu titik dengan label 12 adalah $12 + 2 = 14$, titik dengan label 11 adalah $11 + 4 = 15$, titik dengan label 10 adalah $10 + 6 = 16$, titik dengan label 9 adalah $9 + 1 + 2 + 5 = 17$, titik dengan label 8 adalah $8 + 1 + 3 + 6 = 18$, dan titik dengan label 7 adalah $7 + 3 + 4 + 5 = 19$.



Gambar 5. Pelabelan total tak ajaib titik kuat (18,1) pada $C_4 + 4A_1$

Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa label untuk sisinya $\{1, 2,3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dan label untuk titiknya $\{9,10, 11, 12,13, 14, 15, 16\}$. Bobot masing-masing titiknya $\{18,19, 20,21, 22,23, 24, 25\}$ yaitu titik dengan label 16 adalah $16 + 2 = 18$, titik dengan label 15 adalah $15 + 4 = 19$, titik dengan label 14 adalah $14 + 6 = 20$, titik dengan label 13 adalah $13 + 8 = 21$, titik dengan label 12 adalah $12 + 1 + 2 + 7 = 22$, titik dengan label 11 adalah $11 + 1 + 3 + 8 = 23$, titik dengan label 10 adalah $10 + 3 +$

$5 + 6 = 24$, dan titik dengan label 9 adalah $9 + 4 + 5 + 7 = 25$.



Gambar 6. Pelabelan total tak ajaib titik kuat $(22{,}1)$ pada $C_5 + 5A_1$

Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa label untuk sisinya $\{1,\ 2{,}3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8{,}9,\ 10\}$ dan label untuk titiknya $\{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20\}$. Bobot masing-masing titiknya $\{22,\ 23,\ 24{,}25,\ 26{,}27,\ 28,\ 29{,}30,\ 31\}$ yaitu titik dengan label 20 adalah $20 + 2 = 22$, titik dengan label 19 adalah $19 + 4 = 23$, titik dengan label 18 adalah $18 + 6 = 24$, titik dengan label 17 adalah $17 + 8 = 25$, titik dengan label 16 adalah $16 + 10 = 26$, titik dengan label 15 adalah $15 + 1 + 2 + 9 = 27$, titik dengan label 14 adalah $14 + 1 + 3 + 10 = 28$, titik dengan label 13 adalah $13 + 3 + 5 + 8 = 29$, titik dengan label 12 adalah $12 + 5 + 6 + 7 = 30$, dan titik dengan label 11 adalah $11 + 4 + 7 + 9 = 31$.

Berdasarkan pada pelabelan tersebut, dapat diperoleh bahwa pada graf $C_n + nA_1$ dapat dilakukan pelabelan total tak ajaib titik kuat $(4n + 2{,}1)$. Misalkan f merupakan fungsi pelabelan tersebut, maka konstruksi graf sikel dengan tambahan n anting $(4n + 2{,}1)$ dengan label sisi sebagai berikut:

Untuk $i = 1{,}2, \dots, n$:

$$f(e_i) = (2n - 1) - (i - 1)2$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$:

$$f(e_i) = 2(i - (n + 1)) + 2$$

Sedangkan label titiknya sebagai berikut:

Untuk $i = 1$

$$f(v_i) = 3n$$

Untuk $i = 2{,}3, \dots, n$:

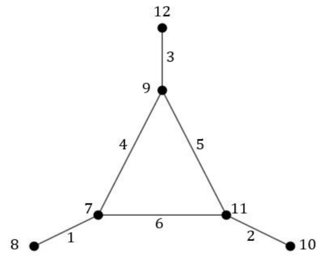
$$f(v_i) = 2n + (i - 1)$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$:

$$f(v_i) = 4n - (i - (n + 1))$$

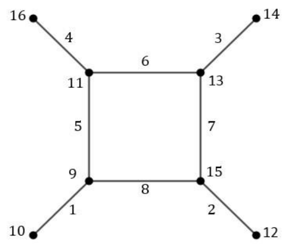
Pelabelan Total Tak-Ajaib Titik Kuat $(2n + 3, 3)$ pada Graf $C_n + nA_1$

Berikut ini akan diperlihatkan pelabelan total tak ajaib titik kuat pada beberapa graf $C_n + nA_1$.



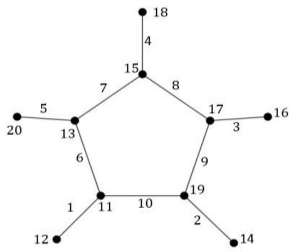
Gambar 7. Pelabelan total tak ajaib titik kuat $(9{,}3)$ pada $C_3 + 3A_1$

Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa label untuk sisinya $\{1,\ 2{,}3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ dan label untuk titiknya $\{7,\ 8,\ 9,\ 10{,}11,\ 12\}$. Bobot masing-masing titiknya $\{9{,}12,\ 15,\ 18{,}21,\ 24\}$ yaitu titik dengan label 8 adalah $8 + 1 = 9$, titik dengan label 10 adalah $10 + 2 = 12$, titik dengan label 12 adalah $12 + 3 = 15$, titik dengan label 7 adalah $7 + 1 + 4 + 6 = 18$, titik dengan label 9 adalah $9 + 3 + 4 + 5 = 21$, dan titik dengan label 11 adalah $11 + 2 + 5 + 6 = 24$.



Gambar 8 Pelabelan total tak ajaib titik kuat $(11{,}3)$ pada $C_4 + 4A_1$

Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa label untuk sisinya $\{1,\ 2{,}3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ dan label untuk titiknya $\{9{,}10,\ 11,\ 12{,}13,\ 14,\ 15,\ 16\}$. Bobot masing-masing titiknya $\{11{,}14,\ 17{,}20,\ 23{,}26,\ 29,\ 32\}$ yaitu titik dengan label 10 adalah $10 + 1 = 11$, titik dengan label 12 adalah $12 + 2 = 14$, titik dengan label 14 adalah $14 + 3 = 17$, titik dengan label 16 adalah $16 + 4 = 20$, titik dengan label 9 adalah $9 + 1 + 5 + 8 = 23$, titik dengan label 11 adalah $11 + 4 + 5 + 6 = 26$, titik dengan label 13 adalah $13 + 3 + 6 + 7 = 29$, dan titik dengan label 15 adalah $15 + 2 + 7 + 8 = 32$.



Gambar 9. Pelabelan total tak ajaib titik kuat (13,3) pada $C_5 + 5A_1$

Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa label untuk sisinya $\{1, 2,3, 4, 5, 6, 7, 8,9, 10\}$ dan label untuk titiknya $\{11,12, 13,14, 15,16, 17, 18, 19, 20\}$. Bobot masing-masing titiknya $\{13,16, 19,22, 25,28, 31, 34,37, 40\}$ yaitu titik dengan label 12 adalah $12 + 1 = 13$, titik dengan label 14 adalah $14 + 2 = 16$, titik dengan label 16 adalah $16 + 3 = 19$, titik dengan label 18 adalah $18 + 4 = 22$, titik dengan label 20 adalah $20 + 5 = 25$, titik dengan label 11 adalah $11 + 1 + 6 + 10 = 28$, titik dengan label 13 adalah $13 + 5 + 6 + 7 = 31$, titik dengan label 15 adalah $15 + 4 + 7 + 8 = 34$, titik dengan label 17 adalah $17 + 3 + 8 + 9 = 37$, dan titik dengan label 19 adalah $19 + 2 + 9 + 10 = 40$.

Berdasarkan pada pelabelan tersebut, dapat diperoleh bahwa pada graf $C_n + nA_1$ dapat dilakukan pelabelan total tak ajaib titik kuat $(2n + 3,3)$. Misalkan f merupakan fungsi pelabelan tersebut, maka konstruksi graf sikel dengan tambahan n anting $(2n + 3,3)$ dengan label sisi sebagai berikut:

Untuk $i = 1,2, \dots, n$:

$$f(e_i) = 2n - (i - 1)$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$:

$$f(e_i) = i - n$$

Sedangkan label titiknya sebagai berikut:

Untuk $i = 1$:

$$f(v_i) = 2n + 1$$

Untuk $i = 2,3, \dots, n$:

$$f(v_i) = (4n - 1) - (i - 2)2$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$:

$$f(v_i) = 2i$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf sikel (C_n) dengan tambahan n anting $(C_n + nA_1)$ mempunyai pelabelan total tak-ajaib titik kuat (a, d), untuk nilai $d = 1$ dengan $a = 4n + 2$ dan $d = 3$ dengan $a = 2n + 3$.

Konstruksi graf sikel dengan tambahan n anting $(4n + 2,1)$ dengan label sisi sebagai berikut:

Untuk $i = 1,2, \dots, n$:

$$f(e_i) = (2n - 1) - (i - 1)2$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$:

$$f(e_i) = 2(i - (n + 1)) + 2$$

Sedangkan label titiknya sebagai berikut:

Untuk $i = 1$

$$f(v_i) = 3n$$

Untuk $i = 2,3, \dots, n$:

$$f(v_i) = 2n + (i - 1)$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$:

$$f(v_i) = 4n - (i - (n + 1))$$

konstruksi graf sikel dengan tambahan n anting $(2n + 3,3)$ dengan label sisi sebagai berikut:

Untuk $i = 1,2, \dots, n$:

$$f(e_i) = 2n - (i - 1)$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$:

$$f(e_i) = i - n$$

Sedangkan label titiknya sebagai berikut:

Untuk $i = 1$:

$$f(v_i) = 2n + 1$$

Untuk $i = 2,3, \dots, n$:

$$f(v_i) = (4n - 1) - (i - 2)2$$

Untuk $i = n + 1, n + 2, \ldots, 2n$:

$$f(v_i) = 2i$$

Pembaca yang tertarik dapat melanjutkan dengan mencari keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi pada graf $C_n + nA_1$ atau pelebelan tak-ajaib titik pada graf lainnya yang belum diketahui keberlakuan pelabelannya.

6. REFERENSI

[1] Andriyani, Rini. 2014. *Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting*.

[2] Baca, M., dkk. 2003. *Vertex-Antimagic Total Labelings of Graphs*. Discussiones Mathematicae. Graph Theory 23 P. 67-83.

[3] Kotzig, Anton & Alexander Rosa. 1970. *Magic Valuations of Finite Graphs*. Canad. Math. Bull. Vol. 13 (4) P. 451461.

[4] Kristianna, Ayu. 2013. *Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan n Anting untuk $n \geq 3$ dan n Ganjil*. Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

[5] Prasetyo, D. A. B.. 2018. *Pelabelan Total Tak-Ajaib Titik (a, d) pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting $(C_p + 2A_1)$ untuk $d = 3$ dan $d = 4$*. Prosiding Sendika. Vol. 4 No. 1 P. 190195.

[6] Septian, C. W.. 2012. *Pelabelan Total Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Satu Anting*. Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

[7] Wallis, W.D.. 2001. *Magic Graph*. Boston: Birkhauser

[8] Yuliyanto, B. D.. 2012. *Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting*. Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.