ISBN. 978-602-449-325-7

SNPMPU

UNESA

Program Studi
S3 Pendidikan Matematika
Pascasarjana

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA
PASCASARJANA UNESA

PEMBELAJARAN MATEMATIKA MENGHADAPI ERA REVOLUSI INDUSTRI 4.0

2018

PROSIDING:
Seminar Nasional "Pembelajaran Matematika Menghadapi Revolusi Industri 4.0"

Penangungjawab	: Prof. Dr. Siti M. Amin, M.Pd
Ketua Panitia	: Erik Valentino, S.Pd., M.Pd
Wakil Ketua	: Sulaiman, M.Pd
Reviewer	: Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
	Prof. Dr. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si
	Prof. Dr. Cholis Sa'dijah, M.Pd., M.A
	Dr. Agung Lukito, M.S.
	Rooselyna Ekawati, S.Si., M.Sc., Ph.D
	Dr. Rahmah Johar, M.Pd
Editor	: Endang Suprapti, S.Pd., M.Pd.
	Via Yustitia,S.Pd., M.Pd.
	Sri Hartatik, S.Si., M.Pd.
	Sulaeman, S.Pd., M.Pd
Design Sampul	: Asep Sahrudin, S.Pd., M.Pd.
Layout	: Henry Putra Imam Wijaya, S.Si., M.Pd
Diterbitkan Oleh	: Unesa University Press
	Universitas Negeri Surabaya
ISBN	: **978-602-449-325-7**

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga prosiding ini dapat tersusun dengan baik. Prosiding ini berisi kumpulan makalah di bidang matematika dan didiskusikan dalam seminar nasional. Seminar nasional ini diselenggarakan oleh S3 Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya pada Hari Sabtu, 8 Desember 2018. Seminar ini mengangkat tema "Pembelajaran Matematika di Era Revolusi Industri 4.0" .

Prosiding ini disusun untuk mendokumentasikan gagasan dan hasil penelitian di bidang pendidikan Matematika. Selain itu, diharapkan prosiding ini dapat memberikan wawasan tentang penemuan-penemuan baru yang berkembang di dunia pendidikan khususnya bagi seluruh profesi yang sifatnya mendidik demi terwujudnya pendidikan berkemajuan.

Kami menyadari prosiding ini dapat terwujud berkat kerjasama partisipasi dan bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang membantu terselenggarakannya Seminar Nasional ini.

Surabaya, 29 Maret 2019
Ketua Panitia

SNPMPU

Erik Valentino, M.Pd

DAFTAR ISI

PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB TITIK KUAT
PADA GRAF SIKEL GENAP DENGAN TAMBAHAN SATU ANTING

Dominikus Arif Budi Prasetyo
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma
email: dominic_abp@usd.ac.id

Abstract

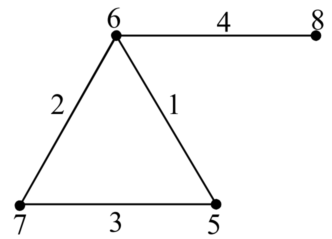
Even-cycle graph is a cycle with even number of vertices. The even-cycle graph with one extra arm is an even-cycle graph with an additional one vertex that connected to one vertex of the graph, symbolized by $(C_n + A_1)$ with $n \geq 4$ and even. Super vertex anti-magic total labeling (SVATL) is one-to-one function from integer $\{1,2,3,\cdots,|v|+|e|\}$ to vertices and edges of the graph with vertex label is $\{1,2,3,\cdots,|v|\}$ and weight of vertices are forming arithmetic sequence. Vertex anti-magic total labeling (VATL) can be done on the $(C_n + A_1)$ with $n \geq 3$ and odd (Septian, 2012). This paper discusses SVATL on $(C_n + A_1)$ with $n \geq 4$ and even. The results of this study show that SVATL can be done on the $(C_n + A_1)$with $n \geq 4$ and even. The weight of vertices are forming arithmetic sequence $(a, a+d, a+2d, \cdots, a+nd)$ with $a \geq n+3$ and $d \leq 5$. Furthermore for pairs of (a,d), -the first term a and the difference d in the sequence-, are $(2n+5,3)$, $\left(\frac{3n+10}{2},4\right)$ and $(n+5,5)$.

Keywords: *even-cycle graph, one extra arm, super vertex anti-magic total labeling.*

1. PENDAHULUAN

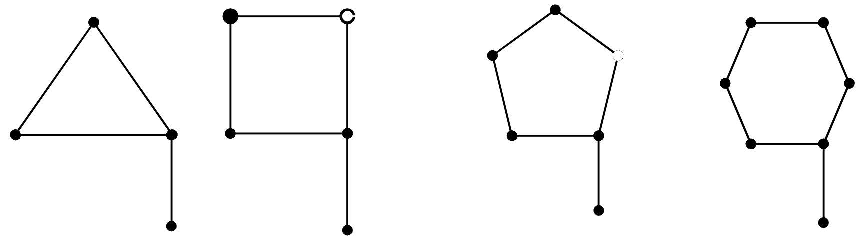
Pada tahun 1970, Kotzig dan Rosa telah mengenalkan pelabelan graf. Pelabelan graf tersebut didefinisikan sebagai suatu pemetaan satu-satu dari unsur-unsur dari graf ke bilangan bulat positif. Unsur dari graf yang diberi label adalah titik saja atau sisi saja atau titik dan sisi secara bersama-sama. Bilangan bulat positif yang digunakan untuk memberi label unsur graf tersebut berupa bilangan asli mulai dari 1 sampai dengan bilangan yang menyatakan banyaknya unsur-unsur graf yang diberi label. Setelah unsur graf tersebut diberi label, selanjutnya unsur tersebut dievaluasi dengan menjumlahkan unsur-unsur yang terkait.

Pelabelan pada graf ini diberi nama sesuai dengan unsur mana yang diberi label dan dievaluasi serta hasil evaluasinya. Pelabelan total tak-ajaib titik adalah pelabelan yang memberikan label pada semua unsur graf dengan mengevaluasi unsur titik sehingga menghasilkan bobot titik yang membentuk barisan aritmetika. (Wallis, 2001). Selanjutnya pelabelan total tak-ajaib titik didefinisikan sebagai suatu fungsi bijektif yang memetakan setiap unsur graf ke bilangan bulat positif sehingga diperoleh bobot dari unsur yang dievaluasi membentuk barisan aritmetika. (Baca, dkk., 2003).



Gambar 1.1 Pelabelan Total Tak Ajaib Titik (10,1) pada $(C_3 + A_1)$

Tahun 2012, Septian telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) dapat dilakukan pada graf sikel dengan tambahan satu anting $(C_n + A_1)$dimana $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,n+2\}$ untuk d = 1 dan d = 2. Sikel digunakan oleh Septian (2012) adalah graf sikel ganjil yakni graf sikel dengan banyaknya titik ganjil. Gambar 1.1 merupakan contoh pelabelan total tak-ajaib titik (10,1) pada $(C_3 + A_1)$ yang telah dibuktikan. Selanjutnya pelabelan total tak-ajaib titik dikatakan kuat jika label-label dari titiknya berupa bilangan 1 sampai dengan bilangan yang menunjukkan banyaknya titik dari graf tersebut. (Wallis, 2001)



Gambar 1.2. Graf sikel dengan tambahan satu anting untuk n = 3, 4, 5, dan 6.

Pada artikel ini, penulis akan melengkapi kajian pelabelan graf yang telah dilakukan Septian (2012). Penulis akan mengkaji keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik kuat pada graf sikel genap dengan tambahan satu anting. Gambar 1.2 merupakan ilustrasi dari graf sikel dengan tambahan satu anting. (Septian, 2012).

2. KAJIAN LITERATUR

Berikut ini beberapa definisi teorema mengenai pelabelan graf dan hasil penelitian sebelumnya yang digunakan untuk dasar kajian pada artikel ini.

Definisi 1 (Baca, dkk., 2003)
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\cdots,|V|+|E|\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib titik dari graf G (|V|, |E|) jika bobot dari titik $w_f(u) = f(u) + \sum f(uv)$, untuk setiap $u \in V(G)$ dan semua $v \in V(G)$ yang terhubung dengan u.

Definisi 2 (Baca, dkk., 2003)
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\cdots,|V|+|E|\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) dari graf G(|V|, |E|) jika bobot dari titik-titiknya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama a dan beda $d. W = \{w_f(u) \mid u \in V\} = \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(|V|-1)d\}$.

Definisi 3 (Wallis, 2001)
Pelabelan total dikatakan kuat jika label-label dari semua titiknya berupa bilangan dari himpunan $\{1,2,\cdots,n+1\}$.

Teorema 4 (Septian, 2012)
Pada graf sikel dengan tambahan satu anting $(C_n + A_1)$ berlaku pelabelan total tak-ajaib titik $(2n+4,1)$ dengan $n \geq 3$ dan ganjil untuk label-label sisinya $\{1,2,\cdots,n+1\}$.

Teorema 5 (Septian, 2012)
Pada graf sikel dengan tambahan satu anting $(C_n + A_1)$ berlaku pelabelan total tak-ajaib titik $(n+4,3)$ dengan $n \geq 3$ dan ganjil untuk label-label sisinya $\{1,2,\cdots,n+1\}$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan Definisi 1, jumlah bobot semua titik dari suatu graf yang dikenai pelabelan total tak-ajaib titik adalah $S_v + 2S_e$. Label setiap sisi dihitung sebanyak dua kali dan label setiap sisi dihitung satu kali. S_v adalah jumlah label semua titik dari graf yang dikenai pelabelan dan S_e adalah jumlah label semua sisi dari graf yang dikenai pelabelan. Pada graf $(C_n + A_1)$, banyaknya titik dan sisi masing-masing sebanyak *n* + 1. Sehingga diperoleh bahwa jumlahan bobot semua titik dari graf $(C_n + A_1)$ adalah

$$a + (a+d) + \cdots + (a+nd) = S_v + 2S_e$$

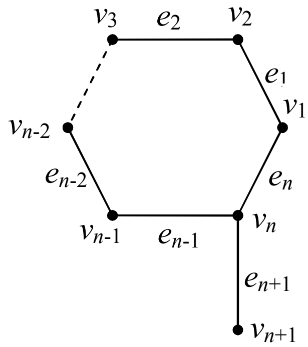
$$(n+1)a + \frac{n(n+1)d}{2} = S_v + 2S_e \tag{3.1}$$

Dari Definisi 3, pelabelan kuat pada graf $(C_n + A_1)$ memberikan label pada titik berupa bilangan dari himpunan $\{1,2,\cdots,n+1\}$. Akibatnya, label-label dari sisinya berupa bilangan dari himpunan $\{n+2, n+3, \cdots, 2n+2\}$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} S_e &= (n+2)+(n+3)+\cdots+(2n+2) \\ &= \frac{(n+1)(3n+4)}{2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

dan

$$\begin{aligned} S_v &= 1+2+\cdots+(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned} . \tag{3.3}$$



Gambar 3.1 Ilustrasi Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Kuat pada $(C_n + A_1)$

Pelabelan total tak-ajaib titik, bobot titik-titiknya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku awal *a* dan beda *d*, dituliskan sebagai himpunan $\{a, (a+d), \cdots, (a+nd)\}$.

Batasan nilai *a*.

Karena pada $(C_n + A_1)$ dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat, maka dapat ditentukan batasan bobot terkecil dari titik pada $(C_n + A_1)$ yang merupakan nilai terkecil suku awal dari barisan aritmetika yang terbentuk. Label terkecil dari suatu titik adalah 1 dan label terkecil dari sisi yang terhubung pada titik tersebut adalah *n*+1. Titik dan sisi ini merupakan anting dari sikel tersebut. sehingga diperoleh nilai terkecil untuk suku awalnya adalah:

$$a \ge 1 + (n+2) = n+3 . \tag{3.4}$$

Di lain pihak, kita juga dapat menentukan nilai terbesar dari bobot titik pada graf $(C_n + A_1)$ yang mungkin terletak pada titik yang mempunyai anting. Titik ini mempunyai 3 sisi yang terhubung. Label terbesar dari titik tersebut adalah *n*+1 dan label terbesar dari sisi-sisi yang terhubung dengan titik tersebut adalah $2n$, $2n+1$ dan $2n+2$. Sehingga dapat diperoleh bobot dari titik tersebut yang akan menjadi suku terbesar dari barisan aritmetika bobot titik-titiknya adalah

$$a + nd \le (n+1) + 2n + (2n+1) + (2n+2) = 7n + 4 . \qquad (3.5)$$

Selain itu, perlu juga ditentukan dimana letak titik dengan bobot terkecil. Jika ditinjau dari kemungkinan jumlah label titik dan label sisi-sisi yang terhubung dengan titik tersebut, maka bobot terkecil titik akan terletak pada titik antingnya. Berdasarkan Gambar 3.1 maka titik tersebut adalah titik v_{n+1}. Jika titik v_{n+1} dan sisi e_{n+1} diberi label terkecil dari masing-masing himpunan label titik dan sisi, maka diperoleh nilai a terkecil pada persamaan (3.4). Namun, jika titik v_{n+1} dan sisi e_{n+1} diberi label terbesar dari masing-masing himpunan label titik dan sisi yakni ($n+1$) dan ($2n+2$), maka diperoleh nilai terbesar dari a adalah :

$$a \le (n+1) + (2n+2) = 3n + 3 . \qquad (3.6)$$

Batasan nilai *d*.

Setelah mendapatkan batasan nilai a, selanjutnya akan ditentukan batasan untuk nilai d yang mungkin dapat berlaku pada pelabelan graf ini. Dari persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3) diperoleh hubungan antara nilai a dan nilai d.

$$\begin{aligned}(n+1)a + \frac{n(n+1)d}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2\frac{(n+1)(3n+4)}{2} \\ 2a + nd &= (n+2) + 2(3n+4) \qquad (3.7) \\ a &= \frac{7n + 10 - nd}{2}\end{aligned}$$

Dengan menggabungkan hasil persamaan (3.4) dan (3.7) dapat diperoleh batasan nilai d yang mungkin memenuhi pelabelan ini, yakni:

$$\begin{aligned}\frac{7n + 10 - nd}{2} &= a \ge n + 3 \\ nd &\le 5n + 4 \qquad (3.8) \\ d &\le 5\end{aligned}$$

Septian (2012) telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik pada graf sikel ganjil dengan tambahan satu anting $(C_n + A_1)$. Sekarang akan ditentukan berapa saja nilai d yang memungkinkan untuk dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat untuk graf $(C_n + A_1)$ dengan $n \ge 3$ dan genap serta nilai a yang memenuhi.

a. Pelabelan total tak-ajaib titik kuat pada $(C_n + A_1)$ dengan nilai $d = 1$.

Dari persamaan (3.7) dan mengambil nilai $d = 1$ diperoleh bahwa bobot terkecil titik pada $(C_n + A_1)$ adalah

$$\begin{aligned}a &= \frac{7n + 10 - nd}{2} \\ &= \frac{7n + 10 - n}{2} \qquad (3.9) \\ &= 3n + 5\end{aligned}$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat minimal nilai a persamaan (3.4), namun bertentangan dengan hasil pada persamaan (3.6), sehingga pada graf $(C_n + A_1)$ dengan $n \ge 3$ dan genap tidak dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $(3n+5,1)$.

b. Pelabelan total tak-ajaib titik kuat pada $(C_n + A_1)$ dengan nilai *d* = 2.

Dari persamaan (3.7) dan mengambil nilai d = 2 diperoleh bahwa bobot terkecil titik pada $(C_n + A_1)$ adalah

$$\begin{aligned} a &= \frac{7n+10-nd}{2} \\ &= \frac{7n+10-2n}{2} \\ &= \frac{5n+10}{2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat minimal nilai a persamaan (3.4) dan n genap, maka nilai a bulat positif selalu ada dan graf $(C_n + A_1)$ dengan $n \geq 3$ dan genap dimungkinkan dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $\left(\frac{5n+10}{2},2\right)$.

Sebagai contoh, ambil n = 4. Pada graf $(C_4 + A_1)$, pelabelan total tak-ajaib titik kuat $\left(\frac{5n+10}{2},2\right)$ akan menghasilkan nilai a = 15. Label-label untuk titiknya adalah $\{1,2,3,4,5\}$ dan label-label sisinya adalah $\{6,7,8,9,10\}$. Namun, label-label tersebut tidak dapat dilakukan pada graf $(C_4 + A_1)$. Hal yang menjadi kontradiksi adalah label titik anting harus diberi bilangan terbesar (yakni 5) dan label sisi antingnya juga terbesar (yakni 10) agar bobot titik anting ini harus terkecil (yakni a = 15) maka pelabelan tidak dapat dilanjutkan. Sejauh ini, pelabelan total tak-ajaib titik kuat $\left(\frac{5n+10}{2},2\right)$ pada graf $(C_4 + A_1)$ tidak dapat ditemukan.

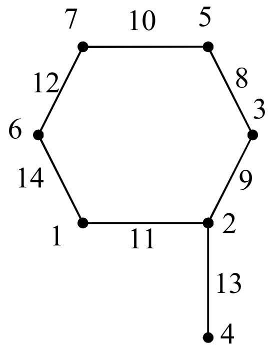
c. Pelabelan total tak-ajaib titik dengan nilai *d* = 3.

Dari persamaan (3.7) dan mengambil nilai d = 3 diperoleh bahwa bobot terkecil titik pada $(C_n + A_1)$ adalah

$$\begin{aligned} a &= \frac{7n+10-nd}{2} \\ &= \frac{7n+10-3n}{2} \\ &= 2n+5 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat minimal nilai a persamaan (3.4) dan n genap, maka nilai a bulat positif selalu ada dan graf $(C_n + A_1)$ dengan $n \geq 3$ dan genap dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $(2n+5,3)$.

Gambar 3.2 berikut ini merupakan contoh pelabelan total tak-ajaib titik kuat pada graf $(C_n + A_1)$ dengan $n \geq 3$ dan genap. Untuk n = 6, maka label-label titiknya $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan label-label sisinya $\{8,9,10,11,12,13,14\}$. Bobot titik dengan label 1 adalah 26 (1+11+14), bobot titik dengan label 2 adalah 35 (2+9+11+13), bobot titik dengan label 3 adalah 20 (3+8+9), bobot titik dengan label 4 adalah 17 (4+13), bobot titik dengan label 5 adalah 23 (5+8+10), bobot titik dengan label 6 adalah 32 (6+12+14) dan bobot titik dengan label 7 adalah 29 (7+10+12). Jadi bobot-bobot titiknya membentuk barisan $\{17,20,23,26,29,32,35\}$.



Gambar 3.2. Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Kuat (17, 3) pada $(C_6 + A_1)$

d. Pelabelan total tak-ajaib titik dengan nilai $d = 4$.

Dari persamaan (3.7) dan mengambil nilai d = 4 diperoleh bahwa bobot terkecil titik pada $(C_n + A_1)$ adalah

$$\begin{aligned} a &= \frac{7n + 10 - nd}{2} \\ &= \frac{7n + 10 - 4n}{2} \\ &= \frac{3n + 10}{2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat minimal nilai a persamaan (3.4) dan n genap, maka nilai a bulat positif selalu ada dan graf $(C_n + A_1)$ dengan $n \geq 3$ dan genap dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $\left(\frac{3n+10}{2}, 4\right)$.

e. Pelabelan total tak-ajaib titik dengan nilai $d = 5$.

Dari persamaan (3.7) dan mengambil nilai d = 5 diperoleh bahwa bobot terkecil titik pada $(C_n + A_1)$ adalah

$$\begin{aligned} a &= \frac{7n + 10 - nd}{2} \\ &= \frac{7n + 10 - 5n}{2} \\ &= n + 5 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat minimal nilai a persamaan (3.4) dan n genap, maka nilai a bulat positif selalu ada dan graf $(C_n + A_1)$ dengan $n \geq 3$ dan genap dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $(n + 5, 5)$.

4. KESIMPULAN

Hasil dari kajian ini adalah pada graf sikel genap dengan tambahan satu anting $(C_n + A_1)$ dengan $n \geq 3$ dan genap dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat (a, d). Pasangan nilai a dan d yang memungkinkan adanya pelabelan pada graf ini adalah $(2n + 5, 3)$, $\left(\frac{3n+10}{2}, 4\right)$ dan

$(n+5,5)$. Sedangkan untuk $(3n+5,1)$ dan $\left(\frac{5n+10}{2},2\right)$ pelabelan total tak-ajaib titik kuat pada $(C_n + A_1)$ tidak dapat dilakukan.

Pembaca yang tertarik meneliti lebih lanjut mengenai keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik kuat (a, d) pada graf sikel genap dengan tambahan satu anting $(C_n + A_1)$ dengan $n \geq 3$ dan genap ini dapat mencari rumus umum pelabelannya.

5. REFERENSI

Baca, M., dkk. (2003) *Vertex Antimagic Total Labeling of Graph*. Discuss Math. Graph Theory.

Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). *Magic Valuations of Finite Graphs*. Canad. Math. Bull.

Septian, C. W. (2012). *Vertex Antimagic Total Labeling on Cycle Graph with One Extra Arm.* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Wallis, W. (2001). *Magic Graph.* Birkhauser.