ISBN :
978-979-16353-6-3

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Matematika dan Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran"

Penyelenggara :

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

HIMPUNAN MATEMATIKA INDONESIA 1976

Yogyakarta, 3 Desember 2011

ISBN 978-979-16353-6-3
9 789791 635363

PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

3 Desember 2011 FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Artikel-artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan pada
Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
pada tanggal ***3 Desember 2011***
di Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Tim Penyunting Artikel Seminar :

1. **Prof. Dr. Rusgianto**
2. **Dr. Hartono**
3. **Dr. Jailani**
4. **Dr. Djamilah BW**
5. **Dr. Ali Mahmudi**
6. **Dr. Sugiman**
7. **Dr. Agus Maman Abadi**
8. **Dr. Dhoriva UW**
9. **Sahid, M.Sc**

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2011

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA 2011

Matematika dan Pedidikan Karakter dalam Pembelajaran
3 Desember 2011

Diselenggarakan oleh:
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Diterbitkan oleh
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Kampus Karangmalang, Sleman, Yogyakarta

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
UNY, 2011

Cetakan ke – 1
Terbitan Tahun 2011
Katalog dalam Terbitan (KDT)
Seminar Nasional (2011 Desember 3: Yogyakarta)
Prosiding/ Penyunting: Hartono [et.al] – Yogyakarta: FMIPA
Editor : Nur Hadi W [et.al] – Yogyakarta: FMIPA
Universitas Negeri Yogyakarta, 2010

ISBN 978-979-16353-6-3
9 789791 635363

Penyuntingan semua tulisan dalam prosiding ini dilakukan oleh Tim Penyunting Seminar Nasional MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA 2011 dari Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

KATA PENGANTAR

Puji Syukur ke Hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala Karunia dan Rahmat-Nya sehingga prosiding ini dapat diselesaikan. Prosiding ini merupakan kumpulan makalah dari peneliti, pemerhati dan dosen bidang Matematika dan Pendidikan Matematika berbagai daerah di Indonesia. Makalah yang dipresentasikan meliputi makalah utama dan makalah pendamping, terdiri dari makalah bidang Matematika (Statistika, Geometri, Aljabar, Analisis, Matematika Terapan, Komputer) dan Pendidikan Matematika.

Seminar Nasional ini diikuti tidak kurang dari 115 pemakalah yang berasal dari institusi pendidikan tinggi, sekolah menengah, dan lembaga lain. Beberapa institusi asal pemakalah antara lain UPI Bandung, UPI Kampus Tasikmalaya, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa Banten, Universitas Siliwangi Tasikmalaya, Universitas Negeri Yogyakarta, Universitas Gadjah Mada, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta, Universitas Negeri Semarang, Institut Teknologi Surabaya, Universitas Katolik Widya Mandala Madiun, Universita Widya Dharma Klaten, SDSN Batursari 6, SMP 1 Banguntapan Bantul, SMP N 1 Paliyan Gunungkidul, MTs N SEYEGAN, SMP Islam Terpadu Alam Nurul Islam Yogyakarta, SMPN 3 Cimahi, Univ. Dian Nusantara Medan, Universitas Mataram, FMIPA UM, Universitas Pancasakti Tegal, Universitas Airlangga, Universitas PGRI Banyuwangi, Institut Pertanian Bogor, UNS, Sekolah Tinggi Teknologi Bontang, Universitas Muhammadiyah Surabaya, ITB, Universitas Kristen Satya Wacana Salatiga, Universitas Nusa Cendana, Universitas Cenderawasih Jayapura, Pusat Teknologi Material, Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT), Universitas Bina Nusantara, Universitas Jenderal Soedirman, Universitas Pattimura Ambon, Universitas Negeri Surabaya, STKIP Siliwangi Bandung, IKIP PGRI Madiun, STKIP PGRI SIDOARJO, Universitas Tama Jagakarsa, UHAMKA Jakarta, SMK N 2 Wonosari, Univ PGRI Yogyakarta, STKIP PGRI PACITAN , Universitas Muhammadiyah Purworejo, Universitas Sriwijaya dan Universitas Mataram NTB.

Sesuai dengan tema seminar, semua makalah menyajikan berbagai ragam kajian teoritis maupun hasil penelitian matematika dan pembelajaran matematika yang diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pembentukan karakter bangsa. Makalah yang dimuat dalam prosiding ini telah melalui tahap seleksi abstrak, yakni melalui proses review oleh tim yang nama anggotanya tercantum pada halaman lain di prosiding ini. Makalah dalam prosiding ini juga dipresentasikan dalam sidang paralel dalam seminar tanggal 3 Desember 2011

Pada kesempatan ini panitia mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penyelenggaraan seminar ini. Khususnya, kepada seluruh peserta seminar diucapkan terima kasih atas partisipasinya dan selamat berseminar, semoga bermanfaat. Semoga prosiding seminar ini dapat menjadi catatan historis bermacam pemikiran intelektual di negeri ini yang bermanfaat sesuai dengan tema seminar, yaitu memberikan kontribusi dalam pembentukan karakter bangsa. Aamiin

Yogyakarta, 3 Desember 2011

Panitia

DAFTAR ISI

			Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma		
12	A - 12	Muhamad Zaki Riyanto	Pendidikan Matematika, JPMIPA, FKIP, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta	Suatu Algoritma Kriptografi Simetris Berdasarkan Jaringan Substitusi-Permutasi Dan Fungsi Affine Atas Ring Komutatif Zn	MA - 114
13	A - 13	Munadi, M. Si	Universitas Pancasakti Tegal	Aplikasi Binomium Newton Pada Pemangkatan Bilangan Bulat Dua Digit	MA - 126
14	A - 14	Musthofa	UNY	Homomorfisma Pada Semimodule Atas Aljabar Max-Plus	MA - 130
15	A - 15	Pandri Ferdias, Wamiliana	Mahasiswa S2 Universitas Gadjah Mada, Universitas PGRI Yogyakarta	Representasi Matriks Graf Cut-Set Dan Sirkuit	MA - 138
16	A - 16	Puguh Wahyu Prasetyo, Ari Suparwanto	S2 Matematika Universitas Gadjah Mada	Modul Faktor Dari Modul Âš•-Supplemented	MA - 148
17	A - 17	Suzyanna	Universitas Airlangga Fakultas Sains Dan Teknologi Departemen Matematika	Bilangan Fibonacci Dan Lucas Dengan Subskrip Riil	MA - 159
18	A - 18	Yuliyanti Dian Pratiwi, Miftah Sigit Rahmawati ,Nana Fitria , Sri Wahyuni	Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM	Rank Matriks Atas Ring	MA - 166
19	A – 19	Soffi Widyanesti P. [1] Sri Wahyuni[2]	Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Ahmad Dahlan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta	Semigrup Legal Dan Beberapa Sifatnya	MA - 178
Makalah Pendidikan Matematika (MP)					
No	**Kode**	**Nama**	**Instansi**	**Judul**	Hal
1	P - 1	Abdul Aziz Saefudin	Universitas PGRI Yogyakarta	Proses Berpikir Kreatif Siswa Sekolah Dasar (Sd) Berkemampuan Matematika Tinggi Dalam Pemecahan Masalah Matematika Terbuka	MP - 1
2	P - 2	Agata Susilo Ernawati, Andy Rudhito, Sriyanto	Universitas Sanata Dharma	Alur Substansi Materi Pelajaran Dalam Pembelajaran Matematika Topik Kaidah Pencacahan Dengan Menggunakan Buku Ajar Di Kelas XI IPA SMA Kolese De Britto	MP - 10
3	P - 3	Ali Mahmudi	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA	Model Struktur Problem Posing	MP - 20

			UNY		
4	P - 4	Andrias Eka Fajar Darmawan, Andi Rudhito, Sriyanto	Universitas Sanata Dharma	Interaksi Guru Dan Buku Ajar Dalam Pembelajaran Matematika Topik Kaidah Pencacahan Dengan Menggunakan Buku Ajar Di Kelas XI IPA SMA Kolese De Britto	MP - 30
5	P - 5	Asep Ikin Sugandi	STKIP Siliwangi Bandung	Pengaruh Model Pembelajaran Think Talk Write Terhadap Komunikasi Dan Penalaran Matematis Pada Siswa Smp	MP - 41
6	P - 6	Asep Ikin Sugandi	STKIP Siliwangi Bandung	Pengaruh Pembelajaran Kooperatif Tipe Think Talk Write Terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Dan Koneksi Matematis Pada Siswa SMP	MP - 51
7	P - 7	Dani Nurhayati	Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta	Motivasi Dan Prestasi Belajar Siswa Dalam Pembelajaran Matematika Ditinjau Dari Kelekatan Anak-Orang Tua	MP - 60
8	P - 8	Darmadi	IKIP PGRI Madiun	Imajeri Mahasiswa Dalam Pembelajaran Analisis Real	MP - 70
9	P - 9	Dian Septi Nur Afifah, M. Pd	STKIP PGRI SIDOARJO	Pembelajaran Matematika Realistik Pada Materi Persamaan Linear Satu variabel Di SMP Kelas VIIi	MP - 81
10	P - 10	Dr. Hj. Epon Nuraeni L, M.Pd	UPI Kampus Tasikmalaya	Penggunaan Instrumen Monitoring Diri Metakognisi Dan Kemampuan Mahasiswa Menerapkan Strategi Pemecahan Masalah Matematika	MP - 92
11	P - 11	Dr. Ibrahim	UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta	Pengembangan Kemampuan Berpikir Kritis Dan Kreatif Matematis Siswa Melalui Pembelajaran Berbasis-Masalah Yang Menghadirkan Kecerdasan Emosional	MP - 109
12	P - 12	Dr. Ibrahim	UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta	Pengembangan Bahan Ajar Matematika Sekolah Berbasis Masalah Terbuka Untuk Memfasilitasi Pencapaian Kemampuan Berpikir Kritis Dan Kreatif Matematis Siswa	MA- 121
13	P - 13	Dr. Jailani	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Oleh Pendidik	MA - 133
14	P - 14	Dr. Maspul Aini Kambry , M.Sc., Dra. Zahra Chairani, M.Pd.	Universitas Tama Jagakarsa	Pengajaran Matriks Dan Aljabar Linier Di Fakultas Teknik Universitas Tama Jagakarsa Jakarta	MA - 147
15	P - 15	Rudi Santoso Yohanes	Universitas Katolik Widya Mandala Madiun	Kontribusi Pendidikan Matematika Dalam Pembentukan Karakter Siswa	MA - 158
16	P - 16	Theresia	Universitas Widya	Implementasi Ajaran Ki Hajar	MA - 170

		Kriswianti Nugrahaningsih	Dharma Klaten	Dewantara Dalam Pembelajaran Matematika Untuk Membangun Karakter Siswa	
17	P - 17	Dra. Kokom Komariah, M.Mpd	SMPN 3 Cimahi	Efektivitas Metode Demonstrasi Dalam Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kreatif Siswa	MA - 187
18	P - 18	Elisabet Ayunika Permata Sari	Universitas Sanata Dharma	Pengembangan Hipotesis Trayektori Pembelajaran Untuk Konsep Pecahan	MA - 205
19	P - 19	Ervin Azhar	UHAMKA Jakarta	Pengembangan Perangkat Pembelajaran Teori Peluang Berbasis Rme Untuk Meningkatkan Pemahaman, Penalaran, Dan Komunikasi Matematik Siswa SLTA	MA - 213
20	P - 20	Fahisal Afif Abidin	Pendidikan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta	Mengejar Perkembangan Teknologi Dengan Media Pembelajaran Animasi Deskriptif Aplikatif	MA - 223
21	P - 21	Fransiskus Gatot Iman Santoso	Universitas Katolik Widya Mandala Madiun	Mengasah Kemampuan Berpikir Kreatif Dan Rasa Ingin Tahu Siswa Melalui Pembelajaran Matematika Dengan Berbasis Masalah	MA - 230
22	P - 22	Harina Fitriyani	Universitas Ahmad Dahlan	Identifikasi Kemampuan Berpikir Matematis Rigor Siswa Smp Berkemampuan Matematika Sedang Dalam Menyelesaikan Soal Matematika	MA - 241
23	P - 23	Hepsi Nindiasari	Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa, Banten	Pengembangan Bahan Ajar Dan Instrumen Untuk Meningkatkan Berpikir Reflektif Matematis Berbasis Pendekatan Metakognitif Pada Siswa Sekolah Menengah Atas (SMA)	MA - 251
24	P - 24	Heribertus Antok Krisdyanto, Andy Rudhito, Sriyanto	Universitas Sanata Dharma	Interaksi Siswa Dan Buku Ajar Dalam Pembelajaran Matematika Topik Kaidah Pencacahan Dengan Menggunakan Buku Ajar Di Kelas XI IPA SMA Kolese De Britto	MA - 264
25	P - 25	Ika Wulandari, S.Pd.Si, Laela Sagita, M.Sc	SMK N 2 Wonosari Dan Univ PGRI Yogyakarta	Pembelajaran Matematika Dengan Differentiated Instruction Untuk Mengoptimalkan Karakter Positif Siswa.	MA - 272
26	P - 26	Indah Permatasari, Andy Rudhito, Sriyanto	Universitas Sanata Dharma	Interaksi Guru Dan Siswa Dalam Pembelajaran Matematika Topik Kaidah Pencacahan Dengan Menggunakan Buku Ajar Di Kelas XI IPA SMA Kolese De Britto	MA - 283
27	P - 27	Isticharoh, S.Pd	SDSN Batursari 6	Peningkatan Hasil Belajar Melalui Metode Guided Discovery	MA - 293

				Bermuatan Karakter Berbantuan CD Pembelajaran Materi Bangun Datar Kelas 5	
28	P - 28	Ketut Sutame	Mahasiswa Pascasarjana UNY Prodi Pendidikan Matematika	Implementasi Pendekatan Problem Posing Untuk Meningkatkan Kemampuan Penyelesaian Masalah, Berpikir Kritis Serta Mengeliminir Kecemasan Matematika	MA - 308
29	P - 29	Laila Fitriana,M.Pd	Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta	Pengaruh Model Pembelajaran Cooperative Tipe Group Investigation (GI) Dan STAD Terhadap Prestasi Belajar Matematika Ditinjau Dari Kemandirian Belajar Siswa	MA - 319
30	P - 30	Mahrita Julia Hapsari, S. Pd	Mahasiswa Pasca Sarjana UNY Prodi Pendidikan Matematika	Upaya Meningkatkan Self-Confidence Siswa Dalam Belajar Matematika Melalui Model Inkuiri Terbimbing	MA - 337
31	P - 31	Muhamad Abdorin	Pendidikan Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	Kemampuan Berfikir Matematis Mahasiswa Difabel Netra UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta Pada Mata Kuliah Statistika	MA - 346
32	P - 32	Nely Indra Meifiani, Dr Hartono	STKIP PGRI PACITAN	Analisis Kesulitan Matematika Siswa SMP Negeri Di Pacitan Pada Ujian Nasional Tahun 2009/2010	MA - 354
33	P - 33	Niken Wahyu Utami	Universitas PGRI Yogyakarta	Optimalisasi Lingkungan Belajar Dalam Peningkatan Apresiasi Siswa Terhadap Matematika	MA - 366
34	P - 34	Nina Agustyaningrum , S.Pd.Si.	Universitas Negeri Yogyakarta	Implementasi Model Pembelajaran Learning Cycle 5e Untuk Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa Kelas IX B SMP Negeri 2 Sleman	MA - 376
35	P - 35	Qisthiani Nasikhah, S. Pd, Mujiyem Sapti, S. Pd, M. S	Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo	Eksperimentasi Model Pembelajaran TPS (Think Pair Share) Terhadap Prestasi Belajar Matematika Ditinjau Dari Kemampuan Komunikasi Matematika Siswa Kelas VII SMP Se-Kecamatanpurworejo	MA - 388
36	P - 36	Rifka Zammilah	UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	Penanaman Pendidikan Karakter Melalui Pembelajaran Matematika Menuju Pribadi Manusia Indonesia Seutuhnya	MA - 400
37	P - 37	Risti Fiyana Risty	UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, Mahasiswa S1 Pendidikan Matematika	Analisis Proses Pembelajaran Matematika Pada Anak Berkebutuhan Khusus (Abk) Tunanetra Kelas X Inklusi SMA Muhammadiyah 4 Yogyakarta	MA - 411
38	P - 38	Siti Mahfudzoh	UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	Pengaruh Integrasi Islam Dan Sains Dalam Matematika	MA - 418

39	P - 39	Siti Nur Rohmah,M.Pmat .	UAD / Univ.Ahmad Dahlan Yogyakarta	Desain Pembelajaran Statistik Deskriptif Untuk Siswa Sma Dengan Pendekatan Kooperatif Learning Sebagai Upaya Penanaman Pendidikan Karakter	MA - 425
40	P - 40	Sri Subarinah	FKIP Universitas Mataram	Pengintegrasian Pendidikan Karakter Dalam Pembelajaran Matematika SD Yang Bernuansa Pakem Menggunakan Kopermatik (Kotak Permainan Matematika Realistik)	MA - 440
41	P - 41	Suprapto	SMP 1 Banguntapan Bantul	Beberapa Bukti 0,999=1 (Pengajaran Matematika Sekolah Menengah)	MA - 454
42	P - 42	Suswiyati	SMP N 1 Paliyan Gunungkidul	Jurus Jitu Meningkatkan Kreativitas Siswa	MA - 458
43	P - 43	Dra. Sutarti, M.Pd.I	Mts N SEYEGAN	Pembelajaran Matematika Realistik	MA - 470
44	P - 44	Syariful Fahmi	Pendidikan Matematika UAD Yogyakarta	Pengembangan Media Pembelajaran Berbasis Multimedia Interaktif Menggunakan Adobe Flash Cs3 Dalam Pembelajaran Matematika Standar Kompetensi Memecahkan Permasalahan Yang Berkaitan Dengan Sistem Persamaan Linear Dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel Pada Siswa Kelas X	MA - 480
45	P - 45	Syukrul Hamdi, S.Pd.	Mahasiswa PPS UNY Prodi Pendidikan Matematika	Membangun Karakter Siswa Dalam Pembelajaran Matematika Melalui Ctl Berbasis Kecerdasan Majemuk	MA - 488
46	P - 46	Totok Triyadi, S.Si.	SMK Negeri 2 Depok Sleman Yogyakarta (Mhs Pps UNY)	Penguatan Metodologi Pembelajaran Matematika Untuk Menerapkan Pendidikan Budaya Dan Karakter Bangsa	MA - 499
47	P - 47	Uhti	UIN Sunan Kalijaga, Mahasiswa S1 Pendidikan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga	Pembelajaran Kooperatif Dengan Pendekatan Open Ended Untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Siswa SMP	MA - 508
48	P - 48	Veronika Fitri Rianasari	Universitas Sanata Dharma	Pembelajaran Persentase Yang Bermakna Melalui Pembelajaran Matematika Realistik	MA - 517
49	P - 49	Very Hendra Saputra	Pendidikan Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	Kesalahan Siswa SMP Dalan Melakukan Operasi Aritmatika Pada Pecahan	MA - 528
50	P - 50	Wahyu Hidayat, Anik Yuliani	STKIP Siliwangi Bandung	Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis Matematik Siswa	MA - 535

				Sekolah Menengah Atas Melalui Pembelajaran Kooperatif Think-Talk-Write (TTW)	
51	P - 51	Wardono	Universitas Negeri Semarang	Pengembangan Profesionalisme Guru Matematika Pascasertifikasi Melalui CPD PTK Pada SMP Di Kota Semarang	MA - 547
52	P - 52	Yulia Linguistika, Ikfan Febriyana	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Permainan Dakonmatika Sebagai Media Pembelajaran Matematika Topik Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) Bagi Siswa Sekolah Dasar	MA - 557
53	P - 53	Muhammad Ilman Nafi'an	Mahasiswa Pascasarjana UNESA	Kemampuan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Cerita Ditinjau Dari Gender Di Sekolah Dasar	MA - 571
54	P - 54	Djamilah BW	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Mengembangkan *Softskill* Mahasiswa Calon Guru Matematika Melalui Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah	MA - 578
55	P - 55	Kana Hidayati, & Heri Retnawati		Pendeteksian Keberfungsian Butir Diferensial (Differential Item Functioning, Dif) Menggunakan Indeks Perbedaan Probabilitas Pada Data Politomus Dengan Model Generalized Partial Credit Model (GPCM)	MA - 589

Makalah Statistika

No	Kode	Nama	Instansi	Judul	Hal
1	S - 1	Adi Setiawan	Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana	Penggunaan Metode Bayesian Obyetif Dalam Analisis Pengukuran Tingkat Kepuasan Pelanggan Berdasarkan Kuesioner	MS – 1
2	S - 2	Agustini Tripena	Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Univesitas Jenderal Soedirman, Purwokerto	Analisis Regresi Spline Kuadratik	MS – 8
3	S - 3	Endang Sri Kresnawati	Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya	Model Statistika Untuk Fertilitas Perkawinan Dengan Pendekatan Eksponensial	MS – 19
4	S - 4	Epha Diana Supandi	Prodi Matematika, FSAINTEK, UIN Yogyakarta	Pendekatan Conjoint Analysis Untuk Mengukur Tingkat Preferensi Mahasiswa Terhadap Layanan Perpustakaan UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	MS – 27

5	S - 5	Fitria Puspitningrum, Adi Setiawan , Hanna A. Parhusip	Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana Salatiga	PENERAPAN GRAFIK DAN STUDI SIMULASI HOTELLING T2 TRIVARIAT PADA KARATERISTIK KUALITAS PARFUM REMAJA DARI PERUSAHAAN Â€Œxâ€	MS – 39
6	S - 6	Jantini Trianasari Natangku, Adi Setiawan, Lilik Linawati	Universitas Kristen Satya Wacana	Studi Simulasi Grafik Pengendali Non Parametrik Berdasarkan Fungsi Distribusi Empirik	MS – 51
7	S - 7	Retno Subekti, M.Sc	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Model Black Litterman Dengan Estimasi Theil Mixed	MS – 61
8	S - 8	Rheni Puspitasari	Jurusan Matematika UNS	Analisis Spasial Kasus Demam Berdarah Di Sukoharjo Jawa Tengah Dengan Menggunakan Indeks Moran	MS – 67
9	S - 9	Wahyuni Suryaningtyas	Universitas Muhammadiyah Surabaya	Peramalan Volume Penjualan Celana Panjang Di Boyolali Dengan Menggunakan Model Variasi Kalender	MS – 78
10	S - 10	Wirayanti	Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana	Studi Simulasi Tentang Penerapan Grafik Pengendali Berdasarkan Analisis Komponen Utama (Principal Component Analysis)	MS – 89

Makalah Terapan dan Komputer (MT)

No	Kode	Nama	Instansi	Judul	Hal
1	T - 1	Adi Tri Ratmanto, Respatiwulan	Jurusam Matematika, FMIPA, UNS	Simulasi Laju Vaksinasi Dan Keefektifan Vaksin Pada Model Sis	MT – 1
2	T - 2	Aidatul Fitriah, Agus Maman Abadi	Universitas Negeri Yogyakarta	Aplikasi Model Neuro Fuzzy Untuk Prediksi Tingkat Inflasi Di Indonesia	MT – 8
3	T - 3	Ali Kusnanto, Hikmah Rahmah, Endar H. Nugrahani	Institut Pertanian Bogor	Model Dinamika Sel Tumor Dengan Terapi Pengobatan Menggunakan Virus Oncolytic	MT – 21
4	T - 4	Anita Kesuma Arum, Sri Kuntari	Jurusan Matematika, FMIPA, UNS	Simulasi Level Sanitasi Pada Model Sir Dengan Imigrasi Dan Vaksinasi	MT – 30
5	T - 5	Arief Wahyu Wicaksono, Purnami Widyaningsih	Jurusan Matematika, FMIPA, UNS	Penentuan Indeks Harga Saham Menggunakan Model Termodinamika	MT – 37
6	T - 6	Beni Utomo	Sekolah Tinggi Teknologi Bontang	Matematika Eigenface Menggunakan Metrik Hausdorff	MT – 44
7	T - 7	Evy Dwi Astuti, Sri Kuntari	Jurusan Matematika, FMIPA, UNS	Model Sir (Suspectible Infected Recovered) Dengan Imigrasi Dan Perbaikan Tingkat Sanitasi	MT – 53

8	T - 8	Farida Hanum, Nur Wahyuni, Toni Bakhtiar	Departemen Matematika FMIPA IPB Bogor	Penyelesaian Masalah Konektivitas Di Area Konservasi Dengan Algoritme Heuristik	MT - 60
9	T - 9	Febriana Kristanti	Universitas Muhammadiyah Surabaya	Optimal Fuzzy Logic Load Frequency Control Pada Sistem Tenaga Listrik Menggunakan Artificial Immune Sysâ¬Tem (AIS)	MT - 71
10	T - 10	Fika Widya Pratama, Hanna Arini Parhusip, Leopoldus Ricky Sasongko	Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana Salatiga	Prediksi Saham-Saham Penghitung Indeks Lq45 Berdasarkan Koefisien Regresi Linear Berganda Yang Signifikan Dengan Menggunakan Metode Stepwise Selection	MT - 84
11	T - 11	Intan Widya Kusuma, Agus Maman Abadi	Universitas Negeri Yogyakarta	Aplikasi Model Backpropagation Neural Network Untuk Perkiraan Produksi Tebu Pada PT. Perkebunan Nusantara IX	MT - 97
12	T - 12	Jafaruddin, Edy Soewono, dan Nuning Nuraini	Jurusan Matematika FSTUniversita Nusa Cendana	Determinasi Efek Kapasitas Reproduksi Nyamuk Aedes Aegypti Terhadap Resiko Infeksi Dengue : Kontruksi Model, Analisis Dan Interpretasi	MT - 109
13	T - 13	Jonner Nainggolan, Sudradjat, D. Chaerani, R. E. Siregar	Jurusan Matematika FMIPA Universitas Cenderawasih Jayapura Indonesia	Teori Dan Aplikasi Optimisasi Dalam Masalah Strategi Vaksinasi	MT – 119
14	T - 14	Jordan Grestandhi, Bambang Susanto,Tundjung Mahatma	Prodi Matematika Fakultas Sains Dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana	Analisis Perbandingan Metode Peramalan Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) Dengan Metode Ols-Arch/Garch Dan Arima	MT - 131
15	T - 15	Kuswari Hernawati	Universitas Negeri Yogyakarta	Elearning Untuk Siswa Berkebutuhan Khusus	MT - 138
16	T - 16	Nuning Nuraini	FMIPA ITB	Model Pembelajaran Mata Kuliah Pemodelan Matematika Program Studi Matematika Itb	MT – 150
17	T - 17	Prihatin Tri Rahayuningsih, Agus Maman Abadi	Universitas Negeri Yogyakarta	Penerapan Model Fuzzy Dengan Metode Table Look-Up Scheme Untuk Memprediksi Indeks Harga Saham Gabungan (Ihsg)	MT – 157
18	T - 18	Ratno Nuryadi	Pusat Teknologi Material, Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT)	Perhitungan Energi Pengisian Pada Sistem Transistor Elektron Tunggal	MT – 167
19	T - 19	Ratno Nuryadi	Pusat Teknologi Material, Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT)	Kerapatan Keadaan Pada Struktur Nano Berbentuk Sumur Nano, Kawat Nano Dan Titik Nano	MT – 177

20	T - 20	Respatiwulan, Siti Mushonifah	Jurusan Matematika, FMIPA, UNS	Perbandingan Model Sir Dengan Vaksinasi Tanpa Dan Menggunakan Sanitasi	MT – 188
21	T - 21	Ririn Setiyowati, Purnami Widyaningsih dan Sutanto	Jurusan Matematika, FMIPA, UNS	Penentuan Variabel Ekstensif Ekonomi Melalui Model Termodinamika Dengan Simulasi Statistika Fuzzy (1,1)	MT – 198
22	T - 22	Rojali	Jurusan Matematika Universitas Bina Nusantara	Studi Dan Implementasi Hill Cipher Menggunakan Binomial Newton	MT – 210
23	T - 23	Rubono Setiawan	Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret (UNS)	Center Manifold Dari Sistem Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear Yang Titik Ekuilibriumnya Mengalami Bifurkasi Contoh Kasus Untuk Bifurkasi Hopf	MT – 217
24	T - 24	Siti Rahmah Nurshiami	Universitas Jenderal Soedirman	Aplikasi Matriks Circulant Untuk Menentukan Nilai Eigen Dari Graf Sikel (Cn)	MT – 227
25	T - 25	Soetrisno	FMIPA ITS	Pemberian Tanda Air Pada Citra Dijital Menggunakan Skema Berbasis Kuantisasi Warna	MT – 235
26	T - 26	Sri Subanti	Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret	Pengukuran Nilai Ekonomi Obyek Wisata Sejarah & Alam	MT – 254
27	T - 27	Titik Mudjiati	Jurusan Matematika FMIPA ITS	Dimensi Metrik Graf Kincir Dengan Daun Bervariasi	MT – 271
28	T - 28	Toni Bakhtiar	Institut Pertanian Bogor	Manajemen Bencana Berbasis Riset Operasi: Masalah Penugasan Sukarelawan Dengan Goal Programming	MT – 286
29	T - 29	Ulfa Ni'matus Sa'adah	UIN SUNAN KALIJAGA	Pengoptimalan Dana Dpp Kunjungan Akademik Bem Ps-Matematika Dengan Metode Simplek	MT – 296
30	T - 30	Vincentia Putri Satriyani	Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana	Analisa Jaringan Kerja Untuk Penjadwalan Kegiatan Dan Alokasi Pembiayaan Pada Proyek Pembangunan Komplek Gedung Serbaguna Menggunakan Critical Path Method	MT - 302
31	T - 31	Henry Wattimena	Jurusan Matematika, Universitas Pattimura Ambon	Pemetaan Sektor Transportasi Di Provinsi Maluku Dengan Menggunakan Analisis Klaster	MT – 314

A – 11

Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invariant

M. Andy Rudhito
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
email: arudhito@yahoo.co.id

Abstrak
Telah dibahas sistem linear max-plus waktu invariant (SLMI), di mana waktu aktifitasnya berupa bilangan real. Dalam sistem linear max-plus interval waktu invariant (SLMII), ada ketidakpastian dalam waktu aktifitasnya, sehingga waktu aktifitas ini dimodelkan sebagai interval bilangan real. Artikel ini membahas tentang generalisasi SLMI menjadi SLMII dan analisis input-output SLMII. Dapat ditunjukkan bahwa SLMII berupa suatu sistem persamaan linear max-plus interval dan analisa input-output SLMII terkait masalah input paling lambat dapat dibahas melalui penyelesaian suatu sistem persamaan linear max-plus interval. Diberikan juga ilustrasi penerapannya dalam sistem produksi sederhana.
Kata-kata kunci: Sistem Linear, Max-Plus, Interval, Waktu Invariant, Input-Output.

1. Pendahuluan

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya tidak diketahui dengan pasti. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti. Ketidakpastian waktu aktifitas jaringan ini dapat dimodelkan dalam suatu interval, yang selanjutnya di sebut waktu aktifitas interval.

Aljabar max-plus (himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max dan plus) telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah: penjadwalan (proyek) dan sistem antrian, lebih detailnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al*. (2001), Rudhito, A. (2003). Dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003) telah dibahas pemodelan dinamika sistem produksi sederhana dengan pendekatan aljabar max-plus. Secara umum model ini berupa sistem linear max-plus waktu invariant.

Konsep aljabar max-plus interval yang merupakan perluasan konsep aljabar max-plus, di mana elemen-elemen yang dibicarakan berupa interval telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2008). Pembahasan mengenai matriks atas aljabar max-plus telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2011a). Dalam Rudhito, dkk (2011b) telah dibahas eksistensi penyelesaian sistem persamaan linear max-plus interval.

Sejalan dengan cara pemodelan dan pembahasan input-output sistem linear max-plus waktu invariant seperti dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003), dan dengan

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

memperhatikan hasil-hasil pada aljabar max-plus interval, makalah ini akan membahas pemodelan dan analisa input-output sistem linear max-plus waktu invarian dengan waktu aktifitas interval, dengan menggunakan aljabar max-plus interval.

2. Aljabar Max-Plus

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan sistem persamaan linear input-output max-plus $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al*. (2001), Rudhito, A. (2003).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall\, a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$. Relasi "$\preceq_{\mathrm{m}}$"pada $\mathbf{R}_{\max}$ didefinisikan dengan $x \preceq_{\mathrm{m}} y \Leftrightarrow x \oplus y = y$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \,|\, A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p\times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \;, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon \;, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j.

Relasi "$\preceq_{\mathrm{m}}$"pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan dengan $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B$. Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{\boldsymbol{x} = [\, x_1, x_2, ... , x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, ... , n\}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur vektor atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dan $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}_{\max}^{m}$. Vektor $\boldsymbol{x}' \in \mathbf{R}_{\max}^{m}$ disebut *subpenyelesaian* sistem persamaan linear $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jika memenuhi $A \otimes \boldsymbol{x}' \preceq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{b}$. Suatu subpenyelesaian $\hat{\boldsymbol{x}}$ dari sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ disebut *subpenyelesaian terbesar* sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jika $\boldsymbol{x}' \preceq_{\mathrm{m}} \hat{\boldsymbol{x}}$ untuk setiap subpenyelesaian $\boldsymbol{x}'$ dari sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$. Subpenyelesaian terbesar $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ada dan diberikan oleh $\hat{\boldsymbol{x}} = -(A^{\mathrm{T}} \otimes (-\boldsymbol{b}))$.

3. Aljabar Max-Plus Interval

Bagian ini membahas konsep dasar aljabar max-plus interval dan teknik pengoperasian matriks atas aljabar max-plus interval. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada Rudhito, dkk (2011a).

Interval (tertutup) x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}_{\max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} x \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}}\}$. Interval x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ di atas disebut *interval max-plus*, yang selanjutnya akan cukup disebut interval. Suatu bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon} := \{\, \mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] \mid \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbf{R}, \varepsilon \prec_{\mathrm{m}} \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}}\,\} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan: $\mathrm{x} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{y}}]$ dan $\mathrm{x} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{\mathrm{y}}]$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon})$. Kemudian $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang dilambangkan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n} := \{\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij}) \mid \mathrm{A}_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max})$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$, didefinisikan $\alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}$, dengan $(\alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A})_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}_{ij}$ dan $\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}$, dengan $(\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B})_{ij} = \mathrm{A}_{ij} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $\mathrm{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times p}$, $\mathrm{B} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{p \times n}$, didefinisikan $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B}$ dengan $(\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B})_{ij} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{p}} \mathrm{A}_{ik} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B}_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Operasi $\overline{\oplus}$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{Im}}$, yaitu jika $\mathrm{A} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B}$, maka $\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C}$. Operasi $\overline{\otimes}$ juga konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{Im}}$, yaitu jika $\mathrm{A} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B}$, maka $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C}$.

Untuk $\mathrm{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\underline{\mathrm{A}} = (\underline{\mathrm{A}}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $\overline{\mathrm{A}} = (\overline{\mathrm{A}}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Didefinisikan *interval matriks dari* A, yaitu $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] = \{A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n} \mid$

$\underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}$ }. Dapat ditunjukkan untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebaliknya. Matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}]$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}]$disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval* A dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n} := \{\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T | \; x_i \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}, i = 1, \ldots, n\}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ disebut *vektor interval atas* $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$. Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$. Suatu vektor interval $\mathbf{x}^* \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ disebut *penyelesaian interval* sistem interval $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika berlaku $A \overline{\otimes} \mathbf{x}^* = \mathbf{b}$. Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$. Suatu vektor interval $\mathbf{x}' \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ disebut *subpenyelesaian interval* sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika berlaku $A \overline{\otimes} \mathbf{x}' \preceq_{Im} \mathbf{b}$. Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$. Suatu vektor interval $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ disebut *subpenyelesaian terbesar interval* sistem interval $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika $\mathbf{x}' \preceq_{Im} \hat{\mathbf{x}}$ untuk setiap subpenyelesaian interval $\mathbf{x}'$ dari sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

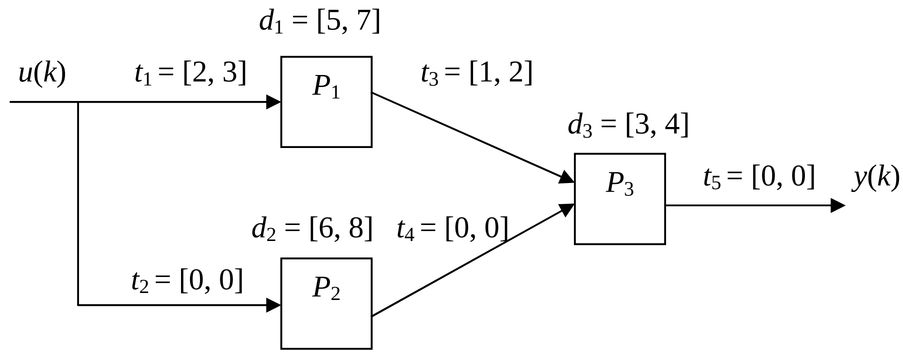
Teorema berikut memberikan eksistensi subpenyelesaian terbesar interval sistem interval $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Teorema 1

Jika $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$, di mana $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ dan $\mathbf{b} \approx [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$, maka vektor interval $\hat{\mathbf{x}} \approx [\underline{\hat{\mathbf{x}}}, \overline{\hat{\mathbf{x}}}]$, dengan $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_i = \min\{-(\underline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))_i, -(\overline{A}^T \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))_i\}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{x}}} = -(\overline{A}^T \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

4. Pemodelan Sistem Produksi Sederhana dengan Waktu Aktifitas Interval

Diperhatikan suatu sistem produksi sederhana (Schutter, 1996) yang disajikan dalam Gambar 1 berikut:



Gambar 1

Sistem ini terdiri dari 3 unit pemrosesan P_1, P_2, P_3 . Bahan baku dimasukkan ke P_1 dan P_2, diproses dan dikirimkan ke P_3. Interval waktu pemrosesan untuk P_1, P_2 dan P_3 berturut-turut adalah d_1 = [5, 6] d_2 = [6, 8] dan d_3 = [3, 4] satuan waktu. Diasumsikan bahwa bahan baku memerlukan t_1 = [2, 3] satuan waktu untuk dapat masuk dari input ke P_1 dan memerlukan t_3 = [1, 2] satuan waktu dari produk yang telah diselesaikan di P_1 untuk sampai di P_3, sedangkan waktu transportasi yang lain diabaikan. Pada input sistem dan antara unit pemrosesan terdapat penyangga (*buffer*), yang berturut-turut disebut buffer input dan buffer internal, dengan kapasitas yang cukup besar untuk menjamin tidak ada penyangga yang meluap (*overflow*). Suatu unit pemrosesan hanya dapat mulai bekerja untuk suatu produk baru jika ia telah menyelesaikan pemrosesan produk sebelumnya. Diasumsikan bahwa setiap unit pemrosesan mulai bekerja segera setelah bahan tersedia. Misalkan

u(k+1) : *interval waktu saat bahan baku dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke-*(k+1),

$x_i(k)$: *interval waktu saat unit pemrosesan ke-i mulai bekerja untuk pemrosesan ke-k*,

y(k) : *interval waktu saat produk ke-k yang diselesaikan meninggalkan sistem*.

Waktu saat P_1 mulai bekerja untuk pemrosesan ke-(k+1) dapat ditentukan sebagai berikut. Jika bahan mentah dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke-(k+1), maka bahan mentah ini tersedia pada input unit pemrosesan P_1 pada interval waktu t = u(k+1) $\overline{\otimes}$ [2, 3]. Akan tetapi P_1 hanya dapat mulai bekerja pada sejumlah bahan baku baru segera setelah menyelesaikan pemrosesan sebelumnya, yaitu sejumlah bahan baku untuk pemrosesan ke-k. Karena interval waktu pemrosesan pada P_1 adalah d_1 = [5, 7]

satuan waktu, maka produk setengah-jadi ke-k akan meninggalkan P_1 pada saat interval t = $x_1(k) \overline{\otimes} [5, 7]$. Dengan menggunakan operasi aljabar max-plus interval diperoleh:

$$x_1(k+1) = [5, 7] \overline{\otimes} x_1(k) \overline{\oplus} [2, 3] \overline{\otimes} u(k+1) \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dengan alasan yang sama untuk P_2, P_3 dan waktu saat produk ke-k yang diselesaikan meninggalkan sistem, diperoleh:

$$x_2(k+1) = [6, 8] \overline{\otimes} x_2(k) \overline{\oplus} u(k+1)$$

$$x_3(k+1) = [11,16] \overline{\otimes} x_1(k) \overline{\oplus} [12,16] \overline{\otimes} x_2(k) \overline{\oplus} [3, 4] \overline{\otimes} x_3(k) \overline{\oplus} [8,11] \overline{\otimes} u(k+1)$$

$$y(k) = [3, 4] \overline{\otimes} x_3(k) \text{ , untuk } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Jika dituliskan dalam persamaan matriks dalam aljabar max-plus, persamaan-persamaan di atas menjadi

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} [5,7] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [6,8] & \varepsilon \\ [11,16] & [12,16] & [3,4] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \mathbf{x}(k) \overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,3] \\ [0,0] \\ [8,11] \end{bmatrix} \otimes u(k+1)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & [3,4] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \mathbf{x}(k)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$ dan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T$.

Hasil di atas dapat juga dituliskan dengan

$$\mathbf{x}(k+1) = A \overline{\otimes} \mathbf{x}(k) \overline{\oplus} B \otimes u(k+1)$$

$$y(k) = C \overline{\otimes} \mathbf{x}(k)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$, dengan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^3_{\max}$, keadaan awal

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \quad A = \begin{bmatrix} [5,7] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [6,8] & \varepsilon \\ [11,16] & [12,16] & [3,4] \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{3\times 3}_{\max}, \quad B = \begin{bmatrix} [2,3] \\ [0,0] \\ [8,11] \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{3}_{\max}$$

dan $C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & [3,4] \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{1\times 3}_{\max}$.

5. Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invariant

Matriks dalam persamaan sistemnya merupakan matriks konstan, yaitu tidak tergantung pada parameter k, sehingga sistemnya merupakan sistem waktu-invariant. Sistem seperti dalam contoh di atas merupakan suatu contoh sistem linear max-plus interval waktu-invariant (SLMII) seperti yang diberikan dalam definisi berikut.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Definisi 1 (SLMII)

Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu-Invariant adalah Sistem Kejadian Diskrit yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}(k) \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{u}(k+1) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}(k)$$

untuk k = 1, 2, 3, ... , dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathrm{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ dan $\mathrm{C} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{1\times n}$. Vektor interval $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ menyatakan interval *keadaan* (*state*), $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ adalah *vektor interval input* dan $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{1}$ adalah *vektor interval output* sistem saat waktu ke-*k.*

SLMII seperti dalam definisi di atas secara singkat akan dituliskan dengan SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$). Jika kondisi awal dan suatu barisan input diberikan untuk suatu SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$), maka secara rekursif dapat ditentukan suatu barisan vektor keadaan sistem dan barisan output sistem. Secara umum sifat input-output SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2 (Input-Output SLMII (A, B, C, $\mathbf{x}_0$))

Diberikan bilangan bulat positip *p*. Jika vektor interval output $\boldsymbol{y}$ = [y(1), y(2), ... , y(p)]$^{\mathrm{T}}$ dan vektor interval input $\mathbf{u}$ = [u(1), u(2), ... , u(p)]$^{\mathrm{T}}$ pada SLMI(A, B, C, $\mathbf{x}_0$), maka

$$\mathbf{y} = \mathrm{K} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}_0 \,\overline{\oplus}\, \mathrm{H} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{u}$$

dengan

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}^{\overline{\otimes}2} \\ \vdots \\ \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}^{\overline{\otimes}p} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathrm{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B} & \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}^{\overline{\otimes}p-1} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B} & \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}^{\overline{\otimes}p-2} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B} & \cdots & \mathrm{C} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

Bukti: Pembuktian analog dengan kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real, dengan mengingat bahwa operasi penjumlahan dan perkalian matriks interval konsisten terhadap urutan yang telah didefinisikan di atas. Bukti untuk kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real dapat dilihat dalam Rudhito(2003: hal 56 -58).

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Dalam sistem produksi, Teorema 2 berarti bahwa jika diketahui kondisi awal sistem dan barisan waktu saat bahan mentah dimasukkan ke sistem, maka dapat ditentukan barisan interval waktu saat produk selesai diproses dan meninggalkan sistem.

Berikut dibahas *masalah input paling lambat* pada SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$). Masalah input paling lambat pada SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) adalah sebagai berikut:

Diberikan suatu bilangan bulat positip p. Diketahui vektor interval output $\mathbf{y} = [\mathrm{y}(1), ..., \mathrm{y}(p)]^{\mathrm{T}}$. *Misalkan vektor interval* $\mathbf{u} = [\mathrm{u}(1), ..., \mathrm{u}(p)]^{\mathrm{T}}$ *adalah vektor interval input. Permasalahannya adalah menentukan vektor interval input* $\mathbf{u}$ *terbesar (vektor interval waktu paling lambat) sehingga memenuhi* $\mathrm{K} \otimes \mathbf{x}_0 \;\overline{\oplus}\; \mathrm{H} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{u} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$, *dengan* K *dan* H *seperti dalam Teorema 2.*

Dalam sistem produksi, masalah ini mempunyai interpretasi sebagai berikut. Misalkan diketahui vektor interval $\mathbf{y}$ adalah vektor interval waktu paling lambat agar produk harus meninggalkan sistem. Permasalahannya adalah menentukan vektor interval $\mathbf{u}$ yaitu vektor interval waktu paling lambat saat bahan baku harus dimasukkan ke dalam sistem. Penyelesaian masalah ini diberikan dalam Teorema 3 berikut.

Teorema 3

Diberikan SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) dengan $\mathrm{C} \otimes \mathrm{B} \neq \varepsilon$ (matriks interval yang semua elemennya ε). Jika $\mathrm{K} \otimes \mathbf{x}_0 \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$, maka penyelesaian masalah input paling lambat pada SLMII(A, B, C, x_0) diberikan oleh $\hat{\mathbf{u}} \approx [\underline{\hat{\mathbf{u}}}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}]$, dengan $\underline{\hat{\mathbf{u}}}_i = \min\{-(\underline{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \;\overline{\otimes}\; (-\underline{\mathbf{y}}))_i, -(\overline{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \;\overline{\otimes}\; (-\overline{\mathbf{y}}))_i\}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{u}}} = -(\overline{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{y}}))$.

Bukti: Karena $\mathrm{K} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{x}_0 \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$, maka $\mathrm{K} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{x}_0 \;\overline{\oplus}\; \mathrm{H} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{u} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathrm{H} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{u} = \mathbf{y}$. Akibatnya masalah interval input paling lambat pada SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) menjadi masalah menentukan vektor interval input $\mathbf{u}$ terbesar yang memenuhi $\mathrm{H} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{u} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$. Masalah ini merupakan masalah menentukan subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linear max-plus interval $\mathrm{H} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{u} = \mathbf{y}$. Karena $\mathrm{C} \;\overline{\otimes}\; \mathrm{B} \neq \varepsilon$, maka komponen setiap kolom matriks interval H tidak semuanya sama dengan ε. Menurut Teorema 1 subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linear max-plus interval H $\overline{\otimes}$ $\mathbf{u} = \mathbf{y}$ adalah $\hat{\mathbf{u}} \approx [\underline{\hat{\mathbf{u}}}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}]$, dengan $\underline{\hat{\mathbf{u}}}_i$ = $\min\{-(\underline{H}^T \overline{\otimes} (-\underline{\mathbf{y}}))_i, -(\overline{H}^T \overline{\otimes} (-\overline{\mathbf{y}}))_i\}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{u}}} = -(\overline{H}^T \otimes (-\overline{\mathbf{y}}))$. ■

Contoh 1

Diperhatikan sistem produksi sederhana dalam subjudul 4 di atas. Misalkan kondisi awal sistem $\mathbf{x}(0) = [[0, 0], [1, 1], [\varepsilon, \varepsilon]]^T$, yang berarti unit pemrosesan P_1 dan P_2 berturut-turut memulai aktifitasnya saat waktu 0 dan 1 sementara unit pemrosesan P_3 masih kosong dan harus menunggu datangnya input dari P_1 dan P_2 . Diinginkan penyelesaian produk sebelum y(1) = [25, 25], y(2) = [30, 30], y(3) = [40, 40] dan y(4) = [50, 50], dalam hal ini waktu dapat ditentukan dengan pasti. Selanjutnya akan ditentukan waktu pemasukkan bahan baku ke dalam sistem yang selambat mungkin. Perhatikan bahwa K $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}_0$ = [[16, 21], [22, 29], [28, 37], [34, 45] $]^T \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$, sehingga Teorema 3 dapat digunakan. Subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linear max-plus interval H $\otimes$ $\mathbf{u} = \mathbf{y}$

atau $$\begin{bmatrix} [11,15] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [16, 23] & [11,15] & \varepsilon & \varepsilon \\ [21,30] & [16,23] & [11,15] & \varepsilon \\ [27,37] & [21,30] & [16,23] & [11,15] \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ u(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [25,25] \\ [30,30] \\ [40,40] \\ [50,50] \end{bmatrix}$$

adalah $\hat{\mathbf{u}} \approx [\underline{\hat{\mathbf{u}}}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}]$ = [[7, 7], [15, 15], [27, 27], [35, 35]$]^T$. Diperoleh waktu pemasukkan bahan baku ke dalam sistem dengan pasti. Jadi bahan baku harus dimasukkan ke sistem paling lambat pada saat waktu $\hat{u}(1) = 7$, $\hat{u}(2) = 15$, $\hat{u}(3) = 27$ dan $\hat{u}(4) = 35$.

Daftar Pustaka

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2008. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur. *Berkala Ilmiah MIPA Majalah Ilmiah Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam*. Vol. 18 (2): pp. 153-164

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2011a. Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval. *Jurnal Natur Indonesia.* Vol. 13 No. 2. pp. 94-99.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2011b. Systems of Fuzzy Number Max-Plus Linear Equations. Journal of the Indonesian Mathematical Society Vol. 17 No. 1

Schutter, B. De., 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.