METODE RASIONAL EKSPLISIT UNTUK MASALAH NILAI AWAL

Sudi Mungkasi
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Mrican, Tromol Pos 29, Yogyakarta 55002, Indonesia
sudi@usd.ac.id

ABSTRAK

Pada awal tahun 2014, suatu literatur mengenalkan metode numeris blok rasional eksplisit yang bersifat stabil. Metode blok rasional eksplisit tersebut digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal. Metode blok yang dimaksud merupakan kombinasi antara dua metode rasional eksplisit yang berbeda. Kedua metode rasional eksplisit itu sendiri adalah suatu metode satu langkah dan suatu metode dua langkah rasional yang eksplisit. Dengan demikian, kualitas metode blok bergantung pada kualitas dari kedua metode rasional tadi. Berdasarkan simulasi numeris yang dilakukan oleh para penulis literatur tersebut, keakuratan metode blok lebih rendah dibandingkan dengan keakuratan metode dua langkah rasional eksplisit. Mereka menyarankan bahwa hal ini disebabkan oleh fluktuasi keakuratan antara metode satu langkah dan metode dua langkah rasional eksplisit yang terlibat dalam metode blok. Sebagai komplemen hasil penelitian literatur tersebut, makalah ini menekankan bahwa keakuratan metode rasional eksplisit sangatlah bergantung pada masalah nilai awal yang akan diselesaikan. Akibatnya, metode blok pun juga bergantung pada masalah nilai awal yang sama. Bahkan dalam makalah ini akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu masalah nilai awal yang tidak dapat diselesaikan dengan suatu metode rasional eksplisit tertentu, tetapi masalah tersebut dapat diselesaikan dengan metode rasional eksplisit yang lainnya. Pada akhirnya, disimpulkan bahwa dalam rangka menyelesaikan masalah nilai awal dengan metode rasional eksplisit, pengaruh masalah nilai awal itu sendiri lebih dominan dari pada pengaruh keakuratan formal dari metode rasional eksplisit.

Kata-kata kunci: masalah nilai awal, metode rasional eksplisit, metode blok eksplisit, metode satu langkah, metode dua langkah, persamaan diferensial biasa

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial mempunyai peranan yang sangat penting dalam model matematika [1-4]. Model matematika itu sendiri merupakan suatu penyederhanaan masalah sebenarnya. Apa bila diketahui nilai fungsi di titik awal domain, maka persamaan diferensial dan nilai fungsi tersebut membentuk suatu sistem yang disebut masalah nilai awal.

Perlu dicatat bahwa masalah nilai awal penting untuk diselesaikan dengan akurat. Hal ini berkaitan dengan banyaknya terapan masalah nilai awal, seperti dalam proses reaksi-difusi [5], proses transport [6], proses kompetisi dinamika populasi biologi [7], dan lain-lain. Secara umum, masalah nilai awal bisa terkait dengan bidang fisika, kimia, biologi maupun teknik.

Baru-baru ini, Teh dkk [1] mengenalkan suatu metode numeris blok rasional eksplisit untuk mendapatkan penyelesaian masalah nilai awal. Metode blok tersebut merupakan gabungan dari dua metode rasional eksplisit yang diajukan oleh Lambert [2]. Dalam karyanya, Teh dkk [1] menguji metode blok rasional eksplisit tersebut untuk menyelesaikan tiga masalah nilai awal yang dua di antaranya adalah masalah uji yang terdapat dalam karya Yaakub dan Evans [3] serta karya Ramos [4].

Metode numeris yang diperoleh Teh dkk [1] bersifat stabil dan cukup akurat. Namun demikian, terjadi fluktuasi keakuratan antara kedua metode rasional eksplisit yang terlibat dalam metode blok. Hal ini disebabkan oleh tingkat keakuratan yang berbeda yang dipunyai oleh kedua metode rasional eksplisit yang dipakai dalam metode blok.

Dalam makalah kali ini, penulis menekankan bahwa keakuratan metode rasional eksplisit sangatlah bergantung pada masalah nilai awal yang akan diselesaikan. Akibatnya, metode blok pun juga bergantung pada masalah nilai awal yang sama. Lebih lanjut dalam makalah ini akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu masalah nilai awal yang tidak dapat diselesaikan dengan suatu metode rasional eksplisit tertentu, tetapi masalah tersebut dapat diselesaikan dengan metode rasional eksplisit yang lainnya.

METODE RASIONAL DAN METODE BLOK

Berikut ini dipaparkan metode rasional eksplisit menurut Lambert [2] dan metode blok menurut Teh dkk [1].

Dipandang suatu masalah nilai awal

$$y' = f(x,y)\,, \quad y(a) = \eta \tag{1}$$

dengan $f(x,y): \Re \times \Re^m \to \Re^m$ dan fungsi $f(x,y)$ diasumsikan memenuhi semua kondisi sehingga masalah nilai awal (1) mempunyai penyelesaian yang tunggal. Misalkan bahwa interval untuk pengintegralan numeris diberikan oleh $x \in [a,b] \subset \Re$. Pengintegralan numeris mendiskretkan interval tersebut menjadi titik-titik $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, dengan catatan bahwa

$$x_n = x_0 + nh\,, \tag{2}$$

$$x_{n+1} = x_0 + (n+1)h\,, \tag{3}$$

$$x_{n+2} = x_0 + (n+2)h\,, \tag{4}$$

di mana h adalah panjang langkah pengintegralan.

Diasumsikan bahwa penyelesaian hampiran dari masalah nilai awal (1) diwakili secara lokal dalam rentang $[x_n, x_{n+1}]$ oleh hampiran rasional

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + x}\,, \tag{5}$$

dengan a_0, a_1, b_0 adalah koefisien-koefisien tak tentu. Hampiran rasional dalam persamaan (5) diharuskan melalui titik-titik (x_n, y_n) dan (x_{n+1}, y_{n+1}). Lebih lanjut pada titik-titik tersebut, hampiran rasional harus memenuhi syarat $y' = f(x,y)$ dan $y'' = f'(x,y)$. Dengan demikian terdapat empat persamanaan yang harus dipenuhi, yaitu

$$R(x_n) = y_n\,, \tag{6}$$

$$R(x_{n+1}) = y_{n+1}\,, \tag{7}$$

$$R'(x_n) = f_n\,, \tag{8}$$

$$R''(x_{n+1}) = f_n'\,, \tag{9}$$

dengan $f_n = f(x_n, y_n)$ dan $f_n' = f'(x_n, y_n)$. Dengan mengeliminasi ketiga koefisien tak tentu a_0, a_1, b_0 dari persamaan (6) – (9), Teh dkk [1] mendapatkan skema numeris yang diajukan oleh Lambert [2], yaitu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2h(f_n)^2}{2f_n - hf_n'}\,. \tag{10}$$

Metode numeris (10) merupakan metode rasional eksplisit satu langkah berderajat setidaknya dua; lihat karya Lambert [2]. Dalam metode ini nilai y_{n+1} dihampiri berdasarkan informasi di titik sebelumnya (x_n, y_n).

Untuk menghampiri nilai y_{n+2}, diasumsikan bahwa penyelesaian hampiran masalah nilai awal (1) diwakili secara lokal dalam rentang $[x_n, x_{n+2}]$ oleh hampiran rasional yang sama yang dinyatakan dalam persamaan (5). Dengan demikian, hampiran rasional (5) harus melalui titik-titik (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}) dan (x_{n+2}, y_{n+2}). Pada titik-titik ini, hampiran rasional juga harus memenuhi syarat $y' = f(x,y)$. Dengan demikian terdapat lima persamanaan yang harus dipenuhi, yaitu

$$R(x_n) = y_n\,, \tag{11}$$

$$R(x_{n+1}) = y_{n+1}\,, \tag{12}$$

$$R(x_{n+2}) = y_{n+2}\,, \tag{13}$$

$$R'(x_n) = f_n, \tag{14}$$

$$R'(x_{n+1}) = f_{n+1}, \tag{15}$$

dengan $f_n = f(x_n, y_n)$ dan $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Dengan mengeliminasi keempat koefisien tak tentu a_0, a_1, b_0 dan f_n dari persamaan (11) – (15), Teh dkk [1] sekali lagi mendapatkan skema numeris yang diajukan oleh Lambert [2], yaitu

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{hf_{n+1}(y_{n+1} - y_n)}{2(y_{n+1} - y_n) - hf_{n+1}}. \tag{16}$$

Metode numeris (16) merupakan metode rasional eksplisit satu langkah berderajat setidaknya dua; lihat karya Lambert [2]. Dalam metode ini, nilai y_{n+2} dihampiri menggunakan informasi pada dua titik sebelumnya yaitu (x_n, y_n) dan (x_{n+1}, y_{n+1}).

Teh dkk [1] mengajukan metode blok rasional eksplisit dua-titik yang merupakan gabungan antara skema (10) dan skema (16). Dalam penerapannya, jika diketahui nilai y_n maka metode blok rasional eksplisit dua-titik melakukan iterasi dengan menghampiri nilai y_{n+1} menggunakan skema (10) dan selanjutnya menghampiri nilai y_{n+2} menggunakan skema (16).

Menurut Teh dkk [1] skema (10) mempunyai keakuratan tingkat dua, sedangkan skema (16) mempunyai keakuratan tingkat tiga. Menurut Teh dkk [1], *local truncation error (LTE)* untuk skema (10) adalah

$$LTE_{(10)} = h^3\left(\tfrac{1}{2}(y_n'')^2 - \tfrac{1}{3}y_n'y_n'''\right) + O(h^4), \tag{17}$$

Sedangkan *LTE* untuk skema (16) adalah

$$LTE_{(16)} = h^4\left(\tfrac{1}{2}(y_n'')^2 - \tfrac{1}{3}y_n'y_n'''\right) + O(h^5). \tag{18}$$

Jadi terjadi fluktuasi keakuratan dalam metode blok rasional eksplisit dua-titik.

HASIL DAN DISKUSI

Dalam bagian ini dipaparkan hasil simulasi tiga masalah nilai awal yang diselesaikan menggunakan metode rasional eksplisit (10), metode blok eksplisit (10) bersama (16), dan metode rasional eksplisit (16). Dengan demikian, untuk masing-masing metode skema yang dipakai adalah skema (10), skema "(10) & (16)", serta skema (16).

Untuk menilai kualitas hasil numeris dari ketiga metode tersebut, dipakai ukuran error menurut L^1 dan L^∞ sebagai berikut:

$$E_{L1} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} |\, y(x_n) - y_n \,|, \tag{19}$$

$$E_{L\infty} = \max_{0 \le n \le N} \{|\, y(x_n) - y_n \,|\}. \tag{20}$$

Di sini, $y(x_n)$ adalah nilai eksak fungsi y di titik x_n, sedangkan y_n adalah nilai hampiran numeris untuk $y(x_n)$. Lebih lanjut, N adalah banyaknya langkah pengintegralan.

Penulis memilih memakai dua ukuran error (tidak hanya satu ukuran error seperti yang dipakai oleh Teh dkk [1]) karena penulis ingin memastikan bahwa hasil penelitian ini tidak bergantung pada rumusan error dan hasil penelitian ini konsisten untuk rumus ukuran error yang berbeda. Kualitas penyelesaian dari ketiga metode numeris tersebut dilihat dari error yang dihasilkan.

Masalah 1

Dipandang masalah nilai awal

$$y'(x) = -10y(x), \;\; y(0) = 1, \tag{21}$$

untuk $x \in [0,1]$. Masalah nilai awal ini diambil dari contoh yang dibahas oleh Teh dkk [1]. Penyelesaian eksak masalah nilai awal ini adalah fungsi eksponensial yang diberikan secara sederhana oleh

$$y(x) = e^{-10x}. \tag{22}$$

Hasil simulasi ketiga metode yang diuji diwakili oleh **Tabel 1** dan **Tabel 2**. **Tabel 1** meliput error L^1 yang dihitung menggunakan rumus (19). **Tabel 2** meliput error L^∞ yang dihitung menggunakan rumus (20). Dari kedua tabel tersebut, nampak bahwa metode rasional eksplisit (16) memberikan error yang lebih kecil dibandingkan dengan kedua metode yang lain.

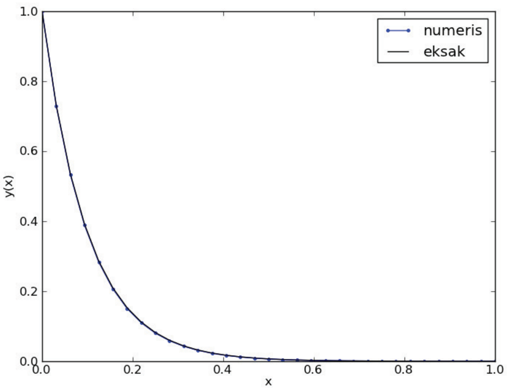
Tabel 1. Error L^1 untuk Masalah 1

N	Skema (10)	Skema (10)&(16)	Skema (16)
32	0,000788	0,000788	0,000671
64	0,000200	0,000200	0,000185
128	5,04E-05	5,04E-05*	4,85E-05
256	1,27E-05	1,27E-05	1,24E-05

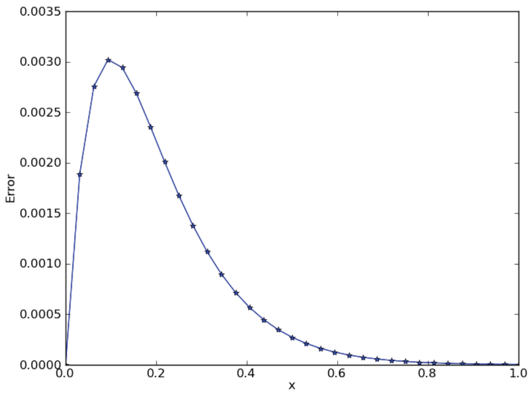
*E-05 artinya 10^{-5}. Keterangan ini juga berlaku untuk table lainnya.

Tabel 2. Error L^∞ untuk Masalah 1

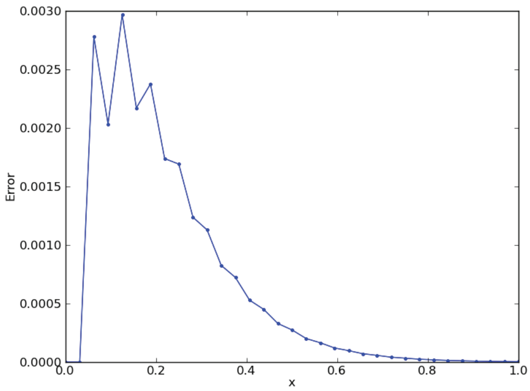
N	Skema (10)	Skema (10)&(16)	Skema (16)
32	0,003021	0,003021	0,002967
64	0,000749	0,000749	0,000750
128	0,000187	0,000187	0,000187
256	4,68E-05	4,68E-05	4,68E-05



Gambar 1. Penyelesaian eksak dan numeris metode rasional eksplisit skema (10) dengan $N = 32$ untuk Masalah 1



Gambar 2. Error penyelesaian numeris metode rasional eksplisit skema (10) menggunakan $N = 32$ untuk Masalah 1



Gambar 3. Error penyelesaian numeris metode rasional eksplisit skema (16) menggunakan $N = 32$ untuk Masalah 1

Lebih lanjut ketiga metode dapat menyelesaikan Masalah 1 dengan baik, artinya ketiga-tiganya konvergen ke penyelesaian eksak. Hal ini ditunjukkan oleh **Gambar 1** dan **Gambar 2**. **Gambar 1** memberi ilustrasi penyelesaian eksak dan numeris metode rasional eksplisit skema (10) dengan $N = 32$ untuk Masalah 1. Perlu dicatat bahwa ketiga metode menghasilkan gambar penyelesaian numeris yang serupa. **Gambar 2** menunjukkan error $|y(x_n) - y_n|$ untuk penyelesaian numeris metode rasional eksplisit skema (10) menggunakan $N = 32$ untuk Masalah 1. Gambar serupa juga dihasilkan oleh metode blok "(10) & (16)". Namun demikian untuk metode rasional eksplisit (16), grafik errornya terjadi fluktuasi seperti ditunjukkan oleh

Gambar 3. Namun demikian fluktuasi error hanya terjadi untuk nilai x yang kecil.

Masalah 2

Dipandang masalah nilai awal

$$\begin{aligned} & y''(x)+101y'(x)+100y(x)=0, \\ & y(0)=1.01,\ \ y'(0)=-2, \end{aligned} \tag{23}$$

untuk $x \in [0,1]$. Masalah nilai awal ini diambil dari contoh yang dibahas oleh Teh dkk [1] serta Yaakub dan Evans [3]. Penyelesaian eksak masalah nilai awal ini adalah

$$y(x)=0.01e^{-100x}+e^{-x}. \tag{24}$$

Perlu diperhatikan bahwa secara numeris, untuk dapat menyelesaikan masalah nilai awal yang melibatkan persamaan diferensial berderajat lebih dari satu, persamaan diferensial tersebut perlu diubah ke dalam suatu sistem persamaan diferensial berderajat satu. Karena masalah nilai awal yang dipandang melibatkan persamaan diferensial berderajat dua, persamaan diferensial tersebut diubah ke dalam suatu sistem dua persamaan diferensial berderajat satu. Dengan demikian, masalah nilai awalnya ditulis menjadi

$$y_1'(x)=y_2(x),\ \ y_1(0)=1.01, \tag{25}$$

$$y_2'(x)=-100y_1(x)-101y_2(x),\ \ y_2(0)=-2, \tag{26}$$

untuk $x \in [0,1]$. Penyelesaian eksak sistem ini adalah

$$y_1(x)=y(x)=0.01e^{-100x}+e^{-x}, \tag{27}$$

$$y_2(x)=y'(x)=-e^{-100x}-e^{-x}. \tag{28}$$

Tabel 3. Error L^1 untuk Masalah 2

N	Skema (10)	Skema (10)&(16)	Skema (16)
32	0.002534	0.009543	0.323902
64	0.001501	0.002528	0.359350
128	0.000489	0.000608	0.366029
256	0.000137	0.000152	0.371000

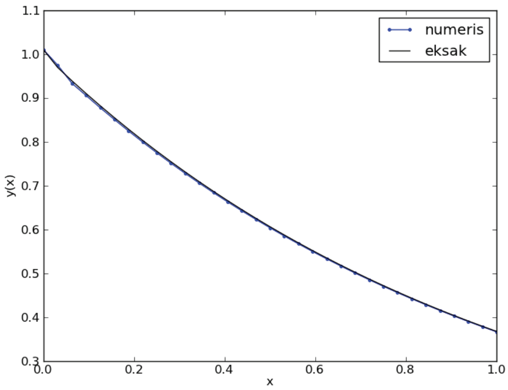
Tabel 4. Error L^∞ untuk Masalah 2

N	Skema (10)	Skema (10)&(16)	Skema (16)
32	0.005662	0.017842	0.551623
64	0.002329	0.003982	0.626381
128	0.000753	0.000940	0.630679
256	0.000210	0.000233	0.635452

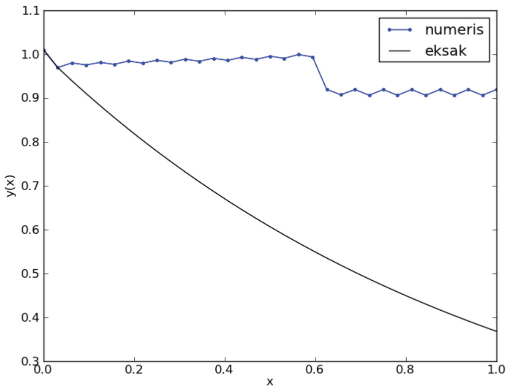
Berdasarkan hasil simulasi yang dirangkum dalam **Tabel 3** dan **Tabel 4**, metode rasional eksplisit (10) dan metode blok “(10) & (16)” berhasil dalam menyelesaikan Masalah 2. Nampak bahwa error L^1 dan error L^∞ untuk kedua metode tersebut mengecil seiring dengan membesarnya nilai N. Hal ini diperkuat dengan hasil yang ditunjukkan oleh **Gambar 4**, di mana penyelesaian numeris metode (10) hampir berhimpit dengan penyelesaian eksaknya. Metode blok “(10) & (16)” juga menghasilkan output yang serupa.

Akan tetapi, metode rasional eksplisit (16) gagal dalam menyelesaikan Masalah 2. Nampak bahwa error L^1 dan error L^∞ metode (16) sangat besar.

Hal ini diperkuat dengan oleh **Gambar 5** yang menunjukkan bahwa penyelesaian numeris metode (16) tidak konvergen ke penyelesaian eksak Masalah 2, dengan $N=32$. Penulis juga sudah mensimulasikan menggunakan nilai N yang sangat besar, yaitu $N=10^4$, tetapi hasilnya tetap tidak konvergen ke penyelesaian eksak. Metode rasional eksplisit (16) tidak bisa menyelesaikan masalah ini.



Gambar 4. Penyelesaian eksak dan numeris metode rasional eksplisit skema (10) dengan $N = 32$ untuk Masalah 2



Gambar 5. Penyelesaian eksak dan numeris metode rasional eksplisit skema (16) dengan $N = 32$ untuk Masalah 2

<u>Masalah 3</u>
Dipandang masalah nilai awal

$$y'(x) = 1 + y(x)^2, \; y(0) = 1, \tag{29}$$

untuk $x \in [0, 1]$. Masalah nilai awal ini diambil dari contoh yang dibahas oleh Teh dkk [1] serta Ramos [4]. Penyelesaian eksak masalah nilai awal ini adalah

$$y(x) = \tan(x + \pi / 4). \tag{30}$$

Perlu diperhatikan bahwa penyelesaian ini mempunyai nilai singular di titik $x = \pi / 4$ seperti yang telah dikemukakan oleh Teh dkk [1].

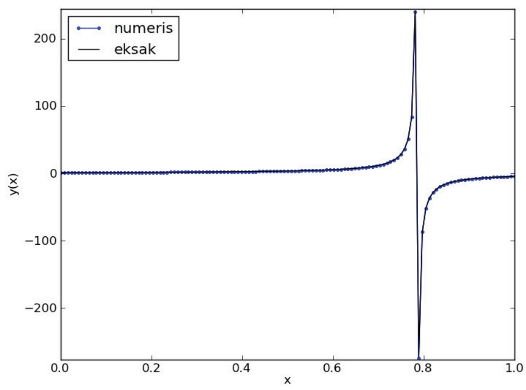
Tabel 5. Error L^1 untuk Masalah 3

N	Skema (10)	Skema (10)&(16)	Skema (16)
32	0,447268	0,447268	0,430967
64	0,070956	0,070956	0,070716
128	0,020125	0,020125	0,020014
256	0,264558	0,264558	0,263274

Tabel 6. Error L^∞ untuk Masalah 3

N	Skema (10)	Skema (10)&(16)	Skema (16)
32	13,91807	13,91807	13,38816
64	3,638573	3,638573	3,638282
128	1,200804	1,200804	1,188839
256	67,13057	6,13057	66,80165

Untuk Masalah 3 ini, ketiga metode memberikan hasil yang relatif sama, dari segi error maupun grafiknya. Error ketiga metode dapat dilihat dalam **Tabel 5** dan **Tabel 6**, sedangkan grafik fungsi penyelesaiannya ditunjukkan oleh **Gambar 6**. **Gambar 6** memberikan grafik penyelesaian eksak dan penyelesaian numeris metode blok "(10) & (16)". Kedua metode yang lain, yaitu metode (10) dan metode (16), juga menghasilkan gambar serupa.



Gambar 6. Penyelesaian eksak dan penyelesaian numeris metode blok skema "(10) & (16)" dengan $N = 128$ untuk Masalah 3. Garis vertikal pada kurva merupakan asimtot tegak.

Dari **Tabel 5** dan **Tabel 6**, nampak bahwa terjadi fluktuasi error baik error L^1 maupun L^∞ yang dihasilkan oleh ketiga metode untuk menyelesaikan Masalah 3. Teh dkk [1] berpendapat bahwa fluktuasi error metode blok "(10) & (16)" terjadi karena perbedaan tingkat keakuratan dari metode (10) dan metode (16) yang terlibat dalam metode blok tersebut. Akan tetapi, dari hasil dalam **Tabel 5** dan **Tabel 6** fluktuasi error juga terjadi apa bila Masalah 3 diselesaikan menggunakan metode (10) saja atau metode (16) saja. Oleh sebab itu, penulis meyakini bahwa fluktuasi error metode blok untuk Masalah 3, terjadi bukan karena perbedaan tingkat keakuratan dari metode (10) dan metode (16) yang terlibat dalam metode blok tersebut, tetapi karena adanya titik singular (titik $x = \pi / 4$) dalam penyelesaian Masalah 3 ini.

KESIMPULAN

Makalah ini telah memaparkan hasil penelitian terbaru tentang metode rasional eksplisit dan metode blok yang melibatkan metode-metode rasional eksplisit. Keakuratan metode rasional eksplisit sangatlah bergantung pada masalah nilai awal yang akan diselesaikan. Akibatnya, metode blok pun juga bergantung pada masalah nilai awal yang sama. Telah ditunjukkan bahwa terdapat suatu masalah nilai awal yang tidak dapat diselesaikan dengan suatu metode rasional eksplisit tertentu, tetapi masalah tersebut dapat diselesaikan dengan metode rasional eksplisit yang lainnya. Oleh sebab itu, dalam rangka menyelesaikan masalah nilai awal dengan metode rasional eksplisit, pengaruh masalah nilai awal itu sendiri lebih dominan dari pada pengaruh keakuratan formal dari metode rasional eksplisit. Lebih lanjut, diperoleh bahwa jika terdapat suatu titik singular dalam penyelesaian masalah nilai awal, maka error dari penyelesaian numeris metode rasional eksplisit dan metode blok rasional eksplisit bisa jadi besar untuk nilai panjang langkah pengintegralan yang relatif kecil.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterima kasih kepada Dr. Teh Yuan Ying dari Universiti Utara Malaysia atas suatu diskusi dan atas kiriman makalah karangan J. D. Lambert.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Y. Y. Teh, Z. Omar and K. H. Mansor, "An *A*-stable explicit rational block method for the numerical solution of initial value problem," *Proceedings of the International Conference on the Analysis and Mathematical Applications in Engineering and Science*, 19–22 Januari 2014, CSRI, Curtin University, Sarawak, Malaysia, pp. 233–241.

[2] J. D. Lambert, "Two unconventional classes of methods for stiff systems," In: R. A. Willoughby (Editor), *Stiff Differential Systems,* New York: Plenum Press, pp. 171–186, 1974.

[3] A. R. Yaakub and D. J. Evans, "New *L*-stable modified trapezoidal methods for the initial value problems," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 80, pp. 95–104, 2003.

[4] H. Ramos, "A non-standard explicit integration scheme for initial-value problems,".*Applied Mathematics and Computation*, vol. 189, pp. 710–718, 2007.

[5] Z. Zhao and E. Rong, "Reaction diffusion equation with spatio temporal delay," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, pp. 2252–2261, 2014.

[6] H. P. Gittel, M. Günther and G. Ströhmer, "Remarks on a nonlinear transport problem," *Journal of Differential Equations*, vol. 256, pp. 957–988, 2014.

[7] Z. Cai and L. Huang, "Periodic dynamics of delayed Lotka–Volterra competition systems with discontinuous harvesting policies via differential inclusions," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 54, pp. 39–56, 2013.