Ruang Vektor Eigen Suatu Matriks Atas Aljabar Max-Plus Interval

Siswanto[1)], *Ari Suparwanto*[2)], *dan M. Andy Rudhito*[3)]
[1)]*Jurusan Matematika FMIPA UNS Surakarta,*
[2)]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta*
[3)]*FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta*
e-mail :sis.mipauns@yahoo.co.id, ari_suparwanto@yahoo.com, arudhito@yahoo.co.id

Diterima 22 November 2013, disetujui untuk dipublikasikan 7 Maret 2014

Abstrak

Misalkan $\Re$ himpunan bilangan real. Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{\max} = \Re \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$. Dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota himpunan $\Re_{\max}$, ditulis $\Re_{\max}^{n\times n}$. Dibentuk himpunan $I(\Re)_{\max}$ yaitu himpunan yang anggotanya merupakan interval-interval tertutup dalam $\Re_{\max}$. Himpunan $I(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi $\bar{\oplus}$ dan $\bar{\otimes}$ disebut aljabar Max-Plus interval. Selanjutnya, dapat pula dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota himpunan $I(\Re)_{\max}$, ditulis $I(\Re)_{\max}^{n\times n}$. Misalkan $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ dan $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, matriks interval A dikatakan tak tereduksi jika untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ tak tereduksi. Jika tidak demikian matriks interval A dikatakan tereduksi. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang ruang vektor eigen suatu matriks atas aljabar Max-Plus interval.

Kata kunci : Ruang vektor eigen, Aljabar Max-Plus interval.

Eigenvector Space of a Matrix of Interval Max-Plus Algebra

Abstract

Let $\Re$ be the set of real numbers. Max-Plus Algebra is the set $\Re_{\max} = \Re \cup \{-\infty\}$ equipped with the maximum operation $\oplus$ and plus $\otimes$. The set $\Re_{\max}^{n\times n}$ is a set of $n \times n$ matrix with entries belonging to $\Re_{\max}$. Set $I(\Re)_{\max}$ i.e the set whose members are closed intervals in $\Re_{\max}$.The set $I(\Re)_{\max}$ equipped with the maximum operation $\bar{\oplus}$ and plus $\bar{\otimes}$ called interval Max-Plus algebra. Furthermore, we can also form the set of size $n \times n$ matrices whose elements are members of the set $I(\Re)_{\max}$ written $I(\Re)_{\max}^{n\times n}$. Suppose $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ and $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ where $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, the interval matrices A is irreducible if for any matrix $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ irreducible. Otherwise the interval matrix A is said reducible. In this research we will discuss eigenvector space of interval Max-Plus algebra matrix.

Keywords : Eigenvector space, Interval Max-Plus algebra.

1. Pendahuluan

Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{\max} = \Re \cup \{\varepsilon\}, \varepsilon = -\infty$ dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$. Aljabar Max-Plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan lalu lintas (Bacelli dkk., 2001). Dari himpunan $\Re_{\max}$ dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan elemen $\Re_{\max}$ dinotasikan dengan $\Re_{\max}^{n\times n}$, disebut himpunan matriks atas aljabar Max-Plus. Himpunan ini dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$ merupakan semiring idempoten (Akian, dkk., 1994; Konigsberg, 2009). Secara umum, juga didefinisikan himpunan $\Re_{\max}^{m\times n}$ yaitu himpunan matriks berukuran $m \times n$. Khusus untuk $n = 1$ diperoleh himpunan vektor atas aljabar Max-Plus ditulis $\Re_{\max}^{m}$ (Farlow, 2009). Schutter (1996) dan Subiono (2000) telah membahas tentang masalah nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$, sedangkan Butkovic dan Tam (2009) serta Tam (2010) telah membahas tentang ruang vektor eigen matriks atas aljabar Max-Plus.

Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktivitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar Max-Plus telah digeneralisasi menjadi aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Aljabar Max-Plus interval yaitu himpunan $I(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi maksimum $\bar{\oplus}$ dan $\bar{\otimes}$, sedangkan aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu himpunan $F(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi $\tilde{\oplus}$ dan

$\tilde{\otimes}$ (Rudhito, 2011). Telah dibahas juga oleh Rudhito (2011) tentang matriks atas aljabar Max-Plus interval, graf dalam aljabar Max-Plus interval serta nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar Max-Plus interval khusus untuk matriks tak tereduksi. Selain itu, Siswanto (2012) telah membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks tereduksi regular atas aljabar Max-Plus interval.

Dari uraian tersebut, menarik untuk diteliti tentang ruang vektor eigen matriks atas aljabar Max-Plus interval. Sebelum dibahas hasil penelitian ini, terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang mendukung pembahasan.

Kajian Pustaka

Berikut adalah definisi tentang aljabar Max-Plus, matriks atas aljabar Max-Plus beserta operasinya dan graf (Bacelli dkk., 2001; Farlow, 2009; Konigsberg, 2009).

Definisi 1. *Misalkan $\Re$ himpunan bilangan real, definisikan himpunan $\Re_{max} = \Re \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$. Himpunan $\Re_{max}$ yang dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$ sehingga merupakan semifield idempoten, disebut aljabar Max-Plus dan dinotasikan dengan* $\mathbb{R}_{\max} = (\Re_{\max}; \oplus, \otimes)$.

Definisi 2. *Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen dalam $\Re_{max}$ dinotasikan dengan $\Re_{\max}^{m\times n}$ yaitu $\Re_{\max}^{m\times n} = \{[A_{ij}] \mid A_{ij} \in \Re_{\max}\}$. Himpunan $\Re_{\max}^{n\times n}$ dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ ditulis $\mathbb{R}_{\max}^{n\times n} = (\Re_{\max}^{n\times n}; \oplus, \otimes)$ sehingga merupakan semiring idempoten dengan elemen netral dan elemen identitas masing-masing adalah $\varepsilon_{n\times n}$ dan $E_{n\times n}$.*

Definisi 3. *Diberikan himpunan $V \neq \emptyset$ dan $E \subseteq V \times V$ dimana V merupakan himpunan titik (node) dengan anggota berhingga dan E terdiri atas himpunan pasangan terurut titik yaitu busur (edge atau arc). Selanjutnya D = (V, E) disebut sebagai graf berarah (directed graph).*

Definisi 4. *Grafik berarah D = (V, E) yang dilengkapi fungsi bobot $w : E \to \Re_{max}$, disebut graf berarah berbobot (weighted directed graph).*

Selanjutnya disajikan konsep dari lintasan (*path*), sikel (*cycle*) dan sikel elementer (*elementary cycle*) dalam suatu graf berarah.

Definisi 5. *Misalkan D = (V, E) adalah graf berarah. Barisan $\pi(v_1\ldots, v_{p+1})$ disebut lintasan jika $v_i \in V, \forall i = 1,\ldots, p+1$ dan $(v_{1,} v_{p+1}) \in E, \forall i = 1,\ldots, p$. Lintasan $(v_1 \cdots, v_{p+1})$ dikatakan mempunyai panjang p, v_1 sebagai titik awal dan v_{p+1} sebagai titik akhir dari π.*

Definisi 6. *Misalkan D = (V, E, w) adalah graf berarah berbobot dan $\pi(v_1\ldots, v_{p+1})$ lintasan dari v_1 ke v_{p+1}, bobot lintasan π didefinisikan sebagai $w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) + \ldots + w(v_p, v_{p+1})$.*

Definisi 7. *Misalkan bahwa D = (V, E) adalah graf berarah maka $\sigma(v_1\ldots, v_{p+1})$ disebut sikel jika σ adalah lintasan dan $v_1 = v_{p+1}$.*

Definisi 8. *Misalkan D = (V, E) adalah graf berarah maka $\sigma(v_1\ldots, v_{p+1})$ disebut sikel elementer jika σ adalah sikel dan $v_i \neq v_j$ untuk semua i, j = 1, …, p dan $i \neq j$.*

Definisi 9. *Misalkan bahwa D = (V, E) adalah graf berarah dan $u,v \in V$. Maka v dikatakan dapat dicapai dari u jika ada lintasan dari u ke v.*

Definisi 10. *Graf berarah D = (V, E) dikatakan terhubung kuat (strongly connected) jika u dapat dicapai dari v untuk semua $u,v \in V$.*

Definisi 11. *Misalkan $A = [A_{ij}] \in \Re_{\max}^{n\times n}$, graf berarah berbobot yang bersesuaian dengan A adalah D_A = $(N, E = \{(i,j) | A_{ij} > \varepsilon\}, w)$ dimana $w(i,j) = A_{ji}$ untuk setiap $(i,j) \in E$.*

Definisi 12. *Misalkan $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$ dan D_A merupakan graf berarah berbobot yang bersesuaian dengan A. Matriks A disebut tak tereduksi jika D_A terhubung kuat. Jika tidak demikian A disebut tereduksi.*

Definisi 13. *Misalkan $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$, didefinisikan matriks $\Gamma(A) = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \cdots$.*

Definisi 14. *Misalkan $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$ dan D_A merupakan graf berarah berbobot yang bersesuaian dengan A. Misalkan σ adalah sikel dalam D_A. Definisikan $\mu(\sigma, A) = \dfrac{w(\sigma, A)}{l(\sigma)}$, dimana $w(\sigma)$ merupakan bobot dari sikel dan $l(\sigma)$ merupakan panjang dari sikel. Bilangan $\mu(\sigma,A)$ disebut rata-rata bobot dari sikel σ dan $\lambda(A) = \max_{\sigma}\mu(\sigma,A)$ yaitu rata-rata bobot maksimum dari A.*

Teorema 1. *Jika $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$ dan $\lambda(A) > \varepsilon$, $\forall \alpha \in \Re$ maka $\lambda(\alpha \otimes A) = \alpha \otimes \lambda(A)$.*

Definisi 15. *Misalkan $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$, matriks A dikatakan definit jika $\lambda(A) = 0$.*

Teorema 2. *Jika* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$ *definit maka* $\Gamma(A) = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes n}$.

Berdasarkan Teorema 1, untuk setiap matriks tak tereduksi A dapat dibentuk $A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A$, dengan A_λ definit. Dengan demikian, $\Gamma(A_\lambda) = A_\lambda \oplus A_\lambda^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus A_\lambda^{\otimes n}$.

Selanjutnya, disajikan tentang konsep-konsep yang berhubungan dengan nilai eigen dalam aljabar Max-Plus.

Definisi 16. *Diberikan* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$ *dan* $\lambda \in \Re_{\max}$ *didefinisikan :*

a. $V(A,\lambda) = \{x \in \Re_{\max}^{n} \mid A \otimes x = \lambda \otimes x\}$,
b. $\Lambda(A) = \{\lambda \in \Re_{\max} \mid V(A,\lambda) \neq \{\varepsilon_{n\times 1}\}\}$,
c. $V(A) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(A)} V(A,\lambda)$,
d. $V^{+}(A,\lambda) = V(A,\lambda) \bigcap \Re^{n}$,
e. $V^{+}(A) = V(A) \bigcap \Re^{n}$.

Proposisi 1. *Diberikan* $A, B \in \Re_{\max}^{n\times n}$, $\alpha \in \Re, \lambda, \mu \in \Re_{\max}$ λ, μ $\in$ $\Re_{\max}$ *dan* $x, y \in \Re_{\max}^{n}$ *maka*

a. $V(\alpha \otimes A) = V(A)$,
b. $\Lambda(\alpha \otimes A) = \alpha \otimes \Lambda(A)$,
c. $V(A,\lambda) \bigcap V(B,\mu) \subseteq V(A \otimes B, \lambda \otimes \mu)$,
d. $V(A,\lambda) \bigcap V(B,\mu) \subseteq V(A \oplus B, \lambda \oplus \mu)$.

Definisi 17. *Misalkan* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}, N = \{1,2,\cdots,n\}$. *Definisikan* $E(A) = \{i \in N \mid \exists \sigma = (i = i_1, i_2, \cdots, i_k, i_1)$ *dalam* $D_A \ni \mu(\sigma, A) = \lambda(A)\}$.

Anggota $E(A)$ disebut sebagai titik-titik eigen atau titik-titik kritis dari graf berarah berbobot yang bersesuaian dengan A. Sikel σ disebut sebagai sikel kritis jika $\mu(\sigma,A) = \lambda(A)$. Gabungan himpunan-himpunan busur dari sikel kritis membentuk graf berarah $C(A)$ dan $C(A)$ disebut sebagai graf berarah kritis dari A.

Lema 1. *Diberikan* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$. *Jika* $C(A)$ *merupakan graf berarah kritis dari A maka semua sikel di* $C(A)$ *adalah sikel kritis.*

Dua titik i dan j dalam $C(A)$ ekuivalen jika i dan j keduanya termuat dalam sikel kritis yang sama dari A. Relasi ini dinotasikan dengan $i \sim j$ dan merupakan relasi ekuivalensi dalam $E(A)$.

Lema 2. *Diberikan* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$. *Jika* $\lambda(A) = \varepsilon$, *maka* $\Lambda(A) = \{\varepsilon\}$ *merupakan nilai eigen dari A yang bersesuaian dengan vektor* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \Re_{\max}^{n}$ *sehingga* $x_j = \varepsilon$ *jika kolom ke-j dari A tidak sama dengan vektor* ε, $j \in N$.

Teorema 3. *Misalkan* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}, \lambda(A)$ *nilai eigen dari matriks A. Jika* $\lambda(A) > \varepsilon$ *maka paling banyak terdapat n vektor eigen yang bersesuaian dengan* $\lambda(A)$ *yang dapat ditemukan di antara* g_k *kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$. *Kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$ *yang elemen diagonalnya 0 merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen* $\lambda(A)$. *Basis dari* $V(A,\lambda(A))$ *diperoleh dengan mengambil tepat satu* g_k *untuk setiap kelas ekuivalensi di dalam* $(E(A), \sim)$.

Teorema 4. *Jika* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}, A \neq \varepsilon_{n\times n}$ *dan* $V^{+}(A) \neq \emptyset$ *maka* $\lambda(A) > \varepsilon$ *dan* $A \otimes x = \lambda(A) \otimes x$, $\forall x \in V^{+}(A)$.

Teorema 5. *Jika* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}, A \neq \varepsilon_{n\times n}$, *maka berlaku :*

a. $V^{+}(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow \lambda(A) > \varepsilon$ *dan di dalam* $D_A, \forall j \in N, \exists i \in E(A)$ *sehingga* $j \to i$.
b. *Jika* $V^{+}(A) \neq \emptyset$ *maka* $V^{+}(A) = \{\Sigma_{j\in E(A)}^{\oplus} \alpha_j \otimes g_j;$ $\alpha_j \in \Re\}$ *dimana* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$.

Teorema 6. *Jika* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$, $\lambda(A) > \varepsilon$, $\Gamma(A_\lambda) = (g_{ij})$ *dan* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$ *maka*

a. $i \in E(A) \Leftrightarrow g_{ii} = 0$,
b. *Jika* $i, j \in (A)$ *maka* $g_i = \alpha \otimes g_j$ *untuk suatu* $\alpha \in \Re$ *jika dan hanya jika* $i \sim j$.

Akibat 1. *Misalkan* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$. *Jika* $\lambda(A) > \varepsilon$, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$ *dan* $V^{+}(A) \neq \emptyset$, *maka* $V^{+}(A) = \{\Sigma_{j\in E^*(A)}^{\oplus} \alpha_j \otimes g_j; \alpha_j \in \Re\}$ *dengan* $E^*(A)$ *adalah suatu himpunan maksimal titik-titik kritis dari A yang tidak ekuivalen.*

Teorema 7. *Setiap matriks tak tereduksi* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}, (n > 1)$ *mempunyai nilai eigen tunggal yaitu* $\lambda(A)$ *dan* $V(A) - \{\varepsilon\} = V^{+}(A) = \{\Sigma_{j\in E^*(A)}^{\oplus} \alpha_j \otimes g_j;$ $\alpha_j \in \Re\}$ *dimana* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$.

Matriks $A_{1\times 1} = [\varepsilon]$ merupakan matriks tak tereduksi dan $V(A) = V^{+}(A) = \Re$. Untuk matriks tak tereduksi $A_{n\times n}$ dengan $n > 1$, bobot terbesar dari semua lintasan (i,j) tidak sama dengan ε. Oleh karena itu, elemen-elemen $\Gamma(A_\lambda)$ berhingga dan $V(A) = V^{+}(A) \bigcup \{\varepsilon\} = \{\Gamma(A_\lambda) \otimes z \mid z \in \Re_{\max}^{n}$, $z_j = \varepsilon, \forall j \notin E(A)\}$

Selanjutnya, dibicarakan konsep aljabar Max-Plus interval, matriks, graf di dalam aljabar Max-Plus interval.

Interval tertutup x dalam $\Re_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\Re_{\max}$ yang berbentuk $x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \Re_{\max} \mid \underline{x} \leq_m x \leq_m \overline{x}\}$. Interval x dalam $\Re_{\max}$ disebut interval Max-Plus. Suatu bilangan $x \in \Re_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[\underline{x}, \overline{x}]$.

Definisi 18. *Definisikan* $I(\Re)_{\max} = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \Re, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x}\} \cup \{\varepsilon\}$ *dengan* $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. *Pada himpunan* $I(\Re)_{\max}$ *didefinisikan operasi* $\overline{\oplus}$ *dan* $\overline{\otimes}$ *dengan* $x \overline{\oplus} y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$ *dan* $x \overline{\otimes} y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$ *untuk setiap* $x, y \in I(\Re)_{\max}$. *Himpunan* $I(\Re)_{\max}$ *dilengkapi dengan operasi* $\overline{\oplus}$ *dan* $\overline{\otimes}$ *merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral* $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ *dan elemen satuan* $\overline{0} = [0, 0]$. *Selanjutnya disebut aljabar Max-Plus interval dan dinotasikan dengan* $I(\mathbb{R})_{\max} = (I(\Re)_{\max}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$.

Definisi 19. *Himpunan matriks berukuran* $m \times n$ *dengan elemen-elemen dalam* $I(\Re)_{\max}$ *dinotasikan dengan* $I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ *yaitu* $I(\Re)_{\max}^{m\times n} = \{A = [A_{ij}] \mid A_{ij} \in I(\Re)_{\max},\ i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n\}$. *Matriks anggota* $I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ *disebut matriks interval Max-Plus. Selanjutnya matriks interval Max-Plus cukup disebut dengan matriks interval.*

Definisi 20. *Untuk* $A \in I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ *didefinisikan matriks* $\underline{A} = [\underline{A}_{ij}] \in \Re^{m\times n}$ *dan* $\overline{A} = [\overline{A}_{ij}] \in \Re^{m\times n}$ *masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A.*

Definisi 21. *Diberikan matriks interval* $A \in I(\Re)_{\max}^{m\times n}$, *dengan* $\underline{A}$ *dan* $\overline{A}$ *masing-masing adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks A. Didefinisikan interval matriks dari A yaitu* $[\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \Re_{\max}^{m\times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}\}$ *dan* $I(\Re_{\max}^{m\times n})_b = \{[\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in I(\Re)_{\max}^{m\times n}\}$.

Semiring $I(\mathbb{R})_{\max}^{n\times n} = (I(\Re)_{\max}^{n\times n}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ isomorf dengan semiring $I(\mathbb{R}_{\max}^{n\times n})_b = (I(\Re_{\max}^{n\times n})_b; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ dengan pemetaan $f : I(\Re)_{\max}^{n\times n} \to I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$, $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}], \forall A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ sedangkan semimodul $I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ atas $I(\Re)_{\max}$ isomorf dengan semimodul $I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ atas $I(\Re)_{\max}$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{\max}^{m\times n})_b$ disebut interval matriks yang bersesuaian dengan interval $A \in I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Akibat isomorfisma di atas maka berlaku $\alpha \overline{\otimes} A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$, $A \overline{\oplus} B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Definisi 22. *Definisikan* $I(\Re)_{\max}^{n} = \{x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \mid x_j \in I(\Re)_{\max}; i = 1, 2, \cdots, n\}$. *Himpunan* $I(\Re)_{\max}^{n}$ *dapat dipandang sebagai himpunan* $I(\Re)_{\max}^{n\times 1}$. *Unsur-unsur dalam* $I(\Re)_{\max}^{n}$ *disebut vektor interval dalam* $I(\Re)_{\max}^{n}$. *Vektor interval x bersesuaian dengan interval vektor* $[\underline{x}, \overline{x}]$ *yaitu* $x \approx [\underline{x}, \overline{x}]$.

Selanjutnya disajikan konsep graf berarah berbobot interval. Misalkan $D = (N,E)$ adalah graf berarah dengan $N = \{1,2,\ldots,n\}$ dan $E \subseteq N \times N$. Graf berarah dikatakan berbobot interval jika setiap busur $(j,i) \in E$ dikawankan dengan suatu interval tertutup bilangan real $A_{ij} \in (I(\Re)_{\max} - \{[\varepsilon, \varepsilon]\})$. Interval bilangan real A_{ij} disebut bobot interval busur (j,i), dinotasikan dengan $w(i,j)$. Graf preseden (graf komunikasi) dari matriks $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ didefinisikan sebagai graf berarah berbobot interval $D_A = (N, E)$ dengan $N = \{1,2,\ldots,n\}$ dan $E = \{(j,i) \mid w(i,j) = A_{ij} \neq [\varepsilon, \varepsilon]\}$. Sebaliknya untuk setiap graf berarah berbobot interval $D_A = (N, E)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ yang disebut matriks bobot interval graf D dengan $\begin{cases} w(j,i), & \text{jika } (i,j) \in E \\ [\varepsilon, \varepsilon], & \text{jika } (i,j) \notin E \end{cases}$.

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini disajikan hasil utama dari penelitian yaitu tentang ruang vektor eigen dan basis suatu matriks atas aljabar Max-Plus interval.

Definisi 23. *Diberikan* $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ *dengan* $A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ *dan* $\lambda \approx [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \in I(\Re)_{\max}$, *didefinisikan :*

a. $V(A, \lambda) = \{x \in I(\Re)_{\max}^{n} \mid A \overline{\otimes} x = \lambda \overline{\otimes} x\}$ *dan* $V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) = \{\in I(\Re_{\max}^{n})_b \mid \underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{\lambda} \otimes \underline{x};\ \overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{\lambda} \otimes \overline{x}\}$

b. $\Lambda(A) = \{\lambda \in I(\Re)_{\max} \mid V(A, \lambda) \neq \{\varepsilon_{n\times 1}\}, \varepsilon_{n\times 1} = (\varepsilon, \varepsilon, \cdots, \varepsilon)^T\}$ *dan* $\Lambda(\underline{A}, \overline{A}) = \{[[\underline{\lambda}], [\overline{\lambda}]] \in I(\Re_{\max})_b \mid V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) \neq \{[\underline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}]\}\}$

c. $V(A) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(A)} V(A, \lambda)$ *dan* $V([\underline{A}, \overline{A}]) = \bigcup_{[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \in \Lambda([\underline{A}, \overline{A}])} V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}])$,

d. $V^+(A, \lambda) = V(A, \lambda) \cap I(\Re)^n$ *dan* $V^+([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) = V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) \cap I(\Re^n)_b$

e. $V^+(A) = V(A) \bigcap I(\Re)^n$ *dan* $V^+([\underline{A}, \overline{A}] = V([\underline{A}, \overline{A}]) \bigcap I(\Re^n)_b$

Berdasarkan isomorfisma $I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ *dan* $I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ *diperoleh :*

i. $V(A,\lambda) \approx V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}])$,

ii. $\Lambda(A) \approx \Lambda([\underline{A}, \overline{A}])$,

iii. $V(A) \approx V([\underline{A}, \overline{A}])$,

iv. $V^+(A,\lambda) \approx V^+([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}])$,

v. $V^+(A) \approx V^+([\underline{A}, \overline{A}])$.

Proposisi 2. *Diberikan* $A, B \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$, $\alpha = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \in I(\Re), [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}], [\underline{\mu}, \overline{\mu}] \in I(\Re)_{\max}$ *maka*

a. $V(\alpha \overline{\otimes} A) = V(A)$.

b. $\Lambda(\alpha \overline{\otimes} A) = \alpha \overline{\otimes} \Lambda(A)$

c. $V(A,\lambda) \bigcap V(B,\mu) \subseteq V(A \overline{\otimes} B, \lambda \overline{\otimes} \mu)$

d. $V(A,\lambda) \bigcap V(B,\mu) \subseteq V(A \overline{\oplus} B, \lambda \overline{\oplus} \mu)$.

Bukti :

a. Berdasarkan Definisi 23, $V(\alpha \overline{\otimes} A) \approx V([\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}])$ dan $V(A) \approx V([\underline{A}, \overline{A}])$. Menurut Proposisi 1, $V(\underline{\alpha} \otimes \underline{A}) = V(\underline{A})$ dan $V(\overline{\alpha} \otimes \overline{A}) = V(\overline{A})$, berarti $V([\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]) = V([\underline{A}, \overline{A}])$. Oleh karena itu, $V(\alpha \overline{\otimes} A) = V(A)$.

b. Menurut Definisi 23 $\Lambda(\alpha \overline{\otimes} A) \approx \Lambda([\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}])$ dan $\alpha \overline{\otimes} \Lambda(A) \approx [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \overline{\otimes} \Lambda([\underline{A}, \overline{A}]) \approx [\underline{\alpha} \otimes \Lambda(\underline{A}), \overline{\alpha} \otimes \Lambda(\overline{A})]$. Menurut Proposisi 1, $\Lambda(\underline{\alpha} \otimes \underline{A}) = \underline{\alpha} \otimes \Lambda(\underline{A})$ dan $(\overline{\alpha} \otimes \overline{A}) = \overline{\alpha} \otimes \Lambda(\overline{A})$. Oleh karena itu, $\Lambda(\alpha \overline{\otimes} A) = \alpha \overline{\otimes} \Lambda(A)$.

c. Menurut Definisi 23, $V(A,\lambda) \approx V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}])$ dan $V(B,\mu) \approx V([\underline{B}, \overline{B}], [\underline{\mu}, \overline{\mu}])$ sedangkan

$$V(A \overline{\otimes} B, \lambda \overline{\otimes} \mu) \approx V([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \overline{\otimes} [\underline{\mu}, \overline{\mu}])$$
$$= V([\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}], [\underline{\lambda} \otimes \overline{\lambda}, \underline{\mu} \otimes \overline{\mu}]).$$

Menurut Proposisi 1, $V(\underline{A}, \underline{\lambda}) \bigcap V(\underline{B}, \underline{\mu}) \subseteq V(\underline{A} \otimes \underline{B}, \underline{\lambda} \otimes \underline{\mu})$ dan $V(\overline{A}, \overline{\lambda}) \bigcap V(\overline{B}, \overline{\mu}) \subseteq V(\overline{A} \otimes \overline{B}, \overline{\lambda} \otimes \overline{\mu})$ maka $V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) \bigcap V([\underline{B}, \overline{B}], [\underline{\mu}, \overline{\mu}]) \subseteq V([\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}], [\underline{\lambda} \otimes \overline{\lambda}, \underline{\mu} \otimes \overline{\mu}])$

Oleh karena itu, $V(A,\lambda) \bigcap V(B,\mu) \subseteq V(A \overline{\otimes} B, \lambda \overline{\otimes} \mu)$.

d. Menurut Definisi 23, bahwa $V(A,\lambda) \approx V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}])$ dan $V(B,\mu) \approx V([\underline{B}, \overline{B}], [\underline{\mu}, \overline{\mu}])$ sedangkan

$$V(A \overline{\oplus} B, \lambda \overline{\otimes} \mu) \approx V([\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \overline{\oplus} [\underline{\mu}, \overline{\mu}])$$
$$= V([\underline{A}, \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}], [\underline{\lambda} \oplus \overline{\lambda}, \underline{\mu} \oplus \overline{\mu}]).$$

Menurut Proposisi 1, $V(\underline{A}, \underline{\lambda}) \bigcap V(\underline{B}, \underline{\mu}) \subseteq V(\underline{A} \oplus \underline{B}, \underline{\lambda} \oplus \underline{\mu})$ dan $V(\overline{A}, \overline{\lambda}) \bigcap V(\overline{B}, \overline{\lambda}) \subseteq V(\overline{A} \oplus \overline{B}, \overline{\lambda} \oplus \overline{\mu})$ maka $V([\underline{A}, \overline{A}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) \bigcap V([\underline{B}, \overline{B}], [\underline{\mu}, \overline{\mu}] \subseteq V([\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}], [\underline{\lambda} \oplus \overline{\lambda}, \underline{\mu} \oplus \overline{\mu}])$.

Oleh karena itu, $V(A,\lambda) \bigcap V(B,\mu) \subseteq V(A \overline{\oplus} B, \lambda \overline{\oplus} \mu)$. ■

Definisi 24. *Misalkan* $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}, A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(R_{\max}^{n\times n})_b$ *dan N = {1,2,…, n} definisikan*

i. $E(A) = \{i \in N \mid \exists \sigma = (i = i_1, i_2, \cdots, i_k, i_1)$ *dalam* $D_A \ni \mu(\sigma, A) = \lambda(A)\}$,

ii. $E([\underline{A}, \overline{A}) = \{i \in N \mid \exists \sigma = (i = i_1, i_2, \cdots, i_k, i_1)$ *dalam* D_A *dan* $D_{\overline{A}} \ni \mu(\sigma, \underline{A}) = \underline{\lambda}(\underline{A})$ *dan* $\mu(\sigma, \overline{A}) = \overline{\lambda}(\overline{A})\}$, *dan* $E(A) = E([\underline{A}, \overline{A}])$.

Anggota $E(A)$ disebut sebagai titik-titik eigen atau titik-titik kritis dari graf berarah berbobot interval yang bersesuaian dengan *A*. Sikel σ disebut sebagai sikel kritis jika $\mu(\sigma,A) = \lambda(A)$. Dari titik-titik kritis dan busur-busur semua sikel kritis, dapat dibuat graf berarah *C*(*A*) disebut graf berarah kritis dari A.

Lema 3. *Misalkan* $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$. *Jika C(A) adalah graf berarah kritis dari A maka semua sikel dalam C(A) merupakan sikel kritis.*

Bukti :

Karena *C*(*A*) adalah graf berarah kritis dari *A*, sehingga *C*(*A*) merupakan gabungan himpunan busur yang merupakan sikel kritis. Dengan demikian, sirkuit dalam *C*(*A*) merupakan sikel kritis. ■

Dua titik *i* dan *j* dalam *C*(*A*) dikatakan ekuivalen jika *i* dan *j* keduanya termuat dalam sikel kritisyang sama dari *A* dinotasikan *i* ~ *j*. Dapat dibuktikan bahwa ~ merupakan relasi ekuivalensi di dalam *E*(*A*).

Lema 4. *Diberikan* $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$. *Jika* $\lambda(A) = [\varepsilon,\varepsilon]$ *maka* $\Lambda(A) = \{[\varepsilon,\varepsilon]\}$ *dan vektor-vektor eigen dari matriks A adalah vektor* $[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in I(\Re)_{\max}^n$ *sehingga* $x_j = [\varepsilon,\varepsilon]$ *bila kolom ke-j dari matriks A tidak sama dengan vektor* $\varepsilon, j \in N$.

Bukti :

Diketahui $\lambda(A) = [\varepsilon,\varepsilon]$. Untuk matriks batas bawah $\underline{A}$, $\underline{\lambda}(\underline{A}) = \varepsilon$. Menurut Lema 2, $\Lambda(\underline{A}) = \{\varepsilon\}$ dan vektor-vektor eigen dari matriks $\underline{A}$ adalah vektor

$[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in \Re^n_{\max}$ sehingga $\underline{x}_j = \varepsilon$. bila kolom ke-$j$ dari matriks $\underline{A}$ tidak sama dengan vektor $\underline{\varepsilon}, j \in N$. Demikian juga untuk matriks batas atas $\overline{A}$. Oleh karena itu, diperoleh $\Lambda(A) \approx \Lambda([\underline{A}, \overline{A}] = \{[\varepsilon], [\varepsilon]\}$ dan vektor-vektor eigen dari matriks A adalah vektor $[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \approx [[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots \underline{x}_n]^T, [\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n]^T]$ sehingga $x_j \approx [[\varepsilon], [\varepsilon]]$ bila kolom ke-j dari matriks A tidak sama dengan vektor $\varepsilon \approx [\underline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}], j \in N$. ■

Lema 4 menjamin penyelesaian untuk $\lambda(A) = [\varepsilon,\varepsilon]$. Selanjutnya, akan dibahas untuk $[\varepsilon,\varepsilon] \prec_m [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})] = \lambda(A)$. Misalkan $A \in I(\Re)^{n \times n}_{\max}$, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re^{n \times n}_{\max})_b$ dan $\lambda(A)$ merupakan nilai eigen matriks A yang memenuhi $[\varepsilon,\varepsilon] \prec_m [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})] = \lambda(A)$. Karena $\underline{\lambda}(\underline{A})$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A})$ masing-masing nilai eigen matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ dengan $\underline{\lambda}(\underline{A}) > \varepsilon$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A}) > \varepsilon$ maka dapat ditentukan matriks-matriks $\Gamma(\underline{A}_\lambda) = (\underline{g}_{ij})$ dan $\Gamma(\overline{A}_\lambda) = (\overline{g}_{ij})$.

Definisi 25. *Misalkan* $\underline{g}_k$ *dan* $\overline{g}_k, k = 1, 2, \cdots, n$ *masing-masing adalah kolom-kolom matriks* $\Gamma(\underline{A}_\lambda)$ *dan* $\Gamma(\overline{A}_\lambda)$. *Dibentuk matriks* $\Gamma(A_\lambda)$ *dengan beberapa cara, salah satunya bahwa kolom-kolom matriks* $\Gamma(A_\lambda)$ *ditentukan sebagai berikut :*

i. *Jika pasangan* $\underline{g}_k$ *dan* $\overline{g}_k$ *memenuhi* $\underline{g}_k \preceq_m \overline{g}_k, \forall k = 1, 2, \cdots, n$ *maka diperoleh satu kolom yaitu vektor interval* $g_k \approx [\underline{g}_k, \overline{g}_k]$.

ii. *Jika pasangan* $\underline{g}_k$ *dan* $\overline{g}_k$ *tidak memenuhi* $\underline{g}_k \preceq_m \overline{g}_k, \forall k = 1, 2, \cdots, n$ *dapat dibentuk* $\overline{g}^*_k = \delta \otimes \overline{g}_k$ *dengan* $\delta = maks_i((\overline{g}_k)_i - (\underline{g}_k)_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ *sehingga diperoleh satu kolom yaitu vektor interval* $g_k \approx [\underline{g}_k, \overline{g}^*_k]$.

Oleh karena itu, matriks $\Gamma(A_\lambda) = [g_1, g_2 \cdots g_n]$.

Teorema 8. *Misalkan* $A \in I(\Re)^{n \times n}_{\max}, A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re^{n \times n}_{\max})_b$ *dan* $\lambda(A)$ *merupakan nilai eigen matriks A. Jika* $[\varepsilon,\varepsilon] \prec_m \lambda(A)$ *maka kolom-kolom matriks* $\Gamma(A_\lambda)$ *dengan batas bawah elemen diagonalnya 0 merupakan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan* $\lambda(A)$. *Selanjutnya, basis dari* $V(A,\lambda)$ *diperoleh dengan mengambil satu* g_k *untuk setiap kelas ekuivalensi di dalam* $(E(A),\sim)$.

Bukti :

Diketahui $A \in I(\Re)^{n \times n}_{\max}, A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re^{n \times n}_{\max})_b$ dan $\lambda(A) = [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})]$ nilai eigen matriks A, dengan $\underline{\lambda}(\underline{A})$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A})$ masing-masing nilai eigen matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$. Karena $[\varepsilon,\varepsilon] \prec_m [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})] = \lambda(A)$ maka $\underline{\lambda}(\underline{A}) > \varepsilon$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A}) > \varepsilon$ sehingga dapat ditentukan matriks $\Gamma(\underline{A}_\lambda) = (\underline{g}_{ij})$ dan $\Gamma(\overline{A}_\lambda) = (\overline{g}_{ij})$. Misalkan $\underline{g}_k$ dan $\overline{g}_k, k = 1, 2, \cdots, n$, masing-masing adalah kolom-kolom matriks matriks $\Gamma(\underline{A}_\lambda)$ dan $\Gamma(\overline{A}_\lambda)$. Menurut Definisi 25 dan Teorema 3 dapat diperoleh sejumlah n vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda(A)$ dari kolom-kolom matriks $\Gamma(A_\lambda)$ dengan batas bawah elemen diagonal 0. Basis dari $V(A,\lambda)$ diperoleh dengan mengambil satu vektor interval g_k untuk setiap kelas ekuivalensi di dalam $(E(A),\sim)$. ■

Teorema 9. *Misalkan* $A \in I(\Re)^{n \times n}_{\max}, A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re^{n \times n}_{\max})_b$ *dan A bukan matriks yang setiap elemennya* $[\varepsilon,\varepsilon]$ *dan* $V^+(A) \neq \varnothing$ *maka* $\varepsilon \prec_m \lambda(A)$ *dan* $A \overline{\otimes} x = \lambda(A) \overline{\otimes} x, \forall x \in V^+(A)$.

Bukti :

Perhatikan matriks batas bawah dan matriks batas atas $\underline{A}$ dan $\overline{A}$. Karena A bukan matriks yang setiap elemennya $[\varepsilon,\varepsilon]$ dan $V^+(A) \neq \varnothing$, berarti $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ bukan matriks yang setiap elemennya ε dan $V^+(\underline{A}) \neq \varnothing, V^+(\overline{A}) \neq \varnothing$. Menurut Teorema 4, $\underline{\lambda}(\underline{A}) > \varepsilon$, $\overline{\lambda}(\overline{A}) > \varepsilon$ dan $\underline{A} \otimes \underline{x} = \underline{\lambda}(\underline{A}) \otimes \underline{x}$, $\overline{A} \otimes \overline{x} = \overline{\lambda}(\overline{A}) \otimes \overline{x}$; $\underline{x} \in V^+(\underline{A}), \overline{x} \in V^+(\overline{A})$. Oleh karena itu, diperoleh $\varepsilon = [\varepsilon,\varepsilon] \prec_m [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})] = \lambda(A)$ dan $A \overline{\otimes} x = \lambda(A) \overline{\otimes} x, \forall x \in V^+(A)$ dengan $x \approx [\underline{x}, \overline{x}], x \in V^+(A)$. ■

Selanjutnya akan disajikan salah satu hasil khusus di dalam aljabar Max-Plus interval.

Teorema 10. *Misalkan* $A \in I(\Re)^{n \times n}_{\max}, A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re^{n \times n}_{\max})_b$ *dan A bukan matriks yang setiap elemennya* [ε,ε], *maka berlaku :*

a. $V^+(A) \neq \varnothing \Leftrightarrow \varepsilon \prec_m \lambda(A)$ *dan di dalam* $D_A, \forall j \in N, \exists i \in E(A)$ *sedemikian sehingga* $j \to i$.

b. *Jika* $V^+(A) \neq \varnothing$ *maka* $V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\otimes}}_{j \in E(A)} \alpha_j \overline{\otimes} g_j;$ $\alpha_j \in I(\Re)\}$ *dimana* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$.

Bukti :

Misalkan $A \in I(\Re)^{n \times n}_{\max}$,

$A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ dan A bukan matriks yang setiap elemennya $[\varepsilon,\varepsilon]$. Oleh karena itu, matriks batas bawah dan batas atas atas $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ bukan matriks yang setiap elemennya ε. Menurut Teorema 5 dipenuhi :

(a) $V^+(\underline{A}) \neq \varnothing \Leftrightarrow \lambda(\underline{A}) > \varepsilon$ dan di dalam $D_{\underline{A}}, \forall j \in N, \exists i \in E(\underline{A})$ sedemikian sehingga $j \rightarrow i$. Demikian juga, $V^+(\overline{A}) \neq \varnothing \Leftrightarrow \lambda(\overline{A}) > \varepsilon$ dan di dalam $D_{\overline{A}}, \forall j \in N, \exists i \in E(\overline{A})$ sedemikian sehingga $j \rightarrow i$.

(b) Jika $V^+(\underline{A}) \neq \varnothing$ maka $V^+(\underline{A}) = \{\Sigma^{\otimes}_{j\in E(\underline{A})} \underline{\alpha}_j \otimes \underline{g}_j;$ $\underline{\alpha}_j \in I(\Re)\}$ dimana $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \cdots, \underline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(\underline{A}_\lambda)$. Demikian juga, jika $V^+(\overline{A}) \neq \varnothing$ maka $V^+(\overline{A}) = \{\Sigma^{\otimes}_{j\in E(\overline{A})} \overline{\alpha}_j \otimes \overline{g}_j;$ $\overline{\alpha}_j \in \Re\}$ dimana $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(\overline{A}_\lambda)$. ■

Dari (a) diperoleh, $V^+(A) \neq \varnothing \Leftrightarrow \varepsilon \prec_m \lambda(A)$ dan di dalam $D_A, \forall j \in N, \exists i \in E(A)$ sedemikian sehingga $j \rightarrow i$. Dari (b) dan berdasarkan Definisi 25 dapat dibentuk matriks $\Gamma(A_\lambda)$, sehingga jika $V^+(A) \neq \varnothing$ maka $V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\otimes}}_{j\in E(A)} \alpha_j \overline{\otimes} g_j; \alpha_j \in I(\Re)\}$ dimana $g_1, g_2, \ldots, g_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(A_\lambda)$.

Teorema 10 memberikan syarat perlu dan cukup adanya vektor eigen berhingga dan bagaimana membentuk himpunan vektor eigen berhingga.

Teorema 11. *Misalkan* $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$, $\varepsilon \prec_m \lambda(A)$ *dan* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$, $= (g_{ij})$ *maka*

i. $i \in E(A) \Leftrightarrow \underline{g}_{ii} = 0$.

ii. *Jika* $i, j \in E(A)$ *maka* $g_i = \alpha \overline{\otimes} g_j$ *untuk suatu* $\alpha \in I(\Re)$ *jika dan hanya jika* $i \sim j$.

Bukti :

Perhatikan matriks batas bawah dan matriks batas atas $\underline{A}$ dan $\overline{A}$, berarti $\lambda(\underline{A}) > \varepsilon$, $\lambda(\overline{A}) > \varepsilon$, $\Gamma(\underline{A}_\lambda) = (\underline{g}_{ij})$ dan $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \cdots, \underline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(\underline{A}_\lambda)$. Demikian juga $\Gamma(\overline{A}_\lambda) = (\overline{g}_{ij})$ dan $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(\overline{A}_\lambda)$. Menurut Teorema 6 dipenuhi :

a. $i \in E(\underline{A}) \Leftrightarrow \underline{g}_{ii} = 0$ dan $i \in E(\overline{A}) \Leftrightarrow \overline{g}_{ii} = 0$. Berdasarkan Definisi 25, diperoleh $i \in E(A) \Leftrightarrow g_i = [\underline{g}_{ii}, \overline{g}_{ii}] = [0,0]$ atau $g_i = [\underline{g}_{ii}, \overline{g}^*_{ii}] = [0,\delta]$. Oleh karena itu, $i \in E(A) \Leftrightarrow \underline{g}_{ii} = 0$.

b. Jika $i, j \in E(\underline{A})$ maka $\underline{g}_i = \underline{\alpha} \otimes \underline{g}_j$ untuk suatu $\underline{\alpha} \in I(\Re)$ jika dan hanya jika $i \sim j$. Demikian juga, jika $i, j \in E(\overline{A})$ maka $\overline{g}_i = \overline{\alpha} \otimes \overline{g}_j$ atau $\overline{g}^*_i = \overline{\alpha} \otimes \overline{g}^*_j$ untuk suatu $\overline{\alpha} \in I(\Re)$ jika dan hanya jika $i \sim j$. Oleh karena itu, jika $i, j \in E(A)$ maka $g_i = \alpha \overline{\otimes} g_j$ untuk suatu $\alpha \in I(\Re)$ jika dan hanya jika $i \sim j$. ■

Akibat 2. *Misalkan* $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$. *Jika* $\varepsilon \prec_m \lambda(A)$, g_1, $g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\Gamma(A_\lambda)$ *dan* $V^+(A) \neq \varnothing$ *maka* $V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\oplus}}_{j\in E^*(A)} \alpha_j \overline{\otimes} g_j; \alpha_j \in I(\Re)\}$, *dengan* $E^*(A)$ *adalah suatu himpunan maksimal titik-titik kritis dari A yang tidak ekuivalen.*

Bukti :

Misalkan $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$. Diketahui $\varepsilon \prec_m \lambda(A)$, g_1, $g_2, \ldots, g_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(A_\lambda)$ dan $V^+(A) \neq \varnothing$. Perhatikan matriks batas bawah dan matriks batas atas yaitu $\underline{A}$ dan $\overline{A}$. Oleh karena itu, $\lambda(\underline{A}) > \varepsilon$, $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \cdots, \underline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(A_\lambda)$ dan $V^+(\underline{A}) \neq \varnothing$, Demikian juga, $\lambda(\overline{A}) > \varepsilon$; $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(\overline{A}_\lambda)$ dan $V^+(\overline{A}) \neq \varnothing$. Menurut Akibat 1, $V^+(\underline{A}) = \{\Sigma^{\oplus}_{j\in E^*(\underline{A})} \underline{\alpha}_j \otimes \underline{g}_j;$ $\underline{\alpha}_j \in \Re\}$ dan $V^+(\overline{A}) = \{\Sigma^{\oplus}_{j\in E^*(\overline{A})} \overline{\alpha}_j \otimes \overline{g}_j; \overline{\alpha}_j \in \Re\}$. Dengan demikian diperoleh, $V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\oplus}}_{j\in E^*(A)} \alpha_j \overline{\otimes} g_j; \quad \alpha_j \in I(\Re)\}$, dengan $a_j \overline{\otimes} g_j \approx [\underline{\alpha}_j \otimes \underline{g}_j, \overline{\alpha}_j \otimes \overline{g}_j]$. ■

Dari Teorema 10 dan Teorema 11, diperoleh cara untuk membentuk himpunan vektor eigen berhingga. Dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari Teorema 10 dan Teorema 11, dapat ditarik kesimpulan tentang penyelesaian masalah eigen untuk matrik tak tereduksi, yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema 12. *Setiap matriks tak tereduksi* $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}, (n > 1)$ *mempunyai nilai eigen tunggal yang sama dengan* $\lambda(A)$ *dan* $V(A) - \{\varepsilon\} = V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\oplus}}_{j\in E^*(A)} \alpha_j \overline{\otimes} g_j; \alpha_j \in I(\Re)\}$ *dimana* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *adalah kolom-kolom dari* $\lambda(A)$.

Bukti :

Perhatikan matriks batas bawah dan matriks batas atas $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ merupakan matriks tak tereduksi. Menurut Teorema 7, $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ mempunyai nilai eigen tunggal $\lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A})$, dan $V(\underline{A}) - \{\varepsilon\} = V^+(\underline{A})$

$= \{\Sigma^{\oplus}_{j\in E^*(\underline{A})}\underline{\alpha}_j \,\overline{\otimes}\, \underline{g}_j ; \underline{\alpha}_j \in I(\Re)\}$ dimana $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \cdots, \underline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(\underline{A}_\lambda)$ dan $E^*(\underline{A})$ adalah sebarang himpunan maksimal titik kritis dari $\underline{A}$ yang tidak ekuivalen. Demikian juga $V(\overline{A}) - \{\varepsilon\} = V^+(\overline{A})$ $= \{\Sigma^{\oplus}_{j\in E^*(\overline{A})}\overline{\alpha}_j \otimes \overline{g}_j ; \overline{\alpha}_j \in \Re\}$ dimana $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(\overline{A}_\lambda)$ dan $E^*(\overline{A})$ adalah sebarang himpunan maksimal titik kritis dari $\overline{A}$ yang tidak ekuivalen. Oleh karena itu,

$V(A) - \{\varepsilon\} = V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\oplus}}_{j\in E^*(A)}\alpha_j \,\overline{\otimes}\, g_j ; \alpha_j \in I(\Re)\}$,

dengan

$\alpha_j \,\overline{\otimes}\, g_j \approx [\underline{\alpha}_j \otimes \underline{g}_j, \overline{\alpha}_j \otimes \overline{g}_j]$ atau

$\alpha_j \,\overline{\otimes}\, g_j \approx [\underline{\alpha}_j \otimes \underline{g}_j, \overline{\alpha}_j \otimes \overline{g}^*_j]$. ■

Matriks A = $[[\varepsilon,\varepsilon]]$ merupakan matriks tak tereduksi dan $V(A) = V^+(A) = I(\Re)$. Untuk matriks tak tereduksi $A_{n\times n}$ untuk $n > 1$, menurut definisi dari matriks tak tereduksi bahwa $\forall i, j \in N$, $i \to j$, sehingga bobot maksimum semua lintasan (i,j) tidak sama dengan $[\varepsilon,\varepsilon]$. Oleh karena itu, misalkan $(A_\lambda)_{ij}$ elemen matriks
$\Gamma(A_\lambda)$, $(A_\lambda)_{ij} \neq [\varepsilon,\varepsilon], \forall i, j$ dan $V(A) = V^+(A) \cup \{\varepsilon\}$.
$= \{\Gamma(A_\lambda) \,\overline{\otimes}\, z ; z \in , z_j = [\varepsilon,\varepsilon], \forall j \notin E(A)\}$.

Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan: untuk setiap $A \in I\Re^{n\times n}_{\max}$ jika $\varepsilon \prec_m \lambda(A)$, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(A_\lambda)$ dan $V^+(A) \neq \emptyset$, maka $V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\oplus}}_{j\in E^*(A)}\alpha_j \,\overline{\otimes}\, g_j ; \alpha_j \in I(\Re)\}$ dimana $E^*(A)$ adalah suatu himpunan maksimal titik-titik kritis dari A yang tidak ekuivalen. Jika $A \in I(\Re)^{n\times n}_{\max}$ matriks tak tereduksi, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ adalah kolom-kolom dari $\Gamma(A_\lambda)$ maka

$V^+(A) = \{\Sigma^{\overline{\oplus}}_{j\in E^*(A)}\alpha_j \,\overline{\otimes}\, g_j ; \alpha_j \in I(\Re)\}$ dan

$$V(A) = V^+(A) \cup \{\varepsilon\}$$
$$= \{\Gamma(A_\lambda) \,\overline{\otimes}\, z ; z \in , z_j = [\varepsilon,\varepsilon], \forall j \notin E(A)\}.$$

Daftar Pustaka

Akian, M., G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat, and M. Viot, 1994, Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Zurich, Switzerland.

Bacelli, F., G. Cohen, G. J. Olsder, and J. P. Quadrat, 2001, *Synchronization and Linearity*, New York : John Wiley & Sons.

Butkovic, P. and K. P. Tam, 2009, On Some Properties of The Image of a Max Linear Mapping. *Contemporary Mathematics*. Volume 495.

Farlow, K. G., 2009, *Max-Plus Algebra*. Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics.

Konigsberg Z. R., 2009, A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra. *International Mathematical Forum*, 4. 24. 1157 – 1171.

Rudhito, A., 2011, *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian*. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.

Schutter, B. D, 1996, *Max Algebraic System Theory for Discrete Event Systems.*Ph.D Thesis, Katholike Universiteit Leuven, Departement Elektrotechniek.

Siswanto, 2012, Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Tereduksi Reguler dalam Aljabar Max-Plus Interval. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Jurusan Pend. Matematika FMIPA UNY*. MA – 99.

Subiono, 2000, *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, Published by Delf University Press.

Tam, K. P., 2010, *Optimizing and Approximating Eigenvectors In Max-Algebra*. A thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (Ph.D).