PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB TITIK PADA GRAF MULTISTAR

Brigitta Vinda Yonanta[1)], Dominikus Arif Budi Prasetyo[2)]
[1] Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Sanata Dharma
email : alexavinda@gmail.com
[2] Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Sanata Dharma
email : dominic_abp@usd.ac.id

ABSTRAK

Salah satu cabang ilmu matematika yang saat ini berkembang adalah teori graf dengan topik pelabelan. Pelabelan graf memetakan elemen titik atau sisi atau keduanya kehimpunan bilangan bulat positif. Berdasarkan domainnya, pelabelan dibedakan menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Selanjutnya pelabelan dibedakan lagi berdasarkan bobot elemen pada graf tersebut menjadi pelabelan ajaib dan pelabelan tak-ajaib. Pelabelan ajaib merupakan suatu pelabelan dimana jumlah setiap bobot anggotanya (titik atau sisi) sama, sedangkan pelabelan tak ajaib merupakan suatu pelabelan dimana jumlah setiap bobot anggotanya berbeda. Fungsi bijektif $f: V \cup E \rightarrow A = \{1,2,\dots,p+q\}$ *disebut pelabelan total tak ajaib titik (a,d) dari graf* $G(p,q)$ *jika bobot dari semua titik berbeda dan membentuk suatu barisan aritmatika naik. Penelitian ini membahas tentang pelabelan total tak ajaib titik dalam pengkajian masalah yaitu pelabelan pada graf multistar. Graf multistar merupakan graf yang terdiri dari gabungan beberapa graf star.*

Kata Kunci: *Pelabelan Total Tak-Ajaib Titik, Graf Multistar*

1. PENDAHULUAN

Salah satu cabang dari matematika yang berkembang saat ini adalah teori graf. Teori graf bermula ketika matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler menjawab pertanyaan penduduk kota Königsberg di Prusia Timur tentang dapatkah seseorang berjalan menyeberangi masing-masing dari ketujuh jembatan yang ada di kota Königsberg. Euler berhasil membuktikannya dengan merepresentasikan pulau dan sisi-sisi dari jembatan sebagai titik lalu jembatannya direpresentasikan dengan garis. Representasi inilah yang selanjutnya disebut sebagai teori graf.

Terdapat beberapa topik yang ada dalam teori graf, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960 oleh Rosa yang mendefinisikan pelabelan sebagai ‘*graceful labeling*’. Graf G adalah gabungan himpunan tak kosong titik (*vertex*) $V = V(G)$ dan sisi (*edge*) $E = E(G)$ dengan jumlah vertex $|V| = p$ dan jumlah *edge* $|E| = q$. Pelabelan graf memetakan elemen titik (*vertex*) atau sisi (*edge*) atau keduanya kehimpunan bilangan bulat positif. Berdasarkan daerah asalnya pelabelan dibedakan menjadi beberapa jenis, yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*) dan pelabelan total (*total labeling*). Dalam penelitian ini, pelabelan yang dikaji adalah pelabelan total (*total labeling*).

Pelabelan ajaib pertama diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa (1970) dengan menggeneralisasi ide dari persegi ajaib. Selain pelabelan ajaib, diperkenalkan juga pelabelan anti ajaib oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Selanjutnya diperkenalkan konsep (*a*,*d*) *antimagic labeling* oleh Bodendiek dan Walther (1993) sebagai pelabelan sisi dengan bobot setiap titiknya membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku pertama *a* dan beda *d*. Prasetyo (2012) telah membuktikan keberlakuan pada graf multisikel. Pada artikel ini penulis akan membahas mengenai keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik (VATL) pada graf multistar, yakni graf yang terbentuk dari gabungan beberapa graf star yang identik.

2. KAJIAN LITERATUR DAN PENGEMBANGAN HIPOTESIS

Pelabelan berarti memetakan himpunan titik atau himpunan sisi ke suatu himpunan label, dimana himpunan label merupakan himpunan dari bilangan dan pemetaannya merupakan pemetaan bijektif. Pelabelan pada graf juga dibedakan menjadi tiga jenis yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total.

Pelabelan titik merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi merupakan pelabelan dengan domain himpunan sisi dan pelabelan total ialah pelabelan dengan domain himpunan titik dan sisi. Pada penelitian ini akan digunakan pelabelan total. Berikut akan diberikan beberapa definisi tentang pelabelan.

Definisi 1 (Baca, dkk., 2019)
Misal A adalah himpunan bilangan bulat positif atau dengan kata lain $A = \{1,2,\dots,p+q\}$ dan f merupakan suatu pemetaan bijektif dimana $f: V \cup E \to A$. Fungsi f disebut pelabelan total tak ajaib titik (Vertex Antimagic Total Labeling-VATL) dari graf G jika bobot dari semua titik berbeda.

Definisi 2 (Baca, dkk., 2019)
Misal A adalah himpunan bilangan bulat positif atau dengan kata lain $A = \{1,2,\dots,p+q\}$ dan f merupakan suatu pemetaan bijektif dimana $f: V \cup E \to A$. Fungsi f disebut pelabelan total tak ajaib titik (a,d) dari graf G(p,q) jika bobot dari semua titik berbeda dan membentuk suatu barisan aritmatika naik $W =$ pelabelan total tak-ajaib titik $\{w(v_i)|v_i \in V\} = \{a, a+d, \dots, (p-1)d\}$ untuk a dan d bilangan bulat positif.

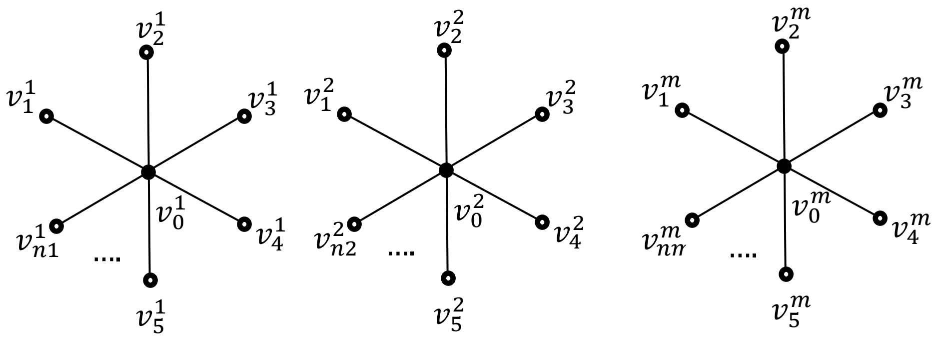
Definisi 3 (Gallian, Joseph A. 2018)
Pelabelan total tak-ajaib titik dari suatu graf G dapat dikatakan pelebelan total tak-ajaib titik kuat jika label sisinya adalah $\{1,2,3,\dots,|E|\}$ dan label titiknya $\{|E|+1, |E|+2, \dots, |V|+|E|\}$ dengan $|V|$ banyaknya titik dan $|E|$ banyaknya sisi pada graf G.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode penelitian pustaka (*library research*). Penelitian ini akan dibagi menjadi dua bagian, yakni perhitungan dasar untuk menentukan batas suku pertama a dan beda d dari VATL pada graf multistar$\left(mS_{n_p}\right)$. Bagian yang kedua adalah keberlakuan VATL pada graf multistar $\left(mS_{n_p}\right)$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf *multistar* dapat didefinisikan sebagai gabungan graf *star* yang identik dan dilambangkan sebagai mS_{n_p} dengan m merupakan banyaknya graf *star* identik dan n_p adalah order dari graf S_{n_p}.



Gambar 1. Bentuk Umum Graf Multistar $\left(mS_{n_p}\right)$

Graf *multistar* memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut :

$V\left(mS_{n_p}\right) = \{v_i^j : 0 \leq i \leq (n_p - 1), 1 \leq j \leq m\}$

$E\left(mS_{n_p}\right) = \{v_0^j v_i^j : 1 \leq i \leq (n_p - 1), 1 \leq j \leq m\}$

Graf *multistar* memiliki mn_p buah titik dan $m(n_p - 1)$ buah sisi. Oleh karena itu banyaknya unsur pada graf *multistar* adalah

$|V| + |E| = mn_p + m(n_p - 1)$

$= mn_p + mn_p - m$

$= 2mn_p - m$

$$|V| + |E| = m(2n_p - 1) \qquad (1)$$

dengan $|V|$ yaitu banyaknya titik pada mS_{n_p} dan $|E|$ yaitu banyaknya sisi pada mS_{n_p}.

Misalkan S_w adalah jumlah semua bobot titik, S_v adalah jumlah semua label titik dan S_e merupakan jumlah semua label sisi. Bobot titik pada graf multistar adalah jumlah dari label titik dan dua sisi yang bersisian dengan titik tersebut.

$S_w = S_v + 2S_e$

$a + a + d + \cdots + (mn\_p - 1)d = (S_w + S_e) + S_e$

$mn_p\left(a + \frac{(mn_p - 1)}{2}d\right) = \frac{\left(m(2n_p - 1) + 1\right)\left(m(2n_p - 1)\right)}{2} + S_e \ (2)$

Selanjutnya akan diberikan hasil pengembangan peneliti tentang (a, d) VATL pada graf multistar. Hasil yang pertama tentang batas nilai a dan d agar graf multistar memenuhi (a, d) VATL untuk setiap $m \geq 1$ dan $n_p \geq 2$.

Pada graf S_{n_p} titik yang dapat dipilih untuk mneghitung bobot terkecil adalah titik putih atau titik yang berada pada sisi luar graf *star*. Hal ini dikarenakan titik putih hanya bersisian dengan satu sisi saja. Batasan titik terkecil diambil bilangan 1 pada label sisi dan pada label titik diambil $|E| + 1 = \left(m(n_p - 1)\right) + 1$, sehingga:

$a \geq bobot\ titik\ terkecil$

$a \geq 1 + \left(m(n_p - 1)\right) + 1$

$a \geq 1 + mn_p - m + 1$

$a \geq mn_p - m + 2$

Batasan nilai beda (d) dapat dicari dengan mensubstitusikan nilai a (berdasarkan persamaan(2)), yaitu :

$a = \frac{5mn_p{}^2 - 6mn_p + 3n_p + 2m - 2 - \left(n_p(mn_p - 1)\right)d}{2n_p}$

(3)

ke batasan bobot, sehingga didapatkan pertidaksamaan sebagai berikut:

$\frac{5mn_p{}^2 - 6mn_p + 3n_p + 2m - 2 - \left(n_p(mn_p - 1)\right)d}{2n_p} \geq mn_p - m + 2$

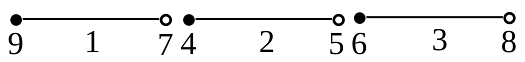
$d \leq \frac{-3mn_p{}^2 + 4mn_p + n_p - 2m + 2}{-mn_p{}^2 + n_p} \approx 3$

$d \leq 3$

Jadi untuk sebarang $m \geq 1$ dan $n_p \geq 2$ diperoleh $a \geq mn_p - m + 2$ dan 郪 ≤ 3. ■

Selanjutnya akan ditentukan nilai-nilai a berdasarkan nilai d yang terkait.

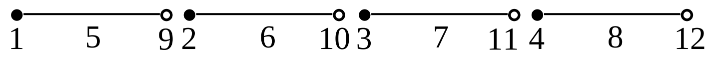
a. Untuk nilai $d = 1$
Substitusikan nilai $d = 1$ ke persamaan (3) menjadi :
$a = \frac{2mn_p{}^2 - 3mn_p + 2n_p + m - 1}{n_p}$
Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat sebelumnya yang menyatakan bahwa $a \geq mn_p - m + 2$ sehingga pelabelan dapat dilakukan pada graf multistar untuk pelabelan total tak-ajaib titik $\left(\frac{2mn_p{}^2 - 3mn_p + 2n_p + m - 1}{n_p}, 1\right)$ untuk setiap $m \geq 1$ dan $n_p \geq 2$. Berikut ini merupakan pelabelan total tak-ajaib titik $\left(\frac{2mn_p{}^2 - 3mn_p + 2n_p + m - 1}{n_p}, 1\right)$ pada graf multistar.



Gambar 2. Pelabelan total tak-ajaib titik (6,1) pada $3S_2$

Pelabelan pada gambar 2 dapat diperoleh dari bobot masing-masing titiknya yaitu :
$w(4) = 4 + 2 = 6$
$w(5) = 5 + 2 = 7$
$w(6) = 6 + 3 = 9$
$w(7) = 7 + 1 = 8$
$w(8) = 8 + 3 = 11$
$w(9) = 9 + 1 = 10$
Dari keterangan diatas kita mendapatkan bahwa $W = \{6,7,8,9,10,11\}$ hal ini sesuai dengan **definisi 2**, sehingga terbukti bahwa pada $3S_2$ terdapat (6,1) pelabelan total tak-ajaib titik

b. Untuk nilai $d = 2$
Substitusikan nilai $d = 2$ ke persamaan (3) menjadi :
$a = \frac{3mn_p{}^2 - 6mn_p + 5n_p + 2m - 2}{2n_p}$
Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat sebelumnya yang menyatakan bahwa $a \geq mn_p - m + 2$ sehingga pelabelan dapat dilakukan pada graf multistar untuk pelabelan total tak-ajaib titik $\left(\frac{3mn_p{}^2 - 6mn_p + 5n_p + 2m - 2}{2n_p}, 2\right)$ untuk setiap $m \geq 1$ dan $n_p \geq 2$. Berikut ini merupakan pelabelan total tak-ajaib titik $\left(\frac{3mn_p{}^2 - 6mn_p + 5n_p + 2m - 2}{2n_p}, 2\right)$ pada graf multistar.



Gambar 3. Pelabelan total tak-ajaib titik (6,2) pada $4S_2$

Pelabelan pada gambar 2 dapat diperoleh dari bobot masing-masing titiknya yaitu :
$w(1) = 1 + 5 = 6$
$w(2) = 2 + 6 = 8$
$w(3) = 3 + 7 = 10$
$w(4) = 4 + 8 = 12$
$w(9) = 9 + 5 = 14$
$w(10) = 10 + 6 = 16$
$w(11) = 11 + 7 = 18$
$w(12) = 12 + 8 = 22$
Dari keterangan diatas kita mendapatkan bahwa $W = \{6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$ hal ini sesuai dengan **definisi 2**, sehingga terbukti bahwa pada $4S_2$ terdapat (6,2) pelabelan total tak-ajaib titik

c. Untuk nilai $d = 3$
Substitusikan nilai $d = 3$ ke persamaan (3) menjadi :
$$a = \frac{mn_p{}^2 - 3mn_p + 3n_p + m - 1}{n_p}$$
$a = mn_p - 3m + 3 + \frac{m-1}{n_p}$
Hasil diatas bertentangan dengan syarat sebelumnya bahwa $a \geq mn_p - m + 2$ dimana tidak ada nilai a yang memenuhi syarat pada $m \geq 1$ dan

$n_p \geq 2$ sehingga pelabelan tidak dapat dilakukan pada graf multistar $\left(mS_{n_p}\right)$.

5. KESIMPULAN

Pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) pada graf multistar dapat dilakukan. Pelabelan tersebut antara lain pelabelan total tak ajaib titik $\left(\frac{2mn_p{}^2-3mn_p+2n_p+m-1}{n_p}, 1\right)$ untuk $m \geq 1$ dan $n_p \geq 2$ dan $\left(\frac{3mn_p{}^2-6mn_p+5n_p+2m-2}{2n_p}, 2\right)$ untuk $m \geq 1$ dan $n_p \geq 2$.

Jika pembaca tertarik untuk mencari keberlakuan pelabelan yang lain pada graf multistar ataupun juga dapat mencari keberlakuan pelabelan total tak ajaib titik pada graf yang belum diketahui keberlakuan pelabelannya.

6. REFERENSI

[1] Kotzig, Anton dan Alexander Rosa. 1970. *Magic Valuations of Finite Graphs*. Canad. Math. Bull.
[2] Hartsfield dan Ringel. 1990. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*.
[3] R. Bodendiek dan Walther. 1993. *Aritmetich Antimagische Graphen, In: K. Wagner and R. Bodendiek, eds., Graphentheorie III BI-Wiss*. Verl., Mannheim.
[4] Prasetyo, D. A. B. 2012. *Vertex Antimagic Total Labeling pada Graph Multicycle*. Pythagoras (Vol. 7, No. 1)
[5] Baca, dkk. 2019. *Magic and Antimagic Graphs (Attributes, Observations,and Challenges in Graph Labelings)*. Springer.
[6] Gallian, Joseph A. 2018. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics. #DS6.