SEMI HASIL KALI DALAM MILICIC YANG DIPERLUAS

Febi Sanjaya

Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP, Universitas Sanata Dharma
Korespondensi: Kampus III Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta
E-mail: *febi@usd.ac.id*

ABSTRACT

The concept of the generalization of inner product is one of the mathematical objects that studied and developed by researchers. In this research we defined a semi-inner product which is a generalization of the Milicic semi inner product. Besides that, we studied the characteristics that can be derived and their relationship with another semi inner product. This research used a literature study method which aims to study the properties of the expansion of the Milicic semi inner product along with their relationship to another semi inner product. The expected benefits of this research are for the development of mathematical research, especially in semi-inner-product topics.

Keywords: *semi hasil kali dalam, semi hasil kali dalam superior, semi hasil kali dalam inferior, semi hasil kali dalam Milicic.*

1. PENDAHULUAN

Dalam mempelajari analisis fungsional, sesungguhnya tidak dapat dilepaskan dari konsep ruang bernorma, yaitu ruang vektor yang dilengkapi dengan norma. Lebih khusus lagi, terdapat konsep ruang hasil kali dalam, yaitu ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam. Konsep hasil kali dalam merupakan salah satu objek matematika yang dipelajari dan dikembangkan oleh para peneliti. Salah satu arah pengembangannya adalah dengan membentuk generalisasinya.

Salah satu generalisasi hasil kali dalam adalah semi hasil kali dalam superior dan inferior.

1.1 Definisi

Semi hasil kali dalam superior dan inferior dari $x,y\in X$, yang berturut-turut ditulis $(z,y)_s$ dan $(z,y)_i$, dengan X ruang bernorma dideûnisikan sebagai

$$(x,y)_s = \lim_{t\to 0^+} \frac{\| x+ty \|^2 - \| x \|^2}{2t}$$

$$(x,y)_i = \lim_{t\to 0^-} \frac{\| x+ty \|^2 - \| x \|^2}{2t}$$

(Dragomir, 2004).

Eksistensi dari defnisi tersebut dijamin dengan menggunakan sifat-sifat dari fungsi konveks. Sifat-sifat dari semi hasil kali dalam superior dan interior ternyata mempunyai banyak hubungan dengan semi hasil kali dalam yang lain.

1.2 Sifat

Jika X merupakan ruang bernorma, maka untuk setiap $x,y,\in X$ dan $p,q\in\{i,s\}$ dan $p\neq q$ berlaku:

(i) $(x,x)_p = \|x\|^2$.

(ii) $(\lambda x,y)_p = \lambda(x,y)_p$ untuk semua $\lambda > 0$.

(iii) $(x,\lambda y)_p = \lambda(x,y)_p$ untuk semua $\lambda > 0$.

(iv) $(\lambda x,y)_p = \lambda(x,y)_q$ untuk semua $\lambda < 0$.

(v) $(x,\lambda y)_p = \lambda(x,y)_q$ untuk semua $\lambda < 0$.

(vi) $|(x,y)_p| < \|x\|\,\|y\|$.

(vii) $(x+y,z)_s < (x,z)_s+(y,z)_s$.

(viii) $(x+y,z)_i < (x,z)_i+(y,z)_i$.

Selanjutnya, jika $(X,\langle .,. \rangle)$ merupakan ruang inner produk, maka untuk setiap $x,y\in X$ berlaku $(x,y)_i = \langle x,y \rangle = (x,y)_s$.

1.3 Teorema

Diberikan sebarang ruang bernorma X. Untuk setiap $x,y \in X$ dan $\rho \in \mathbb{R}$ berlaku $(\rho x+y,x)_q = \rho\|x\|+(y,x)_q$ dengan q adalah s atau i.

1.4 Teorema

Diberikan ruang bernorma X. Untuk sebarang $x,y,z \in X$ berlaku $|(x+z,y)_p-(z,y)_p| < \|x\|\,\|y\|$ dengan $p=i$ atau $p=s$.

1.5 Akibat

Fungsi $(.,x)_p : X\mathrm{x}X \to \mathbb{R}$ kontinu pada X untuk setiap $x \in X$ dengan $p=i$ atau $p=s$.

1.6 Teorema

Diberikan sebarang ruang bernorma X dan $\breve{J}$ merupakan irisan dari fungsi dualitas yang ternormalisasi J. Semi hasil kali dalam atas dari x dan y dapat direpresentasikan sebagai:

$$(y,x)_s = \lim_{t\to 0^+} Re\left\langle \breve{J}(x+ty), y \right\rangle$$

1.7 Teorema

Diberikan sebarang ruang bernorma X dan $\breve{J}$ merupakan irisan dari fungsi dualitas yang ternormalisasi J. Semi hasil kali dalam atas dari x dan y dapat direpresentasikan sebagai:

$$(y,x)_s = \lim_{t\to 0^+} Re\left\langle \frac{\breve{J}(x+ty)-\breve{J}(x)}{t}, x \right\rangle$$

Selanjutnya, Dragomir (2004) menuliskan pula perluasan hasil kali dalam yang lain yaitu semi hasil kali dalam Milicic beserta sifat-sifatnya.

1.8 Definisi

Diberikan ruang bernorma X. Didefinisikan fungsi $(.,.)_g : X\mathrm{x}X \to \mathbb{R}$ dengan

$$(x,y)_g = \frac{(x,y)_s + (x,y)_i}{2}$$

untuk setiap $x,y \in X$. Selanjutnya, fungsi $(.,.)_p$ disebut semi hasil kali dalam Milicic.

1.9 Sifat

Jika X merupakan ruang bernorma, maka untuk setiap $x,y \in X$ berlaku:

(i) $(x,x)_g = \|x\|^2$.

(ii) $(\lambda x,y)_g = \lambda (x,y)_g$ untuk semua $\lambda > 0$.

(iii) $(x,\lambda y)_g = \lambda (x,y)_g$ untuk semua $\lambda > 0$.

(iv) $|(x,y)_g| < \|x\|\,\|y\|$.

Dari definisi yang telah diberikan oleh Dragomir tersebut, muncullah suatu ide untuk menggeneralisasikannya, yaitu dengan membentuk

$$(x,y)_w = \frac{a(x,y)_s + b(x,y)_i}{a+b}$$

untuk setiap $x,y, \in X$, real non negatif yang tidak keduanya nol. Definisi tersebut nantinya akan disebut semi hasil kali dalam Milicic yang diperluas. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mempelajari sifat-sifat semi hasil kali dalam Milicic yang diperluas.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan untuk penelitian ini adalah studi literatur. Dalam penelitian ini terlebih dahulu dipelajari tentang semi hasil kali dalam superior dan inferior. Selanjutnya dipelajari deûnisi semi hasil kali dalam Milicic beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya dari sifat-sifat yang tersebut dipelajari lebih lanjut untuk mengetahui mana saja sifat yang masih bisa digunakan pada semi hasil kali dalam Milicic yang diperluas.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelumnya, pada Definisi 1.5 diperkenalkan semi hasil kali dalam Milicic, yaitu

$$(x,y)_g = \frac{(x,y)_s + (x,y)_i}{2}$$

untuk setiap $x,y \in X$, dengan X ruang bernorma. Dari definisi tersebut, diperoleh ide untuk memperluasnya dengan definisi sebagai berikut.

3.1 Definisi

Diberikan ruang bernorma X. Didefinisikan fungsi $(.,.)_w : X\mathrm{x}X \to \mathbb{R}$ dengan

$$(x,y)_w = \frac{a(x,y)_s + b(x,y)_i}{a+b}$$

untuk setiap $x,y \in X$, a,b real non negatif yang tidak keduanya nol. Selanjutnya, fungsi $(.,.)_w$ disebut semi hasil kali dalam Milicic yang diperluas.

Lebih lanjut, dari definisi tersebut diselidiki sifat-sifat yang berhubungan dengan hasil kali dalam yang terangkum seperti di bawah ini.

3.2 Sifat

Jika X merupakan ruang bernorma, maka untuk setiap $x,y \in X$, berlaku:

i. $(x,x)_w = ||x||^2$.

ii. $(\delta x, \beta y)_w = \delta\beta (x,y)_w$ dengan $\delta\beta > 0$.

iii. $|(x,y)_w| < ||x||\ ||y||$.

Bukti:

i. Untuk setiap $x \in X$, dengan menggunakan Sifat 1.2. berlaku

$$(x,x)_w = \frac{a(x,x)_s + b(x,x)_i}{a+b} = \frac{a\|x\|^2 + b\|x\|^2}{a+b}$$

$$= ||x||^2.$$

ii. Diambil sebarang $x,y \in X$ dan sebarang $\delta, \beta \in \mathbb{R}$ dengan $\delta\beta > 0$.
Jika δ=0 atau β=0, jelas bahwa $(x,y)_w$=0.
Jika δ>0 dan β>0, dengan menggunakan Sifat 1.2. diperoleh

$$(\delta x, \beta y)_w = \frac{a(\delta x, \beta y)_s + b(\delta x, \beta y)_i}{a+b}$$

$$= \frac{a\delta\beta(x,y)_s + b\delta\beta(x,y)_i}{a+b}$$

$$= \delta,\beta (x,y)_w.$$

Jika δ<0 dan β<0, dengan menggunakan Sifat 1.2. diperoleh

$$(\delta x, \beta y)_w = \frac{a(\delta x, \beta y)_s + b(\delta x, \beta y)_i}{a+b}$$

$$= \frac{a\delta(x,\beta y)_i + b\delta(x,\beta y)_s}{a+b}$$

$$= \frac{a\delta\beta(x,y)_s + b\delta\beta(x,y)_i}{a+b}$$

$$= \delta,\beta (x,y)_w.$$

iii. Untuk setiap $x,y \in X$, dengan menggunakan sifat sebelumnya. berlaku

$$|(x,y)_w| = \left|\frac{a(x,y)_s + b(x,y)_i}{a+b}\right|$$

$$= \left|\frac{a\|x\|\|y\| + b\|x\|\|y\|}{a+b}\right|$$

$$= <||x||\ ||y||.$$

3.3 Teorema

Diberikan ruang bernorma X. Jika X dibangkitkan oleh hasil kali dalam $\langle .,. \rangle$, maka untuk setiap $x,y, \in X$, berlaku $(x,x)_w = \langle x,y \rangle$.

Bukti:

Diambil sebarang $x,y \in X$. Berdasarkan Sifat 1.2, jelas bahwa

$$(x,y)_w = \frac{a(x,y)_s + b(x,y)_i}{a+b}$$

$$= \frac{a\langle x,y\rangle + b\langle x,y\rangle}{a+b}$$

$$= \langle x,y \rangle.$$

3.4 Teorema

Diberikan sebarang ruang bernorma X. Untuk setiap $x,y, \in X$ dan $\rho \in \mathbb{R}$ berlaku $(\rho x+y,x)_w = \rho||x||+(y,x)_w$.

Bukti:

Diambil sebarang $x,y \in X$ dan $\rho \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema 1.3 diperoleh

$$(\rho x+y,x)_w$$

$$= \frac{a(\rho x + y, x)_s + b(\rho x + y, x)_i}{a+b}$$

$$= \frac{a(\rho\|x\| + (y,x)_s) + b(\rho\|x\| + (y,x)_i)}{a+b}$$

$$= \frac{a\rho\|x\| + b\rho\|x\| + a(y,x)_s + b(y,x)_i}{a+b}$$

$$= \rho||x||+(y,x)_w.$$

3.5 Teorema

Diberikan sebarang ruang bernorma X. Untuk setiap $x,y,z \in X$ berlaku $|(y+z,x)_w - (z,x)_w| < ||y||\ ||x||$.

Bukti:
Diambil sebarang $x,y,z \in X$. Berdasarkan Teorema 1.4 diperoleh

$$|(y+z,x)_w-(z,x)_w|$$
$$= \left|\frac{a(y+z,x)_s+b(y+z,x)_i}{a+b} - \frac{a(z,x)_s+b(z,x)_i}{a+b}\right|$$
$$= \left|\frac{a(y+z,x)_s-a(z,x)_s}{a+b} + \frac{b(y+z,x)_i-b(z,x)_i}{a+b}\right|$$
$$< \frac{a}{a+b}|(y+z,x)_s-(z,x)_s|+\frac{a}{a+b}|(y+z,x)_i-(z,x)_i|$$
$$< \frac{a}{a+b}||y||\,||x||+\frac{a}{a+b}||y||\,||x||$$
$$= ||y||\,||x||.$$

3.6 Teorema

Fungsi $(.,x)_w : XxX \to \mathbb{R}$ kontinu pada X untuk setiap $x \in X$.

Bukti:
Diambil sebarang $x \in X$. Diperhatikan fungsi

$$(.,x)_w = \frac{a(.,x)_s+b(.,x)_i}{a+b}.$$

Berdasarkan Akibat 1.5, fungsi $(.,x)_s$ dan $(.,x)_i$ merupakan fungsi kontinu, sehingga fungsi

$$(.,x)_w = \frac{a(.,x)_s+b(.,x)_i}{a+b}$$

juga merupakan fungsi kontinu.

3.7 Teorema

Diberikan sebarang ruang bernorma X dan $\breve{J}$ merupakan irisan dari fungsi dualitas yang ternormalisasi J. Semi hasil kali dalam Milicic yang diperluas dari dan dapat direpresentasikan sebagai:

$$(.,x)_w$$
$$= \lim_{t\to 0} Re\left\langle \frac{a\breve{J}(x+ty)+b\breve{J}(x-ty)}{a+b}, y\right\rangle$$

Bukti:
Diambil sebarang $x,y \in X$. Diperhatikan bahwa

$$(y,x)_w = \frac{a(y,x)_s+b(y,x)_i}{a+b}$$

Berdasarkan Teorema 1.2 dan Teorema 1.6 diperoleh:

$$(y,x)_w$$
$$= \frac{a(y,x)_s+b(y,x)_i}{a+b}$$
$$= \frac{a(y,x)_s-b(-y,x)_s}{a-b}$$
$$= \frac{1}{a+b}\left(a\lim_{t\to 0^+} Re\langle \breve{J}(x+ty),y\rangle + b\lim_{t\to 0^+} Re\langle \breve{J}(x-ty),y\rangle\right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+} Re\left\langle \frac{a\breve{J}(x+ty)+b\breve{J}(x-ty)}{a+b}, y\right\rangle.$$

3.7 Teorema

Diberikan sebarang ruang bernorma X dan $\breve{J}$ merupakan irisan dari fungsi dualitas yang ternormalisasi J. Semi hasil kali dalam Milicic yang diperluas dari x dan y dapat direpresentasikan sebagai:

$$(.,x)_w$$
$$= \lim_{t\to 0} Re\left\langle \frac{a\breve{J}(x+ty)-b\breve{J}(x-ty)+(b-a)\breve{J}(x)}{a+b}, x\right\rangle$$

Bukti:
Diambil sebarang $x,y \in X$. Diperhatikan bahwa

$$(y,x)_w = \frac{a(y,x)_s+b(y,x)_i}{a+b}.$$

Berdasarkan Teorema 1.2 dan Teorema 1.7 diperoleh:

$$
\begin{aligned}
&(y,x)_w \\
&= \frac{a(y,x)_s + b(y,x)_i}{a+b} \\
&= \frac{a(y,x)_s - b(-y,x)_s}{a+b} \\
&= \frac{1}{a+b}\left(a\lim_{t\to 0^+} Re\left\langle \frac{\breve{J}(x+ty)-\breve{J}(x)}{t}, x \right\rangle \right. \\
&\quad \left. - b\lim_{t\to 0^+} Re\left\langle \frac{\breve{J}(x-ty)-\breve{J}(x)}{t}, x \right\rangle \right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} Re\left\langle \frac{a\breve{J}(x+ty)-b\breve{J}(x-ty)+(b-a)\breve{J}(x)}{a+b}, x \right\rangle
\end{aligned}
$$

4. KESIMPULAN

1. Jika X merupakan ruang bernorma, maka untuk setiap $x,y \in X$ dan $p,q \in \{i,s\}$ dan $p \neq q$ dan dan berlaku:
   i. $(x,x)_p = ||x||^2$.
   ii. $(\lambda x,y)_p = \lambda (x,y)_p$ untuk semua $\lambda > 0$.
   iii. $(x,\lambda y)_p = \lambda (x,y)_p$ untuk semua $\lambda > 0$.
   iv. $(\lambda x,y)_p = \lambda (x,y)_p$ untuk semua $\lambda > 0$.
2. Jika X dibangkitkan oleh hasil kali dalam $\langle .,. \rangle$, maka untuk setiap $x,y \in X$ berlaku $(x,y)_w = \langle x,y \rangle$.
3. Fungsi $(.,x)_w : X\text{x}X \to \mathbb{R}$ kontinu pada X untuk setiap $x \in X$.
4. Semi hasil kali dalam Milicic yang diperluas dari x dan y dapat direpresentasikan sebagai:

$$
\begin{aligned}
&(y,x)_w \\
&= \lim_{t\to 0^+} Re\left\langle \frac{a\breve{J}(x+ty)-b\breve{J}(x-ty)+(b-a)\breve{J}(x)}{a+b}, x \right\rangle
\end{aligned}
$$

DAFTAR PUSTAKA

Alsina, C., dkk., 2010, *Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces*, Singapura: World Scientiûc Publishing Co. Pte. Ltd.

Dragomir, S.S., 2004, *Semi-Inner Products and Applications*, New York: Nova Science Publishers Inc.

Giles, J.R., 1967, Classes of Semi-Inner-Product Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129, 436-446.

Sanjaya, F., 2015, Semi Hasil Kali Dalam Atas dan Bawah, *AdMathEdu*, 5, 5-44.

Biodata Penulis

Febi Sanjaya, Menyelesaikan Program S1 Matematika, FMIPA UGM (2011) dan Program S2 Matematika, FMIPA UGM (2013).