PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA

Tanggal 18 Mei 2013, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978 – 979 -96880 – 7 - 1

Bidang:

- Matematika dan Pendidikan Matematika
- Fisika dan Pendidikan Fisika
- Kimia dan Pendidikan Kimia
- Biologi dan Pendidikan Biologi
- Ilmu Pengetahuan Alam

Tema:

MIPA dan Pendidikan MIPA Untuk Kemandirian Bangsa

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Tahun 2013

PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA

Tanggal 18 Mei 2013, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978 – 979 -96880 – 7 - 1

Tim Editor:

1. Nur Hadi Waryanto, M.Eng (Matematika)
2. Denny Darmawan, M.Sc (Fisika)
3. Erfan Priyambodo, M.Si (Kimia)
4. Yuni Wibowo, M.Pd (Biologi)
5. Sabar Nurohman, M.Pd (IPA)

Tim Reviewer:

1. Dr. Agus Maman Abadi (Matematika)
2. Wipsar Sunu Brams Dwandaru, M.Sc.,Ph.D (Fisika)
3. Prof. Dr.Endang Wijayanti (Kimia)
4. Dr. Heru Nurcahyo (Biologi)

Tema:

MIPA dan Pendidikan MIPA Untuk Kemandirian Bangsa

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Tahun 2013

M -

PENENTUAN NILAI EIGEN SUATU MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Siswanto, Ari Suparwanto, dan M. Andy Rudhito

Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FMIPA UNS Surakarta,
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta

Abstrak

Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{max} = \Re \cup \{-\infty\}$ dengan $\Re$ himpunan bilangan real, dilengkapi operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$. Himpunan $\Re_{max}^{n\times n}$ adalah himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota $\Re_{max}$. Telah dibahas tentang bagaimana menentukan nilai eigen suatu matriks atas aljabar Max-Plus. Dibentuk himpunan $I(\Re)_{max}$ yaitu himpunan yang anggotanya merupakan interval-interval tertutup di dalam $\Re_{max}$. Himpunan $I(\Re)_{max}$ dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ disebut aljabar Max-Plus interval. Selanjutnya, dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota himpunan $I(\Re)_{max}$ ditulis $I(\Re)_{max}^{n\times n}$. Misalkan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dan $\left[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\right] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$, dengan $\mathrm{A} \approx \left[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\right]$, matriks interval A dikatakan tak terreduksi jika untuk setiap matriks $A \in \left[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\right]$ tak terreduksi. Jika tidak demikian, matriks interval A dikatakan terreduksi. Tujuan penelitian ini adalah bagaimana menentukan nilai eigen suatu matriks atas aljabar Max-Plus interval, untuk matriks tak terreduksi maupun matriks terreduksi.

Kata kunci : Aljabar Max-Plus interval, nilai eigen.

PENDAHULUAN

Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{max} = \Re \cup \{\varepsilon\}$, $\varepsilon = -\infty$ dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$merupakan semifield idempoten. Aljabar Max-Plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan lalu lintas. (Baccelli, *et.al* [2]). Dari himpunan $\Re_{max}$ dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $m \times n$ yang elemen-elemennya merupakan elemen $\Re_{max}$ dinotasikan dengan $\Re_{max}^{m\times n}$, selanjutnya disebut himpunan matriks atas aljabar Max-Plus. Khusus untuk $m = n$, himpunan $\Re_{max}^{n\times n}$ dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$ merupakan semiring yang idempoten (Akian, *et. al*, [1], Konigsberg [5]). Untuk n = 1, diperoleh himpunan vektor dalam aljabar Max-Plus ditulis $\Re_{max}^{m}$ (Farlow [4]). Schutter [7] dan Subiono [9] telah membahas tentang masalah nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks atas aljabar Max-Plus. Selanjutnya, Butkovic [3] dan Tam K. P [10] telah menulis tentang ruang vektor eigen dan bagaimana menentukan nilai eigen matriks atas aljabar Max-Plus.

Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktifitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar Max-Plus telah digeneralisasi menjadi aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Aljabar Max-Plus interval yaitu himpunan $I(\Re)_{max}$ dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$, sedangkan aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu himpunan $F(\Re)_{max}$ dilengkapi dengan operasi $\widetilde{\oplus}$ dan $\widetilde{\otimes}$ (Rudhito [6]). Telah dibahas juga tentang matriks dalam aljabar Max-Plus interval, graf dalam aljabar Max-Plus interval serta nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar Max-Plus interval khusus untuk matriks tak terreduksi.

Disamping itu, Siswanto [8] telah membahas tentang ruang vektor eigen matriks dalam aljabar Max-Plus interval.

Dari uraian tersebut, menarik untuk diteliti tentang bagaimana menentukan nilai eigen matriks atas aljabar Max-Plus interval untuk matriks secara umum, sekaligus basis ruang eigennya. Sebelum dibahas hasil utama penelitian ini, terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang mendukung pembahasan.

Berikut adalah beberapa konsep dalam menentukan nilai eigen suatu matriks dalam aljabar Max-Plus.

Definisi 1.1. Misalkan $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $K = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq N$ dengan $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, didefinisikan $A[K]$ adalah submatriks utama dari matriks $A = [a_{ij}]$ yaitu

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

dan $x[K]$ menyatakan subvektor $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\right)^T$ dari vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathfrak{R}_{max}^n$. Selanjutnya, jika $D = (N, E)$ adalah graf berarah, $D[K]$ menyatakan subgraf berarah yang diinduksi dari D yaitu $D[K] = \left(K, E \cap (K \times K)\right)$, bahwa $D_{A[K]} = D[K]$.

Definisi 1.2. Misalkan $A, B \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$, maka simbol $A \sim B$ berarti bahwa A dapat diperoleh dari B dengan permutasi bersama dari semua kolom dan baris.

Lema 1.3. Jika $A \sim B$ maka $\Lambda(A) = \Lambda(B)$ dan ada fungsi bijektif antara $V(A)$ dan $V(B)$.

Lema 1.4. Misalkan $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$, $\lambda \in \Lambda(A)$ dan $x \in V(A, \lambda)$. Jika $x \notin V^+(A, \lambda)$ maka $n > 1$,

$$A \sim \begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(21)} \\ \varepsilon & A^{(22)} \end{pmatrix}$$

$\lambda = \lambda(A^{(22)})$ dan A matriks terreduksi.

Proposisi 1.5. Diberikan $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$, $V(A) = V^+(A)$ jika dan hanya jika A matriks tak terreduksi.

Definisi 1.6. Misalkan A merupakan *FNF*, graf berarah penyederhanaan (*Condensation digraph*) adalah graf berarah $C_A = \left(\{N_1, \dots, N_r\}, \left\{(N_i, N_j) \middle| \exists k \in N_i, \exists l \in N_j \text{ sehingga } a_{lk} > \varepsilon\right\}\right)$.

Lema 1.7. Jika $x \in V(A), N_i \to N_j$ dan $x[N_j] \neq \varepsilon$ maka $x[N_i]$ berhingga. Secara khusus bahwa $x[N_j]$ berhingga.

Teorema 1.8. (Teorema Spektral) Diberikan $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan *FNF*, maka

$$\Lambda(A) = \left\{\lambda(A_{jj}) \middle| \lambda(A_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(A_{ii})\right\}.$$

Definisi 1.9. Diberikan $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan *FNF*. Jika $\lambda(A_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(A_{ii})$ maka A_{jj} (dan juga N_j atau hanya j) disebut sebagai spektral (*spectral*).

Akibat 1.10. Semua klas awal dari C_A merupakan spektral.

Akibat 1.11. $1 \leq |\Lambda(A)| \leq n$ untuk setiap $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$.

Akibat 1.12. $V(A) = V\left(A, \lambda(A)\right)$ jika dan hanya jika semua klas awal mempunyai nilai eigen $\lambda(A)$ yang sama.

Selanjutnya, dibicarakan konsep aljabar Max-Plus interval dan matriks atas aljabar Max-Plus interval.

Interval tertutup x dalam $\mathfrak{R}_{max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathfrak{R}_{max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathfrak{R}_{max} | \underline{x} \preccurlyeq_m x \preccurlyeq_m \overline{x}\}$. Interval x dalam $\mathfrak{R}_{max}$ disebut interval Max-Plus. Suatu bilangan $x \in \mathfrak{R}_{max}$ dapat dinyatakan sebagai interval [*x*,*x*].

Definisi 1.13. Dibentuk $I(\mathfrak{R})_{max} = \{\mathrm{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \,|\, \underline{x}, \overline{x} \in \mathfrak{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preccurlyeq_m \overline{x}\} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada himpunan $I(\mathfrak{R})_{max}$ didefinisikan operasi " $\overline{\oplus}$ " dan " $\overline{\otimes}$ " dengan $\mathrm{x} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$ dan $\mathrm{x} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$ untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in I(\mathfrak{R})_{max}$. Selanjutnya disebut aljabar Max-Plus interval dan dinotasikan dengan $I(\overline{\mathfrak{R}})_{max} = \left(I(\mathfrak{R})_{max}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes}\right)$.

Definisi 1.14. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen dalam $I(\Re)_{max}$ dinotasikan dengan $I(\Re)_{max}^{m\times n}$ yaitu
$I(\Re)_{max}^{m\times n} = \{\mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ij}] \,|\mathrm{A}_{ij} \in I(\Re)_{max};\ i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n\}$. Matriks anggota $I(\Re)_{max}^{m\times n}$ disebut matriks interval Max-Plus. Selanjutnya matriks interval Max-Plus cukup disebut dengan matriks interval.

Definisi 1.15. Untuk $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{m\times n}$ didefinisikan matriks $\underline{\mathrm{A}} = [\underline{\mathrm{A}}_{ij}] \in \Re^{m\times n}$ dan $\overline{\mathrm{A}} = [\overline{\mathrm{A}}_{ij}] \in \Re^{m\times n}$ masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A.

Definisi 1.16. Diberikan matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{m\times n}$, dengan $\underline{\mathrm{A}}$ dan $\overline{\mathrm{A}}$ masing-masing adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks A. Didefinisikan interval matriks dari A yaitu $[\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}] = \{A \in \Re_{max}^{m\times n} |\ \underline{\mathrm{A}} \preccurlyeq_m A \preccurlyeq_m \overline{\mathrm{A}}\}$ dan $I(\Re_{max}^{m\times n})_{\mathrm{b}} = \{[\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}]|\ \mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{m\times n}\}$.

Semimodul $I(\Re)_{max}^{n\times n}$ atas $I(\Re)_{max}$ isomorfis dengan semimodul $I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ atas $I(\Re)_{max}$, dengan pemetaan $f: I(\Re)_{max}^{n\times n} \to I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$, $f(\mathrm{A}) = [\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}], \forall \mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$. Interval matriks $[\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ disebut interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dan dilambangkan dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}]$.

Definisi 1.17. Didefinisikan.
$I(\Re)_{max}^{n} = \{\mathbf{x} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n]^T |\mathrm{x}_\mathrm{i} \in I(\Re)_{max}; i = 1,2,\dots.,n\}$. Himpunan $I(\Re)_{max}^{n}$ dapat dipandang sebagai himpunan $I(\Re)_{max}^{n\times 1}$. Anggota $I(\Re)_{max}^{n}$ disebut vektor interval atas $I(\Re)_{max}^{n}$. Vektor interval **x** bersesuaian dengan interval vektor $[\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}]$ yaitu $\mathbf{x} \approx [\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}]$.

Berikut definisi tentang himpunan nilai eigen dan himpunan vektor eigen dalam aljabar Max-Plus interval.

Definisi 1.18. Diberikan $\mathrm{A},\mathrm{B} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dan $\lambda \in I(\Re)_{max}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}], \mathrm{B} \approx [\underline{\mathrm{B}},\overline{\mathrm{B}}]$ dan $\lambda \approx [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$, didefinisikan :

a. $\mathrm{V}(\mathrm{A},\lambda) = \{\mathbf{x} \in I(\Re)_{max}^{n} \,|\, \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \lambda \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}\}$ dan
$\mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}],[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]) = \{[\underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}] \in I(\Re_{max}^{n})_{\mathrm{b}} \,|\, \underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}} = \underline{\lambda} \otimes \underline{\mathbf{x}};\ \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda} \otimes \overline{\mathbf{x}}\}$,

b. $\Lambda(\mathrm{A}) = \{\lambda \in I(\Re)_{max} |\, \mathrm{V}(\mathrm{A},\lambda) \neq \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon,\varepsilon,\dots,\varepsilon)^T\}$ dan
$\Lambda([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}]) = \{[[\underline{\lambda}],[\overline{\lambda}]] \in I(\Re_{max})_{\mathrm{b}} |\mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}],[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]) \neq \{[\underline{\boldsymbol{\varepsilon}},\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}]\}\}$,

c. $\mathrm{V}(\mathrm{A}) = \cup_{\lambda\in\Lambda(\mathrm{A})} \mathrm{V}(\mathrm{A},\lambda)$ dan $\mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}]) = \cup_{[\underline{\lambda},\overline{\lambda}\}.\in\Lambda([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}])} \mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}],[\underline{\lambda},\overline{\lambda}])$,

d. $\mathrm{V}^+(\mathrm{A},\lambda) = \mathrm{V}(\mathrm{A},\lambda) \cap I(\Re)^n$ dan $\mathrm{V}^+([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}],[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]) = \mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}],[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]) \cap I(\Re)^n$,

e. $\mathrm{V}^+(\mathrm{A}) = \mathrm{V}(\mathrm{A}) \cap I(\Re)^n$ dan $\mathrm{V}^+([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}]) = \mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}]) \cap I(\Re)^n$.

PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang bagaimana menentukan nilai eigen dari suatu matriks interval.

Definisi 2.1. Misalkan $N = \{1,2,\dots,n\}$, $K = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq N$ dengan $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$, didefinisikan $\mathrm{A}[K] \approx [\underline{\mathrm{A}}[k],\overline{\mathrm{A}}[k]]$ adalah submatriks interval utama dari matriks $\mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ij}] \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}]$ yaitu $\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{i_1 i_1} & \cdots & \mathrm{A}_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{A}_{i_k i_1} & \cdots & \mathrm{A}_{i_k i_k} \end{pmatrix}$. $\mathrm{x}[K] \approx [\underline{\mathrm{x}}[K],\overline{\mathrm{x}}[K]]$ menyatakan subvektor $(\mathrm{x}_{i_1}, \mathrm{x}_{i_2}, \dots, \mathrm{x}_{i_k})^T$ dari vektor $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n)^T \in I(\Re)_{max}^{n}$. Selanjutnya, jika $\mathrm{D} = (N, \mathrm{E})$ adalah graf berarah dan $K \subseteq N$ maka $\mathrm{D}[K]$ menyatakan subgraf berarah yang diinduksi dari D; yaitu $\mathrm{D}[K] = (K, \mathrm{E} \cap (K \times K))$, bahwa $\mathrm{D}_{A[K]} = \mathrm{D}[K]$.

Definisi 2.2. Misalkan $\mathrm{A},\mathrm{B} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, maka A ekuivalen B, dinotasikan $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ berarti bahwa A dapat diperoleh dari B dengan permutasi secara simultan semua kolom dan baris.

Tampak bahwa, jika $A \sim B$ maka graf berarah yang diinduksi D_A dapat diperoleh dari D_B dengan cara menomori ulang titiknya. Oleh karena itu, jika $A \sim B$ maka A tak terreduksi jika dan hanya jika B tak terreduksi.

Lema 2.3. Jika $A \sim B$ maka $\Lambda(A) = \Lambda(B)$ dan ada fungsi bijektif antara $V(A)$ dan $V(B)$.

Bukti : Misalkan $A, B \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_b$ dan $B \approx [\underline{B}, \overline{B}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_b$. Karena $A \sim B$, berarti $\underline{A} \sim \underline{B}$ dan $\overline{A} \sim \overline{B}$. Menurut Lema 1.3, $\Lambda(\underline{A}) = \Lambda(\underline{B})$ dan ada fungsi bijektif antara $V(\underline{A})$ dan $V(\underline{B})$ serta $\Lambda(\overline{A}) = \Lambda(\overline{B})$ dan dan ada fungsi bijektif antara $V(\overline{A})$ dan $V(\overline{B})$. Karena $\Lambda(A) \approx \Lambda([\underline{A}, \overline{A}])$ dan $\Lambda(B) \approx \Lambda([\underline{B}, \overline{B}])$, sedangkan $\Lambda([\underline{A}, \overline{A}]) = \Lambda([\underline{B}, \overline{B}])$ maka $\Lambda(A) = \Lambda(B)$ dan ada fungsi bijektif antara $V(A)$ dan $V(B)$.

Lema berikut menunjukan bahwa di dalam aljabar max-plus interval bentuk normal Frobenius akan sangat digunakan untuk menggambarkan semua nilai eigen.

Lema 2.4. Misalkan $A \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, $\lambda \in \Lambda(A)$ dan $\mathbf{x} \in V(A, \lambda)$. Jika $\mathbf{x} \notin V^+(A, \lambda)$ maka $n > 1$, $A \sim \begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(21)} \\ \varepsilon & A^{(22)} \end{pmatrix}$, $\lambda = \lambda(A^{(22)})$ dan A matriks terreduksi.

Bukti: Misalkan $A \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_b$, $\lambda = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \in \Lambda(A)$ dan $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T = \left[[\underline{x}_1, \overline{x}_1], [\underline{x}_2, \overline{x}_2], \ldots, [\underline{x}_n, \overline{x}_n]\right]^T \in V(A, \lambda)$. Oleh karena itu, $\underline{\lambda} \in \Lambda(\underline{A})$, $\overline{\lambda} \in \Lambda(\overline{A})$, $\underline{x} = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n] \in V(\underline{A}, \underline{\lambda})$ dan $\overline{x} = [\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n] \in V(\overline{A}, \overline{\lambda})$. Karena $\mathbf{x} \notin V^+(A, \lambda)$ maka $\underline{x} \notin V^+(\underline{A}, \underline{\lambda})$ dan $\overline{x} \notin V^+(\overline{A}, \overline{\lambda})$, menurut Lema 1.4 maka $n > 1$, $\underline{A} \sim \begin{pmatrix} \underline{A}^{(11)} & \underline{A}^{(21)} \\ \varepsilon & \underline{A}^{(22)} \end{pmatrix}$, $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}(\underline{A}^{(22)})$, $\underline{A}$ matriks terreduksi demikian pula $\overline{A} \sim \begin{pmatrix} \overline{A}^{(11)} & \overline{A}^{(21)} \\ \varepsilon & \overline{A}^{(22)} \end{pmatrix}$, $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\overline{A}^{(22)})$ dan $\overline{A}$ matriks terreduksi. Oleh karena itu, $n > 1$, $A \sim \begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(21)} \\ \varepsilon & A^{(22)} \end{pmatrix}$, $\lambda = \lambda(A^{(22)})$ dan A matriks terreduksi.

Proposisi 2.5. Diberikan $A \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, maka $V(A) = V^+(A)$ jika dan hanya jika A matriks tak terreduksi.

Bukti: Misalkan $A \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_b$. Menurut Proposisi 1.5, $V(\underline{A}) = V^+(\underline{A})$ jika dan hanya jika $\underline{A}$ matriks tak terreduksi. Disamping itu, $V(\overline{A}) = V^+(\overline{A})$ jika dan hanya jika $\overline{A}$ matriks tak terreduksi. Oleh karena itu, maka $V(A) = V^+(A)$ jika dan hanya jika A matriks tak terreduksi.

Setiap matriks $A = [A_{ij}] \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dapat ditransformasikan dengan permutasi secara simultan baris dan kolom menjadi *Frobenius normal Form (FNF)*, sedemikian sehingga

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{r1} \\ \ldots & A_{22} & \cdots & A_{r2} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \cdots \\ \ldots & \ldots & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

dimana $A_{11}, \ldots, A_{rr}$ adalah submatriks persegi yang tak terreduksi dari A.

Misalkan A adalah *FNF* dinotasikan himpunan-himpunan $N_1, N_2, \ldots, N_r$ sebagai partisi yang bersesuaian dengan node himpunan N dari D_A, disebut sebagai kelas-kelas (dari A) sehingga semua submatriks persegi $A_{11}, \ldots, A_{rr}$ adalah tak terreduksi, ini memenuhi bahwa setiap graf berarah yang diinduksi $D_A[N_i], (i = 1,2, \ldots, r)$ terhubung kuat dan lintasan dari $N_i$ke N_j dalam D_A ada jika $i \to j$. Selanjutnya, disebut secara sederhana bahwa $\lambda(A_{jj})$ merupakan nilai eigen kelas N_j.

Definisi 2.6. Diberikan A *FNF*, maka graf berarah penyederhanaan (*Condensation digraph*) adalah graf berarah $C_A = (\{N_1, \ldots, N_r\}, \{(N_i, N_j) | \exists k \in N_i, \exists l \in N_j \text{ sehingga } [\varepsilon, \varepsilon] \prec_m A_{lk}\})$.

Jika ada lintasan berarah (*directed path*) dari suatu titik di dalam N_i ke titik di dalam N_j pada $\mathrm{D_A}$, dinotasikan dengan simbol $N_i \to N_j$. Jika tidak ada busur masuk atau keluar dari atau ke graf berarah yang diinduksi $C_{\mathrm{A}}\left[\left\{N_{i_1}, \dots, N_{i_k}\right\}\right], (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r)$ dan tidak ada graf berarah sejati mempunyai sifat ini maka submatriks

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{i_1 i_1} & \mathrm{A}_{i_1 i_2} & \cdots & \mathrm{A}_{i_1 i_s} \\ \epsilon & \mathrm{A}_{i_2 i_2} & \cdots & \mathrm{A}_{i_2 i_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \epsilon & \epsilon & \cdots & \mathrm{A}_{i_s i_s} \end{pmatrix}$$

disebut sebagai superblok terisolasi (*isolated superblock*) atau disebut superblok (*superblock*) saja. Graf berarah terinduksi (*induced digraph*) C_{A} bersesuaian dengan superblok terisolasi yaitu pohon berarah (*directed tree*). C_{A} adalah gabungan beberapa angka seperti pohon berarah (*directed tree*). Titik-titik pada C_{A} dimana tidak ada busur masuk disebut sebagai klas awal (*initial classes*) juga titik-titik pada C_{A} dimana tidak ada busur keluar disebut sebagai klas akhir (*final classes*). Catatan bahwa pohon berarah bersesuaian dengan superblok terisolasi yang mempunyai beberapa klas awal dan akhir.

Lema 2.7. Jika $\mathbf{x} \in \mathrm{V(A)}$, $N_i \to N_j$ dan $\mathbf{x}\left[N_j\right] \neq \mathcal{E}$ maka $\mathbf{x}[N_i]$ berhingga. Secara khusus $\mathbf{x}\left[N_j\right]$ berhingga.

Bukti: Ambil $\mathbf{x} \in \mathrm{V(A)}$, $\mathbf{x} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n]^T = \left[[\underline{\mathrm{x}}_1, \overline{\mathrm{x}}_1], [\underline{\mathrm{x}}_2, \overline{\mathrm{x}}_2], \dots, [\underline{\mathrm{x}}_n, \overline{\mathrm{x}}_n]\right]^T$. Berarti, $\mathbf{x} \approx [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$ dengan $\underline{\mathbf{x}} = [\underline{\mathrm{x}}_1, \underline{\mathrm{x}}_2, \dots, \underline{\mathrm{x}}_n]^T \in V(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{\mathrm{x}}_1, \overline{\mathrm{x}}_2, \dots, \overline{\mathrm{x}}_n]^T \in V(\overline{\mathrm{A}})$. Misalkan $N_i \to N_j$, karena $\mathbf{x}\left[N_j\right] \neq \mathcal{E}$ maka $\underline{\mathbf{x}}\left[N_j\right] \neq \varepsilon$ dan $\overline{\mathbf{x}}\left[N_j\right] \neq \varepsilon$, menurut Lema 1.7 maka $\underline{\mathbf{x}}[N_i]$ dan $\overline{\mathbf{x}}[N_i]$ berhingga. Secara khusus $\underline{\mathbf{x}}\left[N_j\right]$ dan $\overline{\mathbf{x}}\left[N_j\right]$ berhingga. Oleh karena itu, $\mathbf{x}[N_i]$ dan $\mathbf{x}\left[N_j\right]$ berhingga.

Teorema 2.8. (Teorema Spektral) Diberikan $\mathrm{A} \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n \times n}$ yang merupakan *FNF*, maka

$$\Lambda(\mathrm{A}) = \left\{\lambda(\mathrm{A}_{jj}) \,\middle|\, \lambda(\mathrm{A}_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(\mathrm{A}_{ii})\right\}.$$

Bukti: Misalkan $\mathrm{A} \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n \times n}$, $\mathrm{A} \approx \left[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\right] \in I(\mathfrak{R}_{max}^{n \times n})_{\mathrm{b}}$. Karena A merupakan *FNF* maka $\underline{\mathrm{A}}$ dan $\overline{\mathrm{A}}$ merupakan *FNF*. Menurut Teorema 1.8, $\Lambda(\underline{\mathrm{A}}) = \left\{\underline{\lambda}(\underline{\mathrm{A}}_{jj}) \,\middle|\, \lambda(\underline{\mathrm{A}}_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(\underline{\mathrm{A}}_{ii})\right\}$ dan $\Lambda(\overline{\mathrm{A}}) = \left\{\overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}}_{jj}) \,\middle|\, \overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}}_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}}_{ii})\right\}$. Akibatnya, $\Lambda(\mathrm{A}) = \left\{\lambda(\mathrm{A}_{jj}) \,\middle|\, \lambda(\mathrm{A}_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(\mathrm{A}_{ii})\right\}$, dengan $\lambda(\mathrm{A}_{jj}) = \left[\underline{\lambda}(\underline{\mathrm{A}}_{jj}), \overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}}_{jj})\right]$.

Definisi 2.9. Diberikan $\mathrm{A} \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n \times n}$ yang merupakan *FNF*. Jika $\lambda(\mathrm{A}_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(\mathrm{A}_{ii})$ maka A_{jj} (dan juga N_j atau hanya j) disebut sebagai spektral (*spectral*).

Dengan demikian $\lambda(\mathrm{A}_{jj}) \in \Lambda(\mathrm{A})$ jika j adalah spektral tetapi tidak perlu sebaliknya. Dari Teorema spektral, diperoleh beberapa akibat di bawah ini.

Akibat 2.10. Semua klas awal dari C_{A} merupakan spektral.

Bukti: Misalkan $\mathrm{A} \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n \times n}$, $\mathrm{A} \approx \left[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\right] \in I(\mathfrak{R}_{max}^{n \times n})_{\mathrm{b}}$. Menurut Akibat 1.10 semua klas awal dari $C_{\underline{\mathrm{A}}}$ dan $C_{\overline{\mathrm{A}}}$ merupakan spektral. Karena $C_{\mathrm{A}} = C_{\underline{\mathrm{A}}} = C_{\overline{\mathrm{A}}}$, berarti semua klas awal dari C_{A} merupakan spektral.

Akibat 2.11. Misalkan $|\Lambda(\mathrm{A})|$ banyaknya nilai eigen maka $1 \leq |\Lambda(\mathrm{A})| \leq n$ untuk setiap $\mathrm{A} \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n \times n}$.

Bukti: Misalkan $\mathrm{A} \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n \times n}$, $\mathrm{A} \approx \left[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\right] \in I(\mathfrak{R}_{max}^{n \times n})_{\mathrm{b}}$. Menurut Akibat 1.11, $1 \leq \left|\Lambda(\underline{\mathrm{A}})\right| \leq n$ untuk setiap $\underline{\mathrm{A}} \in \mathfrak{R}_{max}^{n \times n}$ dan $1 \leq \left|\Lambda(\overline{\mathrm{A}})\right| \leq n$ untuk setiap $\overline{\mathrm{A}} \in \mathfrak{R}_{max}^{n \times n}$. Karena $\Lambda(\mathrm{A}) \approx \Lambda\left(\left[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\right]\right)$, berakibat, $1 \leq |\Lambda(\mathrm{A})| \leq n$ untuk setiap $\mathrm{A} \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n \times n}$.

Akibat 2.12. Himpunan $\mathrm{V}(\mathrm{A}) = \mathrm{V}\big(\mathrm{A}, \lambda(\mathrm{A})\big)$ jika dan hanya jika semua klas awal mempunyai nilai eigen $\lambda(\mathrm{A})$ yang sama.

Bukti: Misalkan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$. Menurut Akibat 1.12, $V(\underline{\mathrm{A}}) = V\left(\underline{\mathrm{A}}, \underline{\lambda}(\underline{\mathrm{A}})\right)$ jika dan hanya jika semua klas awal mempunyai nilai eigen $\underline{\lambda}(\underline{\mathrm{A}})$ yang sama. Demikian pula, $V(\overline{\mathrm{A}}) = V\left(\overline{\mathrm{A}}, \overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}})\right)$ jika dan hanya jika semua klas awal mempunyai nilai eigen $\overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}})$ yang sama. Karena $\mathrm{V}(\mathrm{A}) \approx \mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}])$ dan $\mathrm{V}(\mathrm{A}, \lambda) \approx \mathrm{V}\left([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}], \left[\underline{\lambda}(\underline{\mathrm{A}}), \overline{\lambda}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\right]\right)$ maka $\mathrm{V}(\mathrm{A}) = \mathrm{V}\big(\mathrm{A}, \lambda(\mathrm{A})\big)$ jika dan hanya jika semua klas awal mempunyai nilai eigen $\lambda(\mathrm{A})$ yang sama.

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan, dapat disimpulkan bahwa

a. Diberikan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ yang merupakan *FNF*, maka

$$\Lambda(\mathrm{A}) = \left\{\lambda(\mathrm{A}_{jj}) \,\middle|\, \lambda(\mathrm{A}_{jj}) = \max_{N_i \to N_f} \lambda(\mathrm{A}_{ii})\right\}.$$

b. Semua klas awal dari C_{A} merupakan spectral.

c. Misalkan $|\Lambda(\mathrm{A})|$ banyaknya nilai eigen maka $1 \leq |\Lambda(\mathrm{A})| \leq n$ untuk setiap $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$.

d. Himpunan $\mathrm{V}(\mathrm{A}) = \mathrm{V}\big(\Lambda, \lambda(\mathrm{A})\big)$ jika dan hanya jika semua klas awal mempunyai nilai eigen $\lambda(\mathrm{A})$ yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Akian, M., Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J. P., and Viot, M. 1994. Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Zurich, Switzerland.

[2] Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J. P. 2001. *Synchronization and Linearity*, New York : John Wiley & Sons.

[3] Butkovic, P., 2010. *Max-linear Systems : Theory and Algorithms*. Monographs in Mathematics. Springer.

[4] Farlow, K. G. 2009. *Max-Plus Algebra*. Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics.

[5] Konigsberg Z. R. 2009. A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra. *International Mathematical Forum*, 4. 24. 1157 – 1171.

[6] Rudhito, Andy. 2011. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian*. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.

[7] Schutter, B. D. 1996. *Max Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. Ph.D Thesis, Katholike Universiteit Leuven, Departement Elektrotechniek.

[8] Siswanto, Ari S, M. Andy R, 2013. *Ruang Vektor Eigen Suatu Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval*. Diseminarkan dalam Seminar Nasional dan Workshop Aljabar dan Pembelajarannya, 20 – 21 April 2013, Jurusan Matematika FMIPA UM, Malang.

[9] Subiono. 2000. *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, Published by Delf University Press.

[10] Tam. K. P. 2010. *Optimizing and Approximating Eigenvectors In Max-Algebra*. A thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD).