ISBN 978-602-8580-05-2

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

Matematika dan Pendidikan Matematika

Tema:
Pengembangan Kompetensi Guru Matematika dalam Rangka Menyongsong Implementasi Kurikulum 2013

Rabu, 3 Juli 2013
Aula Gedung Pascasarjana UNS

Diselenggarakan oleh:
Program Studi Magister Pendidikan Matematika
Program Pascasarjana Universitas Sebelas Maret
Surakarta

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA TAHUN 2013

TEMA:

Pengembangan Kompetensi Guru Matematika dalam Rangka Menyongsong Implementasi Kurikulum 2013

EDITOR:

Prof. Dr. Budiyono, M. Sc.

Drs. Tri Atmojo Kusmayadi, M. Sc., Ph.D.

Dr. Mardiyana, M.Si.

Dr. Imam Sujadi, M.Si.

Dr. Riyadi, M.Si.

Dr. Budi Usodo, M.Pd.

Dwi Maryono, S.Si., M.Kom.

ISBN: 978-602-8580-05-2

Penerbit:

PELANGI PRESS

Kepuhsari Rt 03/11, Mojosongo, Jebres Surakarta

Telp. (0271) 9226606

e-mail: pelangi_press@ymail.com

Artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2013 yang diselenggarakan oleh Program Studi Magister Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta di Aula Gedung Pascasarjana UNS pada Tanggal 3 Juli 2013 . Versi Online dapat diakses di: http://s2pmath.pasca.uns.ac.id.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan yang Maha Esa, karena atas rahmat-Nya Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2013 dapat diterbitkan. Prosiding ini merupakan kumpulan dari sebagian besar artikel ilmiah yang dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2013 yang mengambil tema" P**engembangan Kompetensi Guru Matematika dalam Rangka Menyongsong Implementasi Kurikulum 2013**". Kegiatan ini diselenggarakan oleh Program Studi Magister Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret pada Tanggal 3 Juli 2013 di aula gedung Pascasarjana UNS.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada editor prosiding dan seluruh panitia seminar yang telah bekerja keras sehingga seminar ini dapat terlaksana dengan sukses. Semoga prosiding ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Surakarta, 3 Juli 2013
Ketua Panitia,

Dr. Riyadi, M.Si.

DAFTAR ISI

SISTEM PERSAMAAN LINEAR ITERATIF MAX-MIN INTERVAL

M. ANDY RUDHITO

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta, email : arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Makalah ini membahas penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min interval yang dapat digunakan sebagai dasar pemodelan masalah lintasan kapasitas interval maksimum. Dengan operasi perpangkatan pada suatu matriks dapat ditentukan kapasitas maksimum untuk semua lintasan pada graf presedennya. Dapat ditunjukkan bahwa setiap sistem persamaan linear iteratif max-min interval, selalu mempunyai penyelesaian interval. Batas bawah dan batas atas penyelesaian interval tersebut berturut-turut adalah penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas bawah dan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas atas dari matriks intervalnya.

Kata-kata kunci *: aljabar max-min, interval, sistem persamaan linear, iteratif.*

PENDAHULUAN

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis masalah lintasan kapasitas maksimum (Gondran dan Minoux, 2008).

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan kadang-kadang kapasitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai kapasitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Kapasitas-kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Dalam hal ini kapasitas jaringan dapat dimodelkan dengan suatu interval bilangan real, yang selanjutnya disebut dengan *interval*.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas yang berupa interval, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang membahas, terlebih dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min seperti halnya yang telah dilakukan untuk model deterministik dan probabilistik. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil analitis dan lebih mempermudah dalam komputasinya.

Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas maksimum juga menggunakan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min, seperti matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti yang telah dibahas dalam Baccelli, dkk. (2001), dan Gondran and Minoux, (2008). Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas interval maksimum, dengan pendekatan aljabar max-min, memerlukan konsep aljabar max-min interval (Rudhito, 2013a), matriks atas aljabar max-min interval (Rudhito, 2013b) dan sistem persamaan linear iteratif max-min-interval. Untuk itu dalam artikel ini akan dibahas sistem persamaan linear iteratif max-min-interval.

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis. Terlebih dahulu diperhatikan kembali hasil-hasil dalam matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear iteratif max-min dalam Gondran and Minoux, (2008).Kemudian memperhatikan dan membandingkan pembahasan matriks atas aljabar max-plus, sistem persamaan linear max-plus dalam Baccelli, dkk. (2001), dan matriks atas aljabar max-plus interval serta sistem persamaan linaear max-plus interval dalam Rudhito, (2011). Selanjutnya sebagai inti penelitian ini, akan dibahas bentuk dan penyelesaian sistem persamaan linear max-min intervalbeserta interpertasinya dalam teori graf yang akan terkait dengan penerapannya.

PEMBAHASAN

Pembahasan diawali dengan konsep dasar aljabar max-min, interpertasinya dalam teori graf, eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min. Pembahasan didasarkan hasil-hasil pada Baccelli et.al (1992), Gondran and Minoux, (2008), Rudhito (20013a) dan Rudhito (2013b).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon^+ := \mathbf{R}^+ \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan real nonnegatip dan ε : = $+\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ didefinisikan operasi berikut:

$\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$, $a \oplus b := \max(a, b)$ dan$a \otimes b$: = $\min(a, b)$.

Dapat ditunjukkan bahwa ($\mathbf{R}_\varepsilon^+$, ⊕, ⊗) merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral *0* = 0 dan elemen satuan ε= $+\infty$. Kemudian ($\mathbf{R}_\varepsilon^+$, ⊕, ⊗) disebut dengan *aljabar max-min*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_\varepsilon^+$.Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurang tidak dituliskan), *operasi⊗mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi⊕*. Karena ($\mathbf{R}_\varepsilon^+$, ⊕) merupakan semigrup komutatif idempoten, maka relasi“$\preceq_{\mathrm{m}}$” yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ dengan$x \preceq_{\mathrm{m}} y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$.Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$. Karena $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ merupakan semiring idempoten, maka operasi ⊕ dan ⊗*konsisten* terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$, jika $a \preceq_{\mathrm{m}} b$, maka $a \oplus c \preceq_{\mathrm{m}} b \oplus c$, dan $a \otimes c \preceq_{\mathrm{m}} b \otimes c$. Aljabar max-min $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall\, x, y \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$ berlaku: jika $x \otimes y = \min(x, y) = 0$,maka x =0atau $y = 0$.

Operasi ⊕ dan ⊗ pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$: = {$A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$, untuk i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n}. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$, dan A, $B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n. Untuk $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times p}$, $B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+p\times n}$,dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Matriks A, $B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ dikatakan *sama* jika$A_{ij} = B_{ij}$untuk setiap$i$ dan j. Didefinisikan matriks matriks $\mathrm{O} \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$, di mana $(\mathrm{O})_{ij}$:= 0, untuk setiap i dan j, dan matriks $E \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$, di mana $(E)_{ij} := \begin{cases} \varepsilon \text{ , jika } i = j \\ 0 \text{ , jika } i \neq j \end{cases}$. Dapat ditunjukkan bahwa ($\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$, ⊕, ⊗) merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks O dan elemen satuan matriks E. Sedangkan $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$. Pangkat k darimatriks $A \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan: $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk k = 1, 2, ... Relasi" $\preceq_{\mathrm{m}}$ " yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$ dengan $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$. Perhatikan bahwa $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} B_{ij}$ untuk setiap i dan j. Dalam semiring idempoten ($\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$, ⊕, ⊗), operasi ⊕ dan ⊗ konsistenterhadap urutan $\preceq_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall A$, B, $C \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$, jika $A \preceq_{\mathrm{m}} B$, maka $A \oplus C \preceq_{\mathrm{m}} B \oplus C$, dan $A \otimes C \preceq_{\mathrm{m}} B \otimes C$.

Suatu *graf berarah* $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V}$ adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut *titik* dan $\mathcal{A}$ adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota $\mathcal{A}$ disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah $\mathcal{G}$ adalah suatu barisan berhingga busur (i_1, i_2), (i_2, i_3), ... , (i_{l-1}, i_l) dengan $(i_k, i_{k+1}) \in$ A untuk suatu $l \in \mathbf{N}$(= himpunan semua bilangan asli), dan$k$ = 1, 2, ... , $l - 1$. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. Diberikan graf berarah $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{p}\}$. Graf berarah $\mathcal{G}$ dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in$ A dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij}. Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i), dilambangkan dengan $w(j, i)$. *Graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$ adalahgraf berarah berbobot $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$dengan$\mathcal{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$, $\mathcal{A} = \{(\mathbf{j}, \mathbf{i}) | w(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = A_{\mathbf{ij}} \neq 0\}$.

Dalam masalah lintasan kapasitas maksimum, A_{ij}adalah bilangan real nonnegatif dan merupakan *kapasitas*busur (j, i), yaitu aliran maksimum yang dapat melalui busur (j, i). Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$. Jika k= 0, 1, 2, 3, ..., maka unsur ke-st dari matriks $A^{\otimes k}$ adalah

$$(A^{\otimes k})_{st} = \max_{1 \le i_1, i_2, \cdots i_{k-1} \le n} (\min(A_{s,\, i_{k-1}}, \ldots, A_{i_2,\, i_1}, A_{i_1,\, t}))$$

$$= \max_{1 \le i_1, i_2, \cdots i_{k-1} \le n} (\min(A_{i_1,\, t}, A_{i_2,\, i_1}, \ldots, A_{s,\, i_{k-1}}))$$, untuk setiap s, t. Karena min($A_{i_1,\, t}$, $A_{i_2,\, i_1}$, ..., $A_{s,\, i_{k-1}}$) adalah kapasitas lintasan dengan panjang k dengan t sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya dalam $\mathcal{G}(A)$, maka $(A^{\otimes k})_{st}$ adalah kapasitas maksimumsemua lintasan dalam $\mathcal{G}(A)$ dengan panjang k, dengan t sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya. Jika tidak ada lintasan dengan panjang k dari t ke s, maka kapasitas bobot maksimum didefinisikan sama dengan 0.

3. *Teorema 1. Diberikan* $A \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$. $\forall p \geq n$, $A^{\otimes^{p}} \preceq_{\mathrm{m}} E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n}}$.

Bukti: Karena banyak titik dalam $\mathcal{G}(A)$ adalah n maka semua lintasan dengan panjang $p \geq n$ tersusun setidaknya olehsebuah sirkuit, sehingga kapasitas maksimum sirkuit tersebut lebih kecil atau sama dengan kapasitas maksimum lintasan yang panjangnya kurang dari n.Akibatnya $A^{\otimes^{p}} \preceq_{\mathrm{m}} A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}}$, $\forall p \geq n$.Karena untuk setiap $A \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$ berlaku $A \preceq_{\mathrm{m}} E \oplus A$, maka $A^{\otimes^{p}} \preceq_{\mathrm{m}} E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}}$, $\forall p \geq n$. ■

Berdasarkan Teorema 1 di atas didefinisikan operasi bintang (*) berikut.

Definisi 1. *Diberikan* $A \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$. *Didefinisikan* $A^{*} := E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n}} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus \ldots$.

Mengingat Teorema 1 diperoleh bahwa $A^{*} := E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n}}$. Berdasarkan penjelasan tentang kapasitas dan pangkat matriks di atas dapat disimpukan bahwa unsur $(A^{*})_{ij}$ merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan ujung titik $j$dan pangkal titik i . Didefinisikan pula $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n} := \{ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots , x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \ldots , n\}$.Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times 1}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n}$ disebur *vektor* atas $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$.

Teorema 2. *Diberikan* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$ *dan* $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n}$. *Vektor* $\boldsymbol{x}^{*} = A^{*} \otimes \boldsymbol{b}$ *merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min* $\boldsymbol{x} = A \otimes \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}$.

Bukti:

Perhatikan bahwa berlaku $A \otimes (A^{*} \otimes \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{b} = (E \oplus A \otimes A^{*}) \otimes \boldsymbol{b} = A^{*} \otimes \boldsymbol{b}$ .Jadi $\boldsymbol{x}^{*} = A^{*} \otimes \boldsymbol{b}$merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min$\boldsymbol{x} = A \otimes \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}$. ■

Contoh 1. Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dapat diperoleh $A^{*} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 & 5 \\ 4 & \varepsilon & 0 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$, sehingga $\boldsymbol{x}^{*} = A^{*} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min$\boldsymbol{x} = A \otimes \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}$.Perhitungan dapat diperoleh dengan Program *MATLAB* dengan list terlampir di bagian akhir makalah ini.

Interval dalam $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] = \{ x \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+} \mid \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} x \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}} \}$.Didefinisi-kan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon} = \{\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] \mid \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbf{R}^{+}, \varepsilon \prec_{\mathrm{m}} \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}} \} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}$.Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$:$\mathrm{x} \overline{\oplus} \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{y}}]$ dan $\mathrm{x} \overline{\otimes} \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{\mathrm{y}}]$, untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}$.Dapat ditunjukkan bahwa

$(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut *aljabar max-min interval* dan cukup dituliskan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Selanjutnya operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, untuk $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ disebut *matriks interval max-min*. MatriksA, B$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ dikatakan *sama*jika$A_{ij} = B_{ij}$ .Diketahui$\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, A, B$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. Didefinisikan operasi perkalian skalar $\overline{\otimes}$ dengan$\alpha \overline{\otimes}$ Aadalah matriks yang unsur ke-*ij*-nya$(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} A_{ij}$, dan operasi $\overline{\oplus}$ denganA $\overline{\oplus}$ Badalahmatriks yang unsur ke-ij-nya $(A \overline{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij}$untuk$i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$.Diketahui A$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times p}$,B$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p\times n}$. Didefinisikan operasi $\overline{\otimes}$ denganA $\overline{\otimes}$ Badalah matriks yang unsur ke-ij-nya: $(A \overline{\otimes} B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \overline{\otimes} B_{kj}$ *untuki* $= 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$.

Didefinisikan matriks E$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$,dengan $(E)_{ij} := \begin{cases} \varepsilon \text{ , jika } i = j \\ 0 \text{ , jika } i \neq j \end{cases}$. Didefinisikan pula matriks $\mathbf{O} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$,dengan: $(\mathbf{O})_{ij} := 0$ untuk setiap i dan j .

Perhatikan bahwa $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ tertutup terhadap operasi $\overline{\oplus}$, hal ini akibat dari sifat ketertutupan operasi $\overline{\oplus}$ pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$. Selanjutnya dapat ditunjukkan $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}, \overline{\oplus})$ merupakan semi-grup idempotent komutatif, sehingga relasi "$\preceq_{\text{Im}}$" yang didefinisikan pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ dengan $A \preceq_{\text{Im}} B \Leftrightarrow A \overline{\oplus} B = B$merupakan urutanparsial. Perhatikan bahwa $A \overline{\oplus} B = B \Leftrightarrow A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_{\text{Im}} B_{ij} \Leftrightarrow \underline{A_{ij}} \preceq_{\text{m}} \underline{B_{ij}}$ dan $\overline{A_{ij}} \preceq_{\text{m}} \overline{B_{ij}}$ untuk setiap i dan j. Lebih lanjut $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah matriks $\mathbf{O}$ dan elemen satuan adalah matriks E. Perhatikan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ bukan semiring komutatif, hal ini sebagai akibat dari $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n\times n}$ yang bukan merupakan semiring komutatif.

Mengingat $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}, \overline{\oplus})$ merupakan semi-grup idempoten, maka operasi $\overline{\oplus}$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\text{Im}}$ dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$, yaitu jika $A \preceq_{\text{Im}} B$, maka $A \overline{\oplus} C \preceq_{\text{Im}} B \overline{\oplus} C$untuk setiap A, B, C $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. Mengingat $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten, maka operasi $\overline{\otimes}$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\text{Im}}$ dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$, yaitu jika$A \preceq_{\text{Im}} B$, maka $A \overline{\otimes} C \preceq_{\text{Im}} B \overline{\otimes} C$untuk setiap A, B, C $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$. Untuk A , $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times p}$, dan $C \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p\times n}$, berdasarkan sifat distributif, berlaku: jika $A \preceq_{\text{Im}} B$ maka $A \overline{\oplus} B = B \Leftrightarrow (A \overline{\oplus} B) \overline{\otimes} C = B \overline{\otimes} C \Leftrightarrow (A \overline{\otimes} C) \overline{\oplus} (B \overline{\otimes} C) =$

B $\overline{\otimes}$ C $\Leftrightarrow$A $\overline{\otimes}$ C $\preceq_{\text{Im}}$ B $\overline{\otimes}$ C.Pangkat *k* darimatriks A$\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n\times n}$, dalam aljabar max-min interval didefinisikan dengan: $A^{\overline{\otimes}^{0}} = E_n$ dan $A^{\overline{\otimes}^{k}} = A \overline{\otimes} A^{\overline{\otimes}^{k-1}}$ untuk k = 1, 2, ...

Untuk setiap matriks interval A$\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$. didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A_{ij}}) \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$ dan $\overline{A} = (\overline{A_{ij}}) \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$, berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* matriks interval A. Diberikan matriks interval A$\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$, dengan $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks* dariA, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n} \mid \underline{A} \preceq_{\text{m}} A \preceq_{\text{m}} \overline{A}\}$ dan$\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_{\text{b}} = \{[\underline{A}, \overline{A}] \mid A\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}\}$.Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}]$,$[\underline{B}, \overline{B}]\in\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})_{\text{b}}$dikatakan *sama*jika$\underline{A} = \underline{B}$ dan $\overline{A} = \overline{B}$.Diketahui$\alpha\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}$, $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}]\in\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_{\text{b}}$.Didefinisikan operasi$\alpha \overline{\otimes} [\underline{A}, \overline{A}] := [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$dan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$. Diketahui$[\underline{A}, \overline{A}] \in\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times p})_{\text{b}}$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+p\times n})_{\text{b}}$.Didefinisikan$[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks interval A $\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$selalu dapat ditentukan dengan tunggal *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}] \in\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_{\text{b}}$, dan sebaliknya. (Rudhito, 2013b). Jadi matriks interval A $\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_{\text{b}}$. Matriks interval A $\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$ *bersesuaian dengan* interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_{\text{b}}$, dan dituliskan ”A $\approx[\underline{A}, \overline{A}]$”. Dapat disimpulkan $\alpha \overline{\otimes}$ A $\approx[\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan A $\overline{\oplus}$ B $\approx[\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$. Untuk A, B $\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n\times n}$ berlaku A $\overline{\otimes}$ B $\approx[\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. Untuk matriks interval A$\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times p}$ danB$\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{p\times n}$juga berlaku A $\overline{\otimes}$ B $\approx[\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Selanjutnya akan dibahas sistem persamaan linear iteratif max-min interval, yang mempunyai bentuk umum $\mathbf{x}$=A $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}$ $\overline{\oplus}$ $\mathbf{b}$, di mana A$\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n\times n}$ dan $\mathbf{b}\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n}$, Sistem persamaan linear iteratif max-min interval tersebut selanjutnya cukup disebut sistem interval $\mathbf{x}$=A $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}$ $\overline{\oplus}$ $\mathbf{b}$.

Definisi 2. *Diberikan*A$\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n\times n}$ *dan*$\mathbf{b}\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n}$ *.Suatu vektor interval*$\mathbf{x}^{*}\in\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n}$ *disebut***penyelesaian interval***sistem interval*$\mathbf{x}$=A $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}$ $\overline{\oplus}$ $\mathbf{b}$*jika*$\mathbf{x}^{*}$*memenuhi sistem interval tersebut.*

Berikut diberikan Teorema mengenai eksistensi penyelesaian interval sistem interval $\mathbf{x}$=A $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}$ $\overline{\oplus}$ $\mathbf{b}$.

Teorema 3*Diberikan* $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$ *dan* $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n}$ *.Vektor interval* $\mathbf{x}^* \approx [\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}},\ \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}]$*,merupakan suatu penyelesaian interval sistem interval* $\mathbf{x} = A \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} \,\overline{\oplus}\, \mathbf{b}$.

Bukti: Untuk setiap $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, menurut Teorema 2, $\boldsymbol{x}^* = A^* \otimes \boldsymbol{b}$ merupakan suatu penyelesaian sistem $\boldsymbol{x} = A \otimes \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}$ untuk setiap $\boldsymbol{b} \in [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$. Mengingat operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka $\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}} \preceq_m A^* \otimes \boldsymbol{b} \preceq_m \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}$ untuk setiap $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ dan untuk setiap $\boldsymbol{b} \in [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$. Ambil $\mathbf{x}^* \approx [\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}},\ \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}] = [\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*]$. Menurut Teorema 2, $\underline{\mathbf{x}}^* = \underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}$ berturut-turut merupakan penyelesaian sistem $\underline{\mathbf{x}} = \underline{A} \otimes \underline{\mathbf{x}} \oplus \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathbf{x}} = \overline{A} \otimes \overline{\mathbf{x}} \oplus \overline{\mathbf{b}}$. Hal ini berarti bahwa $\underline{\mathbf{x}}^* = \underline{A} \otimes \underline{\mathbf{x}}^* \oplus \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathbf{x}}^* = \overline{A} \otimes \overline{\mathbf{x}}^* \oplus \overline{\mathbf{b}}$, yang berarti juga bahwa $[\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*] = [\underline{A} \otimes \underline{\mathbf{x}}^* \oplus \underline{\mathbf{b}},\ \overline{A} \otimes \overline{\mathbf{x}}^* \oplus \overline{\mathbf{b}}]$ atau $[\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*] = [\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{x}}^*] \,\overline{\oplus}\, [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$. Hal ini berarti $\mathbf{x}^* = A \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}^* \,\overline{\oplus}\, \mathbf{b}$.Jadi terbukti bahwa vektor interval $\mathbf{x}^* \approx [\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}},\ \overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}}]$ merupakan penyelesaian interval untuk sistem $\mathbf{x} = A \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} \,\overline{\oplus}\, \mathbf{b}$.

■

Contoh 2. Diberikan sistem $\mathbf{x} = A \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} \,\overline{\oplus}\, \mathbf{b}$, dengan $A = \begin{bmatrix} [1,2] & [3,5] & [5,6] \\ [4,4] & [2,3] & [0,0] \\ [0,0] & [\varepsilon,\varepsilon] & [2,4] \end{bmatrix}$, dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} [1,2] \\ [0,0] \\ [2,4] \end{bmatrix}$,

maka $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Dapat diperoleh $\underline{A}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 & 5 \\ 4 & \varepsilon & 0 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$, $\overline{A}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon & 6 & 6 \\ 4 & \varepsilon & 0 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$, $\underline{A}^* \otimes \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\overline{A}^* \otimes \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, sehingga $\mathbf{x}^* \approx \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right]$. Jadi penyelesaian interval sistem tersebut adalah vektor interval $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} [2,4] \\ [2,4] \\ [2,4] \end{bmatrix}$. Perhitungan dapat diperoleh dengan Program *MATLAB* dengan list terlampir, dengan menghitung untuk masing-masing matriks batas bawah dan atasnya.

SIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan di atas diperoleh eksistensi penyelesaian interval sistem persamaan linear iteratif max-min interval. Setiap sistem persamaan linear iteratif max-min interval, selalu mempunyai penyelesaian interval. Batas bawah dan batas atas penyelesaian interval tersebut berturut-turut adalah penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas bawah dan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-min untuk matriks batas atas dari matriks intervalnya.

Selanjutnya masih perlu diteliti mengenai ketunggalan penyelesaian interval sistem persamaan linear iteratif max-min interval di atas. Penelitian ini masih bersifat teoritis matematis, selanjuntnya dapat dilakukan penelitian terkait penerapan pada masalah-masalah nyata sehari, khususnya yang terkait dengan kapasitas interval maksimum lintasan dalam suatu jaringan.

DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Gondran, M and Minoux, M. 2008. *Graph, Dioids and Semirings*. New York: Springer.

Rudhito, Andy. 2011. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur*. Disertasi: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy. 2013a. Aljabar Max-Min Interval.*Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan , dan Penerapan MIPA*, tanggal 18 Mei 2013, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.

Rudhito, Andy. 2013b. Matriks atas Aljabar Max-Min Interval.*Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains dan Matematika,* tanggal 15 Juni 2013, FSM Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga.

Lampiran

List Program *MATLAB* untuk menyelesaikan sistem persamaan linear iteratif max-min:

```
% Program Matlab Menyelesaikan Sistem Pers Linear Iterative x=Ax+b
% Input: A = matriks atas aljabar max-min Anxn, b = Vektor nx1
% Output: Matriks x=A*b

% Memasukkan matriks A dan vektor b
A1 = input('    Masukkan matriks  Anxn =  ');
B1 = input('    Masukkan matriks  bnx1 =  ');
[m, n]= size(A1);
[k, r]= size(B1);

% Menghitung A pangkat dan A+
            G1=A1;
            A1_plus = A1;
for s=1:n-1
   s+1;
            for i = 1: n
              for j = 1: n
                 F1(i, j) = -Inf;
            for p = 1: n
                    F1(i, j) = max( F1(i, j) , min(A1(i, p), G1(p, j)));
end;
              end;
end;
            G1 = F1;
A1_plus = max(A1_plus, F1);
end;
disp('    Matriks A_plus '), disp(A1_plus);
```

```
% Menghitung matriks E dan A*
            for i = 1 : n
            for j = 1 : n
            if i == j
E(i,j) = Inf;
            end;
            end;
            end;
  A1_star= max(E, A1_plus)

% Menampilkan hasil A pangkat
disp('    Matriks A_star '), disp(A1_star);

% Menghitung A_star kali B
for i = 1:m
for j = 1: r
           A1_starB1(i, j) = -Inf;
for p = 1: n
                A1_starB1(i, j) = max(A1_starB1(i, j) , min(A1_star(i, p), B1(p, j)));
end;
end;
end;

% Menampilkan hasil kali
disp('    Penyelesaian minimal x'),disp(A1_starB1)
```