ISSN : 2087 - 0922
Vol. 4 No. 1, 15 Juni 2013

PROSIDING

Seminar Nasional
Sains dan Pendidikan Sains VIII

" Pembelajaran Sains yang Menarik dan Menantang"

Tema :

"Memajukan Dukungan Sains dan Matematika pada Dunia Bisnis, Industri dan Pendidikan"

Editor:

Tundjung Mahatma, M.Kom.
Adita Sutresno, M.Sc.
Dewi Kurnianingsih A.K.H., SSi, M.S

Bidang:
☐ Fisika ☐ Kimia ☐ Matematika
☐ Pendidikan Fisika ☐ Pendidikan Matematika

Fakultas Sains dan Matematika-Universitas Kristen Satya Wacana
Jl.Diponegoro 52-60 Salatiga 50715 Telp.0298-7100396
Fax.0298-321433

DAFTAR ISI

MATRIKS ATASALJABAR MAX-MIN INTERVAL

M. Andy Rudhito
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta

email: arudhito@yahoo.co.id

ABSTRAK

Makalah ini membahas aljabar matriks atas aljabar max-min interval (matriks interval) dan suatu cara untuk mempermudah pengoperasian matriks interval melalui interval matriksnya. Aljabar matriks ini merupakan perluasan aljabar matriks atas aljabar max-min dan dapat menjadi dasar pembahasan aljabar matriks max-min bilangan kabur. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua matriks interval yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar max-min dan penjumlahan max-min merupakan semimodul. Himpunan semua matriks persegi atas aljabar max-min interval yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan max-min dan perkalian max-min merupakan semiring idempoten. Sebagai jaminan dapat dilakukan pengoperasian matriks interval melalui interval matriksnya, ditunjukkan bahwa semimodul himpunan semua matriks interval isomorfis dengan semimodul himpunan interval matriks yang bersesuaian, dan semiring himpunan semua matriks interval persegi isomorfis dengan semiring himpunan interval matriks persegi yang bersesuaian.

Kata-kata kunci:aljabar matriks, aljabar max-min, interval,semiring, semimodul.

PENDAHULUAN

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real **R**dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis masalah lintasan kapasitas maksimum ([2]).

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan kadang-kadang kapasitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai kapasitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Kapasitas-kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Dalam hal ini kapasitas jaringan dapat dimodelkan dengan suatu interval bilangan real, yang selanjutnya disebut dengan *interval*.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas yang berupa interval, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang membahas, terlebih dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min seperti halnya yang telah dilakukan untuk model deterministik dan probabilistik. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil analitis dan lebih mempermudah dalam komputasinya.

Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas maksimum juga menggunakan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min, seperti matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti yang telah dibahas dalam [1] dan [2]. Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas interval maksimum, dengan pendekatan aljabar max-min, terlebih dahulu matriks atas aljabar max-min perlu digeneralisasi ke dalam matriks atas aljabar max-min interval. Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas generalisasi matriks atas aljabar max-min perlu digeneralisasi ke dalam matriks atas aljabar max-min interval.

BAHAN DAN METODE

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis. Terlebih dahulu diperhatikan kembali hasil-hasil dalam aljabar max-min [2] dan aljabar max-min interval [5]. Dengan memperhatikan dan membandingkan pembahasan matriks atas aljabar max-min [2], matriks atas aljabar max-plus [1], [4] dan matriks atas aljabar max-plus interval [4], akan dikonstruksikan dan dibahas sifat-sifat dan teknis perhitungan matriks atas aljabar max-plus interval. Hasil-hasil pembahasan akan disajikan dalam definisi, teorema dan contoh.

HASIL DAN DISKUSI

Terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dalam semiring dan semimodul [5] , [6], aljabar max-min dan aljabar max-min interval, yang selengkapnya dapat dilihat dalam [5].

Suatu *semiring* $(S, *, \bullet)$ adalah suatu himpunan takkosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner $*$ dan $\bullet$, yang memenuhi aksioma berikut

i) $(S, *)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu berlaku
$(a*b)*c = a*(b*c)$,
$a*b = b*a$,
$a*0 = a$, untuk setiap $a, b, c \in S$.

ii) $(S, \bullet)$ adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu berlaku
$(a\bullet b)\bullet c = a\bullet(b\bullet c)$,
$a\bullet 1 = 1\bullet a = a$, untuk setiap $a, b, c \in S$.

iii) Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\bullet$, yaitu berlaku
$a\bullet 0 = 0\bullet a = 0$, untuk setiap $a \in S$.

iv) Operasi $*$ distributif terhadap $\bullet$, yaitu berlaku $(a*b)\bullet c = (a\bullet c)*(b\bullet c)$,
$a\bullet(b*c) = (a\bullet b)*(a\bullet c)$
untuk setiap $a, b, c \in S$.

Semiring $(S, *, \bullet)$ dikatakan *idempoten* jika operasi $*$ bersifat idempoten, yaitu berlaku $a*a = a$ untuk setiap $a \in S$, dan dikatakan *komutatif* jika operasi $\bullet$ bersifat komutatif. Dapat ditunjukkan bahwa jika $(S, *)$ merupakan semigrup komutatif idempoten maka relasi "$\preceq$" yang didefinisikan pada S dengan $x \preceq y \Leftrightarrow x*y = y$ merupakan *urutan parsial* pada S. Operasi $*$ dan $\times$ dikatakan *konsisten* terhadap urutan "$\preceq$" dalam S bila dan hanya bila jika $x \preceq y$, maka $x*z \preceq y*z$ dan $x\times z \preceq y\times z$ untuk setiap $x, y, z \in S$. Dalam semiring idempoten $(S, *, \bullet)$ operasi $*$ dan $\bullet$ konsisten terhadap urutan $\preceq$ dalam S.

Semiring $(S, *, \bullet)$ dengan elemen netral 0 dikatakan *tidak memuat pembagi nol* bila dan hanya bila, jika $x \bullet y = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$ untuk setiap $x, y \in S$.

Diberikan S dan T adalah semiring. Fungsi $f : S \to T$ disebut *homomorfisma semiring* jika berlaku $f(a*b) = f(a)*f(b)$ dan $f(a\bullet b) = f(a)\bullet f(b)$ untuk setiap $a, b \in S$. Jika homomorfisma semiring f bersifat bijektif, maka f disebut *isomorfisma semiring* dan dikatakan bahwa semiring S *isomorfis* dengan semiring T.

Diberikan semiring komutatif $(S, *, \bullet)$ dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1. *Semimodul* M *atas* S adalah semigrup komutatif $(M, *)$ yang dilengkapi *operasi perkalian skalar* $\blacklozenge : S\times M \to M$, yang dituliskan $(\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha\bullet\mathbf{x}$, sedemikian hingga memenuhi aksioma berikut:

i) $\alpha\blacklozenge(\mathbf{x}*\mathbf{y}) = \alpha\blacklozenge\mathbf{x} * \alpha\blacklozenge\mathbf{y}$,
ii) $(\alpha*\beta)\blacklozenge\mathbf{x} = \alpha\blacklozenge\mathbf{x}*\beta\blacklozenge\mathbf{x}$,
iii) $\alpha\blacklozenge(\beta\blacklozenge\mathbf{x}) = (\alpha\blacklozenge\beta)\blacklozenge\mathbf{x}$,
iv) $1\blacklozenge\mathbf{x} = \mathbf{x}$,
v) $0\blacklozenge\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

untuk setiap $\alpha, \beta \in S$ dan untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in M$. Elemen-elemen dalam semimodul disebut *vektor*.

Diberikan semimodul M atas semiring S dengan operasi penjumlahan $+$ dan perkalian skalar $\bullet$. Dapat ditunjukkan bahwa jika $(M, +)$ merupakan semigrup komutatif idempoten, maka operasi $+$ dan $\bullet$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq_m$ dalam semimodul M, yaitu untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in M$ dan untuk setiap $\alpha \in S$, jika $\mathbf{x} \preceq_m \mathbf{y}$, maka $\mathbf{x} + \mathbf{z} \preceq_m \mathbf{y} + \mathbf{z}$ dan $\alpha\bullet\mathbf{x} \preceq_m \alpha\bullet\mathbf{y}$. Diberikan M dan N adalah semimodul atas semiring komutatif S. Fungsi $f : M \to N$ disebut *homomorfisma semimodul* jika $f(\alpha\bullet\mathbf{x}) = \alpha\bullet f(\mathbf{x})$ dan $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ dan untuk setiap $\alpha \in S$. Jika homomorfisma semimodul f bersifat bijektif, maka f disebut *isomorfisma semimodul* dan dikatakan bahwa semimodul M *isomorfis* dengan semimodul N.

Diberikan $\mathbf{R}^+_\varepsilon := \mathbf{R}^+ \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan real nonnegatip dan $\varepsilon := +\infty$. Pada $\mathbf{R}^+_\varepsilon$ didefinisikan operasi

$a\oplus b$:= max(a, b) dan$a\otimes b$: = min(a, b)$\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$.Dapat ditunjukkan ($\mathbf{R}_\varepsilon^+$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral 0 = 0 dan elemen satuan ε= +∞. Kemudian ($\mathbf{R}_\varepsilon^+$, $\oplus$, $\otimes$) disebut dengan *aljabar max-min*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_\varepsilon^+$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$: = {$A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$, untuk i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n}. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$, dan A, $B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ didefinisikan $\alpha\otimes A$, dengan $(\alpha\otimes A)_{ij} = \alpha\otimes A_{ij}$ dan $A\oplus B$, dengan $(A\oplus B)_{ij} = A_{ij}\oplus B_{ij}$ untuk i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n. Untuk $A\in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times p}$, $B\in \mathbf{R}_\varepsilon^{+p\times n}$ didefinisikan $A\otimes B$, dengan $(A\otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik}\otimes B_{kj}$.Matriks A, $B\in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ dikatakan *sama*jika$A_{ij} = B_{ij}$untuk setiap$i$dan$j$.

Interval dalam $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ berbentuk

$$x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{ x \in \mathbf{R}_\varepsilon^+ \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \overline{x} \}.$$

Didefinisikan

$$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}^+,$$
$$\varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x}\} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}.$$

Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$:

$$x \,\overline{\oplus}\, y = [\underline{x}\oplus\underline{y}, \overline{x}\oplus\overline{y}] \text{ dan}$$
$$x \,\overline{\otimes}\, y = [\underline{x}\otimes\underline{y}, \overline{x}\otimes\overline{y}]$$

untuk setiap $x, y \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut *aljabar max-min interval* dan cukup dituliskan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Selanjutnya operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ seperti dalam definisi berikut.

Definisi 1

Didefinisikan$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$: = {A= $(A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$,untuk$i$ = 1, 2, ..., m , j = 1, 2, ..., n}. Matriks anggota$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ disebut*matriks interval max-min*.

Definisi 2

Matriks A, B$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ *dikatakan **sama**jika*$A_{ij} = B_{ij}$.

Definisi 3

i) *Diketahui*$\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, A, B$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. *Didefinisikan operasi perkalian skalar* $\overline{\otimes}$ *dengan*$\alpha \,\overline{\otimes}\, A$ *adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:* $(\alpha \,\overline{\otimes}\, A)_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, A_{ij}$,*dan operasi* $\overline{\oplus}$ *dengan* $A \,\overline{\oplus}\, B$*adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:* $(A \,\overline{\oplus}\, B)_{ij} = A_{ij} \,\overline{\oplus}\, B_{ij}$*untuk$i$* = 1, 2, ..., *$mdanj$* =1, 2, ..., n.
ii) *Diketahui* A$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times p}$,B$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p\times n}$. *Didefinisikan operasi* $\overline{\otimes}$ *dengan*$A \,\overline{\otimes}\, B$*adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:*$(A \,\overline{\otimes}\, B)_{ij} = \overline{\bigoplus}_{k=1}^{p} A_{ik} \,\overline{\otimes}\, B_{kj}$ *untuk$i$* = 1, 2, ..., *$m$dan j* =1, 2, ..., n.

Didefinisikan matriks E$\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$,dengan $(E)_{ij}$: = $\begin{cases} 0 \text{ , jika } i = j \\ \varepsilon \text{ , jika } i \neq j \end{cases}$. Didefinisikan pula matriks $\varepsilon \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$,dengan: $(\varepsilon)_{ij}$:= ε untuk setiap i dan j .

Contoh 1

Perhatikan bahwa $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ tertutup terhadap operasi $\overline{\oplus}$, hal ini akibat dari sifat ketertutupan operasi $\overline{\oplus}$ pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$. Selanjutnya dapat ditunjukkan$(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}, \overline{\oplus})$ merupakan semi-grup idempotent komutatif, sehingga relasi "$\preceq_{Im}$" yang didefinisikan pada

$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ dengan $A \preceq_{\mathrm{Im}} B \Leftrightarrow A \,\overline{\oplus}\, B = B$ merupakan urutanparsial. Perhatikan bahwa $A \,\overline{\oplus}\, B = B \Leftrightarrow A_{ij} \,\overline{\oplus}\, B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_{\mathrm{Im}} B_{ij} \Leftrightarrow \underline{A}_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} \underline{B}_{ij}$ dan $\overline{A}_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{B}_{ij}$ untuk setiap i dan j. Lebih lanjut $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$., sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$, $\overline{\oplus}$, $\overline{\otimes}$) merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah matriks ε dan elemen satuan adalah matriks E. Perhatikan bahwa ($\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$, $\overline{\oplus}$, $\overline{\otimes}$) bukan semiring komutatif , hal ini sebagai akibat dari $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n\times n}$ yang bukan merupakan semiring komutatif.

Mengingat ($\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}, \overline{\oplus}$) merupakan semi-grup idempoten, maka operasi $\overline{\oplus}$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{Im}}$ dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$, yaitu jika $A \preceq_{\mathrm{Im}} B$, maka $A \,\overline{\oplus}\, C \preceq_{\mathrm{Im}} B \,\overline{\oplus}\, C$ untuk setiap A, B, C $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. Mengingat ($\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes}$) merupakan semiring idempoten, maka operasi $\overline{\otimes}$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{Im}}$ dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$, yaitu jika $A \preceq_{\mathrm{Im}} B$, maka $A \,\overline{\otimes}\, C \preceq_{\mathrm{Im}} B \,\overline{\otimes}\, C$ untuk setiap A, B, C $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$. Untuk A, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times p}$, dan $C \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p\times n}$,berdasarkan sifat distributif, berlaku: jika $A \preceq_{\mathrm{Im}} B$ maka $A \,\overline{\oplus}\, B = B \Leftrightarrow (A \,\overline{\oplus}\, B) \,\overline{\otimes}\, C = B \,\overline{\otimes}\, C \Leftrightarrow (A \,\overline{\otimes}\, C) \,\overline{\oplus}\, (B \,\overline{\otimes}\, C) = B \,\overline{\otimes}\, C \Leftrightarrow A \,\overline{\otimes}\, C \preceq_{\mathrm{Im}} B \,\overline{\otimes}\, C$.

Pangkat k darimatriks $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$, dalam aljabar max-min interval didefinisikan dengan: $A^{\overline{\otimes}0} = E_n$ dan $A^{\overline{\otimes}k} = A \,\overline{\otimes}\, A^{\overline{\otimes}k-1}$ untuk k = 1, 2, ...

Untuk mempermudah dalam melakukan operasi matriks interval berikut dibahas konsep mengenai interval matriks dari suatu matriks interval.

Definisi 4

Untuk setiap matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ dan $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$,berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* matriks intervalA.

Contoh 2.

Diberikan matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [1,2] & [0,0] & [6,9] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [0,3] & [2,2] \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definisi 5

Diberikan matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$, dengan $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks* dariA, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n} \mid \underline{A} \preceq_{\mathrm{m}} A \preceq_{\mathrm{m}} \overline{A}\}$ dan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b = \{[\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}\}$.

Contoh 3

Diberikan matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [1,2] & [0,0] & [6,9] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [0,3] & [2,2] \end{bmatrix}.$$

Interval matriks dari A adalah

$$[\underline{A}, \overline{A}] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix} \right].$$

Definisi 6

Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})_b$ dikatakan *sama*jika $\underline{A} = \underline{B}$ dan $\overline{A} = \overline{B}$.

Berdasarkan sifat kekonsistenan relasi urutan $\preceq_{\mathrm{m}}$ dalam matriks, didefinisikan operasi-operasi interval matriks berikut.

i) Diketahui $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b$.Didefinisikan

$\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}] := [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan

$[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\oplus}\, [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$

ii) Diketahui $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times p})_b$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+p\times n})_b$. Didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \bar{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Untuk setiap $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_b$ dan $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}$ berlaku $\underline{A} \preceq_m \overline{A}$, $\underline{B} \preceq_m \overline{B}$ dan $\underline{\alpha} \preceq_m \overline{\alpha}$. Mengingat operasi $\oplus$ dan operasi perkalian skalar $\otimes$ pada semimodul $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$ atas $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka berlaku $\underline{A} \oplus \underline{B} \preceq_m \overline{A} \oplus \overline{B}$ dan $\underline{\alpha} \otimes \underline{A} \preceq_m \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$. Jadi $[\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $[\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ merupakan interval-interval matriks. Dengan demikian $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})_b$ tertutup terhadap operasi $\bar{\oplus}$ dan perkalian skalar $\bar{\otimes}$ seperti yang didefinisikan di atas. Selanjutnya sesuai dengan definisi operasi pada interval matriks di atas, dapat ditunjukkan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_b$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}$.

Untuk setiap $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n})_b$ berlaku $\underline{A} \preceq_m \overline{A}$ dan $\underline{B} \preceq_m \overline{B}$. Mengingat operasi perkalian $\otimes$ pada semiring $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n}$ konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka $\underline{A} \otimes \underline{B} \preceq_m \overline{A} \otimes \overline{B}$. Jadi $[\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ merupakan interval matriks. Jadi $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n})_b$ tertutup terhadap operasi perkalian $\bar{\otimes}$ seperti yang didefinisikan di atas. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+n\times n})_b, \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah interval matriks $[\mathcal{E}, \mathcal{E}]$ dan elemen satuan adalah interval matriks [E, E].

Berikut diberikan Lemma 1 yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema 3.

Lemma 1

Untuk setiap A dan B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$, berlaku

i) $\underline{\alpha \bar{\otimes} A} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A}$ dan $\overline{\alpha \bar{\otimes} A} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$,

ii) $\underline{A \bar{\oplus} B} = \underline{A} \oplus \underline{B}$ dan $\overline{A \bar{\oplus} B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$.

Bukti:

i) Karena $(\alpha \bar{\otimes} A)_{ij} = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \bar{\otimes} [\underline{A_{ij}}, \overline{A_{ij}}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A_{ij}}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A_{ij}}]$, maka $\underline{\alpha \bar{\otimes} A}_{ij} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A_{ij}}$ dan $\overline{\alpha \bar{\otimes} A}_{ij} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A_{ij}}$ untuk setiap i dan j, sehingga $\underline{\alpha \bar{\otimes} A} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A}$ dan $\overline{\alpha \bar{\otimes} A} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$.

ii) Karena $(A \bar{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \bar{\oplus} B_{ij} = [\underline{A_{ij}}, \overline{A_{ij}}] \bar{\oplus} [\underline{B_{ij}}, \overline{B_{ij}}] = [\underline{A_{ij}} \oplus \underline{B_{ij}}, \overline{A_{ij}} \oplus \overline{B_{ij}}]$, maka $\underline{(A \bar{\oplus} B)_{ij}} = \underline{A_{ij}} \oplus \underline{B_{ij}}$ dan $\overline{(A \bar{\oplus} B)_{ij}} = \overline{A_{ij}} \oplus \overline{B_{ij}}$ untuk setiap i dan j, sehingga $\underline{A \bar{\oplus} B} = \underline{A} \oplus \underline{B}$ dan $\overline{A \bar{\oplus} B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$. ∎

Berikut diberikan Lemma 2 yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema 4.

Lemma 2

Untuk setiap A dan B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{n\times n}$, berlaku $\underline{A \bar{\otimes} B} = \underline{A} \otimes \underline{B}$ dan $\overline{A \bar{\otimes} B} = \overline{A} \otimes \overline{B}$.

Bukti: Mengingat $(A \bar{\otimes} B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \bar{\otimes} B_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} [\underline{A_{ik}}, \overline{A_{ik}}] \bar{\otimes} [\underline{B_{kj}}, \overline{B_{kj}}] = \bigoplus_{k=1}^{n} [\underline{A_{ik}} \otimes \underline{B_{kj}}, \overline{A_{ik}} \otimes \overline{B_{kj}}] = [\bigoplus_{k=1}^{n} \underline{A_{ik}} \otimes \underline{B_{kj}}, \bigoplus_{k=1}^{n} \overline{A_{ik}} \otimes \overline{B_{kj}}]$, maka $\underline{(A \bar{\otimes} B)_{ij}} = \bigoplus_{k=1}^{n} \underline{A_{ik}} \otimes \underline{B_{kj}}$ dan $\overline{(A \bar{\otimes} B)_{ij}} = \bigoplus_{k=1}^{n} \overline{A_{ik}} \otimes \overline{B_{kj}}$, untuk setiap i dan j, sehingga $\underline{A \bar{\otimes} B} = \underline{A} \otimes \underline{B}$ dan $\overline{A \bar{\otimes} B} = \overline{A} \otimes \overline{B}$. ∎

Teorema 3

Semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$ atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_b$ atas $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}$.

Bukti: Didefinisikan pemetaan f : $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n} \to \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_b$, $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$ untuk setiap $A \in (\mathbf{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$. Dari definisi pemetaan

tersebut jelas bahwa f merupakan pemetaan bijektif. Ambil sembarang A dan B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ dan semba-rang $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$., maka menurut Lemma 1. diperoleh $f(\alpha \overline{\otimes} A) = [\underline{\alpha \overline{\otimes} A}, \overline{\alpha \overline{\otimes} A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}] = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \overline{\otimes} [\underline{A}, \overline{A}] = \alpha \overline{\otimes} f(A)$ dan diperoleh $f(A \overline{\oplus} B) = [\underline{(A \overline{\oplus} B)}, \overline{A \overline{\oplus} B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}] = [\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] = f(A) \overline{\oplus} f(B)$.
■

Dari Teorema 3 di atasdapat disimpulkan untuk setiap matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ selalu dapat ditentukan dengan tunggal *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b$, dan sebaliknya. Jadi matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b$. Matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ *bersesuaian dengan* interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b$, dan dituliskan ”A $\approx [\underline{A}, \overline{A}]$”.Dapat disimpulkan $\alpha \overline{\otimes} A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $A \overline{\oplus} B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$.

Teorema 4
Semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ isomorfis dengan semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n\times n})_b, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$.

Bukti: Didefinisikan pemetaan $f : \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n} \to \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n\times n})_b$ dengan $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$ untuk setiap A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$. Jelas bahwa pemetaan f merupakan pemetaan bijektif. Ambil semba-rang A dan B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$, maka seperti pada pembuktian pada Teorema 3 di atas diperoleh $f(A \overline{\oplus} B) = f(A) \overline{\oplus} f(B)$. Selanjutnya menurut Lemma 2diperoleh bahwa $f(A \overline{\otimes} B) = [\underline{(A \overline{\otimes} B)}, \overline{A \overline{\otimes} B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}] = [\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] = f(A) \overline{\otimes} f(B)$. Jadi terbukti f merupakan suatu isomorfisma semiring. Jadi semiring $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$ isomorfis dengan semiring $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n\times n})_b$. ■

Dari Teorema 4 di atasdapat disimpulkan untuk A, B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n\times n}$ berlaku $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. Untuk matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times p}$ danB $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p\times n}$ juga berlaku $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times p}$ danB $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p\times n}$ dapat diperbesar ukurannya dengan menambahkan sejumlah unsur ε sedemikian hingga membentuk matriks interval $A^\#$ dan $B^\#$ $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{k\times k}$, dengan $k = \max(m, p, n)$. Matriks A dan B berturut-turut merupakan submatriks $A^\#$ dan $B^\#$ yang letaknya di sebelah kiri atas, yaitu

$$A^\# = \begin{bmatrix} A & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},\ B^\# = \begin{bmatrix} B & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},\ \text{sehingga}$$

$$A^\# \overline{\otimes} B^\# = \begin{bmatrix} A \overline{\otimes} B & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{k\times k},$$

di mana $A \overline{\otimes} B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$.Karenasemiring $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{k\times k}$ isomorfis dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+k\times k})_b$, maka $A^\# \overline{\otimes} B^\# \approx [\underline{A^\#} \otimes \underline{B^\#}, \overline{A^\#} \otimes \overline{B^\#}]$, yang berakibat bahwa $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b$

Contoh 4

Diberikan matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [1,2] & [0,0] & [6,9] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [0,3] & [2,2] \end{bmatrix}, \text{dan}$$

$$B = \begin{bmatrix} [\varepsilon,\varepsilon] & [1,4] \\ [2,6] & [0,2] \\ [1,2] & [4,5] \end{bmatrix}, \text{maka}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ \overline{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\underline{A} \otimes \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$, $\overline{A} \otimes \overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$.

Perhatikan bahwa $A \,\overline{\otimes}\, B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}] =$
$\left[\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \right]$,

sehingga$A \,\overline{\otimes}\, B = \begin{bmatrix} [1,2] & [4,5] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [2,4] \end{bmatrix}$.

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa operasi-operasi pada matriks interval dapat dilakukan melalui matriks-matriks batas bawah dan batas bawahnya. Selanjutnya dapat diperoleh interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval hasil pengoperasian. Hasil pembahasan di atas selanjutnya dapat digunakan untuk membahas sistem persamaan linear max-min interval. Di samping itu hasil-hasil di atas juga dapat digeneralisir ke dalam matriks atas aljabar max-min bilangan kabur (*fuzzy*), dengan terlebih dulu menggeneralisir aljabar max-min interval ke dalam aljabar max-min bilangan kabur.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. Synchronization and Linearity. New York: John Wiley & Sons.

[2] Gondran, M and Minoux, M. 2008. Graph, Dioids and Semirings. New York: Springer.

[3] Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. 2001. Idempotent Interval Anaysis and Optimization Problems.Reliab.Comput., 7, 353 – 377; arXiv: math.SC/ 010180.

[4]Rudhito, Andy. 2011. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur. Disertasi: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

[5]Rudhito, Andy. 2013. Aljabar Max-Min Interval. Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan , dan Penerapan MIPA, tanggal 18 Mei 2013, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.

[6] Schutter, B. De., 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven