

ISBN : 978-979-99314-6-7



## Prosiding Seminar Nasional

Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA  
02 Juni 2012, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Prosiding  
Seminar Nasional

Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA  
02 Juni 2012, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

### Kelompok Bidang :

- Matematika dan Pendidikan Matematika
- Fisika dan Pendidikan Fisika
- Kimia dan Pendidikan Kimia
- Biologi dan Pendidikan Biologi
- Ilmu Pengetahuan Alam



**Pemantapan Profesionalisme Peneliti, Pendidik dan Praktisi MIPA  
Untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
2012**



*Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,  
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 02 Juni 2012*



## **PROSIDING SEMINAR NASIONAL**

**Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA**

Tanggal 02 Juni 2012, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978-979-99314-6-7

Bidang:

- Matematika dan Pendidikan Matematika
- Fisika dan Pendidikan Fisika
- Kimia dan Pendidikan Kimia
- Biologi dan Pendidikan Biologi
- Ilmu Pengetahuan Alam



Tema:

**Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik, dan Praktisi MIPA  
Untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah**

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
Tahun 2012



## **PROSIDING SEMINAR NASIONAL**

**Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA**

Tanggal 02 Juni 2012, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978-979-99314-6-7

### **Tim Editor:**

1. Kismiantini, M.Si
2. Denny Darmawan, M.Sc
3. Erfan Priyambodo, M.Si
4. Agung Wijaya, M.Pd
5. Sabar Nurohman, M.Pd

### **Tim Reviewer:**

1. Dr. Agus Maman Abadi
2. Wipasar Sunu Brams Dwandaru, M.Sc, Ph.D
3. Dr. Endang Wijayanti
4. Dr. Heru Nurcahyo



Tema:

**Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik, dan Praktisi MIPA  
Untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah**

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
Tahun 2012

## **Kata Pengantar**

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga Prosiding Seminar Nasional MIPA Universitas Negeri Yogyakarta (UNY) 2012 ini dapat selesai disusun sesuai dengan tenggat waktu yang telah ditentukan oleh panitia. Seluruh makalah yang ada dalam prosiding ini merupakan kumpulan makalah yang telah lolos proses seleksi yang dilakukan tim reviewer dan telah disampaikan dalam kegiatan seminar nasional yang diselenggarakan pada tanggal 2 Juni 2012 di Fakultas MIPA UNY.

Seminar Nasional MIPA UNY 2012 mengangkat tema “*Pemantapan Profesionalisme Peneliti, Pendidik dan Praktisi MIPA untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah*”. Makalah utama yang ditampilkan dalam kegiatan ini adalah “*Publikasi Ilmiah Sebagai Produk Utama Aktivitas Penelitian Ilmiah*” yang disampaikan oleh Dr. Langkah Sembiring dari Fakultas Biologi Universitas Gadjah Mada dan “*Upaya Membangun Insan Berkarakter Ilmiah dan Kompetitif*” yang disampaikan oleh Sudjoko, M.Si., dari Jurusan Pendidikan Biologi Universitas Negeri Yogyakarta. Selain makalah utama, dalam seminar ini juga disampaikan hasil kajian dan penelitian dalam bidang MIPA dan Pendidikan MIPA yang dilakukan oleh para peneliti di universitas dan lembaga penelitian yang ada di Indonesia. Makalah-makalah yang disampaikan terbagi atas lima bidang utama, yaitu: bidang matematika dan pendidikan matematika, bidang fisika dan pendidikan fisika, bidang kimia dan pendidikan kimia, bidang biologi dan pendidikan biologi, serta pendidikan IPA.

Semoga prosiding ini dapat ikut berperan dalam penyebaran hasil kajian dan penelitian di bidang MIPA dan pendidikan MIPA sehingga dapat diakses oleh khalayak yang lebih luas dan bermanfaat bagi pembangunan bangsa.

Yogyakarta, Juni 2012

Tim Editor

## SAMBUTAN KETUA PANITIA

Assalamuallaikum wr. wb.

1. Yth. Rektor UNY,
2. Yth. Dekan dan para Wakil Dekan FMIPA UNY,
3. Yth. Para Pembicara Utama,
4. Yth. Bapak/Ibu Tamu Undangan
5. Yth. Para pemakalah dan peserta seminar sekalian,

Salam sejahtera,

Pertama-tama marilah kita panjatkan puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, atas segala karunia dan rahmatNya yang telah dilimpahkan kepada kita semua. Atas ijin-Nya pula, kita pada hari ini dapat berkumpul di sini, dalam keadaan sehat jasmani dan rohani, untuk mengikuti Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan FMIPA sebagai rangkaian kegiatan memperingati Dies Natalis ke- 48 Universitas Negeri Yogyakarta tahun 2012.

Perkembangan IPTEK yang sangat pesat di dunia memerlukan peningkatan kesadaran dan upaya pengembangan ilmu dasar seperti MIPA. Di sisi lain, globalisasi dan kemudahan komunikasi memberikan implikasi penyerapan budaya luar yang lebih banyak ditemui pada generasi muda. Peran nyata dunia pendidikan dan penelitian dalam membangun jatidiri bangsa yang mandiri, inovatif dan adaptif tanpa menghilangkan karakter budaya bangsa perlu ditingkatkan. Oleh karena, sesuai dengan tema seminar yang kami susun, seminar ini bertujuan untuk memantapkan profesionalisme peneliti, pendidik dan praktisi MIPA untuk membangun insan yang kompetitif dan berkarakter ilmiah.

Pada seminar ini, kami mengundang 3 pembicara utama yang akan menyampaikan makalah utama pada sidang pleno, yaitu Prof. Dr. Supriadi Rustad, M.Si (Direktur Diktendik, Dikti), Langkah Sembiring, M.Sc, Ph.D (Fakultas Biologi UGM) serta Sudjoko, M.Si (Staf Pengajar Jurdik Biologi UNY). Atas nama panitia, kami mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya atas kesediaan beliau bertiga hadir dalam acara ini. Ketiga pembicara akan menyampaikan makalah terkait dengan pengembangan pendidikan karakter dengan sudut pandang yang saling melengkapi, yaitu dari segi kebijakan pendidikan guru, publikasi ilmiah serta pelaksanaan pembelajaran.

Selain itu panitia juga telah menerima sekitar 169 makalah pendamping, dari berbagai Instansi di Indonesia, seperti UM Malang, UGM, Unpad, Univ. Terbuka, UNY, Unlam, Univ.Tanjungpura, ITS, UKSW, Sanata Dharma, Politeknik Semarang, UAD, UIN Suka, Unsri, Binus, Untirta, SMP 5 Wates, P4TK BMTI, SMA 2 Madiun, Univ.Mataram, UPI, SMA 5 Metro Lampung, Dinas Pendidikan KulonProgo, TK Masjid Syuhada, Univ.Negeri Manado, STKIP Siliwangi, IKIP PGRI Madiun, STIS serta karya PKMP mahasiswa FMIPA UNY.

Kegiatan Seminar Nasional MIPA tahun 2012 ini tidak dapat diselenggarakan dengan baik tanpa bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, kami mengucapkan terimakasih yang tak terkira kepada rektor Universitas Negeri Yogyakarta, Bapak Prof.Dr. Rochmat Wahab, M.Pd, M.A atas dukungannya serta Dekan FMIPA UNY, Bapak Dr. Hartono atas dorongan, dukungan dan fasilitas yang disediakan. Terimakasih kepada para sponsor dan semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu. Ucapan terimakasih juga kami sampaikan kepada teman-teman panitia yang telah bekerja keras demi suksesnya penyelenggaraan seminar ini

Kami juga mengucapkan terimakasih kepada Bapak, Ibu dan Saudara peserta yang telah berkenan mengikuti seminar ini hingga selesai nantinya. Atas nama panitia, kami mohon maaf yang sebesar-besarnya jika dalam kegiatan ini terdapat kesalahan, kekurangan maupun

hal-hal yang tidak/kurang berkenan di hati Bapak, Ibu dan Saudara sekalian. Akhir kata, semoga seminar ini dapat memberikan sumbangan yang signifikan bagi kemajuan bangsa Indonesia terutama dalam memajukan bidang MIPA dan Pendidikan MIPA. Terimakasih.

**SELAMAT BERSEMINAR!!**

Wassalamuallaikum wr. wb ,

Yogyakarta, Juni 2012  
Ketua Panitia

Wipsar Sunu Brams D, Ph.D



## SAMBUTAN DEKAN

Assalamualaikum Wr.Wb.

Para peserta seminar yang berbahagia, selamat datang di FMIPA UNY.

Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA) ini merupakan agenda rutin tahunan FMIPA UNY dan sekaligus memperingati Dies UNY yang ke 48 (enam windu).

Pada tahun ini tema seminar adalah Pemantapan Profesionalisme Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah. Tema ini selaras dengan tema Dies UNY ke 48 yaitu Membangun Insan Berkarakter dan Bermartabat.

Salah satu karakter yang terkait dengan keilmuan adalah kejujuran (jujur) dan orang yang jujur akan bermartabat. Akhir-akhir ini plagiarisme sangat marak, itu artinya karakter ketidak jujuran sedang marak juga. Disisi lain dengan berkembangnya IT kita akan semakin mudah apabila mau, bertindak sebagai plagiat. Akan tetapi kita juga dapat dengan mudah mengetahui apakah ada tindakan plagiarism atau tidak dengan bantuan IT tersebut. Misalkan, dengan mengupload karya kita secara online. Maka selain promosi tentang karya kita juga sekaligus membantu untuk mencegah maraknya plagiarism. Karena ada satu alat yang bisa membandingkan satu karya dengan karya yang lain untuk mengetahui berapa persen karya – karya tersebut saling beririsan.

Harapan kami proseding seminar ini juga akan diupload pada website UNY, sehingga bisa didownload dan semakin banyak dibaca orang.

Akhir kata saya ucapkan terimakasih atas partisipasi Bapak/ Ibu semua pada seminar ini dan mudah-mudahan kita semua bisa berkarakter dan bermartabat. Amien.

Selamat berseminar

Wassalamualaikum Wr.Wb.

Dekan FMIPA UNY

Dr. Hartono



## DAFTAR ISI

Tim Editor.....	i
Kata Pengantar.....	ii
Sambutan Ketua Panitia.....	iii
Sambutan Dekan.....	iv
Daftar Isi.....	v
Makalah Utama 1 (Langkah Sembiring).....	A
Makalah Utama 2 (Sudjoko).....	B

### MAKALAH PENDIDIKAN MATEMATIKA

EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN DENGAN PROGRAM *CABRI* IBANDING PEMBELAJARAN KONVENSIONAL PADA TOPIK JARAK GARIS ENGAN BIDANG DALAM BANGUN RUANG KELAS X SMA N 1 DEPOK SLEMAN (Ambar Tri Wahyuni dan M. Andy Rudhito)..... M-1

POLA KESALAHAN PADA OPERASI PEMBAGIAN BILANGAN PECAHAN : STUDI KASUS PADA 4 SISWA KELAS VII B SMP N 3 DEPOK SLEMAN TAHUN PELAJARAN 2008/2009 (Anik Yuliani, S.Pd., M.Pd.)..... M-7

PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN KOPERATIF TIPE *THINK TALK WRITE* TERHADAP KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH PADA SISWA SMA (Asep Ikin Sugandi )..... M-15

UPAYA MENGATASI KESULITAN BELAJAR TOPIK MENENTUKAN JARAK DALAM RUANG DIMENSI TIGA DENGAN PEMBELAJARAN REMEDIAL YANG MEMANFAATKAN PROGRAM *CABRI 3D* UNTUK SISWA KELAS X.3 SMA PANGUDI LUHUR YOGYAKARTA (Bella Wicasari dan M. Andy Rudhito)..... M-23

PEMANFAATAN PROGRAM *CABRI 3D* PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA MATERI PRISMA DAN LIMAS DI KELAS VIII C SMP JOANNES BOSCO YOGYAKARTA DALAM UPAYA MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA (Carolina Ndaru Pangestika dan M. Andy Rudhito)..... M-31

TEORI KECERDASAN MAJEMUK: APA DAN BAGAIMANA MENGAPLIKASIKANNYA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA (Djamilah Bondan Widjajanti )..... M-39

PENINGKATAN MOTIVASI BELAJAR KALKULUS DIFFERENSIAL MELALUI METODE EKSPOSITORI DENGAN PEMBERIAN KUIS (Dra Sumargiyani)..... M-47

KESALAHAN SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA:TEMUAN BERHARGA BAGI PARA GURU DALAM KEGIATAN *LESSON STUDY* (Elly Arliani).....M-53

IMPLEMENTASI METODE <i>INQUIRY</i> DIPADUKAN DENGAN STRATEGI KOOPERATIF UNTUK MEMBANGUN KEMAMPUAN BERFIKIR KRITIS MATEMATIS PADA SISWA SMP (Endang L, Fitriana Yuli S., dan Wahyu S).....	M-57
PENERAPAN ANALISIS KONJOIN RANCANGAN KOMBINASI LENGKAP DENGAN JENIS RESPON <i>RATING</i> PADA PREFERENSI MAHASISWA TERHADAP KUALITAS DOSEN SEKOLAH TINGGI ILMU STATISTIK (Fitri Catur Lestari, S. Si., M. Si.).....	M-65
REMEDIASI MENGGUNAKAN PROGRAM FLASH PADA MATERI OPERASI HITUNG BILANGAN BULAT (Hamidah, M.Pd. Dan Nursiah, S.Pd.).....	M-73
PENGARUH <i>SELF EFFICACY</i> TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIK (Hamidah, M.Pd).....	M-79
PENINGKATAN MOTIVASI BELAJAR KALKULUS DIFFERENSIAL MELALUI METODE EKSPOSITORI UPAYA MENGATASI KESULITAN BELAJAR SISWA KELAS VII SMP KANISIUS PAKEM PADA POKOK BAHASAN SEGITIGA DENGAN MEMANFAATKAN PROGRAM <i>GEOGEBRA</i> DALAM PROSES PEMBELAJARAN REMEDIAL (Ignatius Candra Budhiawan dan M. Andy Rudhito).....	M-85
EVALUASI TERHADAP HASIL PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS PENDIDIKAN KARAKTER DI INDONESIA (Ika Wahyu Anita, S.Pd., M.Pd).....	M-95
PEMANFAATAN PROGRAM <i>CABRI 3D</i> UNTUK MEMBANTU PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA POKOK BAHASAN MENENTUKAN BESAR SUDUT ANTARA DUA GARIS DALAM RUANG DIMENSI TIGA DI KELAS X SEMESTER II SMA MARSUDI LUHUR YOGYAKARTA (Maria Immaculata Ray Bastiani, dan M. Andy Rudhito).....	M-101
E-LEARNING READINESS TO E-LEARNING MATURITY (Nur Hadi Waryanto).....	M-109
MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DAN KOMUNIKASI MATEMATIK SISWA SMA MELALUI PENDEKATAN <i>OPEN-ENDED</i> DENGAN PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE <i>COOP-COOP</i> (Rafiq Zulkarnaen).....	M-119
PEMBELAJARAN MATEMATIKA REALISTIK SEBAGAI UPAYA UNTUK MENUMBUHKEMBANGKAN KEPEDULIAN SISWA TERHADAP LINGKUNGAN (Rifka Zammilah).....	M-129
<i>PERFORMANCE ASSESSMENT</i> DALAM PERSPEKTIF <i>MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING</i> (Sri Andayani dan Djemari Mardapi).....	M-137

RANCANGAN DAN PENGEMBANGAN MODUL ELEKTRONIK PEMBELAJARAN PROGRAM LINEAR DENGAN PROGRAM *GEOGEBRA* PADA KELAS X TKJ B SMK N 2 DEPOK SLEMAN TAHUN AJARAN 2011/2012  
(Suko Baryoto Adi Raharjo dan M. Andy Rudhito).....M-147

PENGEMBANGAN KARAKTER BANGSA MELALUI INTEGRASI NILAI KEISLAMAN DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA  
(Suparni, S.Pd., M.Pd. ).....M-157

MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS DAN KREATIF MATEMATIK SISWA SMA MELALUI PEMBELAJARAN KOOPERATIF *THINK-TALK-WRITE* (TTW)  
(Wahyu Hidayat).....M-163

METODE *PEER LESSON* UNTUK MELATIHKAN KOMPETENSI PEDAGOGIK DAN PENDIDIKAN KARAKTER PADA MATA KULIAH *MICROTEACHING*  
(Wasilatul Murtafiah, S.Pd., M.Pd., Dan Ervina Maret S, S.Si., M.Pd.).....M-175

UPAYA MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA MENGGUNAKAN *MACRO MEDIA FLASH* SISWA KELAS V SD ISLAM TERPADU LUQMANUL HAKIM DAN SD ISLAM TERPADU AL-KHAIRAT YOGYAKARTA  
(Dra. Widayati, MSc.).....M-185

## **MAKALAH MATEMATIKA**

PENGGUNAAN METODE BAYESIAN OBYEKTIF DALAM PEMBUATAN GRAFIK PENGENDALI *p*-CHART  
Adi Setiawan ..... M-1

SISTEM KENDALI DAN NAVIGASI WAHANA BAWAH AIR TANPA AWAK UNTUK MENUNJANG PERTAHANAN DAN KEAMANAN NEGARA  
Annisa Dwi S., Fatma Ayu N.F.A., Putra S. B., Andri A., Muflih M. K.....M-9  
PENDEKATAN CART DAN REGRESI LOGISTIK PADA POLA TINGKAT KEPARAHAN KORBAN KECELAKAAN LALU LINTAS DI SURABAYA  
Atika Nurani Ambarwati, Heri Kuswanto, Ismaini Zain .....M-17

PREDIKSI SUKU BUNGA BANK INDONESIA (*BI RATE*) MENGGUNAKAN MODEL *NEURO FUZZY*  
Ayu Azmy Amalia, Agus Maman Abadi ..... M-27

STUDI MENGENAI MUNCULNYA BIFURKASI HOPF PADA MODEL DIFUSI PERIKLANAN  
Ayu Luhur Yusdiana Yati, Kus Prihantoso Krisnawan .....M-35

IDENTIFIKASI SINYAL OUT OF CONTROL PADA DIAGRAM KONTROL FUZZY MULTIVARIAT PADA PRODUKSI BOTOL RC COLA 800 ML PT. IGLAS (PERSERO) GRESIK  
Ayundyah Kesumawati, Muhammad Mashuri, Irhamah .....M-41

<i>MULTICLASS TWIN BOUNDED SUPPORT VECTOR MACHINE</i> UNTUK PENGENALAN UCAPAN Berny Pebo Tomasouw, S.Si., Prof. Dr. Mohammad Isa Irawan, MT. ....	M-49
EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN DARI PENYELESAIAN PERSAMAAN EULER-LAGRANGE Ch. Enny Murwaningtyas, M.Si. ....	M-59
ANALISIS KEADAAN DINAMIK SISTEM LORENZ Dian Trendi Dwi P., Kus Prihantoso Kurniawan .....	M-65
PENGUNAAN MODEL <i>NEURO FUZZY</i> UNTUK PERAMALAN NILAI TUKAR RUPIAH TERHADAP YEN JEPANG Dian Tri Handayani, Agus Maman Abadi .....	M-71
LINEARISASI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PADA MODEL EPIDEMI SIR BERDASARKAN KELOMPOK UMUR Dwi Lestari, Widodo.....	M-79
KAJIAN TERHADAP METODE <i>RESPONSE SURFACE</i> PADA DESAIN BLOK Enny Supartini, Sri Winarni.....	M-87
PORTOFOLIO OPTIMAL MENGGUNAKAN <i>LIQUIDITY</i> <i>ADJUSTED CAPITAL ASSET PRICING MODEL (LCAPM)</i> Evri kurniawati, Retno Subekti .....	M-93
KENDALI OPTIMAL PENGobatan TUMOR DENGAN KOMBINASI KEMOTERAPI DAN IMMUNOTERAPI Fatanur Baity Tsulutsya, Subchan.....	M-99
DIFFICULTY IN OPTIMIZATION FUNCTIONS OF MATLAB AND HOW TO ANALYZE H.A Parhusip .....	M-109
METODE TLSAR BERBASIS REGRESI <i>TIME SERIES</i> DAN ARIMA UNTUK PERAMALAN BEBAN LISTRIK JANGKA PENDEK Ika Purnamasari, Suhartono.....	M-115
MODEL ALGORITMA PENGAMBILAN KEPUTUSAN MANAJERIAL DENGAN CPM/PERT PADA LEMBAR KERJA (SPEADSHEET) Iswanti.....	M-123
PERHITUNGAN HARGA OPSI EROPA MENGGUNAKAN METODE GERAK BROWN GEOMETRI Kristoforus Ardha Sandhy P., Bambang Susanto, Hanna Arini Parhusi.....	M-131
KETAKSAMAAN <i>CAUCHY-SCHWARZ</i> YANG DIPERUMUM Kus Prihantoso Krisnawan.....	M-139

APLIKASI PERHITUNGAN JARAK ANTARA DUA <i>WAYPOINT</i> PADA GOOGLE MAPS Kuswari Hernawati .....	M-143
METODE HIMPUNAN AKTIF UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PEMROGRAMAN KUADRATIK KONVEKS Yudith Kase, Lusia Krismiyati Budiasih.....	M-149
SYARAT CUKUP ORDE KEDUA DALAM OPTIMISASI KONVEKS Lusia Krismiyati Budiasih.....	M-157
SISTEM LINEAR MAX-PLUS INTERVAL WAKTU INVARIANT AUTONOMOUS M. Andy Rudhito.....	M-163
ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK ( <i>MEASLES</i> ) DENGAN VAKSINASI MENGGUNAKAN MODEL ENDEMI <i>SIR</i> Marhendra Ali Kurniawan, Fitriana Yuli S, M.Si. ....	M-171
ANALISIS KOINTEGRASI DATA RUNTUN WAKTU INDEKS HARGA KONSUMEN BEBERAPA KOMODITAS BARANG KOTA DI JAWA TENGAH Mariani Jaya Saputra, Adi Setiawan, Tundjung Mahatma.....	M-177
PROTOKOL PERJANJIAN KUNCI BERDASARKAN MASALAH FAKTORISASI ATAS SEMIGRUP NON-KOMUTATIF Muhamad Zaki Riyanto.....	M-185
DESAIN KENDALI ROBUST DENGAN PENDEKATAN PERMAINAN DINAMIS UNTUK SISTEM LINEAR TIME INVARIANT (LTI) Muhammad Wakhid Musthofa.....	M-193
MODEL EFISIENSI DISTRIBUSI <i>HONEYWELL WINDTRONICS WIND TURBINE</i> PADA RADIUS TERTENTU Nabih Ibrahim Bawazir, Dwi Prihastuti .....	M-205
PENGUJIAN STRUKTUR MATEMATIKA GRUP BERBASIS OSP (OPEN SOURCE PROGRAM) Ngarap Im Manik, Don Tasman, Pretty Christyaningrum Turang.....	M-215
STRATEGI VAKSINASI <i>PULSE</i> UNTUK MENGATASI EPIDEMI PENYAKIT CAMPAK BERDASARKAN MODEL <i>SIR</i> Nikenasih Binatari, M.Si., Eminugroho Ratna Sari, M.Sc.....	M-223
PEMODELAN <i>STRUCTURAL EQUATION MODELING</i> (SEM) BERBASIS VARIANS PADA DERAJAT KESEHATAN DI PROPINSI JAWA TIMUR 2010 Noermayanti Hidayat, Dr.Bambang Widjanarko Otok, S.Si., M.Si.....	M-229

ANALISA STABILITAS MODEL INFEKSI HTLV-I PADA SEL CD4 <sup>+</sup> T DENGAN LAJU INFEKSI NONLINIER DAN RESPON IMUN CTL YANG TERTUNDA Nur Aini S., Subiono .....	M-241
PEMILIHAN ALGORITMA HEURISTIK TERBAIK UNTUK SUATU MASALAH GRAF BERDASARKAN SIFAT/KARAKTERISTIKNYA (INSTANCE FEATURES) Nur Insani, M.Sc .....	M-251
SISTEM KENDALI RKK-200 LAPAN DENGAN PENGONTROL PID OPTIMAL Putra S. B., Moh. Rifa'i, Nur Marisa Dewi, Ahmad Nur Shofa, Mohamad Mufti Setiawan .....	M-257
..	
PREDIKSI PRODUKSI IKAN LELE DI KABUPATEN SLEMAN DENGAN MODEL <i>NEURO FUZZY</i> Putri Kartika Sari, Agus Maman Abadi .....	M-273
PERILAKU <i>STEADY-STATE KALMAN FILTER</i> PADA <i>DIGITAL PHASE LOCK LOOP</i> UNTUK PELACAKAN SINYAL Rini Satiti dan Erna Apriliani .....	M-281
KENDALI OPTIMAL TEMPERATUR PADA PROSES PRODUKSI BIODIESEL Rosalia Dewi Lestarini, M. Isa Irawan, Subchan.....	M-289
ANALISIS PENDEKATAN HAMILTONIAN PADA MODEL <i>MULTIDIMENSIONAL SCREENING</i> UNTUK PENENTUAN TARIF OPTIMAL PADA PERUSAHAAN MONOPOLI F.X. Satrijo Widyatmoko, Mahmud Yunus.....	M-299
STUDI SIMULASI GRAFIK PENGENDALI BERDASARKAN ESTIMASI FUNGSI DENSITAS KERNEL BIVARIAT Selfie Pattihahuan, Adi Setiawan, Leopoldus Ricky Sasongko.....	M-303
PREDIKSI PENJUALAN SEPEDA MOTOR DI DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA (DIY) DENGAN MENGGUNAKAN MODEL <i>NEURO FUZZY</i> Septiana Nur Rohmah, Agus Maman Abadi.....	M-309
APLIKASI PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS (PCA) DALAM MENGATASI MULTIKOLINIERITAS UNTUK MENENTUKAN INVESTASI DI INDONESIA PERIODE 2001.1-2010.4 Soemartini .....	M-315
PENERAPAN <i>FUZZY SERVICE QUALITY</i> DALAM ANALISIS KEPUASAN PELANGGAN LAYANAN INTERNET MAHASISWA UNY (LIMUNY) Soffia Anisa H., Agus Maman Abadi .....	M-321

APLIKASI METODE *TWO STEP CLUSTER* UNTUK PENGELOMPOKKAN MAHASISWA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS SRIWIJAYA (STUDI KASUS : MAHASISWA ANGKATAN 2010)

Sri Indra Maiyanti, Endro Setyo Cahyono, Weni Winata .....M-329

PENERAPAN *STATISTICAL PROCESS CONTROL* UNTUK MENGANALISIS MUTU PROSES TUGAS AKHIR (STUDI KASUS DI JURUSAN STATISTIKA FMIPA UNIVERSITAS PADJADJARAN )

Titi Purwandari .....M-337

PENGLASIFIKASIAN FUNGSI DISKRIMINAN PILIHAN PROGRAM STUDI MATEMATIKA DI FMIPA DAN FKIP UNIVERSITAS SRIWIJAYA

Yuli Andriani, Dian Cahyawati, Vivin Gusmaryanita .....M-343

SOLUSI TEORITIS KEKAKUAN DINAMIK UNTUK PREDIKSI KOEFISIEN ABSORPSI BUNYI DARI BUSA POLIURETAN

Zeth Arthur Leleury, S.Si., Prof. Dr. B. Widodo, M.Sc.,

Dr. Yono Hadi Pramono, M.Eng .....M-347

## EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN DARI PENYELESAIAN PERSAMAAN EULER-LAGRANGE

Ch. Enny Murwaningtyas, M.Si.

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta  
enny@usd.ac.id

### Abstrak

Pembahasan umum yang sering disajikan dalam bidang kalkulus variasi adalah mencari sebuah penyelesaian pada fungsi minimum atau fungsi maksimum. Salah satu metode yang digunakan dalam perhitungan tersebut adalah metode Euler-Lagrange. Metode Euler-Lagrange merupakan gabungan dari dua pembahasan, yaitu metode Euler yang dikenakan dengan pengali Lagrange. Metode Euler-Lagrange menjamin bahwa penyelesaian yang diperoleh telah memenuhi sifat kontinu dan kompak. Pada makalah ini, akan membahas tentang eksistensi dan ketunggalan dari penyelesaian persamaan Euler-Lagrange pada masalah optimisasi yang sederhana.

**Kata kunci:** eksistensi, ketunggalan, dan persamaan Euler-Lagrange

### PENDAHULUAN

Metode yang klasik dan elegan dari kalkulus variasi modern memungkinkan dipecahkannya sejumlah besar masalah yang berhubungan dengan optimasi fungsional dalam Ilmu Pengetahuan. Kalkulus variasi yang dikembangkan oleh Bernoulli, Newton dan Euler pada awal abad ke-18, sampai saat ini masih menarik perhatian para matematikawan dan sudah banyak menjadi solusi pemecahan masalah bagi banyak ilmuwan dan berbagai bidang teknik sebagai pencari solusi terbaik yang mungkin ada bagi persoalan yang dihadapi. Perkembangan kalkulus variasi sendiri pada mulanya berawal dari keinginan dasar manusia yang ingin mendapatkan solusi terbaik atau optimal untuk masalah-masalah matematis yang ada.

Kalkulus variasi sangat erat kaitannya dengan mencari nilai ekstrem dari fungsional dan dinyatakan sebagai sekumpulan metode yang digunakan untuk mencari fungsi-fungsi optimal. Adapun beberapa metode atau rumus atau persamaan yang terdapat dalam kalkulus variasi adalah *Euler-Lagrange Equations*, *Emmy Noether's theorem*, *Hamiltonian formulation*, *Hamilton Jacoby theory*, *Weierstrass Method*, *Jacobian Equations*, *Rayleigh Principles* dan lain-lain.

Kalkulus variasi yang merupakan cabang ilmu matematika yang berhubungan dengan fungsi dari fungsi, berbeda dengan kalkulus biasa yang berhubungan dengan fungsi dari bilangan. Fungsional dalam kalkulus variasi dapat dibentuk sebagai integral-integral yang melibatkan sebuah fungsi sembarang dan turunan-turunannya sebagai variabel-variabelnya. Kunci dari teorema kalkulus variasi sendiri adalah persamaan Euler-Lagrange. Persamaan ini berhubungan dengan syarat stasioner pada sebuah fungsional.

Makalah ini akan membahas tentang penyelesaian masalah optimisasi yang sederhana yaitu mencari nilai ekstrem, khususnya nilai minimum, dari fungsional berikut

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$$

dengan  $F \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  $F = F(x, y, \dot{y})$  dan  $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$ . Sedangkan Jika fungsi  $I$  mempunyai ekstrem pada  $y_0$ , maka  $y_0$  memenuhi persamaan

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right) = 0$$

Persamaan diatas itu lah yang disebut persamaan Euler-Lagrange.



## PERSAMAAN EULER-LAGRANGE

Terlebih dahulu akan dibahas tentang derivatif dari fungsional dan sifat-sifatnya.

### Definisi 1

Misalkan  $S$  adalah ruang linier bernorma dan  $I : S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah suatu fungsional. Maka  $I$  dikatakan terdiferensial (Frechet) pada  $y_0 \in S$  jika ada fungsional linier kontinu, dinotasikan dengan  $I'(y_0)$  dan ada pemetaan  $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}$  sedemikian hingga

$$I(y_0 + h) = I(y_0) + (I'(y_0))(h) + \varepsilon(h)\|h\|$$

untuk setiap  $h \in S$  dan  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  karena  $\|h\| \rightarrow 0$ .

### Teorema 2

Derivatif dari fungsional terdiferensial  $I : S \rightarrow \mathbb{R}$  pada suatu titik  $y_0 \in S$  tunggal.

### Bukti :

Jika  $L : S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsional linier dan jika

$$\frac{L(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ karena } \|h\| \rightarrow 0 \quad (1)$$

Maka  $L = 0$ . Jika  $L(h_0) \neq 0$  untuk beberapa  $h_0 \in S$  yang tidak nol, maka didefinisikan  $h_n = \frac{1}{n}h_0$ , sehingga  $\|h_n\| \rightarrow 0$  karena  $n \rightarrow \infty$ , tetapi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{L(h_0)}{\|h_0\|} \neq 0$$

Kontradiksi dengan Persamaan(1).

Sekarang dimisalkan derivatif dari  $I$  pada  $y_0$  tidak tunggal, sehingga diperoleh

$$I(y_0 + h) = I(y_0) + L_1(h) + \varepsilon_1(h)\|h\|$$

$$I(y_0 + h) = I(y_0) + L_2(h) + \varepsilon_2(h)\|h\|$$

Dengan  $L_1, L_2$  adalah fungsional linier kontinu, dan  $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \rightarrow 0$  karena  $\|h\| \rightarrow 0$ . maka

$$\frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = \varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h) \rightarrow 0 \text{ karena } \|h\| \rightarrow 0$$

dan dari hasil yang diperoleh diatas dapat disimpulkan bahwa  $L_1 = L_2$ . ■

### Teorema 3

Misalkan  $I : S \rightarrow \mathbb{R}$  suatu fungsional yang terdiferensial pada  $y_0 \in S$ . Jika fungsi  $I$  mempunyai ekstrem lokal pada  $y_0$ , maka  $I'(y_0) = 0$ .

### Bukti :

Diketahui fungsi  $I$  terdiferensial di  $y_0 \in S$ , dan jika  $I$  mempunyai minimum lokal pada  $y_0$ , maka ada  $r > 0$  sedemikian hingga  $I(y_0 + h) \geq I(y_0)$  untuk setiap  $h$  sedemikian hingga  $\|h\| < r$ . Misalkan  $(I'(y_0))(h_0) \neq 0$  untuk setiap  $h_0 \in S$ . Didefinisikan

$$h_n = -\frac{1}{n} \frac{(I'(y_0))(h_0)}{|(I'(y_0))(h_0)|} h_0$$

Jelas bahwa  $\|h_n\| \rightarrow 0$  karena  $n \rightarrow \infty$  dan dimisalkan dipilih  $N$  yang cukup besar, maka diperoleh  $\|h_n\| < r$  untuk setiap  $n > N$ . Itu berarti untuk setiap  $n > N$ ,

$$0 \leq \frac{I(y_0 + h_n) - I(y_0)}{\|h_n\|} = -\frac{[(I'(y_0))h_0]}{\|h_0\|} + \varepsilon(h_n)$$

Jika limit maka diperoleh  $-[(I'(y_0))h_0] \geq 0$  dan ini kontradiksi. ■

### Teorema 4

Jika  $K \in C[a,b]$  dan  $\int_a^b K(x)h'(x)dx = 0$  untuk setiap  $h \in C^1[a,b]$  dengan  $h(a) = h(b) = 0$ , maka ada suatu konstanta  $k$  sedemikian sehingga  $K(x) = k$  untuk setiap  $x \in [a,b]$ .

**Bukti :**

Misalkan  $k$  suatu konstanta yang didefinisikan dengan syarat

$$\int_a^b [K(x) - k] dx = 0$$

Dan misalkan

$$h(x) = \int_a^x [K(z) - k] dz$$

Maka  $h \in C^1[a,b]$  dan itu memenuhi  $h(a) = h(b) = 0$ . Selanjutnya

$$\int_a^b [K(x) - k]^2 dx = \int_a^b [K(x) - k] h'(x) dx = \int_a^b K(x) h'(x) dx - k(h(b) - h(a)) = 0$$

Maka  $K(x) - k = 0$  untuk setiap  $x \in [a,b]$ . Jadi terbukti  $K(x) = k$  untuk setiap  $x \in [a,b]$ . ■

**Teorema 5**

Misalkan  $S = \{y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = \alpha \text{ dan } y(b) = \beta\}$  dan misalkan  $I : S \rightarrow \mathbb{R}$  adalah suatu fungsional yang berbentuk

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$$

dengan  $F \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  $F = F(x, y, \dot{y})$  dan  $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$ .

Jika fungsi  $I$  mempunyai ekstrem pada  $y_0 \in S \cap C^2([a,b])$ , maka  $y_0$  memenuhi persamaan Euler-Langange

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right) = 0 \quad (2)$$

dengan  $x \in [a,b]$ .

**Bukti :**

Bukti dari teorema ini cukup panjang maka akan dibagi dalam beberapa tahap.

**Tahap 1):** Himpunan  $S$  bukan merupakan ruang vektor. Oleh karena itu Teorema 4 tidak dapat digunakan secara langsung. Oleh sebab itu akan dibentuk ruang linier baru  $T$  dan  $\tilde{I} : T \rightarrow \mathbb{R}$  didefinisikan seperti fungsional  $I$  yang sebelumnya. Ruang linier tersebut adalah

$$T = \{y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = y(b) = 0\}$$

dengan norma  $C^1([a,b])$ . Maka untuk setiap  $h \in T$  dengan  $(y_0 + h)$  memenuhi  $(y_0 + h)(a) = \alpha$  dan

$(y_0 + h)(b) = \beta$ . Didefinisikan  $\tilde{I}(h) = I(y_0 + h)$ ,  $h \in T$ , sedangkan  $\tilde{I} : T \rightarrow \mathbb{R}$  memiliki nilai ekstrem pada 0. Dengan menggunakan Teorema 4 maka diperoleh  $\tilde{I}'(y_0) = 0$ .

**Tahap 2):** Selanjutnya akan ditentukan  $\tilde{I}'(y_0)$ .

Karena  $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$  dan  $\tilde{I}(h) = I(y_0 + h)$  maka

$$\begin{aligned} \tilde{I}(h) - \tilde{I}(0) &= \int_a^b F(x, (y_0(x) + h), (\dot{y}_0(x) + \dot{h})) dx - \int_a^b F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) dx \\ &= \int_a^b (F(x, (y_0(x) + h), (\dot{y}_0(x) + \dot{h})) - F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x))) dx \end{aligned}$$

Menggunakan teorema Taylor yaitu, jika  $F$  adalah fungsi terdiferensial parsial orde dua di persekitaran  $N$  yang memuat  $(x_0, y_0, \dot{y}_0)$ , maka untuk setiap  $(x, y, \dot{y}) \in N$  terdapat  $\Theta \in [0,1]$  sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} F(x, y, \dot{y}) &= F(x_0, y_0, \dot{y}_0) + \left( (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} + (\dot{y} - \dot{y}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) F \Bigg|_{(x_0, y_0, \dot{y}_0)} + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left( (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} + (\dot{y} - \dot{y}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right)^2 F \Bigg|_{(x_0, y_0, \dot{y}_0) + \Theta((x, y, \dot{y}) - (x_0, y_0, \dot{y}_0))} \end{aligned}$$

Maka untuk  $h \in T$  sehingga  $\|h\|$  cukup kecil berakibat

$$\begin{aligned} \tilde{I}(h) - \tilde{I}(0) &= \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx + \\ &\quad \frac{1}{2!} \int_a^b \left[ \left( h(x) \frac{\partial}{\partial y} + h'(x) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right)^2 F \right]_{(x, y_0(x) + \Theta(t)h(t), \dot{y}_0(x) + \Theta(t)h'(t))} dx \end{aligned}$$

Sehingga mudah ditunjukkan ada  $M > 0$  sedemikian hingga

$$\left| \frac{1}{2!} \int_a^b \left[ \left( h(x) \frac{\partial}{\partial y} + h'(x) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right)^2 F \right]_{(x, y_0(x) + \Theta(t)h(t), \dot{y}_0(x) + \Theta(t)h'(t))} dx \right| \leq M \|h\|^2$$

Jadi  $\tilde{I}'(0)$  adalah pemetaan

$$h \rightarrow \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx \quad (3)$$

**Tahap 3):** Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pemetaan pada (3) merupakan pemetaan nol, maka yang berakibat terpenuhinya persamaan (2). Didefinisikan

$$A(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} F(z, y_0(z), \dot{y}_0(z)) dz \quad (4)$$

Dengan menggunakan integral parsial  $\int u dv = uv - \int v du$  dengan  $u = A(x)$  dan  $dv = h'(x) dx$  diperoleh

$$\int_a^b A(x) h'(x) dx = A(x) h(x) - \int_a^b h(x) dA(x)$$

Karena pemetaan pada (2) merupakan pemetaan nol atau dengan kata lain  $h(x) = 0$  untuk setiap  $x$ , jadi

$$\begin{aligned} \int_a^b A(x) h'(x) dx &= - \int_a^b h(x) dA(x) \\ \int_a^b A(x) h'(x) dx &= - \int_a^b h(x) \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) dx \end{aligned}$$

Atau dengan kata lain diperoleh

$$A(x) h'(x) = -h(x) \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \quad (5)$$

Selain itu (3) mengakibatkan  $\tilde{I}'(0) = 0$ , sehingga

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx = 0 \quad (6)$$

Jika persamaan (5) disubstitusikan ke persamaan (6) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ -A(x) h'(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx &= 0 \\ \int_a^b \left[ -A(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right] h'(x) dx &= 0 \text{ untuk setiap } h \in T. \end{aligned}$$

**Tahap 4):** Jika  $K(x) = -A(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x))$  dan menggunakan Teorema 4 maka ada suatu konstanta  $k$  sedemikian sehingga  $K(x) = k$  untuk setiap  $x \in [a, b]$ , yaitu

$$\begin{aligned} -A(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) &= k \\ - \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} F(z, y_0(z), \dot{y}_0(z)) dz + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) &= k \end{aligned} \quad (7)$$

Jika Persamaan (7) dideferensialkan terhadap  $x$  di kedua ruasnya maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial y} F(z, y_0(z), \dot{y}_0(z)) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right) = 0 \quad \blacksquare$$

## EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN

Sebelum membicarakan tentang eksistensi dan ketunggalan dari penyelesaian persamaan Euler-Lagrange akan dibahas terlebih dahulu tentang fungsi konveks.

### Definisi 6

- (i) Himpunan  $\Omega \in \mathbb{R}$  dikatakan konveks jika untuk setiap  $x, y \in \Omega$  dan setiap  $\lambda \in [a, b]$  maka berlaku  $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$ .
- (ii) Misalkan  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  konveks. Fungsi  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan konveks jika untuk setiap  $x, y \in \Omega$  dan setiap  $\lambda \in [0, 1]$ , memenuhi pertidaksamaan berikut

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- (iii) Misalkan  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  konveks. Fungsi  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan konveks tegas jika untuk setiap  $x, y \in \Omega$  dan setiap  $\lambda \in [0, 1]$ , memenuhi pertidaksamaan berikut

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

### Teorema 7

Misalkan  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , fungsi  $f$  adalah fungsi konveks jika dan hanya jika

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y); x - y \rangle$$

untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla f(y) = \left( \frac{\partial f(y)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(y)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(y)}{\partial x_n} \right)$  dan  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  menotasikan produk skalar di  $\mathbb{R}^n$ .

### Teorema 8

Jika ada suatu nilai  $y_0$  yang memenuhi persamaan

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right) = 0 \quad (8)$$

dan jika  $(y, \dot{y}) \rightarrow f(x, y, \dot{y})$  konveks untuk setiap  $x \in [a, b]$  maka  $y_0$  meminimalkan

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$$

### Bukti :

Misalkan nilai  $y_0$  adalah penyelesaian persamaan (8) dengan  $y_0(a) = \alpha$  dan  $y_0(b) = \beta$ . Karena  $(y, \dot{y}) \rightarrow f(x, y, \dot{y})$  konveks untuk setiap  $x \in [a, b]$  maka menggunakan Teorema 7 diperoleh

$$F(x, y, \dot{y}) \geq F(x_0, y_0, \dot{y}_0) + \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0)$$

untuk setiap  $y \in S$ . Jika pertidaksamaan tersebut diintegrasikan maka diperoleh

$$\int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx \geq \int_a^b \left( F(x_0, y_0, \dot{y}_0) + \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) \right) dx$$

$$\int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx \geq \int_a^b F(x_0, y_0, \dot{y}_0) dx + \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) \right) dx$$

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) \right) dx$$

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) dx$$

Bagian kedua dari ruas kanan pertidaksamaan diatas akan diintegrasikan pasial dengan

$u = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)$  dan  $dv = (\dot{y} - \dot{y}_0) dx$  sehingga diperoleh

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) dx + (\dot{y} - \dot{y}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right) (y - y_0) dx$$

Karena  $y_0(a) = \alpha$  dan  $y_0(b) = \beta$  sehingga  $y(a) - y_0(a) = y(b) - y_0(b) = 0$ , jadi diperoleh

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) dx - \int_a^b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right) (y - y_0) dx$$

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right) (y - y_0) \right] dx$$

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right) \right] (y - y_0) dx$$

Menggunakan persamaan (8) maka pertidaksamaan diatas menjadi

$$I(y) \geq I(y_0)$$

Atau dengan kata lain terbukti  $y_0$  meminimalkan  $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$  ■

### Teorema 9

Jika fungsi  $(y, \dot{y}) \rightarrow f(x, y, \dot{y})$  konveks tegas untuk setiap  $x \in [a, b]$  maka nilai yang meminimalkan

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx \text{ tunggal.}$$

### Bukti

Misalkan  $y_1$  dan  $y_2 \in S$  adalah dua penyelesaian yang meminimalkan  $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$ , yang akan ditunjukkan bahwa penyelesain tersebut sama, atau dengan kata lain memiliki penyelesaian tunggal. Dan misalkan  $\inf_{y \in S} \left\{ I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx \right\} = m$ . Didefinisikan,  $y_0 \in S$

$$y_0 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2$$

Karena  $(y, \dot{y}) \rightarrow f(x, y, \dot{y})$  konveks untuk setiap  $x \in [a, b]$  maka

$$\frac{1}{2} F(x, y_1(x), \dot{y}_1(x)) + \frac{1}{2} F(x, y_2(x), \dot{y}_2(x)) \geq F(x, \frac{1}{2} y_1(x) + \frac{1}{2} y_2(x), \frac{1}{2} \dot{y}_1(x) + \frac{1}{2} \dot{y}_2(x))$$

$$= F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x))$$

dan karena

$$m = \frac{1}{2} I(y_1) + \frac{1}{2} I(y_2) \geq I(y_0) \geq m$$

Maka diperoleh

$$\int_a^b \left( \frac{1}{2} F(x, y_1(x), \dot{y}_1(x)) + \frac{1}{2} F(x, y_2(x), \dot{y}_2(x)) - F(x, \frac{1}{2} y_1(x) + \frac{1}{2} y_2(x), \frac{1}{2} \dot{y}_1(x) + \frac{1}{2} \dot{y}_2(x)) \right) dx = 0$$

Karena fungsi  $F$  merupakan fungsi konveks tegas maka haruslah  $y_1(x) = y_2(x)$  dan  $\dot{y}_1(x) = \dot{y}_2(x)$  yang berakibat  $y_1 = y_2 \in S$ . ■

### KESIMPULAN

Persamaan Euler-Langange adalah persamaan yang cukup penting di dalam kalkulus variansi. Dari pembahasan diatas diketahui bahwa persamaan Euler Langrange pasti mempunyai penyelesaian jika fungsi  $(y, \dot{y}) \rightarrow f(x, y, \dot{y})$  konveks. Sedangkan jika fungsi  $(y, \dot{y}) \rightarrow f(x, y, \dot{y})$  konveks tegas maka penyelesaiannya tunggal. Namun penyelesaian persamaan Euler Langrange tergantung pada nilai batasnya.

### DAFTAR PUSTAKA

- Dacorogna, B. 2000. *Introduction To The Calculus Of Variation*. London : Imperial College Press.
- Gelfand, I. M. & Fomin, S. V. 1963: *Calculus of variations*. Englewood Clifsf , New Jersey : Prentice-Hall
- Komzsik, L. 2009. *Applied Calculus of Variations for Engineers*, New York : CRC Press.
- Sasane, A. *Lecturer Note : Calculus of Variations and Optimal Control*, University of Virginia