ISBN : 978-979-99314-6-7

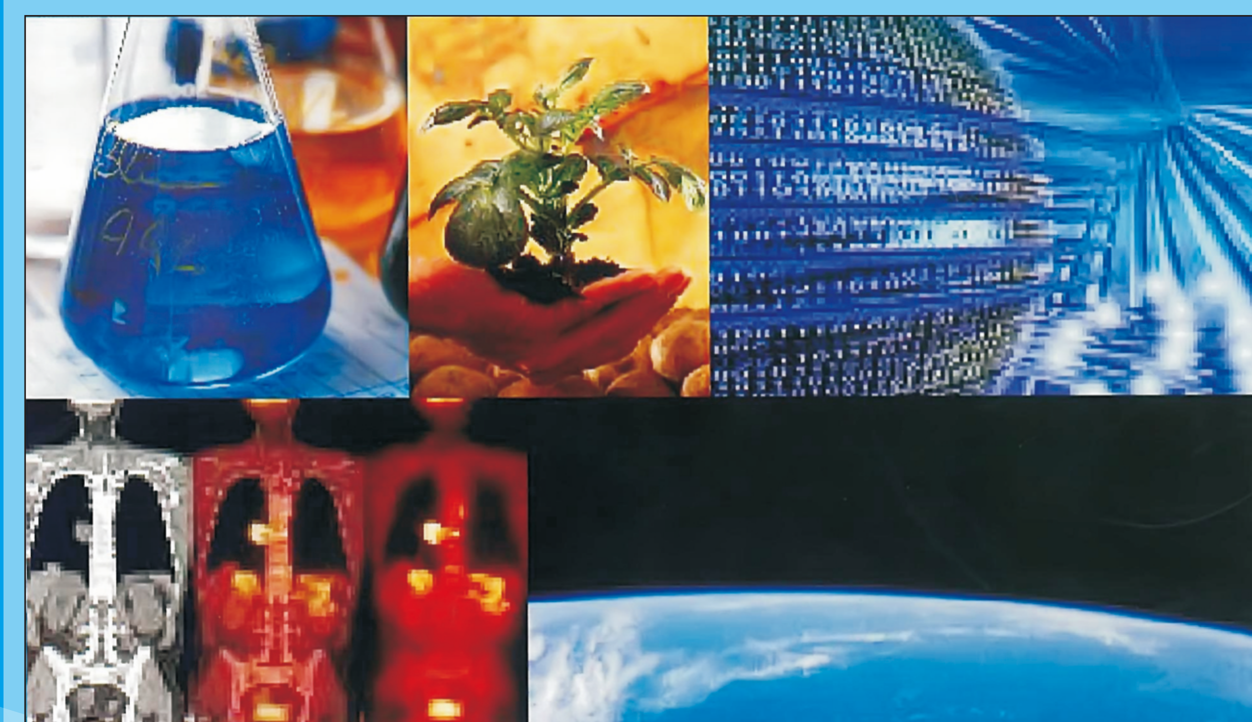
Prosiding Seminar Nasional

Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA

02 Juni 2012, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Kelompok Bidang :

- Matematika dan Pendidikan Matematika
- Fisika dan Pendidikan Fisika
- Kimia dan Pendidikan Kimia
- Biologi dan Pendidikan Biologi
- Ilmu Pengetahuan Alam



Pemantapan Profesionalisme Peneliti, Pendidik dan Praktisi MIPA Untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2012

Prosiding Seminar Nasional
Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA
02 Juni 2012, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA
Tanggal 02 Juni 2012, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978-979-99314-6-7

Bidang:

- Matematika dan Pendidikan Matematika
- Fisika dan Pendidikan Fisika
- Kimia dan Pendidikan Kimia
- Biologi dan Pendidikan Biologi
- Ilmu Pengetahuan Alam

Tema:

Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik, dan Praktisi MIPA Untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Tahun 2012

PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA

Tanggal 02 Juni 2012, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978-979-99314-6-7

Tim Editor:

1. Kismiantini, M.Si
2. Denny Darmawan, M.Sc
3. Erfan Priyambodo, M.Si
4. Agung Wijaya, M.Pd
5. Sabar Nurohman, M.Pd

Tim Reviewer:

1. Dr. Agus Maman Abadi
2. Wipsar Sunu Brams Dwandaru, M.Sc, Ph.D
3. Dr. Endang Wijayanti
4. Dr. Heru Nurcahyo

Tema:

Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik, dan Praktisi MIPA Untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Tahun 2012

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga Prosiding Seminar Nasional MIPA Universitas Negeri Yogyakarta (UNY) 2012 ini dapat selesai disusun sesuai dengan tenggat waktu yang telah ditentukan oleh panitia. Seluruh makalah yang ada dalam prosiding ini merupakan kumpulan makalah yang telah lolos proses seleksi yang dilakukan tim reviewer dan telah disampaikan dalam kegiatan seminar nasional yang diselenggarakan pada tanggal 2 Juni 2012 di Fakultas MIPA UNY.

Seminar Nasional MIPA UNY 2012 mengangkat tema "*Pemantapan Profesionalisme Peneliti, Pendidik dan Praktisi MIPA untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah*". Makalah utama yang ditampilkan dalam kegiatan ini adalah "*Publikasi Ilmiah Sebagai Produk Utama Aktivitas Penelitian Ilmiah*" yang disampaikan oleh Dr. Langkah Sembiring dari Fakultas Biologi Universitas Gadjah Mada dan "*Upaya Membangun Insan Berkarakter Ilmiah dan Kompetitif*" yang disampaikan oleh Sudjoko, M.Si., dari Jurusan Pendidikan Biologi Universitas Negeri Yogyakarta. Selain makalah utama, dalam seminar ini juga disampaikan hasil kajian dan penelitian dalam bidang MIPA dan Pendidikan MIPA yang dilakukan oleh para peneliti di universitas dan lembaga penelitian yang ada di Indonesia. Makalah-makalah yang disampaikan terbagi atas lima bidang utama, yaitu: bidang matematika dan pendidikan matematika, bidang fisika dan pendidikan fisika, bidang kimia dan pendidikan kimia, bidang biologi dan pendidikan biologi, serta pendidikan IPA.

Semoga prosiding ini dapat ikut berperan dalam penyebaran hasil kajian dan penelitian di bidang MIPA dan pendidikan MIPA sehingga dapat diakses oleh khalayak yang lebih luas dan bermanfaat bagi pembangunan bangsa.

Yogyakarta, Juni 2012

Tim Editor

SAMBUTAN KETUA PANITIA

Assalamuallaikum wr. wb.

1. Yth. Rektor UNY,
2. Yth. Dekan dan para Wakil Dekan FMIPA UNY,
3. Yth. Para Pembicara Utama,
4. Yth.Bapak/Ibu Tamu Undangan
5. Yth. Para pemakalah dan peserta seminar sekalian,

Salam sejahtera,

Pertama-tama marilah kita panjatkan puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, atas segala karunia dan rahmatNya yang telah dilimpahkan kepada kita semua. Atas ijin-Nya pula, kita pada hari ini dapat berkumpul di sini, dalam keadaan sehat jasmani dan rohani, untuk mengikuti Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan FMIPA sebagai rangkaian kegiatan memperingati Dies Natalis ke- 48 Universitas Negeri Yogyakarta tahun 2012.

Perkembangan IPTEK yang sangat pesat di dunia memerlukan peningkatan kesadaran dan upaya pengembangan ilmu dasar seperti MIPA. Di sisi lain, globalisasi dan kemudahan komunikasi memberikan implikasi penyerapan budaya luar yang lebih banyak ditemui pada generasi muda. Peran nyata dunia pendidikan dan penelitian dalam membangun jatidiri bangsa yang mandiri, inovatif dan adaptif tanpa menghilangkan karakter budaya bangsa perlu ditingkatkan. Oleh karena, sesuai dengan tema seminar yang kami susun, seminar ini bertujuan untuk memantapkan profesionalisme peneliti, pendidik dan praktisi MIPA untuk membangun insan yang kompetitif dan berkarakter ilmiah.

Pada seminar ini, kami mengundang 3 pembicara utama yang akan menyampaikan makalah utama pada sidang pleno, yaitu Prof. Dr. Supriadi Rustad, M.Si (Direktur Diktendik, Dikti), Langkah Sembiring, M.Sc, Ph.D (Fakultas Biologi UGM) serta Sudjoko, M.Si (Staf Pengajar Jurdik Biologi UNY). Atas nama panitia, kami mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya atas kesediaan beliau bertiga hadir dalam acara ini. Ketiga pembicara akan menyampaikan makalah terkait dengan pengembangan pendidikan karakter dengan sudut pandang yang saling melengkapi, yaitu dari segi kebijakan pendidikan guru, publikasi ilmah serta pelaksanaan pembelajaran.

Selain itu panitia juga telah menerima sekitar 169 makalah pendamping, dari berbagai Instansi di Indonesia, seperti UM Malang, UGM, Unpad, Univ. Terbuka, UNY, Unlam, Univ.Tanjungpura, ITS, UKSW, Sanata Dharma, Politeknik Semarang, UAD, UIN Suka, Unsri, Binus, Untirta, SMP 5 Wates, P4TK BMTI, SMA 2 Madiun, Univ.Mataram, UPI, SMA 5 Metro Lampung, Dinas Pendidikan KulonProgo, TK Masjid Syuhada, Univ.Negeri Manado, STKIP Siliwangi, IKIP PGRI Madiun, STIS serta karya PKMP mahasiswa FMIPA UNY.

Kegiatan Seminar Nasional MIPA tahun 2012 ini tidak dapat diselenggaraakan dengan baik tanpa bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, kami mengucapkan terimakasih yang tak terkira kepada rektor Universitas Negeri Yogyakarta, Bapak Prof.Dr. Rochmat Wahab, M.Pd, M.A atas dukungannya serta Dekan FMIPA UNY, Bapak Dr. Hartono atas dorongan, dukungan dan fasilitas yang disediakan. Terimakasih kepada para sponsor dan semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu. Ucapan terimakasih juga kami sampaikan kepada teman-teman panitia yang telah bekerja keras demi suksesnya penyelenggaraan seminar ini

Kami juga mengucapkan terimakasih kepada Bapak, Ibu dan Saudara peserta yang telah berkenan mengikuti seminar ini hingga selesai nantinya. Atas nama panitia, kami mohon maaf yang sebesar-besarnya jika dalam kegiatan ini terdapat kesalahan, kekurangan maupun hal-hal yang tidak/kurang berkenan di hati Bapak, Ibu dan Saudara sekalian. Akhir kata, semoga seminar ini dapat memberikan sumbangan yang signifikan bagi kemajuan bangsa Indonesia terutama dalam memajukan bidang MIPA dan Pendidikan MIPA.Terimakasih.

SELAMAT BERSEMINAR!!

Wassalamuallaikum wr. wb ,

Yogyakarta, Juni 2012
Ketua Panitia

Wipsar Sunu Brams D, Ph.D

SAMBUTAN DEKAN

Assalamualaikum Wr.Wb.

Para peseta seminar yang berbahagia,selamat datang di FMIPA UNY.

Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA) ini merupakan agenda rutin tahunan FMIPA UNY dan sekaligus memperingati Dies UNY yang ke 48 (enam windu).

Pada tahun ini tema seminar adalah Pemantapan Profesionalisme Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah. Tema ini selaras dengan tema Dies UNY ke 48 yaitu Membangun Insan Berkarakter dan Bermartabat.

Salah satu karakter yang terkait dengan keilmuan adalah kejujuran (jujur) dan orang yang jujur akan bermartabat. Akhir-akhir ini plagiarisme sangat marak,itu artinya karakter ketidak jujuran sedang marak juga. Disisi lain dengan berkembangnya IT kita akan semakin mudah apabila mau, bertindak sebagai plagiat. Akan tetapi kita juga dapat dengan mudah mengetahui apakah ada tindakan plagiarism atau tidak dengan bantuan IT tersebut. Misalkan, dengan mengupload karya kita secara online. Maka selain promosi tentang karya kita juga sekaligus membantu untuk mencegah maraknya plagiarism. Karena ada satu alat yang bisa membandingkan satu karya dengan karya yang lain untuk mengetahui berapa persen karya – karya tersebut saling beririsan.

Harapan kami proseding seminar ini juga akan diupload pada website UNY, sehingga bisa didownload dan semakin banyak dibaca orang.

Akhir kata saya ucapkan terimakasih atas partisipasi Bapak/ Ibu semua pada seminar ini dan mudah-mudahan kita semua bisa berkarakter dan bermartabat. Amien.

Selamat berseminar

Wassalamualaikum Wr.Wb.

Dekan FMIPA UNY

Dr. Hartono

DAFTAR ISI

MAKALAH MATEMATIKA

Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 2 Juni 2012

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN DARI PENYELESAIAN PERSAMAAN EULER-LAGRANGE

Ch. Enny Murwaningtyas, M.Si.

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
enny@usd.ac.id

Abstrak

Pembahasan umum yang sering disajikan dalam bidang kalkulus variasi adalah mencari sebuah penyelesaian pada fungsi minimum atau fungsi maksimum. Salah satu metode yang digunakan dalam perhitungan tersebut adalah metode Euler-Lagrange. Metode Euler-Lagrange merupakan gabungan dari dua pembahasan, yaitu metode Euler yang dikenakan dengan pengali Lagrange. Metode Euler-Lagrange menjamin bahwa penyelesaian yang diperoleh telah memenuhi sifat kontinu dan kompak. Pada makalah ini, akan membahas tentang eksistensi dan ketunggalan dari penyelesaian persamaan Euler-Lagrange pada masalah optimisasi yang sederhana.

Kata kunci: eksistensi, ketunggalan, dan persamaan Euler-Lagrange

PENDAHULUAN

Metode yang klasik dan elegan dari kalkulus variasi modern memungkinkan dipecahkannya sejumlah besar masalah yang berhubungan dengan optimasi fungsional dalam Ilmu Pengetahuan. Kalkulus variasi yang dikembangkan oleh Bernoulli, Newton dan Euler pada awal abad ke-18, sampai saat ini masih menarik perhatian para matematikawan dan sudah banyak menjadi solusi pemecahan masalah bagi banyak ilmuwan dan berbagai bidang teknik sebagai pencari solusi terbaik yang mungkin ada bagi persoalan yang dihadapi. Perkembangan kalkulus variasi sendiri pada mulanya berawal dari keinginan dasar manusia yang ingin mendapatkan solusi terbaik atau optimal untuk masalah-masalah matematis yang ada.

Kalkulus variasi sangat erat kaitannya dengan mencari nilai ekstrem dari fungsional dan dinyatakan sebagai sekumpulan metode yang digunakan untuk mencari fungsi-fungsi optimal. Adapun beberapa metode atau rumus atau persamaan yang terdapat dalam kalkulus variasi adalah *Euler-Lagrange Equations, Emmy Noether's theorem, Hamiltonian formulation, Hamilton Jacoby theory, Weierstrass Method, Jacobian Equations, Rayleigh Principles* dan lain-lain.

Kalkulus variasi yang merupakan cabang ilmu matematika yang berhubungan dengan fungsi dari fungsi, berbeda dengan kalkulus biasa yang berhubungan dengan fungsi dari bilangan. Fungsional dalam kalkulus variasi dapat dibentuk sebagai integral-integral yang melibatkan sebuah fungsi sembarang dan turunan-turunannya sebagai variabel-variabelnya. Kunci dari teorema kalkulus variasi sendiri adalah persamaan Euler-Lagrange. Persamaan ini berhubungan dengan syarat stasioner pada sebuah fungsional.

Makalah ini akan membahas tentang penyelesaian masalah optimisasi yang sederhana yaitu mencari nilai ekstrem, khususnya nilai minimum, dari fungsional berikut

$$I(y)=\int_a^b F(x,y(x),\dot{y}(x))dx$$

dengan $F \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $F=F(x,y,\dot{y})$ dan $\dot{y}=\frac{\partial y}{\partial x}$. Sedangkan Jika fungsi I mempunyai ekstrem pada y_0, maka y_0 memenuhi persamaan

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y_0(x),\dot{y}_0(x))-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}F(x,y_0(x),\dot{y}_0(x))\right)=0$$

Persamaan diatas itu lah yang disebut persamaan Euler-Langange.

PERSAMAAN EULER-LANGRANGE

Terlebih dahulu akan dibahas tentang derivatif dari fungsional dan sifat-sifatnya.

Definisi 1

Misalkan S adalah ruang linier bernorma dan $I : S \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsional. Maka I dikatakan terdiferensial (Frechet) pada $y_0 \in S$ jika ada funsional linier kontinu, dinotasikan dengan $I'(y_0)$ dan ada pemetaan $\varepsilon : S \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga

$$I(y_0 + h) = I(y_0) + \big(I'(y_0)\big)(h) + \varepsilon(h)\|h\|$$

untuk setiap $h \in S$ dan $\varepsilon(h) \to 0$ karena $\|h\| \to 0$.

Teorema 2

Derivatif dari fungsional terdiferensial $I : S \to \mathbb{R}$ pada suatu titik $y_0 \in S$ tunggal.

Bukti :

Jika $L : S \to \mathbb{R}$ adalah fungsional linier dan jika

$$\frac{L(h)}{\|h\|} \to 0 \text{ karena } \|h\| \to 0 \tag{1}$$

Maka $L = 0$. Jika $L(h_0) \neq 0$ untuk beberapa $h_0 \in S$ yang tidak nol, maka didefinsikan $h_n = \frac{1}{n} h_0$, sehingga $\|h_n\| \to 0$ karena $n \to \infty$, tetapi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{L(h_0)}{\|h_0\|} \neq 0$$

Kontradiksi dengan Persamaan(1).

Sekarang dimisalkan derivatif dari I pada y_0 tidak tunggal, sehingga diperoleh

$$I(y_0 + h) = I(y_0) + L_1(h) + \varepsilon_1(h)\|h\|$$

$$I(y_0 + h) = I(y_0) + L_2(h) + \varepsilon_2(h)\|h\|$$

Dengan L_1, L_2 adalah fungsional linier kontinu, dan $\varepsilon_1(h)$, $\varepsilon_2(h) \to 0$ karena $\|h\| \to 0$. maka

$$\frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = \varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h) \to 0 \text{ karena } \|h\| \to 0$$

dan dari hasil yang diperoleh diatas dapat disimpulkan bahwa $L_1 = L_2$. ■

Teorema 3

Misalkan $I : S \to \mathbb{R}$ suatu fungsional yang terdiferensial pada $y_0 \in S$. Jika fungsi I mempunyai ekstrem lokal pada y_0, maka $I'(y_0) = 0$.

Bukti :

Diketahui fungsi I terdiferensial di $y_0 \in S$, dan jika I mempunyai minimum lokal pada y_0, maka ada $r > 0$ sedemikian hingga $I(y_0 + h) \geq I(y_0)$ untuk setiap h sedemikian hingga $\|h\| < r$. Misalkan $\big(I'(y_0)\big)(h_0) \neq 0$ untuk setiap $h_0 \in S$. Didefinisikan

$$h_n = -\frac{1}{n}\frac{\big(I'(y_0)\big)(h_0)}{\left|\big(I'(y_0)\big)(h_0)\right|} h_0$$

Jelas bahwa $\|h_n\| \to 0$ karena $n \to \infty$ dan dimisalkan dipilih N yang cukup besar, maka diperoleh $\|h_n\| < r$ untuk setiap $n > N$. Itu berarti untuk setiap $n > N$,

$$0 \leq \frac{I(y_0 + h_n) - I(y_0)}{\|h_n\|} = -\frac{\left|[I'(y_0)]h_0\right|}{\|h_0\|} + \varepsilon(h_n)$$

Jika limit maka diperoleh $-\left|[I'(y_0)]h_0\right| \geq 0$ dan ini kontradiksi. ■

Teorema 4

Jika $K \in C[a,b]$ dan $\int_a^b K(x)h'(x)dx = 0$ untuk setiap $h \in C^1[a,b]$ dengan $h(a) = h(b) = 0$, maka ada suatu konstata k sedemikian sehingga $K(x) = k$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Bukti :
Misalkan k suatu konstata yang didefinisikan dengan syarat

$$\int_a^b [K(x)-k]dx = 0$$

Dan misalkan

$$h(x) = \int_a^x [K(z)-k]dz$$

Maka $h \in C^1[a,b]$ dan itu memenuhi $h(a) = h(b) = 0$. Selanjutnya

$$\int_a^b [K(x)-k]^2 dx = \int_a^b [K(x)-k]h'(x)dx = \int_a^b K(x)h'(x)dx - k(h(b)-h(a)) = 0$$

Maka $K(x) - k = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jadi terbukti $K(x) = k$ untuk setiap $x \in [a,b]$. ■

Teorema 5
Misalkan $S = \{y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = \alpha \text{ dan } y(b) = \beta\}$ dan misalkan $I : S \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsional yang berbentuk

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x))dx$$

dengan $F \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $F = F(x,y,\dot{y})$ dan $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Jika fungsi I mempunyai ekstrem pada $y_0 \in S \cap C^2([a,b])$, maka y_0 memenuhi persamaan Euler-Langange

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x))\right) = 0 \qquad (2)$$

dengan $x \in [a,b]$.

Bukti :
Bukti dari teorema ini cukup panjang maka akan dibagi dalam beberapa tahap.
Tahap 1): Himpunan S bukan merupakan ruang vektor. Oleh karena itu Teorema 4 tidak dapat digunakan secara langsung. Oleh sebab itu akan dibentuk ruang linier baru T dan $\tilde{I} : T \to \mathbb{R}$ didefisikan seperti fungsional I yang sebelumnya. Ruang linier tersebut adalah

$$T = \{y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = y(b) = 0\}$$

dengan norma $C^1([a,b])$. Maka untuk setiap $h \in T$ dengan $(y_0 + h)$ memenuhi $(y_0 + h)(a) = \alpha$ dan $(y_0 + h)(b) = \beta$. Didefinisikan $\tilde{I}(h) = I(y_0 + h)$, $h \in T$, sedangkan $\tilde{I} : T \to \mathbb{R}$ memiliki nilai ekstrem pada 0. Dengan menggunakan Teorema 4 maka diperoleh $\tilde{I}'(y_0) = 0$.

Tahap 2): Selanjutnya akan ditentukan $\tilde{I}'(y_0)$.

Karena $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x))dx$ dan $\tilde{I}(h) = I(y_0 + h)$ maka

$$\begin{aligned}\tilde{I}(\text{h}) - \tilde{I}(0) &= \int_a^b F(x,(y_0(x)+h),(\dot{y}_0(x)+h))dx - \int_a^b F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x))dx \\ &= \int_a^b \left(F(x,(y_0(x)+h),(\dot{y}_0(x)+h)) - F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x))\right)dx\end{aligned}$$

Menggukan teorema Taylor yaitu, jika F adalah fungsi terdeferential parsial orde dua di persekitaran N yang memuat $(x_0, y_0, \dot{y}_0)$, maka untuk setiap $(x,y,\dot{y}) \in N$ terdapat $\Theta \in [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}F(x,y,\dot{y}) = F(x_0,y_0,\dot{y}_0) &+ \left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} + (\dot{y}-\dot{y}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\right)F\Bigg|_{(x_0,y_0,\dot{y}_0)} + \\ &\frac{1}{2!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} + (\dot{y}-\dot{y}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\right)^2 F\Bigg|_{(x_0,y_0,\dot{y}_0)+\Theta((x,y,\dot{y})-(x_0,y_0,\dot{y}_0))}\end{aligned}$$

Maka untuk $h \in T$ sehingga $\|h\|$ cukup kecil berakibat

$$\widetilde{I}(\mathrm{h}) - \widetilde{I}(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx +$$

$$\frac{1}{2!} \int_a^b \left[\left(h(x) \frac{\partial}{\partial y} + h'(x) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right)^2 F \Bigg|_{(x, y_0(x) + \Theta(t) h(t), \dot{y}_0(x) + \Theta(t) h'(t))} \right] dx$$

Sehingga mudah ditunjukkan ada $M > 0$ sedemikian hingga

$$\left| \frac{1}{2!} \int_a^b \left[\left(h(x) \frac{\partial}{\partial y} + h'(x) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right)^2 F \Bigg|_{(x, y_0(x) + \Theta(t) h(t), \dot{y}_0(x) + \Theta(t) h'(t))} \right] \right| dx \le M \|h\|^2$$

Jadi $\widetilde{I}'(0)$ adalah pemetaan

$$h \to \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx \qquad (3)$$

Tahap 3): Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pemetaan pada (3) merupakan pemetaan nol, maka yang berakibat terpenuhinya persamaan (2). Didefinisikan

$$A(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} F(z, y_0(z), \dot{y}_0(z)) dz \qquad (4)$$

Dengan menggunakan inegral parsial $\int u dv = uv - \int v du$ dengan $u = A(x)$ dan $dv = h'(x)dx$ diperoleh

$$\int_a^b A(x) h'(x) dx = A(x) h(x) - \int_a^b h(x) dA(x)$$

Karena pemetaan pada (2) merupakan pemetaan nol atau dengan kata lain $h(x) = 0$ untuk setiap x, jadi

$$\int_a^b A(x) h'(x) dx = -\int_a^b h(x) dA(x)$$

$$\int_a^b A(x) h'(x) dx = -\int_a^b h(x) \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) dx$$

Atau dengan kata lain diperoleh

$$A(x) h'(x) = -h(x) \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \qquad (5)$$

Selain itu (3) mengakibatkan $\widetilde{I}'(0) = 0$, sehingga

$$\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx = 0 \qquad (6)$$

Jika persamaan (5) disubtitusikan ke persamaan (6) maka diperoleh

$$\int_a^b \left[-A(x) h'(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) h'(x) \right] dx = 0$$

$$\int_a^b \left[-A(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right] h'(x) dx = 0 \text{ untuk setiap } h \in T.$$

Tahap 4): Jika $K(x) = -A(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x))$ dan menggunakan Teorema 4 maka ada suatu konstata k sedemikian sehingga $K(x) = k$ untuk setiap $x \in [a,b]$, yaitu

$$-A(x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) = k$$

$$-\int_a^x \frac{\partial}{\partial y} F(z, y_0(z), \dot{y}_0(z)) dz + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) = k \qquad (7)$$

Jika Persamaan (7) dideferensialkan terhadap x di kedua ruasnya maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial y} F(z, y_0(z), \dot{y}_0(z)) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right) = 0 \ \blacksquare$$

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN

Sebelum membicarakan tentang eksistensi dan ketunggalan dari penyelesaian persamaan Euler-Lagrange akan dibahas terlebih dahulu tentang fungsi konveks.

Definisi 6

(i) Himpunan $\Omega \in \mathbb{R}$ dikatakan konveks jika untuk setiap $x, y \in \Omega$ dan setiap $\lambda \in [a,b]$ maka berlaku $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$.

(ii) Misalkan $\Omega \in \mathbb{R}^n$ konveks. Fungsi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks jika untuk setiap $x, y \in \Omega$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$, memenuhi pertidaksamaan berikut

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(iii) Misalkan $\Omega \in \mathbb{R}^n$ konveks. Fungsi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks tegas jika untuk setiap $x, y \in \Omega$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$, memenuhi pertidaksamaan berikut

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Teorema 7

Misalkan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dan $f \in C^1(\mathbb{R})$, fungsi f adalah fungsi konveks jika dan hanya jika

$$f(x) \ge f(y) + \langle \nabla f(y); x - y \rangle$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(y) = \left(\frac{\partial f(y)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(y)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(y)}{\partial x_n} \right)$ dan $\langle .;. \rangle$ menotasikan produk skalar di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 8

Jika ada suatu nilai y_0 yang memenuhi persamaan

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \right) = 0 \qquad (8)$$

dan jika $(y, \dot{y}) \to f(x, y, \dot{y})$ konveks untuk setiap $x \in [a,b]$ maka y_0 meminimalkan

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$$

Bukti :

Misalkan nilai y_0 adalah penyelesaian persamaan (8) dengan $y_0(a) = \alpha$ dan $y_0(b) = \beta$. Karena $(y, \dot{y}) \to f(x, y, \dot{y})$ konveks untuk setiap $x \in [a,b]$ maka menggunakan Teorema 7 diperoleh

$$F(x, y, \dot{y}) \ge F(x_0, y_0, \dot{y}_0) + \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0)$$

untuk setiap $y \in S$. Jika pertidaksamaan tersebut diintegralkan maka diperoleh

$$\int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx \ge \int_a^b \left(F(x_0, y_0, \dot{y}_0) + \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) \right) dx$$

$$\int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx \ge \int_a^b F(x_0, y_0, \dot{y}_0) dx + \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) \right) dx$$

$$I(y) \ge I(y_0) + \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) \right) dx$$

$$I(y) \ge I(y_0) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(\dot{y} - \dot{y}_0) dx$$

Bagian kedua dari ruas kanan pertidaksaman diatas akan diintegralkan pasial dengan $u = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)$ dan $dv = (\dot{y} - \dot{y}_0) dx$ sehingga diperoleh

$$I(y) \ge I(y_0) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) dx + (\dot{y} - \dot{y}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \Big|_a^b$$
$$- \int_a^b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right) (y - y_0) dx$$

Karena $y_0(a) = \alpha$ dan $y_0(b) = \beta$ sehingga $y(a) - y_0(a) = y(b) - y_0(b) = 0$, jadi diperoleh

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0)dx - \int_a^b \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right)(y - y_0)dx$$

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0)(y - y_0) - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right)(y - y_0) \right] dx$$

$$I(y) \geq I(y_0) + \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} F(x_0, y_0, \dot{y}_0) \right) \right](y - y_0)dx$$

Menggunakan persamaan (8) maka pertidaksamaan diatas menjadi

$$I(y) \geq I(y_0)$$

Atau dengan kata lain terbukti y_0 meminimalkan $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x))dx$ ■

Teorema 9

Jika fungsi $(y, \dot{y}) \to f(x, y, \dot{y})$ konveks tegas untuk setiap $x \in [a, b]$ maka nilai yang meminimalkan $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x))dx$ tunggal.

Bukti

Misalkan y_1 dan $y_2 \in S$ adalah dua penyelesaian yang meminimalkan $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x))dx$, yang akan ditunjukkan bahwa penyelesain tersebut sama, atau dengan kata lain memiliki penyelesaian tunggal. Dan misalkan $\inf_{y \in S} \left\{ I(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x))dx \right\} = m$. Didefinisikan, $y_0 \in S$

$$y_0 = \tfrac{1}{2} y_1 + \tfrac{1}{2} y_2$$

Karena $(y, \dot{y}) \to f(x, y, \dot{y})$ konveks untuk setiap $x \in [a, b]$ maka

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} F(x, y_1(x), \dot{y}_1(x)) + \tfrac{1}{2} F(x, y_2(x), \dot{y}_2(x)) &\geq F(x, \tfrac{1}{2} y_1(x) + \tfrac{1}{2} y_2(x), \tfrac{1}{2} \dot{y}_1(x) + \tfrac{1}{2} \dot{y}_1(x)) \\ &= F(x, y_0(x), \dot{y}_0(x)) \end{aligned}$$

dan karena

$$m = \tfrac{1}{2} I(y_1) + \tfrac{1}{2} I(y_2) \geq I(y_0) \geq m$$

Maka diperoleh

$$\int_a^b \left(\tfrac{1}{2} F(x, y_1(x), \dot{y}_1(x)) + \tfrac{1}{2} F(x, y_2(x), \dot{y}_2(x)) - F(x, \tfrac{1}{2} y_1(x) + \tfrac{1}{2} y_2(x), \tfrac{1}{2} \dot{y}_1(x) + \tfrac{1}{2} \dot{y}_1(x)) \right) dx = 0$$

Karena fungsi F merupakan fungsi konveks tegas maka haruslah $y_1(x) = y_2(x)$ dan $\dot{y}_1(x) = \dot{y}_2(x)$ yang berakibat $y_1 = y_2 \in S$. ■

KESIMPULAN

Persamaan Euler-Langange adalah persamaan yang cukup penting di dalam kalculus variansi. Dari pembahasan diatas diketahui bahwa persamaan Euler Langrange pasti mempunyai penyelesaian jika fungsi $(y, \dot{y}) \to f(x, y, \dot{y})$ konveks. Sedangkan jika fungsi $(y, \dot{y}) \to f(x, y, \dot{y})$ konveks tegas maka penyelesaiannya tunggal. Namun penyesaian persamaan Euler Langrange tergantung pada nilai batasnya.

DAFTAR PUSTAKA

Dacorogna, B. 2000. *Introduction To The Calculus Of Variation.* London : Imperial College Press.

Gelfand, I. M. & Fomin, S. V. 1963: *Calculus of variations.* Englewood Clifsf , New Jersey : Prentice-Hall

Komzsik, L. 2009. *Applied Calculus of Variations for Engineers*, New York : CRC Press.

Sasane, A. *Lecturer Note : Calculus of Variations and Optimal Control*, University of Virginia