Digital Receipt

This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author:	Herry Suryawan
Assignment title:	Quick Submit
Submission title:	Turnitin KNM 2022
File name:	Prosiding_KNM_XX_Herry_PS_removed.pdf
File size:	911.86K
Page count:	8
Word count:	2,409
Character count:	11,843
Submission date:	15-Apr-2023 10:07AM (UTC+0700)
Submission ID:	2064994722

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.91-98

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7 Juli 2020

PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE

Herry Pribawanto Suryawan

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia
e-mail: herrypribs@usd.ac.id

Abstrak. *Proses Hermite order k didefinisikan melalui integral lipat Wiener-Itô order k terhadap gerak Brown baku. Proses Hermite order 1 tidak lain adalah gerak Brown fraksional dan merupakan satu-satunya proses Hermite yang mempunyai sifat Gaussian. Sementara itu proses Hermite order 2 dikenal dengan nama proses Rosenblatt. Pada makalah ini kita akan membahas proses Hermite dengan menggunakan kalkulus Hida, yakni proses Hermite direpresentasikan sebagai fungsi yang diperumum stokastik dengan peubah acak dasar yang digunakan adalah derau putih Brownian. Sebagai hasil utama akan ditunjukkan bahwa proses Hermite terdiferensial di dalam ruang distribusi Hida dan juga diperoleh sebuah rumus eksplisit untuk derau Hermite.*

Kata kunci: kalkulus Hida, proses Hermite, turunan distribusi

1 PENDAHULUAN

Proses Hermite muncul di dalam studi mengenai teorema limit tak-pusat (*non-central limit theorem*) sebagai proses stokastik limit yang mempunyai sifat serupa-diri, lihat [1, 2].

Definisi 1.1. *Proses Hermite dengan order $k \in \mathbb{N}$ dan indeks keserupaan-diri $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ adalah proses stokastik $\left(Z_H^k(t)\right)_{t\geq 0}$ dengan*

$$Z_H^k(t) = C(H,k) \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^t \left(\prod_{j=1}^k (s-y_j)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)} \right) ds\, dB(y_1) \dots dB(y_k), \qquad (1.1)$$

dengan $x_+ := \max\{x, 0\}$ dan $(B(t))_{t\in\mathbb{R}}$ adalah gerak Brown dua sisi dan $C(H,k)$ adalah konstanta normalisasi sehingga $\mathbb{E}\left(\left(Z_H^k(t)\right)^2\right) = 1$.

Diberikan $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ adalah sebuah ruang peluang di mana gerak Brown terdefinisi dan $\mathcal{G}$ adalah aljabar-σ yang diinduksi oleh gerak Brown. Integral yang pertama pada Definisi 1.1 adalah integral lipat Wiener-Itô order k terhadap gerak Brown, yang seringkali dinotasikan dengan I_k, dan merupakan sebuah fungsi linear kontinu dari $\hat{L}^2(\mathbb{R}^k)$ ke $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ yang berbentuk

$$I_k(f) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\, dB(x_1) dB(x_2) \dots dB(x_k).$$

Turnitin KNM 2022

by Suryawan Herry

Submission date: 15-Apr-2023 10:07AM (UTC+0700)
Submission ID: 2064994722
File name: Prosiding_KNM_XX_Herry_PS_removed.pdf (911.86K)
Word count: 2409
Character count: 11843

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.91-98

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7 Juli 2020

PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE

Herry Pribawanto Suryawan

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia
e-mail: herrypribs@usd.ac.id

Abstrak. *Proses Hermite order k didefinisikan melalui integral lipat Wiener-Itô order k terhadap gerak Brown baku. Proses Hermite order 1 tidak lain adalah gerak Brown fraksional dan merupakan satu-satunya proses Hermite yang mempunyai sifat Gaussian. Sementara itu proses Hermite order 2 dikenal dengan nama proses Rosenblatt. Pada makalah ini kita akan membahas proses Hermite dengan menggunakan kalkulus Hida, yakni proses Hermite direpresentasikan sebagai fungsi yang diperumum stokastik dengan peubah acak dasar yang digunakan adalah derau putih Brownian. Sebagai hasil utama akan ditunjukkan bahwa proses Hermite terdiferensial di dalam ruang distribusi Hida dan juga diperoleh sebuah rumus eksplisit untuk derau Hermite.*

Kata kunci: kalkulus Hida, proses Hermite, turunan distribusi

1 PENDAHULUAN

Proses Hermite muncul di dalam studi mengenai teorema limit tak-pusat (*non-central limit theorem*) sebagai proses stokastik limit yang mempunyai sifat serupa-diri, lihat [1, 2].

Definisi 1.1. *Proses Hermite dengan order $k \in \mathbb{N}$ dan indeks keserupaan-diri $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ adalah proses stokastik $\left(Z_H^k(t)\right)_{t\geq 0}$ dengan*

$$Z_H^k(t) = C(H,k) \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^t \left(\prod_{j=1}^k (s-y_j)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)} \right) ds\, dB(y_1)\dots dB(y_k), \tag{1.1}$$

dengan $x_+ := \max\{x, 0\}$ dan $(B(t))_{t\in\mathbb{R}}$ adalah gerak Brown dua sisi dan $C(H,k)$ adalah konstanta normalisasi sehingga $\mathbb{E}\left(\left(Z_H^k(t)\right)^2\right) = 1$.

Diberikan $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ adalah sebuah ruang peluang di mana gerak Brown terdefinisi dan $\mathcal{G}$ adalah aljabar-σ yang diinduksi oleh gerak Brown. Integral yang pertama pada Definisi 1.1 adalah integral lipat Wiener-Itô order k terhadap gerak Brown, yang seringkali dinotasikan dengan I_k, dan merupakan sebuah fungsi linear kontinu dari $\hat{L}^2(\mathbb{R}^k)$ ke $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ yang berbentuk

$$I_k(f) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\, dB(x_1)dB(x_2)\dots dB(x_k).$$

Di sini $\hat{L}^2(\mathbb{R}^k)$ menotasikan koleksi semua fungsi simetrik di dalam ruang Hilbert $L^2(\mathbb{R}^k)$, yakni

$$\hat{L}^2(\mathbb{R}^k) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^k) : f = \hat{f} \right\},$$

dengan $\hat{f}$ adalah simetrisasi dari fungsi f yakni

$$\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right),$$

di mana jumlahan tersebut dihitung untuk semua permutasi σ dari $\{1, 2, \ldots, k\}$. Penjelasan lebih lengkap terkait integral lipat Wiener-Itô dapat dilihat di [3].

Peubah acak X dengan distribusi yang sama dengan $Z_H^k(1)$ disebut peubah acak Hermite. Proses Hermite yang paling terkenal dan telah banyak dipelajari adalah gerak Brown fraksional, yang diperoleh dari (1.1) dengan mengambil $k = 1$. Gerak Brown fraksional adalah satu-satunya proses Hermite yang mempunyai sifat Gaussian. Proses Hermite order 2, yakni $k = 2$ pada (1.1) dikenal dengan nama proses Rosenblatt. Berikut ini kita berikan rangkuman sifat-sifat dasar dari proses Hermite.

Teorema 1.2 ([4, 5]). *1. Konstanta normalisasi diberikan oleh*

$$C(H, k) = \sqrt{\frac{k! H(2H-1)}{\beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1-H}{k}, \frac{2H-2}{k}\right)^k}}$$

dengan $\beta(\cdot, \cdot)$ adalah fungsi beta.

2. *Untuk setiap $k \geq 1$ proses Hermite Z_H^k mempunyai fungsi kovariansi*

$$R(t, s) := \mathbb{E}\left(Z_H^k(t) Z_H^k(s)\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right), \quad s, t \geq 0.$$

3. *Proses Hermite Z_H^k bersifat serupa-diri dengan indeks keserupaan-diri H, dalam arti untuk setiap $c > 0$*

$$\left\{Z_H^k(ct), t \geq 0\right\} \stackrel{d}{=} c^H Z_H^k(t), t \geq 0$$

dengan $\stackrel{d}{=}$ menyatakan kesamaan untuk semua distribusi dimensi hingga.

4. *Pertambahan dari proses Hermite Z_H^k bersifat stasioner, yakni distribusi bersama dari*

$$\left\{Z_H^k(t+h) - Z_H^k(t), h \geq 0\right\}$$

bersifat saling bebas untuk setiap $t \geq 0$.

5. *Semua momen dari proses Hermite ada dan untuk setiap $p \geq 1$ berlaku*

$$\mathbb{E}\left(\left|Z_H^k(t)\right|^p\right) = \mathbb{E}\left(\left|Z_H^k(1)\right|^p\right) t^{2H}$$

untuk setiap $t \geq 0$.

6. *Proses Hermite mempunyai lintasan sampel yang kontinu Hölder dengan order $\delta \in (0, H)$.*

7. *Proses Hermite bukan semimartingale dan juga bukan proses Markov.*

8. *Proses Hermite memiliki sifat kebergantungan jangka panjang (long-range dependence), dalam arti untuk setiap $\alpha > 0$ berlaku*

$$\sum_{n\geq\alpha}\rho_n(\alpha)=\infty$$

dengan

$$\rho_n(\alpha)=\mathbb{E}\left(\left(Z_H^k(\alpha+1)-Z_H^k(\alpha)\right)\left(Z_H^k(n+1)-Z_H^k(n)\right)\right).$$

Kalkulus Hida atau dikenal juga dengan nama analisis derau putih, yang diperkenalkan oleh Takeyuki Hida pada sekitar tahun 1970, adalah sebuah teori kalkulus pada ruang berdimensi takhingga dengan peubah dasar derau putih. Kerangka matematis dari kalkulus Hida adalah berdasarkan pada analogi dimensi takhingga dari teori distribusi Schwartz di mana peranan ukuran Lebesgue pada ruang Euklid $\mathbb{R}^d$ digantikan dengan ukuran Gauss pada ruang dual topologi dari suatu ruang nuklir. Derau putih dipandang sebagai turunan terhadap waktu dari gerak Brown pada ruang distribusi Hida. Karena derau putih bersifat saling bebas untuk setiap waktu yang berbeda, maka teori derau putih dapat dipakai sebagai sebuah sistem koordinat dimensi tak hingga (tak terhitung). Pendekatan kalkulus Hida telah dipakai untuk membahas gerak Brown fraksional (proses Hermite order 1) [6] dan proses Rosenblatt (proses Hermite order 2) [7]. Di dalam makalah ini kita membahas proses Hermite order k secara umum dengan menggunakan kalkulus Hida. Pada bagian 2 kita akan diberikan ringkasan teori kalkulus Hida dan bagian 3 berisi hasil utama dari makalah ini yaitu penyajian proses Hermite di dalam ruang derau putih dan juga teorema yang menunjukkan bahwa lintasan sampel proses Hermite terdiferensial terhadap waktu pada ruang distribusi Hida.

2 KALKULUS HIDA

Pada bagian ini kita akan diberikan ringkasan teori kalkulus Hida yang diperlukan dalam pembahasan utama di makalah ini. Untuk pembahasan yang lebih lengkap dapat dibaca pada [8, 9, 10]. Dasar dari kalkulus Hida adalah ruang peluang $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{F},\mu)$ dengan $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ adalah ruang distribusi Schwartz, $\mathcal{F}$ adalah aljabar-σ yang dibangun oleh himpunan silinder di dalam $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dan μ adalah ukuran Gauss berdimensi takhingga yang eksistensinya dijamin oleh teorema Bochner-Minlos. Ruang peluang $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{F},\mu)$ dikenal sebagai ruang derau putih karena memuat lintasan sampel dari derau putih. Ruang distribusi Schwartz $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ kita pandang sebagai ruang dual topologi dari ruang fungsi tes Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Lebih lanjut, pasangan dual antara $\xi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dengan $\omega\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dinotasikan dengan $\langle\omega,\xi\rangle$ dan merupakan perluasan dari hasilkali dalam baku pada ruang Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ dari fungsi yang kuadratnya terintegral Lebesgue. Dalam konteks ini terdapat hubungan yang disebut tripel Gelfand level 1

$$\mathcal{S}(\mathbb{R})\hookrightarrow L^2(\mathbb{R})\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Dalam hal ini notasi $A\hookrightarrow B$ menyatakan penyisipan (*embedding*) A ke dalam B secara rapat dan kontinu. Selanjutnya dapat dikonstruksi tripel Gelfand level 2

$$(\mathcal{S})\hookrightarrow L^2(\mu):=L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{F},\mu)\hookrightarrow(\mathcal{S})'$$

di mana $(\mathcal{S})$ dan $(\mathcal{S})'$ berturut-turut disebut ruang tes Hida dan ruang distribusi Hida. Sebagai contoh gerak Brown baku mempunyai representasi

$$B(t)=\left\langle\cdot,1_{[0,t)}\right\rangle\in L^2(\mu)$$

dan turunan dari gerak Brown yakni derau putih mempunyai representasi

$$W(t) := \dot{B}(t) = \langle \cdot, \delta_t \rangle \in (\mathcal{S})' \setminus L^2(\mu).$$

Sebuah alat utama di dalam kalkulus Hida adalah transformasi-S yang dapat dipandang sebagai analogi dimensi tak hingga untuk transformasi Laplace terhadap ukuran Gauss. Untuk setiap $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ transformasi-S dari $\Phi \in (\mathcal{S})'$ diberikan oleh

$$S\Phi(\xi) = \langle\langle \Phi, \mathrm{Nexp}(\langle \cdot, \xi \rangle) \rangle\rangle$$

dengan $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ adalah pasangan dual antara $(\mathcal{S})'$ dengan $(\mathcal{S})$ sementara

$$\mathrm{Nexp}(\langle \cdot, \xi \rangle) := \exp\left(\langle \cdot, \xi \rangle - \frac{1}{2} \|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}} \right)$$

disebut eksponensial Wick. Transformasi-S dapat digunakan untuk memeriksa kekonvergenan barisan distribusi Hida.

Teorema 2.1 ([10]). *Jika $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adalah sebuah barisan di dalam $(\mathcal{S})'$ sehingga*

(1) Untuk setiap $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to\infty}(S\Phi_n)(\xi)$ ada, dan

(2) Terdapat $K_1, K_2 > 0$ dan norma $\|\cdot\|$ on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sehingga

$$|(S\Phi_n)(z\xi)| \leq K_1 \exp\left(K_2 |z|^2 \|\xi\|^2 \right),$$

untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$,

maka $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen kuat di dalam $(\mathcal{S})'$ ke sebuah distribusi Hida $\Phi \in (\mathcal{S})'$.

Selanjutnya, akan diperkenalkan tensor Wick yang dapat dipakai untuk mendapatkan representasi derau putih untuk integral lipat Wiener-Itô pada ruang derau putih. Operator trace τ adalah anggota dari $\hat{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^2)$ yang diberikan oleh

$$\langle \tau, \xi \otimes \varphi \rangle := \langle \varphi, \xi \rangle$$

untuk setiap $\xi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tensor Wick dari $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ didefinisikan oleh

$$: \omega^{\otimes n} := \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (2j-1)!!(-1)^k \omega^{\otimes(n-2j)} \hat{\otimes} \tau^{\otimes j}$$

dengan $\binom{n}{2j} = \frac{n!}{(2j)!(n-2j)!}$, $(2j-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1$ dan $\hat{\otimes}$ adalah hasilkali tensor simetrik.

Teorema 2.2 ([10]). *Jika I_n menyatakan integral lipat Wiener-Ito order n dan $f \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$, maka untuk setiap $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ berlaku*

$$I_n(f)(\omega) = \left\langle : \omega^{\otimes n} :, f \right\rangle.$$

Proposisi 2.3 ([10]). *Jika*

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle : \omega^{\otimes n} :, F_n \right\rangle \in (\mathcal{S})',$$

dengan $F_n \in \hat{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$ maka

$$S\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle F_n, \xi^{\otimes n} \right\rangle, \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

3 REPRESENTASI DERAU PUTIH

Pada bagian ini akan didefinisikan keterdiferensialan proses distribusi stokastik di $(\mathcal{S})'$. Secara khusus, kita akan menghitung turunan di dalam $(\mathcal{S})'$ dari proses Hermite yang disebut derau Hermite.

Definisi 3.1 ([10]). *1. Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi $X : I \to (\mathcal{S})'$ disebut proses distribusi stokastik.*

2. Proses distribusi stokastik X dikatakan terdiferensial jika

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

ada di dalam $(\mathcal{S})'$.

Menurut teorema kekonvergenen distribusi Hida (Teorema 2.1) kekonvergenan kuat di dalam $(\mathcal{S})'$ dijamin oleh kekonvergenan titik demi titik dari transformasi-S dan kondisi pertumbuhan seragam (*uniform growth condition*).

Untuk membuktikan hasil utama kita memerlukan pengertian integral fraksional tipe Weyl dan sebuah estimasinya.

Teorema 3.2 ([6]). *Apabila $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, dan $I_+^{\frac{H}{2}}$ menyatakan integral fraksional tipe Weyl dengan order $\frac{H}{2}$ pada garis real,yaitu*

$$I_+^{\frac{H}{2}} \xi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{H}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} (x-y)_+^{\frac{H}{2}-1} \xi(y)\, dy,$$

maka $I_+^{\frac{H}{2}} \xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ dan terdapat konstanta positif C_H sehingga

$$\left\| I_+^{\frac{H}{2}} \xi \right\|_\infty \le C_H \left(\|\xi\|_\infty + \left\|\xi^{(1)}\right\|_\infty + \|\xi\|_1 \right),$$

dengan $\xi^{(1)}$ adalah turunan pertama dari ξ sementara $\|\cdot\|_\infty$ dan $\|\cdot\|_1$ berturut-turut adalah norma supremum dan norma L^1 pada $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Untuk selanjutnya, $C(K,k)$ menyatakan sebuah konstanta yang hanya bergantung pada K dan k dan nilainya dapat berbeda dari satu baris ke baris lainnya.

Teorema 3.3. *Diberikan proses Hermite $\left(Z_H^k(t)\right)_{t\ge 0}$ dengan order $k \in \mathbb{N}$ dan indeks keserupaan-diri $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ dan dinotasikan $K := \frac{1}{2} + \frac{H-1}{k}$.*

1. Representasi derau putih untuk proses Hermite order k adalah

$$Z_K^k(t) = \left\langle :\cdot^{\otimes k}:, f_t^K(x_1, \cdots, x_k) \right\rangle$$

dengan transformasi-S diberikan oleh

$$SZ_K^k(t)(\xi) = C(K,k) \int_0^t \left(I_+^{\frac{K}{2}} \xi(s) \right)^k ds, \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

2. *Proses Hermite* $\left(Z_K^k(t)\right)_{t\geq 0}$ *terdiferensial di dalam* $(\mathcal{S})'$ *dan untuk setiap* $t>0$ *turunan-nya mempunyai representasi derau putih*

$$\dot{Z}_K^k(t) = C(K,k) I_k\left(\delta_t^{\otimes k} \circ \left(I_+^{\frac{K}{2}}\xi(s)\right)^{\otimes k}\right)$$

dengan I_k *menyatakan integral lipat Wiener-Itô order* k*, dengan transformasi-S yang diberikan oleh*

$$S\dot{Z}_K^k(t)(\xi) = C(K,k)\left(I_+^{\frac{K}{2}}\xi(t)\right)^k, \quad \xi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Turunan distribusi proses Hermite disebut derau Hermite.

Bukti.

1. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} Z_K^k(t) &= C(K,k)\int_{\mathbb{R}^k}\int_0^t\left(\prod_{j=1}^k (s-x_j)_+^{\frac{K}{2}-1}\right) ds\, dB(x_1)\dots dB(x_k) \\ &= C(K,k)\int_{\mathbb{R}^k}\int_0^t\left(\prod_{j=1}^k \frac{(s-x_j)_+^{\frac{K}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)}\right) ds\, dB(x_1)\dots dB(x_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} f_t^K(x_1,\dots,x_k)\, dB(x_1)\dots dB(x_k) \\ &= I_k\left(f_t^K\right), \end{aligned}$$

dengan I_k adalah integral lipat Wiener-Ito order k dan f_t^K adalah kernel Hermite yang diberikan oleh

$$f_t^K(x_1,\cdots,x_k) = C(K,k)\int_0^t \frac{(s-x_1)_+^{\frac{K}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)}\cdots\frac{(s-x_k)_+^{\frac{K}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)}\, ds \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^k).$$

Dari Teorema 2.2 diperoleh bahwa

$$I_k\left(f_t^K\right)(\omega) = \left\langle :\omega^{\otimes k}:, f_t^K(x_1,\cdots,x_k)\right\rangle,$$

yang berakibat

$$Z_K^k(t) = \left\langle :\cdot^{\otimes k}:, f_t^K(x_1,\cdots,x_k)\right\rangle.$$

Selanjutnya, dengan menerapkan Proposisi 2.3, menggunakan Teorema Fubini, dan mengingat definisi integral fraksional tipe Weyl diperoleh

$$\begin{aligned} SZ_K^k(t)(\xi) &= \left\langle f_t^K(x_1,\cdots,x_k), \xi^{\otimes k}\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} C(K,k)\int_0^t\left(\prod_{j=1}^k \frac{(s-x_j)_+^{\frac{K}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)}\xi(x_j)\right) ds\, dx_1\dots dx_k \\ &= C(K,k)\int_0^t\prod_{j=1}^k\frac{1}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)}\int_{-\infty}^s (s-x_j)_+^{\frac{K}{2}-1}\,\xi(x_j)\, dx_j\, ds \\ &= C(K,k)\int_0^t\left(I_+^{\frac{K}{2}}\xi(s)\right)^k ds, \quad \xi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. Ambil sebarang $t > 0$. Karena untuk setiap $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ berlaku

$$SZ_K^k(t)(\xi) = C(K,k) \int_0^t \left(I_+^{\frac{K}{2}} \xi(s) \right)^k ds,$$

maka untuk setiap $h > 0$ berlaku

$$S\left(\frac{Z_K^k(t+h) - Z_K^k(t)}{h} \right)(\xi) = \frac{C(K,k)}{h} \int_t^{t+h} \left(I_+^{\frac{K}{2}} \xi(s) \right)^k ds.$$

Dengan menggunakan Teorema 3.2 diperoleh

$$\begin{aligned} \left| S\left(\frac{Z_K^k(t+h) - Z_K^k(t)}{h} \right)(z\xi) \right| &\leq C(K,k)|z|^k \left(\|\xi\|_\infty + \left\|\xi^{(1)}\right\|_\infty + \|\xi\|_1 \right)^k \\ &\leq C(K,k) \exp\left(c|z|^2 \|\xi\|^2 \right) \end{aligned}$$

untuk suatu norma $\|\cdot\|$ pada $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Selanjutnya, Teorema 2.1 memberikan kekonvergenan kuat

$$\frac{Z_K^k(t+h) - Z_K^k(t)}{h}$$

di dalam $(\mathcal{S})'$ untuk $h \to 0$ dan limitnya dikarakterisasi melalui transformasi-S:

$$S\dot{Z}_K^k(t)(\xi) = C(K,k) \left(I_+^{\frac{K}{2}} \xi(t) \right)^k.$$

Dengan teknik yang serupa seperti yang digunakan [6] untuk derau putih fraksional, kita dapat memperluas integral lipat Wiener-Itô untuk anggota dari $\hat{\mathcal{S}}'\left(\mathbb{R}^k\right)$ untuk mendapatkan representasi derau Hermite

$$\dot{Z}_K^k(t) = \left\langle :\omega^{\otimes k}:, C(K,k)\delta_t^{\otimes k} \circ \left(I_+^{\frac{KH}{2}} \xi(s) \right)^{\otimes k} \right\rangle.$$

Terakhir, dengan mengingat hubungan pasangan dual di tripel Gelfand level 1 dan definisi integral lipat Wiener-Itô kita memperoleh

$$\dot{Z}_K^k(t) = C(K,k) I_k \left(\delta_t^{\otimes k} \circ \left(I_+^{\frac{K}{2}} \xi(s) \right)^{\otimes k} \right). \quad \square$$

4 KESIMPULAN

Pada makalah ini telah dibuktikan keterdiferensialan terhadap waktu dari proses Hermite di dalam ruang distribusi Hida dan didapatkan representasi derau putih dari derau Hermite beserta transformasi-S-nya. Dari sini dapat dikembangkan beberapa teori terkait seperti integral stokastik maupun persamaan diferensial stokastik terhadap proses Hermite dan fungsional delta Donsker serta waktu lokal dari proses Hermite.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R.L. Dobrushin, P. Major, "Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields," *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 50, 27-52 (1979).

[2] M.S. Taqqu, "Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank," *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 50, 53–83 (1979).

[3] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*. CRC Press (2006).

[4] C.A. Tudor, *Analysis of Variations of Self-similar Processes*. Springer (2013).

[5] V. Pipiras, M.S. Taqqu, *Long Range Dependence and Self Similarity*. Cambridge University Press (2017).

[6] C. Bender, "An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter," *Stoch. Proc. Appl.*, 104, 81–106 (2003).

[7] B. Arras, "A white noise approach to stochastic integration with respect to the Rosenblatt process," *Potential Anal.*, 43, 547–591 (2015).

[8] T. Hida, H-H. Kuo, J. Pothoff, L. Streit, *White Noise: an Infinite Dimensional Calculus*. Kluwer (1993).

[9] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space*. Springer (1994).

[10] H.-H. Kuo, *White Noise Distribution Theory*. CRC Press (1996).

Turnitin KNM 2022

ORIGINALITY REPORT

13%	12%	4%	1%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	pdffox.com Internet Source	6%
2	media.neliti.com Internet Source	3%
3	tel.archives-ouvertes.fr Internet Source	1%
4	Atef Lechiheb. "Wiener integrals with respect to the generalized Hermite process (gHp). Applications: SDEs with gHp noise", Random Operators and Stochastic Equations, 2023 Publication	1%
5	Submitted to Sungkyunkwan University Student Paper	1%
6	dme.uma.pt Internet Source	1%
7	www-math.mit.edu Internet Source	<1%
8	www.coursehero.com Internet Source	<1%

9	advancesindifferenceequations.springeropen.com Internet Source	<1 %
10	knm20.unpatti.ac.id Internet Source	<1 %
11	Long-Memory Processes, 2013. Publication	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 5 words
Exclude bibliography	On		