PEMECAHAN MASALAH
Matematis

Herry Pribawanto Suryawan

Buku Pemecahan Masalah Matematis ini disusun untuk memberikan gambaran tentang berbagai strategi dasar pemecahan masalah matematis. Dengan melihat kurangnya buku-buku berbahasa Indonesia yang membahas pemecahan masalah matematis secara sistematis, penulis juga berharap bahwa buku ini dapat memberikan sedikit kontribusi untuk pengembangan matematika di Indonesia khususnya terkait pemecahan masalah matematis. Sebagian besar isi buku ini dapat dibaca oleh siswa sekolah menengah atas. Mahasiswa S1 matematika/pendidikan matematika tentu saja akan menemukan banyak manfaat dengan membaca buku ini. Berbagai teknik dan strategi yang dibahas di buku ini akan sering muncul dalam berbagai perkuliahan matematika dari tingkat dasar sampai tingkat lanjut. Buku ini juga sangat bermanfaat bagi mahasiswa S2 matematika/pendidikan matematika untuk memberikan dasar-dasar teknis melakukan penelitian matematika. Buku ini juga akan menarik bagi para penggemar matematika yang gemar menyelesaikan soal-soal matematika yang bersifat tak rutin, baik sebagai persiapan untuk menghadapi berbagai kompetisi matematika ataupun hanya sekedar untuk mengisi waktu luang. Buku ini disusun dengan prinsip belajar dengan mengerjakan (learning by doing). Pemecahan masalah matematis bukan sekedar teori yang harus dihafalkan namun hanya dapat dikuasai dengan cara membaca (dan mengerjakan ulang) contoh soal dan mengerjakan sebanyak mungkin soal latihan dengan tekun. Hal ini sejalan dengan prinsip heuristik yang memerlukan banyak pengalaman untuk dapat mempelajarinya.

SANATA DHARMA UNIVERSITY PRESS
Jl. Affandi, (Gejayan) Mrican, Yogyakarta 55281
Phone: (0274)513301; Ext.51513
Web: *sdupress.usd.ac.id*; E-mail: *publisher@usd.ac.id*

appti

ISBN 978-623-7379-78-2
9 786237 379782
matematika

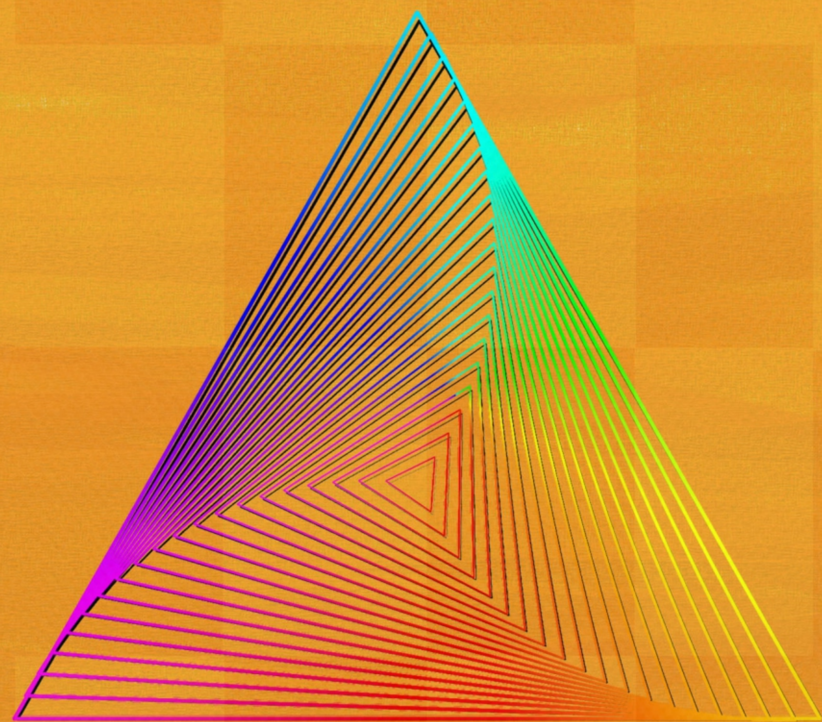
SDUP

PEMECAHAN MASALAH Matematis

Herry Pribawanto Suryawan

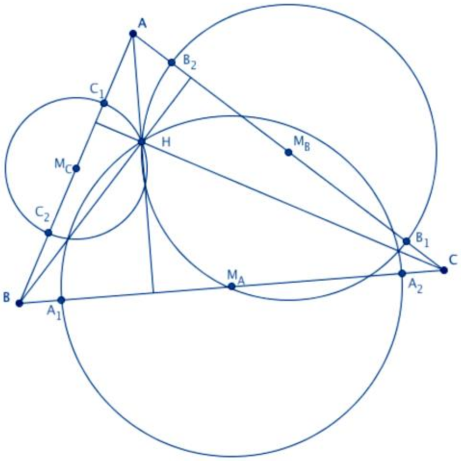
Herry Pribawanto Suryawan

PEMECAHAN MASALAH
Matematis



Pemecahan Masalah
Matematis

Herry Pribawanto Suryawan



Sanata Dharma University Press

Pemecahan Masalah
Matematis

Penulis
Herry Pribawanto Suryawan

Buku cetak:
ISBN 978-623-7379-78-2
EAN 9-786237-379782

Editor:
Frans Susilo, SJ.

Matematika
Cetakan pertama, Desember 2020
viii+217 hlm.; 15,5 x 23 cm.

Ilustrasi sampul & tata letak:
Thoms

PENERBIT:

SANATA DHARMA UNIVERSITY PRESS
Lantai 1 Gedung Perpustakaan USD
Jl. Affandi (Gejayan) Mrican,
Yogyakarta 55281
Telp. (0274) 513301, 515253;
Ext.1527/1513; Fax (0274) 562383
e-mail: publisher@usd.ac.id

Sanata Dharma University Press (SDUP) berlambangkan daun teratai coklat bersudut lima dengan sebuah obor yang menyala merah, sebuah buku dengan tulisan "Ad Maiorem Dei Gloriam" dengan tulisan Sanata Dharma University Press berwarna putih di dalamnya.

Adapun artinya sebagai berikut.
Teratai lambang kemuliaan dan sudut lima: Pancasila.
Obor: hidup dengan semangat yang menyala-nyala.
Buku yang terbuka: SDUP selalu dan siap berbagi ilmu pengetahuan. Teratai warna coklat: sikap dewasa dan matang.
"Ad Maiorem Dei Gloriam": demi kemuliaan Allah yang lebih besar.
Tulisan Sanata Dharma University Press berwarna putih: penerbit ini senantiasa membawa terang dan kebaikan bagi dunia ilmu pengetahuan.

Sanata Dharma University Press anggota APPTI
(Afiliasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia)
No. Anggota: 003.028.1.03.2018

Kata Pengantar Penerbit

Berbeda dari penerbit umum komersial, semua penerbit perguruan tinggi *(university press)* pada prinsipnya menjalankan *"noble industry,"* yaitu sebuah industri yang bertujuan memuliakan manusia dan meningkatkan kualitas dan martabat hidupnya. Orientasi penerbitannya lebih terarah pada keuntungan yang tidak terlihat *(intangible profit)* seperti dampak sebuah buku dalam meningkatkan citra perguruan tinggi daripada kepentingan komersial semata-mata. Fakta menunjukkan bahwa dalam dunia pemasaran, buku-buku ilmu pengetahuan tidak pernah selaris buku-buku populer.

Di dunia perguruan tinggi, terdapat dua segmen penulis buku, yakni penulis yang sudah mapan dan sudah punya nama *(established writer)* dan penulis pemula yang masih perlu mendapat dukungan (*promoted writer)*. Menghadapi kondisi seperti ini, diperlukan pendekatan yang memberikan motivasi tanpa menghilangkan kontrol terhadap kualitas buku yang diterbitkan. Salah satu wujud pendekatan yang memotivasi itu adalah dengan menyelenggarakan Program Hibah Penulisan Buku Ajar.

Buku yang hadir di hadapan para pembaca ini, yakni "*Pemecahan Masalah Matematis*", merupakan salah satu pemenang Program Hibah Penulisan Buku Ajar 2020 yang diselenggarakan oleh Sanata Dharma University Press (SDU Press). Program insentif yang sudah dilaksanakan oleh SDU Press sejak tahun 2015 ini bertujuan mendorong para dosen untuk menulis dan menerbitkan buku yang berkualitas. Setiap penulis didampingi oleh seseorang yang ahli di dalam bidang ilmu yang bersangkutan dan sudah berpengalaman dalam penulisan buku. Dengan proses seperti ini, kami berharap bahwa buku-buku ini dapat menjadi referensi tidak saja bagi kalangan internal, tetapi lebih dari itu, bisa di manfaatkan sebagai buku teks di seluruh Indonesia. Lagi pula, buku-buku ini diterbitkan pula versi e-Book melalui aplikasi "Google Play Books".

Kami mengucapkan terima kasih kepada penulis buku dan pendamping ahlinya atas kerja keras yang dilakukan selama proses penulisan yang waktunya sangat dibatasi ini. Ucapan terima kasih kami sampaikan juga kepada staf SDU Press yang ikut bekerja keras mewujudkan penerbitan buku ini. Kami berharap, buku ini mendapat sambutan yang luas di kalangan pembaca.

Yoseph Yapi Taum

Sanata Dharma University Press

Prakata

Seorang matematikawan besar dari Amerika Serikat bernama Paul Halmos mengatakan *the heart of mathematics is its problems*. Kalimat ini apabila kita renungkan sangatlah tepat untuk menggambarkan peranan masalah (dan penyelesaiannya) di dalam matematika. Matematika lahir dari kebutuhan manusia untuk memecahkan masalah yang dihadapinya dalam kehidupan sehari-hari. Dari keperluan yang sangat sederhana seperti menghitung banyaknya harta benda yang dimiliki lahirlah sistem bilangan. Di zaman modern seperti ini keamanan data baik dalam skala kecil maupun besar menjadi hal yang sangat penting. Permasalahan pengamanan data ini melahirkan kriptografi dan teori pengkodean. Di dalam bidang ekonomi dan keuangan para ahli memerlukan alat matematis yang dapat dipakai untuk mempelajari fenomena-fenomena acak seperti pergerakan harga saham dan perubahan nilai mata uang. Permasalahan ini mendorong berkembang pesatnya teori stokastik. Masih banyak contoh yang dapat diungkapkan untuk menggambarkan bahwa permasalahan baik yang muncul dari luar matematika maupun di dalam matematika itu sendiri merupakan bagian penting dari pengembangan matematika. Permasalahan adalah jantung dari matematika yang terus berdetak dan yang menjaga matematika tetap hidup, berkembang, dan dinamis.

Buku *Pemecahan Masalah Matematis* ini disusun untuk memberikan gambaran tentang berbagai strategi dasar pemecahan masalah matematis. Dengan melihat kurangnya buku-buku berbahasa Indonesia yang membahas pemecahan masalah matematis secara sistematis, penulis juga berharap bahwa buku ini dapat memberikan sedikit kontribusi untuk pengembangan matematika di Indonesia khususnya terkait pemecahan masalah matematis. Sebagian besar isi buku ini dapat dibaca oleh siswa sekolah menengah atas. Mahasiswa S1 matematika/pendidikan matematika tentu saja akan menemukan banyak manfaat dengan membaca buku ini. Berbagai teknik dan strategi yang dibahas di buku ini akan sering muncul dalam berbagai perkuliahan matematika dari tingkat dasar sampai tingkat lanjut. Buku ini juga sangat bermanfaat bagi mahasiswa S2 matematika/pendidikan matematika untuk memberikan dasar-dasar teknis melakukan penelitian matematika. Buku ini juga akan menarik bagi para penggemar matematika yang gemar menyelesaikan soal-soal matematika yang bersifat tak rutin, baik sebagai persiapan untuk menghadapi berbagai kompetisi matematika ataupun hanya sekedar untuk mengisi waktu luang. Buku ini disusun dengan prinsip belajar dengan mengerjakan (*learning by doing*). Pemecahan masalah matematis bukan sekedar teori yang harus dihafalkan namun hanya dapat dikuasai dengan cara membaca (dan mengerjakan ulang) contoh soal dan mengerjakan sebanyak mungkin soal latihan dengan tekun. Hal ini sejalan dengan prinsip heuristik yang memerlukan banyak pengalaman untuk dapat mempelajarinya.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya buku ini. Secara khusus penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada Romo Prof. Dr. Frans Susilo, SJ yang telah mendampingi dalam proses penulisan buku ini. Ucapan terima kasih juga diberikan kepada Marchelina yang telah membantu pembuatan gambar-gambar di dalam buku ini. Tak lupa penulis berterima kasih kepada Universitas Sanata Dharma yang telah memberikan bantuan melalui program hibah penerbitan buku teks dan kepada P2B Sanata Dharma University Press yang telah bersedia menerbitkan buku ini. Penulis menyadari bahwa buku ini jauh dari kata sempurna, baik dari segi isi, bahasa, maupun cara penulisan. Kritik dan saran yang membangun dapat disampaikan melalui alamat email herrypribs@usd.ac.id .

Yogyakarta, November 2020

Penulis

Daftar Isi

Bab 1 Pendahuluan

1.1 Pemecahan Masalah Matematis

Keith Devlin dalam bukunya "*Language of Mathematics: Making the Invisible Visible*" mendefinisikan matematika sebagai ilmu tentang pola (*science of patterns*) dan matematikawan adalah orang yang mempelajari pola-pola abstrak, pola numerik, pola bentuk, pola gerakan, pola perulangan kejadian acak, dan sebagainya. Pola-pola yang dipelajari tersebut dapat berupa obyek yang real ataupun imajinasi, visual ataupun mental, statis ataupun dinamis, kualitatif ataupun kuantitatif, serta bersifat murni-rekreasional ataupun aplikatif. Berbagai jenis pola melahirkan cabang-cabang matematika di antaranya:

- Aritmetika dan teori bilangan, yang mempelajari pola bilangan dan pencacahan.
- Geometri, yang mempelajari pola bentuk.
- Kalkulus, yang mempelajari pola gerakan dan laju perubahan.
- Logika, yang mempelajari pola berpikir dan bernalar.
- Teori Peluang, yang mempelajari pola kemungkinan dan kejadian acak.
- Topologi, yang mempelajari pola posisi dan hubungan kedekatan antar obyek,

Salah satu pertanyaan mendasar adalah mengapa matematika adalah sesuatu yang penting untuk diajarkan di sekolah? Ada tiga jawaban yang bisa diberikan:

1. Pertama, argumentasi praktisnya adalah matematika diperlukan dalam banyak hal. Sebagai contoh keterampilan mengenal dan bekerja dengan bilangan adalah prasyarat mutlak untuk hidup da-

lam dunia modern saat ini. Salah satu tujuan sekolah adalah untuk mempersiapkan siswa untuk profesinya di masa depan atau untuk studi lebih lanjut. Dalam konteks ini sejumlah pengetahuan matematis harus dikuasai siswa ketika mereka lulus dari sekolah atau kuliah.

2. Kedua, matematika adalah ilmu yang menarik dan menyenangkan. Pernyataan ini benar dalam banyak hal. Abstraksi logis adalah sebuah proses berpikir manusia yang mendasar yang telah mewarnai peradaban sejak waktu yang lama sekali. Banyak masalah matematis seringkali menarik untuk dirinya sendiri dan mencari penyelesaiannya adalah proses yang menyenangkan. Siswa haruslah diberikan kesempatan untuk mengalami kesenangan dalam belajar dan memecahkan masalah matematika. Kompetisi matematika dapat berperan besar dalam konteks ini. Jawaban kedua ini adalah argumentasi rekreasional.
3. Ketiga, sebagai argumentasi abstrak, dengan mempelajari matematika siswa dilatih dan dibangun cara berpikir rasional abstrak. Tentu saja, ilmu lain juga melatihkan hal yang serupa namun dunia abstrak dari matematika murni telah terbukti adalah salah satu area berlatih yang terbaik.

Dalam kehidupan sehari-hari kita bertemu dan memecahkan berbagai macam masalah. Ada yang berpendapat bahwa hidup adalah tentang memecahkan masalah. Kesalahan dalam memecahkan masalah dapat sangat berbahaya: jembatan yang tidak dikonstruksi dengan perhitungan yang akurat dapat roboh, pemasangan jaringan listrik yang tidak tepat dapat menimbulkan kerusakan, pemasangan rambu lalu lintas yang tidak cermat dapat menimbulkan kekacauan lalu lintas, pemberian obat dengan dosis yang tidak sesuai dapat membahayakan nyawa, dan sebagainya. Hal-hal ini adalah sedikit contoh di mana matematika dapat berkontribusi secara praktis. Matematika menuntun kita untuk berpikir logis, sistematis, dan kreatif dalam rangka menyelesaikan banyak masalah. Ketika siswa sudah menguasai pemecahan masalah matematis, maka mereka telah lebih siap untuk menghadapi berbagai masalah dalam kehidupannya.

Matematika dikenal juga sebagai sebuah ilmu sekuensial dan abstrak sehingga dalam mempelajarinya memerlukan fokus, ketekunan, dan ketelitian yang tinggi, baik dalam pemahaman konsep maupun dalam penyelesaian soal-soal. Berbagai macam soal di dalam matematika bersifat khas dan memerlukan strategi yang khusus pula untuk dapat menyelesaikannya. Strategi semacam ini akan dapat dipahami dan dikuasai secara utuh apabila seseorang terbiasa melatih diri dengan berbagai jenis dan tingkat kesulitan soal-soal matematika. Hal ini tidak lain adalah arti dari prinsip belajar dengan mengerjakan (*learning by doing*). Seorang ahli pemecahan masalah matematis dari Jerman bernama Arthur Engel mengatakan ”pemecahan masalah hanya dapat dipelajari dengan cara memecahkan masalah” (*problem solving can be learned only by solving problems*).

Sebelum membicarakan pemecahan masalah matematis lebih jauh kita harus terlebih dahulu memahami apa itu masalah di dalam konteks matematika. Kita perlu membedakan antara soal latihan (*exercise*) dan masalah (*problem*). Soal latihan adalah pertanyaan yang kita tahu bagaimana menyelesaikannya dengan segera. Apakah pengerjaan memerlukan waktu yang lama atau hasil pengerjaannya tidak benar, semata-mata bergantung pada keterampilan kita menggunakan teknik-teknik khusus. Kita tidak akan terlalu berpikir terlalu lama dalam pemilihan dan elaborasi teknik-teknik yang dipakai. Di lain pihak, sebuah masalah matematika adalah pertanyaan yang memerlukan lebih banyak pemikiran dan banyak koleksi teori dan teknik matematika yang kita miliki, sebelum pada akhirnya strategi yang benar untuk memecahkan pertanyaan tersebut dapat kita tentukan. Berikut ini diberikan beberapa contoh sederhana perbedaan soal latihan dan masalah.

Contoh 1.1.1. *Hitunglah* 7365^2 *tanpa menggunakan kalkulator.*

Penyelesaian. Ini adalah sebuah soal latihan karena kita tahu dengan pasti apa yang harus kita kerjakan, yakni tinggal mengalikan dengan cermat. Bagi siswa sekolah menengah kesalahan jawaban yang terjadi, lebih karena kurangnya ketelitian dan bukan karena ketidakpahaman konsep atau ketidaktahuan strategi menyelesaikan. ◇

Contoh 1.1.2. *Carilah nilai maksimum dari fungsi*

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$$

pada selang tertutup $[-1, 3]$.

Penyelesaian. Ini juga merupakan sebuah soal latihan. Teknik paling mudah adalah menggunakan konsep turunan fungsi. Prosedur mencari jawabannya juga cukup jelas, yakni menentukan nilai stasioner dari fungsi, dan selanjutnya menguji nilai ekstrem dari nilai stasioner tersebut. Terakhir kita harus periksa nilai-nilai fungsi di ujung-ujung selang dan membandingkan dengan hasil uji nilai ekstrem. ◆

Contoh 1.1.3. *Tuliskan*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}$$

sebagai sebuah pecahan dalam bentuk paling sederhana.

Penyelesaian. Soal ini terlihat sebagai sebuah soal latihan yang melelahkan walaupun jelas apa yang harus kita kerjakan, yakni menjumlahan suku demi suku. Namun demikian, penyelidikan kecil membawa kita pada hasil yang menarik. Dengan menjumlahan beberapa suku awal dan menyederhanakan hasilnya, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} &= \frac{3}{4} \\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} &= \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

yang membawa kita kepada sebuah dugaan (*conjecture*) bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Dalam proses memperoleh hasil terakhir ini kita telah melakukan pengamatan pola dan sekaligus perumuman. Sampai di sini kita berhadapan dengan masalah (*problem*): apakah dugaan ini benar? Jika benar, bagaimana membuktikannya? Apabila kita mempunyai cukup pengalaman, maka hal ini menjadi sebuah soal latihan yakni penerapan prinsip induksi matematika. Lain halnya jika kita kurang memiliki pengalaman, maka pertanyaan tersebut menjadi masalah dan bukan lagi soal latihan. Kita harus memerlukan waktu lebih lama untuk memahami pertanyaan, mencoba berbagai cara penyelesaian yang masuk akal, dan melakukan evaluasi. ◆

Pemecahan masalah juga berkaitan dengan kemampuan kita menggunakan teori/rumus yang sudah kita pelajari untuk berbagai masalah sekaligus berpikir kreatif untuk mempermudah penyelesaian masalah.

Contoh 1.1.4. *Hitunglah nilai dari* $3999 \cdot 4001$.

Penyelesaian. Banyak orang yang tidak sadar bahwa dia telah mempelajari banyak teori/rumus akan mengerjakan soal ini seperti ketika dia masih siswa sekolah dasar, yakni menghitung langsung. Tentu saja ini tidak salah tetapi membutuhkan waktu yang lama dan ketelitian yang tinggi. Sebagian orang lain akan langsung menghitung dengan kalkulator tanpa berpikir proses ataupun cara dan hanya mementingkan hasil akhirnya. Dengan sedikit pengamatan membawa kita pada

$$\begin{aligned} 3999 \cdot 4001 &= (4000 - 1) \cdot (4000 + 1) \\ &= 4000^2 - 1^2 \\ &= 16000000 - 1 \\ &= 15999999. \end{aligned}$$

Di sini kita telah menggunakan rumus selisih dua kuadrat $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. ◆

Pemecahan masalah matematis telah lama dipandang sebagai salah satu aspek penting dari matematika. Pemecahan masalah juga mempunyai arti penting di dalam pembelajaran matematika. Salah satu tujuan utama proses belajar dan mengajar matematika adalah untuk menumbuhkembangkan kemampuan untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika yang kompleks. Dalam arti tertentu, matematika bahkan diidentikkan dengan memecahkan masalah. Sejak tahun 1980-an di Amerika Serikat pemecahan masalah bahkan menjadi bagian penting dari pembelajaran matematika di sekolah. *The National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) telah merekomendasikan pemecahan masalah menjadi fokus dalam pembelajaran di sekolah. Proses belajar mengajar matematika seharusnya dirancang sehingga siswa mengalami matematika sebagai pemecahan masalah. Ada beberapa latar belakang dari rekomendasi NCTM tersebut:

1. Pemecahan masalah adalah sebuah bagian besar dari matematika, mulai dari menyelesaikan soal cerita, mencari pola, menafsirkan sebuah gambar atau ilustrasi, membuktikan teorema, dan sebagainya.
2. Matematika mempunyai banyak penerapan di dalam kehidupan sehari-hari dan seringkali penerapan-penerapan tersebut memberikan masalah yang menarik secara matematis.
3. Pemecahan masalah dapat membangkitkan ketertarikan dan rasa ingin tahu dari siswa.
4. Pemecahan masalah dapat menjadi aktivitas yang sangat menyenangkan. Banyak dari kita mengerjakan masalah matematika sebagai sarana rekreasi dan mengasah otak.
5. Pemecahan masalah dapat membantu siswa untuk mengembangkan seni pemecahan masalah. Seni ini sangatlah esensial untuk memahami matematika secara utuh sekaligus mengapresiasi matematika.

Di dalam matematika dikenal seorang tokoh pemecahan masalah yang termasyur yaitu George Polya. Dia berpendapat bahwa masalah matematika tidak selalu rumit dan spektakuler, seringkali tampak sederhana dan kurang menantang. Namun demikian apabila masalah tersebut memancing rasa ingin tahu kita dan membawa kita untuk berpikir secara kreatif dan apabila kita berhasil menyelesaikan dengan berbagai alat serta konsep yang sudah kita punya, maka kita akan mengalami pembelajaran yang bermakna sekaligus menikmati keberhasilan memecahkan persoalan. Pengalaman-pengalaman demikian akan memberikan dampak positif pada mental dan cara berpikir kita seumur hidup.

Di dalam karya monumentalnya yang berjudul *How to Solve It*, Polya mengidentifikasi langkah-langkah umum yang harus dilakukan oleh setiap orang dalam proses pemecahan masalah matematika:

1. Memahami masalah (*understand the problem*).
2. Menyusun rencana pemecahan masalah (*devise a plan*).
3. Melaksanakan rencana (*implement the plan*).
4. Mengkaji ulang jawaban (*look back*).

Keempat tahapan langkah Polya ini ternyata diterima secara luas tidak hanya di matematika namun juga di berbagai bidang ilmu lain.

Di Amerika Serikat, penelitian terkait pemecahan masalah matematis telah dimulai beberapa dekade yang lampau. Salah satunya adalah studi dari J. W. Dodson dan S. K. Hollander pada tahun 1970-an yang mengatakan bahwa kemampuan pemecahan masalah yang harus ditumbuhkan meliputi:

1. Kemampuan memahami konsep dan terminologi matematis.
2. Kemampuan untuk mengidentifikasi kesamaan, perbedaan, dan analogi.
3. Kemampuan untuk menentukan bagian terpenting dan memilih prosedur yang benar.
4. Kemampuan untuk memisahkan hal-hal yang tidak berkaitan.
5. Kemampuan untuk melakukan perkiraan dan menganalisis.
6. Kemampuan melakukan visualisasi dan interpretasi terhadap besaran dan ruang.
7. Kemampuan untuk melakukan perumuman berdasarkan beberapa contoh.
8. Kemampuan untuk memilih dan mengganti metode penyelesaian.
9. Kemampuan untuk memunculkan rasa percaya diri dan kecintaan terhadap materi yang dipelajari.

Lebih jauh, untuk dapat menumbuhkembangkan kemampuan di atas, Dodson dan Hollander memberikan beberapa saran sebagai berikut:

1. Perlengkapi siswa dengan berbagai ragam strategi yang dapat digunakan untuk bermacam-macam soal.
2. Berikan waktu yang cukup kepada siswa untuk mencoba mema-

hami dan mengerjakan soal secara mandiri.

3. Bimbing siswa untuk mengerjakan soal dengan cara lain (berpikir kreatif dan alternatif).
4. Setelah jawaban soal diperoleh, ajaklah siswa untuk melakukan refleksi yang meliputi mencari kemungkinan lain, menuliskan dengan bahasa sendiri, mencari alternatif jawaban yang lebih efektif dan efisien.
5. Latihlah siswa untuk bersikap tangguh. Jika ada materi/soal yang sulit, jangan terbiasa melupakan atau menghindari. Berilah waktu lebih untuk mengulang dan mengerjakan soal lebih banyak dan bervariasi. Biasakan mengerjakan soal dari yang mudah ke yang sukar.
6. Tanamkan sifat fleksibel dalam gaya belajar siswa dan dalam mengerjakan soal. Jangan paksa siswa untuk memakai notasi, kata-kata, kalimat, metode dan rumus secara kaku.
7. Ajarkan sikap berinisiatif dan kreatif dalam mengerjakan soal.

1.2 Strategi Pemecahan Masalah Matematis

Masalah matematika memerlukan cara-cara khusus untuk dapat menyelesaikannya. Selain pemahaman akan teori umum diperlukan juga koleksi dan penguasaan strategi khusus. Sebagai contoh kita diminta mencari turunan ke-2020 dari fungsi

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Kita dengan mudah mengenali bahwa ini adalah masalah matematika yang terkait dengan teori kalkulus diferensial, yakni mencari turunan fungsi. Tetapi tanpa mengenal strategi yang tepat (dalam hal ini menemukan pola), maka proses pemecahan soal tersebut menjadi tidak mudah, mekanistis, dan kurang menarik.

Strategi di dalam pemecahan masalah matematis seringkali disebut sebagai heuristik (*heuristic*, *heuretic*, *ars inveniendi*). Kata heuristik berasal dari bahasa Yunani kuno dan mempunyai akar kata yang sama dengan *eureka*. Polya menjelaskan heuristik sebagai berikut

Heuristics deals with solving tasks. Its specific goals include highlighting in general terms the reasons for selecting those moments in a problem the examination of which could help us find a solution. The aim of heuristic is to study the methods and rules of discovery and invention. Heuristic, as an adjective, means "serving to discover".

Alan Schoenfeld mengusulkan tiga tahap pemecahan masalah:

1. **Analisis**. Heuristik yang sering dipakai pada tahap ini adalah:
   (a) Jika memungkinkan, buatlah gambar/diagram dari masalah yang dihadapi.
   (b) Periksa kasus-kasus khusus:
      i. Pilih dan hitunglah sebuah nilai khusus untuk lebih memahami soal.
      ii. Cek nilai-nilai ekstrem/limit untuk melihat jangkauan yang mungkin.
      iii. Tetapkan parameter bilangan asli $1, 2, 3, \ldots$ dan perhatikan apakah ada pola induktif.
   (c) Cobalah untuk menyederhanakan masalah dengan cara:
      i. memanfaatkan sifat simetri dan sifat invarian, atau
      ii. berargumentasi dengan metode 'tanpa mengurangi keumuman bukti' (termasuk melakukan penskalaan).
2. **Eksplorasi**. Tahap ini adalah jantung dari strategi pemecahan masalah menurut Schoenfeld. Heuristik yang sering dipakai pada tahap ini adalah:
   (a) Membentuk masalah yang ekivalen:
      i. Mengganti kondisi atau syarat pada soal dengan kondisi atau syarat lain yang setara.
      ii. Mengkombinasikan ulang unsur-unsur pada soal dengan cara yang berbeda.
      iii. Menambahkan unsur baru yang dipandang membantu (misalnya variabel *dummy*).
      iv. Memformulasi kembali soal dengan cara:
         A. Mengubah cara pandang atau notasi.
         B. Membuktikan dengan cara kontraposisi atau kon-

tradiksi.

C. Mengasumsikan kita mempunyai penyelesaian dan kita tentukan sifat-sifat apa yang harus dipenuhi.

(b) Mempertimbangkan masalah yang sedikit dimodifikasi dari masalah semula:

i. Memilih subtujuan dari tujuan utama.

ii. Mencoba memperlemah atau bahkan menghilangkan kondisi/syarat pada soal dan setelahnya coba gunakan lagi kondisi/syarat tersebut.

iii. Dekomposisi daerah asal dari masalah dan kerjakan kasus per kasus.

(c) Mempertimbangkan masalah yang diperluas:

i. Bentuk masalah yang analog dengan jumlah variabel yang lebih sedikit.

ii. Tetapkan semua, kecuali satu, variabel sebagai konstanta untuk melihat pengaruh dari variabel-variabel tersebut.

iii. Ingat dan pahami kembali soal lain yang berkaitan yang memiliki kesamaan/kemiripan:

A. bentuk.

B. kondisi/syarat.

C. kesimpulan.

3. **Verifikasi**. Heuristik yang sering dipakai pada tahap ini adalah:

(a) Apakah penyelesaian anda memenuhi beberapa uji khusus berikut?

i. Apakah semua kondisi esensial telah digunakan?

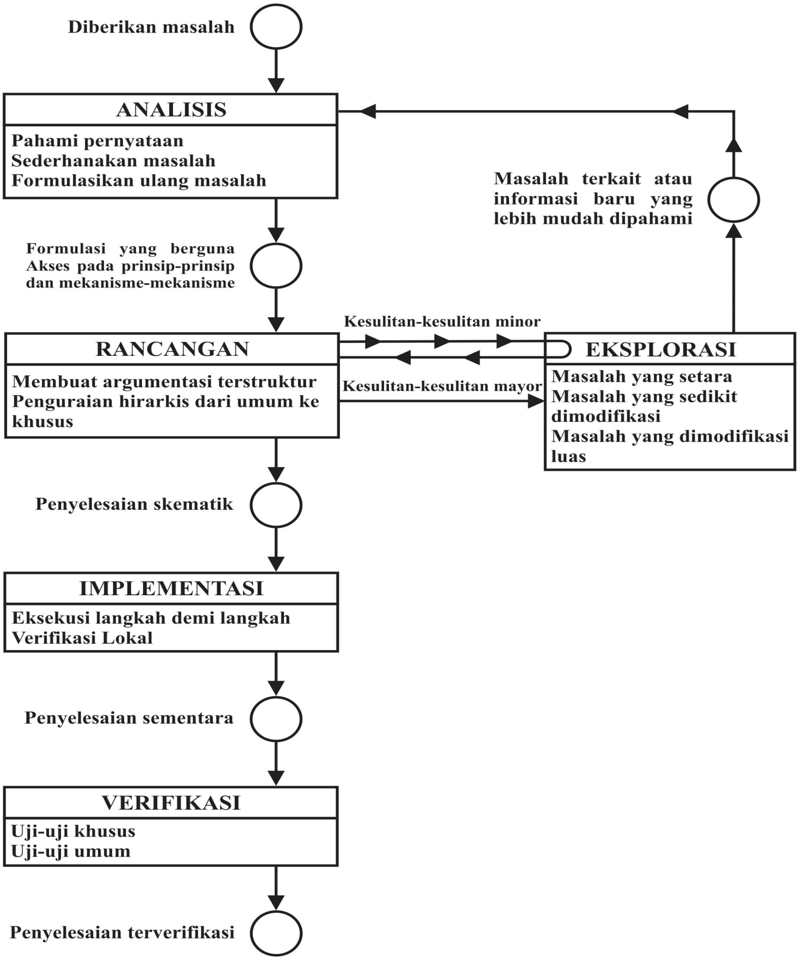
ii. Apakah jawaban anda, secara logis/masuk akal, cocok dengan prediksi dan estimasi?

iii. Apakah kesimpulan anda konsisten dengan sifat simetri, sifat invarian, analisis dimensi, atau penskalaan?

(b) Apakah penyelesaian anda memenuhi beberapa uji umum berikut?

i. Apakah penyelesaian tersebut dapat diperoleh dengan jalan atau metode lain?

ii. Apakah penyelesaian tersebut valid jika diterapkan pada kasus-kasus khusus?
iii. Apakah penyelesaian tersebut dapat direduksi menjadi hasil yang telah diketahui sebelumnya?
iv. Apakah penyelesaian tersebut dapat digunakan untuk membangun sebuah hasil yang telah ada?



Gambar 1. Diagram pemecahan masalah matematis menurut Schoenfeld.

Sementara itu empat langkah heuristik Polya dapat dijabarkan lebih lanjut ke dalam hal-hal operasional sebagai berikut

1. **Memahami masalah**

- Pertama, kita harus memahami kalimat demi kalimat dan kata demi kata yang muncul dalam masalah yang diberikan.
- Apa yang tidak diketahui? Apa yang diketahui? Apa syarat atau kondisi yang diberikan?
- Apakah mungkin syarat tersebut dipenuhi? Apakah syarat tersebut cukup untuk menentukan hal yang tidak diketahui? ataukah tidak cukup? ataukah berlebih (*redundant*)? ataukah bertentangan (*contradictory*)?
- Buatlah gambar atau diagram. Pilihlah notasi yang sesuai.
- Pisahkan dan tuliskan secara eksplisit berbagai bagian dari syarat.

2. **Menyusun rencana** (*jantung dari langkah pemecahan masalah menurut Polya*)
    - Kedua, carilah hubungan antara data dan fakta yang diketahui dengan hal yang tidak diketahui. Kita mungkin memerlukan masalah-masalah bantuan jika hubungan tersebut tidak dapat langsung ditemukan. Pada akhirnya kita akan memperoleh ide untuk memecahkan masalah.
    - Apakah kita pernah melihat masalah ini sebelumnya? atau mungkin kita pernah melihat masalah ini dalam bentuk yang sedikit berbeda?
    - Apakah kita mengetahui masalah lain yang berhubungan? Apakah kita mengetahui satu atau lebih teorema yang mungkin berguna untuk menyelesaikan masalah?
    - Perhatikan lebih cermat hal-hal yang tidak diketahui. Ingat kembali masalah-masalah terkenal dengan pertanyaan atau hal yang tidak diketahui yang sama atau mungkin serupa.
    - Misalkan kita mempunyai sebuah soal beserta penyelesaiannya yang berkaitan dengan masalah yang kita hadapi. Apakah kita bisa menggunakan soal ini? Apakah kita bisa menggunakan jawaban soal ini? Apakah kita bisa menggunakan metode pada soal ini? Apakah kita perlu memodifikasi soal ini agar digunakan untuk membantu memecahkan masalah kita?

- Apakah kita dapat menuliskan ulang masalah kita, mungkin dalam beberapa cara?
- Jika kita tidak dapat menyelesaikan masalah yang diberikan, maka salah satu strategi penting adalah kita mencoba dahulu menyelesaikan masalah-masalah lain yang masih berhubungan. Apakah kita menemukan masalah lain yang berkaitan dan sekaligus mudah diselesaikan? Masalah yang lebih umum? Masalah yang lebih khusus? Masalah yang serupa? Apakah kita dapat menyelesaikan sebagian dari masalah? Dengan mengasumsikan sebagian dari syarat yang diberikan apa yang kita peroleh? Apakah kita dapat memodifikasi syarat dan fakta yang ada?
- Apakah semua hal yang diketahui dan fakta-fakta umum telah kita gunakan? Apakah semua syarat yang diberikan telah kita pakai? Apakah kita dengan cermat telah memperhatikan semua konsep matematis yang muncul di dalam masalah?

3. **Melaksanakan rencana**
    - Ketiga, kerjakan rencana penyelesaian masalah yang sudah kita susun.
    - Implementasikan semua langkah rencana yang telah disusun pada langkah kedua di atas. Periksa setiap langkah penyelesaian yang kita buat. Apakah kita bisa melihat dengan jelas bahwa setiap langkah yang kita kerjakan benar? ataukah ada hal yang meragukan dan kita bisa membuktikan bahwa ada langkah yang salah?
4. **Mengkaji ulang jawaban**
    - Keempat, periksalah kembali jawaban yang telah diperoleh.
    - Apakah kita bisa memverifikasi jawaban yang diperoleh?
    - Periksa kembali setiap argumentasi yang kita buat dalam menyelesaikan masalah.
    - Apakah kita dapat mendapatkan jawaban dengan cara lain?
    - Apakah kita dapat menggunakan jawaban atau metode penyelesaian kita untuk permasalahan yang lain?

- Apakah jawaban kita memberi inspirasi untuk perumuman masalah? atau abstraksi masalah?

Seorang ahli pendidikan bernama M. G. Wheeler juga mengusulkan beberapa heuristik dalam pemecahan masalah matematis:

1. Membuat tabel.
2. Membuat gambar.
3. Menduga, memeriksa, dan memperbaiki.
4. Mencari pola.
5. Menyatakan kembali permasalahan dalam cara lain.
6. Menggunakan penalaran.
7. Menggunakan variabel.
8. Menggunakan persamaan.
9. Menyederhanakan permasalahan.
10. Menghilangkan situasi yang tidak mungkin.
11. Bekerja mundur.
12. Menyusun model.
13. Menggunakan algoritma.
14. Menggunakan penalaran tidak langsung.
15. Menggunakan sifat-sifat bilangan.
16. Membagi ke dalam submasalah atau kasus-kasus.
17. Memvalidasi semua kemungkinan.
18. Menggunakan rumus.
19. Menyelesaikan masalah yang setara.
20. Menggunakan simetri.
21. Menggunakan data dan fakta yang ada untuk mendapatkan informasi baru.

Sementara itu Loren C. Larson merangkum strategi pemecahan masalah matematis menjadi 12 heuristik sebagai berikut:

1. Mencari pola.
2. Membuat gambar.
3. Membentuk masalah yang setara.
4. Memodifikasi masalah.
5. Memilih notasi yang tepat

6. Mempergunakan simetri.
7. Membagi ke dalam kasus-kasus.
8. Mengerjakan secara mundur.
9. Menggunakan bukti kontradiksi.
10. Memperhatikan paritas.
11. Melihat kasus ekstrem
12. Memperumum

Pada bab tiga kita akan membahas lebih jauh beberapa heuristik pemecahan masalah menurut Larson. Sebelumnya di bab 2 kita akan mempelajari metode pembuktian sebagai alat utama dalam pemecahan masalah matematis. Metode pembuktian terbagi ke dalam pembuktian langsung (termasuk di dalamnya prinsip induksi matematika, prinsip sarang merpati, dan prinsip invarian) dan pembuktian taklangsung (metode kontraposisi dan metode kontradiksi).

1.3 Beberapa Istilah Matematika

Dalam matematika **pernyataan** (*statement*) adalah sebuah kalimat yang dapat bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya. Beberapa istilah yang seringkali muncul di dalam matematika adalah sebagai berikut.

1. **Definisi** : pernyataan yang merupakan penjelasan dari makna matematis dari suatu kata/istilah.
2. **Teorema** : pernyataan yang dibuktikan bernilai benar sekaligus mempunyai makna / interpretasi / peranan yang menarik dan penting.
3. **Proposisi** : pernyataan yang dibuktikan bernilai benar tetapi tidak begitu penting dibandingkan dengan teorema.
4. **Lema** : pernyataan yang dibuktikan bernilai benar yang biasanya digunakan untuk membuktikan pernyataan benar lainnya (teorema atau proposisi). Sering disebut sebagai teorema kecil.
5. **Akibat** : pernyataan yang dibuktikan bernilai benar yang merupakan konsekuensi langsung (dapat dibuktikan dengan mudah) dari teorema atau proposisi.
6. **Bukti** : penjabaran dan argumentasi matematis yang menjelaskan

kebenaran suatu pernyataan (teorema, proposisi, lema, atau akibat).

7. **Dugaan** : pernyataan yang diyakini bernilai benar namun belum mempunyai penjelasan yang cukup dan sah secara matematis mengapa pernyataan itu benar.
8. **Aksioma** : asumsi dasar dari suatu situasi atau kerangka berpikir matematis. Pernyataan yang kita asumsikan benar tanpa perlu harus dibuktikan.

Perlu diperhatikan bahwa sebagian besar pernyataan di dalam matematika (teorema, proposisi, lema, akibat, dugaan) adalah berbentuk kalimat implikasi (jika ..., maka ...), sebagai contoh:

1. Jika x dan y adalah dua bilangan real dan berlaku $xy = 0$, maka $x = 0$ atau $y = 0$.
2. Jika $0 < x < 1$, maka $0 < x^2 < x < 1$.
3. Jika a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat dengan a habis membagi b dan a habis membagi c, maka a habis membagi $b + c$.
4. Jika fungsi f terdiferensial di titik a, maka f kontinu di a.
5. Jika V adalah sebuah ruang vektor atas lapangan F, maka setiap subhimpunan bebas linear B dari V termuat di dalam suatu basis dari V.

Terdapat juga pernyataan-pernyataan matematika yang tidak berbentuk implikasi, sebagai contoh:

1. Terdapat takhingga banyak bilangan prima.
2. Terdapat fungsi yang kontinu di setiap bilangan real tetapi tidak terdiferensial di setiap bilangan real.
3. Setiap bilangan prima adalah bilangan asli.
4. Jumlah sudut dalam sebarang segitiga adalah 180^o.
5. Diberikan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan $D \subset V$. Ketiga pernyataan berikut ekivalen:
   (a) D adalah himpunan pembangun minimal dari V.
   (b) D adalah himpunan bebas linear maksimal di dalam V.
   (c) D adalah himpunan pembangun dari V yang bebas linear.
6. Semua penyelesaian bulat positif dari persamaan $a^2 + b^2 = c^2$

dapat diperoleh melalui rumus $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$, dan $c = u^2 + v^2$, dengan u dan v adalah sebarang dua bilangan asli yang relatif prima.

7. Persamaan $x^n + y^n = z^n$ tidak mempunyai penyelesaian bulat positif untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Sebagai contoh, pernyataan terakhir dapat ditulis ulang dalam beberapa bentuk, misalnya:

1. Untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$ tidak terdapat bilangan bulat positif x, y, z yang memenuhi persamaan $x^n + y^n = z^n$.
2. Jika n adalah bilangan asli dengan $n \geq 3$ dan x, y, z adalah bilangan bulat yang memenuhi $x^n + y^n = z^n$, maka paling sedikit satu dari x, y, dan z adalah nol.

Terakhir kita ingat beberapa notasi untuk himpunan bilangan:

- himpunan semua bilangan asli

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

- himpunan semua bilangan bulat

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

  Himpunan semua bilangan bulat taknegatif sering disebut himpunan semua bilangan cacah.
- himpunan semua bilangan rasional

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } b \neq 0\right\}.$$

- himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$, yakni sebuah himpunan bilangan yang memuat $\mathbb{Q}$ dan memuat semua bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk desimal.
- himpunan semua bilangan kompleks

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

1.4 Belajar melalui Soal

Menurut Loren C. Larson sebagaimana tersirat dalam judul bukunya "*Problem Solving through Problems*" cara paling efektif untuk menguasai pemecahan masalah matematis adalah melalui masalah matematika, yakni kita harus banyak mengerjakan soal. George Polya juga menekankan pentingnya mengerjakan soal dalam rangka menguasai pemecahan masalah melalui ungkapannya

> *If you wish to learn swimming, you have to go into the water.*

Seorang matematikawan besar dari Amerika serikat Paul Halmos juga menggarisbawahi bahwa soal dan pemecahan masalah menjadi salah satu bagian terpenting dalam matematika:

> *The heart of mathematics is its problems.*

Sebagai penutup, kita berikan beberapa prinsip yang harus senantiasa kita pegang dalam pemecahan masalah matematika:

1. Pemecahan masalah matematika dapat diajarkan dan dapat dipelajari. Secara umum, matematika bukanlah ilmu yang eksklusif untuk orang-orang jenius. Semua orang bisa mempelajari matematika asalkan ada kemauan dan ketekunan.
2. Kesuksesan dalam pemecahan masalah matematika sangat bergantung kepada faktor psikologis seperti kepercayaan diri, konsentrasi, dan semangat pantang menyerah.
3. Intuisi dan pengalaman memiliki peranan yang sama pentingnya dengan argumentasi rigor-formal.
4. Aspek nonpsikologis dalam pemecahan masalah matematika merupakan perpaduan dari tiga hal:
   - **Strategi**: ide matematis dan psikologis untuk memulai dan memahami masalah.
   - **Taktik**: berbagai metode matematis yang dapat digunakan untuk banyak situasi yang berbeda.
   - **Alat**: teknik-teknik yang lebih terfokus dan trik-trik untuk situasi spesifik.

Selanjutnya kita akan mempelajari pemecahan masalah matematis melalui beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya. Pemecahan masalah matematis memang tidak identik dengan mempelajari masalah yang diselesaikan (*solved problems*). Menghafal tipe soal dan cara menjawabnya bukanlah hal yang disarankan di dalam mempelajari matematika. Sebaliknya, pembaca diharapkan sungguh memahami setiap langkah, strategi, taktik, dan alat yang digunakan dalam penyelesaian setiap soal. Refleksi akan strategi baru dan hal esensial yang didapat dari proses menyelesaikan masalah sangatlah penting dilakukan serta akan menumbuhkan keterampilan memecahkan masalah.

Contoh soal pertama berikut ini dapat diselesaikan dengan menggunakan argumentasi logika sederhana.

Contoh 1.4.1. *Empat orang tersangka dari sebuah kasus kriminal membuat pernyataan-pernyataan berikut kepada polisi.*

- ***Agus**: Candra yang melakukannya.*
- ***Budi**: Saya tidak melakukannya.*
- ***Candra**: Dewa yang melakukannya.*
- ***Dewa**: Candra berbohong ketika mengatakan saya yang melakukannya.*

1. *Apabila diketahui tepat satu dari keempat pernyataan di atas yang benar, tentukan pelakunya.*
2. *Apabila diketahui tepat satu dari keempat pernyataan di atas yang salah, tentukan pelakunya.*

Penyelesaian. Dari keterangan di atas kita dapat simpulkan:

1. Jika pelakunya adalah Agus, maka pernyataan Agus salah, pernyataan Budi benar, pernyataan Candra salah, dan pernyataan Dewa benar.
2. Jika pelakunya adalah Budi, maka pernyataan Agus salah, pernyataan Budi salah, pernyataan Candra salah, dan pernyataan Dewa benar.
3. Jika pelakunya adalah Candra, maka pernyataan Agus benar, pernyataan Budi benar, pernyataan Candra salah, dan pernyataan

Dewa benar.

4. Jika pelakunya adalah Dewa, maka pernyataan Agus salah, pernyataan Budi benar, pernyataan Candra benar, dan pernyataan Dewa salah.

Dengan demikian, jika diketahui tepat satu dari keempat pernyataan tersangka benar, maka pelakunya adalah Budi sementara jika diketahui tepat satu dari keempat pernyataan tersangka salah, maka pelakunya adalah Candra. ◆

Contoh 1.4.2. *Apabila diketahui* $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = 0$, *maka tentukan nilai dari*

$$x^{2017} + x^{2018} + x^{2019} + x^{2020} + x^{2021} + x^{2022}.$$

Penyelesaian. Karena $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = 0$, maka

$$(x - 1)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) = 0.$$

Kita memperoleh $x^7 - 1 = 0$, yang berarti $x^7 = 1$. Jadi,

$$\begin{aligned}
&x^{2017} + x^{2018} + x^{2019} + x^{2020} + x^{2021} + x^{2022} \\
&= x^{2016}\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) \\
&= \left(x^7\right)^{288}(-1) \\
&= 1^{288}(-1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$ ◆

Contoh 1.4.3. *Tunjukkan bahwa hasilkali empat bilangan bulat positif yang berurutan ditambah 1 merupakan bilangan kuadrat sempurna.*

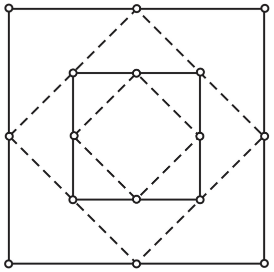
Penyelesaian. Kita misalkan keempat bilangan bulat positif yang berurutan tersebut adalah n, $n + 1$, $n + 2$, dan $n + 3$. Selanjutnya kita memperoleh

$$N = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$$

$$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$$
$$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$$
$$= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2 . \ \blacklozenge$$

Contoh 1.4.4. *Sebuah persegi mempunyai panjang sisi a. Titik-titik tengah dari sisi-sisi persegi dihubungkan dan diperoleh persegi yang lebih kecil di dalam persegi semula. Proses ini dilakukan terus menerus. Hitunglah jumlah keliling semua persegi yang terbentuk dengan cara ini.*

Penyelesaian. Sketsa untuk soal di atas adalah



Gambar 2

Sisi-sisi persegi berwarna hitam membentuk barisan geometri dengan suku awal a dan rasio $\frac{1}{2}$:

$$a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \frac{a}{16}, \ldots$$

Sisi-sisi persegi berwarna hitam putus-putus juga membentuk barisan geometri dengan rasio $\frac{1}{2}$ tetapi dengan suku awal $\frac{a\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{8}, \ldots$$

Dari sini diperoleh jumlah keliling persegi yang diminta:

$$K = 4\left(a + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{8} + \cdots + \frac{a}{2^{n-1}} + \frac{a\sqrt{2}}{2^{n-1}} + \cdots\right)$$

$$= 4a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) + 4a\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

$$= \left(4a + 2a\sqrt{2}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4a\left(2 + \sqrt{2}\right). \ \blacklozenge$$

Contoh 1.4.5. *Carilah akar-akar dari persamaan kuadrat*

$$x^2 + x - 1111111122222222 = 0.$$

Penyelesaian. Persamaan kuadrat di atas dapat diselesaikan dengan pemfaktoran atau dengan rumus mencari akar-akar persamaan kuadrat. Akan tetapi konstanta yang muncul adalah bilangan yang sangat besar sehingga menyebabkan perhitungan menjadi rumit. Di sini kita akan menggunakan cara kreatif untuk menyelesaikan soal ini. Kita tulis konstanta dalam bentuk basis 10:

$$\begin{aligned}
x^2 + x &= 1111111122222222 \\
x(x+1) &= 1111111122222222 \\
&= 1 \cdot 10^{16} + 1 \cdot 10^{15} + \cdots + 1 \cdot 10^{10} + 1 \cdot 10^9 \\
&\quad + 2\left(10^8 + 10^7 + \cdots + 10^2 + 10 + 1\right) \\
&= \left(1 \cdot 10^{16} + 1 \cdot 10^{15} + \cdots + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 1\right) \\
&\quad + \left(10^8 + 10^7 + \cdots + 10^2 + 10 + 1\right) \\
&= \frac{10^{16} - 1}{10 - 1} + \frac{10^8 - 1}{10 - 1} \\
&= \frac{\left(10^8 - 1\right)\left(10^8 + 1\right)}{3 \cdot 3} + \frac{10^8 - 1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{10^8 - 1}{3}\left(\frac{10^8 + 1 + 1}{3}\right) \\
&= \frac{10^8 - 1}{3}\left(\frac{10^8 - 1}{3} + 1\right)
\end{aligned}$$

Dari sini kita memperoleh salah satu akar dari persamaan kuadrat adalah

$$x_1 = \frac{10^8 - 1}{3} = 33333333.$$

Misalkan akar lainnya adalah x_2 maka berlaku $x_1 + x_2 = -1$ yang memberikan

$$x_2 = -\frac{10^8 - 1}{3} - 1 = -33333334. \ \blacklozenge$$

Contoh 1.4.6. *Buktikan bahwa bilangan real*

$$\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$$

adalah bilangan rasional.

Penyelesaian. Pertama, karena bentuk yang muncul di soal cukup rumit maka untuk menyederhanakan kita gunakan notasi

$$a = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}.$$

Bentuk terakhir ini ekivalen dengan

$$a - \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 0.$$

Ide selanjutnya adalah menghilangkan akar pangkat tiga dengan jalan mengambil pangkat tiga kedua ruas, yaitu

$$a^3 - \left(45 + 29\sqrt{2}\right) - \left(45 - 29\sqrt{2}\right) = 3a\sqrt[3]{\left(45 + 29\sqrt{2}\right)\left(45 - 29\sqrt{2}\right)}.$$

Penyederhanaan bentuk terakhir memberikan

$$a^3 - 21a - 90 = 0 \iff (a - 6)(a^2 + 6a + 15) = 0.$$

Jadi, $a = 6$ atau $a^2 + 6a + 15 = 0$. Persamaan kuadrat terakhir ini tidak memiliki akar real. Jadi, kesimpulan kita adalah

$$\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6 \in \mathbb{Q}. \ \blacklozenge$$

Contoh 1.4.7. *Tentukan nilai maksimum dari fungsi*

$$f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}.$$

Penyelesaian. Fungsi f terdiri dari dua akar dari fungsi kuadrat, sehingga cukup sulit untuk mengerjakan soal ini tanpa menyederhanakan terlebih dahulu. Salah satu langkah yang sering dilakukan apabila bertemu dengan bentuk kuadrat adalah melengkapkan kuadrat sempurna:

$$8x - x^2 = 16 - (x-4)^2 \quad \text{dan} \quad 14x - x^2 - 48 = 1 - (x-7)^2.$$

Supaya x berada di dalam daerah asal (domain) dari f maka haruslah

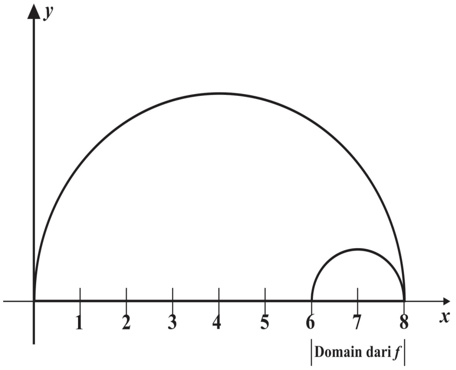
$$0 \le 16 - (x-4)^2, \quad \text{yakni } \ 0 \le x \le 8$$

dan

$$0 \le 1 - (x-7)^2, \quad \text{yakni } \ 6 \le x \le 8.$$

Jadi, kita cukup memperhatikan nilai-nilai x yang berada di selang tertutup $[6, 8]$ dan untuk nilai-nilai x tersebut berlaku

$$f(x) = \sqrt{16 - (x-4)^2} - \sqrt{1 - (x-7)^2}.$$



Gambar 3

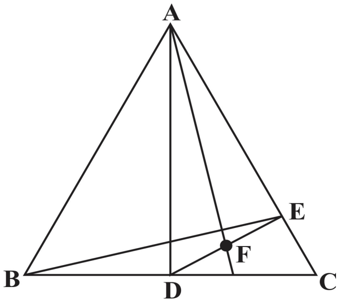
Terlihat dari gambar di atas, grafik dari $y = \sqrt{16 - (x-4)^2}$ adalah setengah lingkaran di kuadran pertama dengan titik pusat $(4, 0)$ dan jari-jari 4. Grafik dari $y = \sqrt{1 - (x-7)^2}$ adalah setengah lingkaran di kuadran pertama dengan titik pusat $(7, 0)$ dan jari-jari 1. Cukup jelas bahwa nilai x di dalam $[6,8]$ yang memaksimumkan $f(x)$ adalah $x = 6$ sebab nilai ini memaksimumkan $\sqrt{16-(x-4)^2}$ dan sekaligus meminimumkan $\sqrt{1-(x-7)^2}$. Dengan demikian, nilai maksimum dari $f(x)$ adalah

$$f(6) = \sqrt{16-(6-4)^2} - \sqrt{1-(6-7)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Penyelesaian soal ini dengan menggunakan kalkulus dimungkinkan tetapi akan memunculkan kerumitan perhitungan. ◆

Contoh 1.4.8. *Diketahui segitiga samakaki ABC dengan $AB = AC$, D adalah titik tengah sisi BC, E adalah titik potong sisi AC dengan garis tinggi yang ditarik dari titik D ke sisi AC, dan F adalah titik tengah sisi DE. Buktikan bahwa AF tegaklurus dengan BE.*

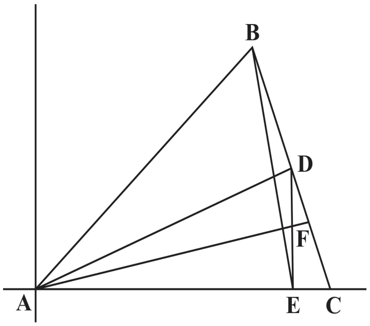
Penyelesaian. Berikut ini adalah gambar dari segitiga yang dimaksud.



Gambar 4

Kita akan buktikan dengan dua cara.

Cara 1. Pertama, kita akan selesaikan soal ini menggunakan geometri koordinat, yakni meletakkan segitiga di dalam sistem koordinat dan merepresentasikan titik-titik dengan koordinatnya. Salah satu kemungkinan adalah meletakkan D pada titik asal $(0,0)$, $A = (0,a)$, $B = (-b,0)$, dan $C = (b,0)$. Representasi ini mudah dipahami sebagai akibat sifat simetri dari segitiga samakaki. Namun demikian, kita akan menemui kesulitan ketika akan merepresentasikan E dan F. Representasi koordinat yang lebih bermanfaat dalam hal ini adalah dengan mengambil $A = (0,0)$, $B = (4a,4b)$, dan $C = (4c,0)$.



Gambar 5

Dari sini dengan mudah didapatkan $a^2 + b^2 = c^2$, $D = (2a + 2c, 2b)$, $E = (2a + 2c, 0)$, dan $F = (2a + 2c, b)$. Perkalian gradien garis AF dan gradien garis BE memberikan

$$m_{AF} m_{BE} = \frac{b}{2(a+c)} \frac{4b}{4a - (2a + 2c)} = \frac{b^2}{a^2 - c^2} = -1,$$

dan ini berarti AF tegaklurus dengan BE.

Cara 2. Kedua, kita akan selesaikan soal ini menggunakan geometri vektor. Tujuan kita adalah menunjukkan perkalian dalam vektor $\vec{AF}$ dengan vektor $\vec{BE}$ sama dengan nol. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\vec{AF} \cdot \vec{BE} &= \left(\vec{AE} + \vec{EF}\right) \cdot \left(\vec{BD} + \vec{DE}\right) \\
&= \vec{AE} \cdot \vec{BD} + \vec{EF} \cdot \vec{BD} + \vec{EF} \cdot \vec{DE} \\
&= \left(\vec{AD} + \vec{DE}\right) \cdot \vec{BD} + \vec{EF} \cdot \vec{BD} + \vec{EF} \cdot \vec{DE} \\
&= \vec{DE} \cdot \vec{BD} + \vec{EF} \cdot \vec{BD} + \vec{EF} \cdot \vec{DE} \\
&= \vec{DE} \cdot \vec{DC} - \frac{\vec{DE} \cdot \vec{DC}}{2} - \frac{\vec{DE} \cdot \vec{DE}}{2} \\
&= \frac{\vec{DE} \cdot \vec{DC}}{2} - \frac{\vec{DE} \cdot \vec{DE}}{2} \\
&= \vec{DE} \cdot \left(\frac{\vec{DC} - \vec{DE}}{2}\right) \\
&= \frac{\vec{DE} \cdot \vec{EC}}{2} \\
&= 0. \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Contoh 1.4.9. *Tentukan bilangan bulat terbesar m sehingga 3^m habis membagi*

$$171819202022\ldots96979899.$$

Penyelesaian. Kita perhatikan

$$x = \underbrace{171819}_{\text{kelompok }1}\ \underbrace{202122\ldots29}_{\text{kelompok }2}\ldots\underbrace{909192\ldots99}_{\text{kelompok }10}.$$

Karena $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, maka jumlahan digit-digit x adalah

$$\begin{aligned}
&= (1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9) + (2 \cdot 10 + 45) + \cdots + (9 \cdot 10 + 45)\\
&= 27 + 65 + 75 + \cdots + 135\\
&= 27 + 800\\
&= 827.
\end{aligned}$$

Sebuah bilangan habis dibagi 3 apabila jumlahan digit-digitnya habis dibagi 3. Karena $827 = 3 \cdot 275 + 2$, maka x tidak habis dibagi 3. Hal ini berakibat x tidak habis dibagi 3^n untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, m yang memenuhi adalah $m = 0$. ◆

Contoh 1.4.10. *Diberikan bilangan-bilangan real $x, y > 0$. Buktikan bahwa berlaku*

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}.$$

Dalam hal ini $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, $\sqrt{xy}$, dan $\frac{x+y}{2}$ berturut-turut disebut rata-rata harmonik, rata-rata geometrik, dan rata-rata aritmetika dari x dan y.

Penyelesaian. Kita akan buktikan dengan dua cara.

Cara 1. (Cara aljabar) Pertama, kita buktikan $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \le \sqrt{xy}$. Karena

$x, y > 0$, maka berlaku

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x+y} &\geq 0\\
\sqrt{xy}-\frac{2xy}{x+y} &\geq 0\\
\sqrt{xy}-\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} &\geq 0\\
\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} &\leq \sqrt{xy}.
\end{aligned}$$

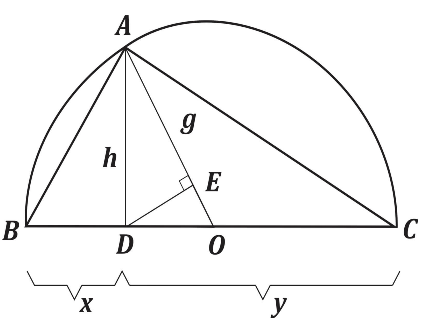
Selanjutnya, kita buktikan $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. Karena $x, y > 0$, maka berlaku

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2} &\geq 0\\
\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} &\geq 0\\
\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy} &\geq 0\\
\sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2}.
\end{aligned}$$

Penerapan sifat transitif bilangan real pada dua hasil di atas memberikan

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Cara 2. (Cara geometri) Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 6

Misalkan $x = BD$, $y = DC$, dan kita buat setengah lingkaran dengan diameter $BC = x + y$ dan titik pusat O. Misalkan A adalah titik pada lingkaran sehingga ruas garis AD tegak lurus dengan BC dan E adalah proyeksi tegak lurus titik D pada jari-jari AO. Kita notasikan $AD = h$ dan $AE = g$. Karena segitiga ABD sebangun dengan segitiga CAD, maka $\frac{h}{y} = \frac{x}{h}$, yakni $h = \sqrt{xy}$. Demikian juga karena segitiga AOD dan segitiga ADE adalah dua segitiga siku-siku yang sebangun, maka

$$\frac{g}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}} \iff g = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Terakhir, kita menggunakan fakta bahwa dalam segitiga siku-siku panjang sisi tegak selalu kurang dari panjang sisi miring untuk memperoleh

$$g \leq h \leq \frac{x+y}{2}.$$

Dengan mensubstitusikan nilai g dan h terbuktilah pernyataan yang diinginkan. ◆

Contoh 1.4.11. *Buktikan ketaksamaan Cauchy-Schwarz: untuk setiap $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ berlaku*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Penyelesaian. Fungsi

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

adalah sebuah sukubanyak berderajat dua dalam variabel x. Karena $p(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka $p(x)$ tidak mungkin mempunyai dua akar real yang berbeda. Dengan kata lain, diskriminan dari $p(x)$ pastilah kurang dari atau sama dengan 0. Jadi,

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

Dengan mengambil nilai mutlak kita memperoleh ketaksamaan yang diinginkan. ◆

Contoh 1.4.12. *Barisan bilangan* $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ *didefinisikan secara rekursif dengan* $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ *dan*

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Tunjukkan semua suku barisan ini adalah bilangan bulat.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa untuk $n \geq 3$ suku-suku barisan memenuhi $a_{n+1}a_{n-2} = 1 + a_n a_{n-1}$. Jadi berlaku $a_{n+2}a_{n-1} = 1 + a_{n+1}a_n$. Dari kedua persamaan ini diperoleh

$$a_{n+2}a_{n-1} - a_{n+1}a_{n-2} = a_{n+1}a_n - a_n a_{n-1}.$$

Setelah melakukan pemfaktoran dan penyusunan kembali suku-suku didapatkan

$$\begin{aligned} (a_{n+2} + a_n)\, a_{n-1} &= (a_n + a_{n-2})\, a_{n+1} \\ \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} &= \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Apabila kita definisikan

$$b_n := \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}},$$

maka berlaku $b_{n+2} = b_n$. Dari sini kita dapat menyimpulkan bahwa suku-suku genap dari barisan $(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$ adalah sama dan suku-suku ganjilnya adalah sama. Terakhir, karena

$$b_3 = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = 2$$

dan

$$b_4 = \frac{a_4 + a_2}{a_1} = \frac{\frac{1+a_3a_2}{a_1} + a_2}{a_1} = 3,$$

maka

$$a_n = \begin{cases} 3a_{n-1} - a_{n-2} & \text{jika } n \text{ genap} \\ 2a_{n-1} - a_{n-2} & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Dengan menggunakan prinsip induksi matematika (lihat bab 2), dapat kita buktikan bahwa a_n adalah bilangan bulat. ◆

Contoh 1.4.13. *Diketahui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi yang memenuhi*

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2,$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa f adalah fungsi konstan.

Penyelesaian. Kita ingat bahwa f adalah fungsi konstan apabila $f(x)$ bernilai tetap untuk semua x di dalam daerah asal dari f. Dengan kata lain, terdapat $k \in \mathbb{R}$ sehingga $f(x) = k$ untuk setiap x di dalam daerah asal dari f. Grafik fungsi konstan berupa sebuah garis horizontal. Fungsi konstan bukan fungsi satu-satu dan bukan fungsi pada. Mudah dipahami bahwa fungsi konstan juga memenuhi $f(x) = f(c)$ untuk suatu nilai c di dalam daerah asal dari f.

Melihat bentuk yang muncul pada soal kita akan menduga bahwa untuk menyelesaikannya akan terkait dengan konsep fungsi kontinu atau turunan. Sekarang kita ingat kaitannya dengan fungsi konstan. Salah satu hal yang muncul adalah jika f fungsi konstan, maka turunan dari f sama dengan nol. Kita buktikan hal ini terlebih dahulu.

Lema 1.4.14. *Jika f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan terdiferensial pada selang terbuka (a, b) dengan $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka f adalah fungsi konstan.*

Bukti. Ambil sebarang $x \in (a, b)$. Menurut teorema nilai rata-rata ada $k \in (a, x)$ sehingga $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0$. Hal ini berakibat $f(x) = f(a)$ untuk setiap $x \in (a, b)$. □

Perhatikan kembali ke soal di atas. Dari sifat fungsi yang diberikan mudah dipahami bahwa f kontinu pada $\mathbb{R}$: Ambil sebarang $c \in \mathbb{R}$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Jadi, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(c)| \leq (x - c)^2 < \delta^2 = \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon.$$

Terbukti f kontinu di c. Karena $c \in \mathbb{R}$ sebarang, maka f kontinu pada $\mathbb{R}$.

Jadi, kita cukup menunjukkan bahwa $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \\
&= \lim_{y \to x} \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \\
&= \lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \\
&\leq \lim_{y \to x} \frac{(y - x)^2}{|y - x|} \\
&= \lim_{y \to x} |y - x| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Kita memperoleh $|f'(x)| = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ yang berarti $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Terbukti f fungsi konstan. ◆

Contoh 1.4.15. *Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi*

$$f(x + y) + xy = f(x) + f(y),$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian. Soal semacam ini disebut masalah persamaan fungsional. Dalam soal ini persamaan fungsionalnya berbentuk

$$f(x + y) + xy = f(x) + f(y). \tag{1.1}$$

Dengan mengambil $x = y = 0$ pada (1.1) kita memperoleh $f(0) = f(0)^2$, yang berarti $f(0) = 0$ atau $f(0) = 1$.

1. Misalkan $f(0) = 0$. Dengan mengambil $y = 0$ pada (1.1) kita

memperoleh $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Di lain pihak, fungsi konstan $f(x) = 0$ tidak memenuhi kondisi pada (1.1) ketika $xy \neq 0$. Jadi, tidak mungkin $f(0) = 0$.

2. Misalkan $f(0) = 1$. Kita ambil $x = 1$ dan $y = -1$ dan diperoleh

$$f(1)f(-1) = f(1-1) - 1 = f(0) - 1 = 0.$$

Jadi, $f(1) = 0$ atau $f(-1) = 0$.

- Jika $f(-1) = 0$, maka kita pilih $y = -1$ untuk mendapatkan $f(x-1) - x = 0$, yakni $f(x-1) = x$. Dengan menyebut $y = x - 1$ kita memperoleh $f(y) = y + 1$.
- Jika $f(1) = 0$, maka kita pilih $y = 1$ untuk mendapatkan $f(x+1) + x = f(x)f(1) = 0$, yakni $f(x+1) = -x$. Dengan menyebut $y = x + 1$ kita memperoleh $f(y) = 1 - y$.

Dengan demikian, penyelesaian yang mungkin dari persamaan fungsional (1.1) adalah $f(x) = x + 1$ dan $f(x) = 1 - x$. Mudah dibuktikan dengan cara mensubstitusikan langsung bahwa kedua fungsi ini memenuhi persamaan fungsional (1.1). ◆

Pada contoh terakhir di atas kita telah menggunakan sebuah strategi yang disebut membagi ke dalam kasus-kasus. Selanjutnya kita akan melihat sebuah contoh soal yang menggunakan beberapa strategi sekaligus untuk menyelesaikannya, yakni *membentuk masalah yang setara*, *membagi ke dalam kasus-kasus*, dan *menggunakan metode pembuktian kontradiksi*.

Contoh 1.4.16. *Buktikan bahwa tidak ada bilangan prima x, y, dan z yang memenuhi persamaan*

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Penyelesaian. Soal di atas dapat dinyatakan dalam cara lain: jika $x^3 + y^3 = z^3$, maka x, y, dan z bukan bilangan prima. Cara lain menuliskan soal ini adalah: jika x, y, dan z bilangan prima, maka $x^3 + y^3 \neq z^3$. Kita akan membuktikan pernyataan terakhir ini dengan metode kontradiksi. Jadi diketahui x, y, dan z bilangan prima, dan kita andaikan $x^3 + y^3 = z^3$. Kita akan mencari kontradiksi dengan memandang kasus-kasus berikut.

1. Kasus 1: x dan y adalah bilangan prima ganjil. Dari sini berlaku x^3 dan y^3 keduanya ganjil, dan $z^3 = x^3+y^3$ adalah bilangan genap. Jadi, z juga merupakan bilangan genap. Karena z bilangan prima, maka $z = 2$. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa $x > 2$ dan $y > 2$.
2. Kasus 2: salah satu dari x dan y adalah bilangan prima genap. Tanpa mengurangi keumuman bukti misalkan y prima dan genap, yakni $y = 2$. Kita memperoleh

$$y^3 = 8 = z^3 - x^3 = (z - x)(z^2 + zx + x^2).$$

Catat bahwa $z \neq a$. Karena x dan z bilangan prima, maka $x \geq 2$ dan $z \geq 2$. Ini berarti $z^2 + zx + x^2 \geq 12$. Dengan demikian, $|z^3 - x^3| \geq 12$. Hal ini bertentangan dengan nilai $y^3 = 8 = z^3 - x^3$.

Karena semua kasus yang mungkin menimbulkan kontradiksi, maka pengandaian salah dan terbuktilah yang diinginkan. ◆

Contoh 1.4.17. *Hitunglah banyaknya kata yang terdiri dari 10 huruf yang memuat sebanyak-banyaknya 2 huruf a.*

Penyelesaian. Ini adalah masalah kombinatorika, secara khusus adalah masalah pencacahan. Sebanyak-banyaknya 2 huruf a berarti ada tepat 2 huruf a *atau* ada tepat 1 huruf a *atau* tidak ada huruf a sama sekali. Kita analisis satu per satu dari ketiga kemungkinan ini.

1. *Ada tepat 2 huruf a.* Hal ini berarti dari kata dengan 10 huruf tersebut, 2 huruf adalah a dan 8 huruf yang lain bukan a. Huruf a dapat menempati 2 posisi dalam $\binom{10}{2}$ cara. Sementara itu 8 posisi lain dapat diisi dengan huruf selain a dalam 25^8 cara. Jadi, banyaknya kata yang memuat tepat 2 huruf a ada sebanyak $25^8 \cdot \binom{10}{2}$.
2. A*da tepat 1 huruf a.* Hal ini berarti dari kata dengan 10 huruf tersebut, 1 huruf adalah a dan 9 huruf yang lain bukan a. Huruf a dapat menempati 1 posisi dalam $\binom{10}{1} = 10$ cara. Sementara itu 9 posisi lain dapat diisi dengan huruf selain a dalam 25^9 cara.

Jadi, banyaknya kata yang memuat tepat 1 huruf a ada sebanyak $10 \cdot 25^9 \cdot$.

3. *Ada tepat 0 huruf a*, yakni tidak ada huruf a sama sekali. Hal ini berarti 10 posisi dapat diisi dengan huruf selain a dalam 25^{10} cara. Jadi, banyaknya kata yang memuat tepat 0 huruf a ada sebanyak $25^{10} \cdot$.

Sebagai kesimpulan, banyaknya kata yang terdiri dari 10 huruf yang memuat sebanyak-banyaknya 2 huruf a adalah

$$25^8 \cdot \binom{10}{2} + 10 \cdot 25^9 \cdot +25^{10}. \diamond$$

Latihan Soal 1.4.

1. Tanpa menggunakan kalkulator hitunglah

$$4998 \cdot 5002.$$

2. Perhatikan serangkaian proses perhitungan berikut:
   (a) Ambil dua bilangan yang sama:
   $$x = y$$
   (b) Kalikan kedua ruas dengan x:
   $$x^2 = xy$$
   (c) Kurangi kedua ruas dengan y^2:
   $$x^2 - y^2 = xy - y^2$$
   (d) Faktorkan kedua ruas:
   $$(x + y)(x - y) = y(x - y)$$
   (e) Bagi kedua ruas dengan $x - y$:
   $$x + y = y$$

(f) Ingat bahwa $x = y$:

$$y + y = y$$

(g) Penjumlahan pada ruas kiri:

$$2y = y$$

(h) Bagi kedua ruas dengan y:

$$2 = 1$$

Hasil terakhir adalah sebuah *kemustahilan*. Jelaskan langkah mana yang menyebabkan terjadinya kemustahilan.

3. Urutkan ketiga bilangan berikut dari yang terkecil sampai yang terbesar:
$$2^{5555}, \quad 5^{2222}, \quad 3^{3333}.$$
4. Berapa banyak pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}.$$
5. Tuliskan bilangan
$$0,5701701701701\ldots$$
berikut ke dalam bentuk pecahan.
6. Hitunglah
$$\sum_{k=1}^{9999} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$
7. Tuliskan bilangan
$$\sqrt{\frac{5^{702} - 5^{700} + 72}{5^{700} + 3}}$$
dalam bentuk paling sederhana.
8. Tunjukkan bahwa
$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000000}.$$

9. Hitunglah

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2020}\right).$$

10. Di dalam sebuah kotak terdapat 2 bola hijau, 2 bola biru, dan 2 bola hitam. Sebuah bola diambil secara acak dari dalam kotak dan tidak dikembalikan. Selanjutnya, satu bola diambil lagi secara acak dari dalam kotak. Berapa peluang kedua bola yang terambil berwarna sama?
11. Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat dengan

$$^{\sqrt{2}}\log 6.$$

12. Hitunglah

$$\sqrt{1+\frac{2}{5}}\,\sqrt{1+\frac{2}{6}}\,\sqrt{1+\frac{2}{7}}\cdots\sqrt{1+\frac{2}{98}}.$$

13. Titik E terletak di dalam persegi $ABCD$ sehingga ABE adalah segitiga samasisi. Jika panjang $AB = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ dan F adalah titik potong diagonal BD dengan ruas garis AE, maka hitunglah luas segitiga ABF.
14. Carilah dua bilangan asli yang lebih besar dari 1 sehingga hasilkalinya adalah 999991.
15. Jika $2\log(x-2y) = \log x + \log y$, maka tentukan $\dfrac{x}{y}$.
16. Manakah yang lebih besar nilainya:

$$\sqrt{6}+\sqrt{10} \quad \text{atau} \quad \sqrt{5}+\sqrt{12}\ ?$$

17. Apabila persamaan $x^3 - 3x^2 + m = 0$ memiliki sepasang akar kembar, maka tentukan nilai m.
18. Diberikan himpunan

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{x^2-2x+7}{2x-1} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Berapakah banyaknya subhimpunan dari A?

19. Hitunglah nilai setiap bilangan berikut dan tuliskan dalam bentuk paling sederhana:

    (a)
    $$\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots}}}$$

    (b)
    $$\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\cdots}}}$$

    (c)
    $$\sqrt[3]{16:\sqrt[3]{16:\sqrt[3]{16:\cdots}}}$$

    (d)
    $$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$$

    (e)
    $$\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-\cdots}}}$$

20. Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari x kita notasikan dengan $[x]$. Sebagai contoh, $\left[-\frac{3}{4}\right] = -1$ dan $[\pi] = 3$. Buktikan untuk setiap bilangan asli n dan bilangan real x berlaku
    $$\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]\,.$$

21. Jika $x = \csc\alpha - \sin\alpha$ dan $y = \sec\alpha - \cos\alpha$, maka tunjukkan bahwa
    $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (xy)^{-\frac{2}{3}}\,.$$

22. Sekarung pelet (pakan ikan) dapat dihabiskan oleh 24 ikan mujair atau 30 ikan mas dalam 33 hari. Berapa hari yang dibutuhkan oleh 16 ikan mujair dan 13 ikan mas untuk menghabiskan sekarung pelet tersebut?

23. Jika A dan B adalah dua matriks persegi dengan $A \neq B$ dan memenuhi $A^3 = B^3$ serta $A^2B = B^2A$, maka tentukan $\det(A^2 + B^2)$.

24. Lima orang A, B, C, D, dan E memakai topi berwarna hitam atau putih tetapi mereka tidak mengetahui warna topi yang dipakainya sendiri. Diketahui bahwa orang yang memakai topi hitam selalu berkata jujur sementara orang yang memakai topi putih selalu berbohong. Empat orang memberikan pernyataan sebagai berikut:
    - A: saya melihat tiga topi hitam dan satu topi putih.
    - B: saya melihat empat topi putih.
    - C: saya melihat satu topi hitam dan tiga topi putih.
    - D: saya melihat empat topi hitam.

    Tentukan warna topi yang dipakai oleh masing-masing dari lima orang tersebut.
25. Diberikan $x, y \in \mathbb{R}$ dengan sekurang-kurangnya satu bilangan tidak sama dengan nol. Tunjukkan bahwa
$$x^2 + xy + y^2 > 0.$$
26. Jika a, b, c, dan $n > 1$ adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi $x^n + y^n = z^n$, maka tunjukkan bahwa x, y, dan z ketiganya lebih besar dari n.
27. Diberikan segitiga ABC dan titik D pada sisi AC. Misalkan r_1, r_2, dan r berturut-turut menyatakan jari-jari lingkaran dalam dari segitiga-segitiga ABD, BCD, dan ABC. Tunjukkan bahwa $r_1 + r_2 > r$.
28. Diketahui a, b, dan c adalah sisi-sisi dari sebuah segitiga. Apabila berlaku
$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab,$$
maka tunjukkan bahwa segitiga tersebut samasisi.
29. Apabila diketahui
$$x + y + z = 3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 24,$$
maka tentukan nilai $x^4 + y^4 + z^4$.

30. Sebuah fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ memenuhi sifat

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) \neq 1$. Apabila $f(2) = 2$, maka tentukan nilai $f(2020)$.

31. Misalkan S adalah sebuah himpunan takkosong dan $*$ adalah sebuah operasi biner pada S yang memenuhi:
    (a) $x * (x * y) = y$ untuk setiap $x, y \in S$,
    (b) $(y * x) * x = y$ untuk setiap $x, y \in S$.

    Tunjukkan bahwa $*$ bersifat komutatif tetapi tidak asosiatif.

32. Buktikan bahwa

$$4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

adalah bilangan komposit untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

33. (a) Buktikan untuk setiap bilangan real positif a dan b berlaku

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

    (b) Diketahui a dan b dua bilangan real positif dengan $a+b = 1$. Buktikan

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

    (c) Buktikan untuk setiap bilangan real positif a, b, dan c berlaku

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

34. Jika $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ adalah bilangan-bilangan real, maka tentukan nilai terkecil dari

$$\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2021} \sin x_1.$$

35. Buktikan atau berikan contoh penyangkal untuk pernyataan berikut: $n^2 - n + 11$ adalah bilangan prima untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

36. Tunjukkan

$$7^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{4}} < 7$$

dan

$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{4}} > 4.$$

37. Ayah ingin membawa kedua anaknya, Budi dan Iwan, untuk mengunjungi nenek yang rumahnya berjarak 33 km dari rumah mereka. Ayah mempunyai sepeda motor yang dapat dikendarai dengan laju maksimum 25 km/jam. Apabila salah satu anak membonceng ayah maka laju maksimum sepeda motor berkurang menjadi 20 km/jam. Ayah tidak dapat memboncengkan kedua anaknya secara bersamaan. Budi dan Iwan dapat berjalan dengan laju 5 km/jam. Tunjukkan bahwa Ayah, Budi dan Iwan ketiganya dapat tiba di rumah nenek dalam waktu 3 jam.
38. Carilah semua segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi bilangan bulat sehingga luasnya sama dengan kelilingnya.
39. Jika x, y, z adalah bilangan-bilangan real positif dengan $x+y+z \leq 6$, maka tunjukkan

$$\frac{x+2}{x(x+4)} + \frac{y+2}{y(y+4)} + \frac{z+2}{z(z+4)} \geq 1.$$

40. Hasilkali dua akar persamaan

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x + 1984 = 0$$

adalah -32. Tentukan nilai k.
41. Apabila

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c},$$

dengan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan asli yang tidak mempunyai faktor persekutuan, maka buktikan bahwa $a + b$ adalah bilangan kuadrat sempurna.
42. Bilangan bulat positif dikatakan *palindromik* jika digit-digit bilangan itu apabila dituliskan dalam urutan terbalik akan memberikan bilangan bulat yang sama. Sebagai contoh 765567 adalah palindromik tetapi 76576 tidak palindromik. Apakah semua bilangan empat digit yang palindromik habis dibagi 11? Jelaskan.

43. Diberikan A adalah bilangan bulat berbentuk

$$A = \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ kali}}$$

dan B adalah bilangan bulat berbentuk

$$B = 1\underbrace{000\ldots0}_{n-1\text{ kali}}5.$$

Tunjukkan bahwa $AB + 1$ adalah sebuah bilangan kuadrat sempurna. Selanjutnya, tuliskan $\sqrt{AB+1}$ dalam bentuk yang serupa dengan A dan B.

44. Sisi-sisi sebuah segitiga panjangnya adalah

$$\sqrt{13}, \quad \sqrt{74}, \quad \text{dan} \quad \sqrt{85}.$$

Tentukan luas segitiga tersebut.

45. Tentukan semua $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan

$$\sqrt[3]{13x+37} - \sqrt[3]{13x-37} = \sqrt[3]{2}.$$

46. Berapa banyak bilangan bulat ganjil yang lebih besar dari 30000 tetapi kurang dari 80000 dengan sifat semua digitnya berbeda?

47. Jika

$$\sin + \sin y = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

maka tentukan nilai maksimum dari

$$100\,(\cos x + \cos y)\,.$$

48. Tentukan banyaknya cara 6 kelereng berbeda dapat dimasukkan ke dalam 4 kotak berbeda sehingga
    (a) tidak ada kotak yang kosong.
    (b) ada tepat satu kotak yang kosong.

49. Buktikan bahwa ketiga bilangan berikut adalah bilangan komposit di dalam sebarang basis bilangan:

$$10201, \quad 10101, \quad 100011.$$

50. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$$1 + (-1^n)(2n - 1)$$

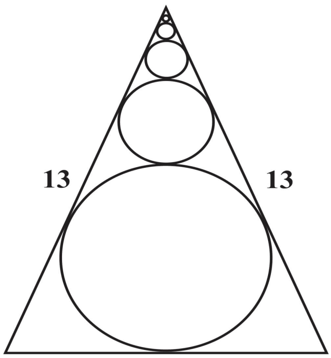
adalah kelipatan 4.

51. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

52. Hitunglah jumlah keliling dari takhingga banyak lingkaran yang disusun di dalam sebuah segitiga seperti pada gambar di bawah ini. (Setiap lingkaran menyinggung sisi-sisi segitiga dan menyinggung lingkaran di atas dan di bawahnya).



Gambar 7

53. Tentukan semua bilangan bulat a, b, dan c sehingga berlaku

$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$$

untuk setiap bilangan real x.

54. Carilah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$$x^5 + y^5 = 33, \quad x + y = 3.$$

55. Diketahui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi ganjil dan 4 adalah satu-satunya akar positif dari persamaan $f(x) = 0$. Tentukan semua akar yang lain dari persamaan tersebut.

56. Tentukan bilangan kuadrat sempurna yang berbentuk *aabb*.
57. Diberikan segitiga samasisi ABC dan sebarang titik P di dalam segitiga. Dari titik P ditarik garis-garis tegak lurus PD, PE, dan PF ke ketiga sisi segitiga. Tunjukkan bahwa

$$\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

58. Diketahui sebuah kartu hilang dari 1 set kartu bridge. Selanjutnya, dari 1 set kartu bridge yang tidak lengkap tersebut diambil secara acak sebuah kartu. Tentukan peluang bahwa kartu yang terambil adalah kartu hati.
59. Tentukan nilai maksimum dari fungsi

$$f(x) = \frac{1}{x^x}, \quad x \neq 0.$$

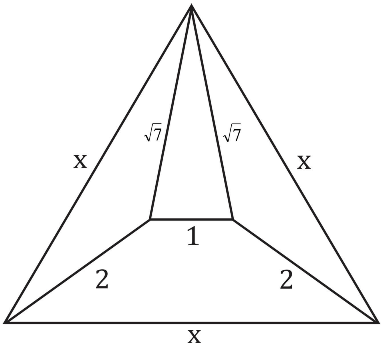
60. Diberikan $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah bilangan-bilangan real positif sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Buktikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + y_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

61. Hitunglah nilai x pada segitiga samasisi di bawah ini.



Gambar 8

62. Apakah kita dapat membungkus/menutupi permukaan dari sebuah kubus dengan panjang sisi 1 satuan dengan menggunakan selembar kertas berukuran 3×3 satuan?

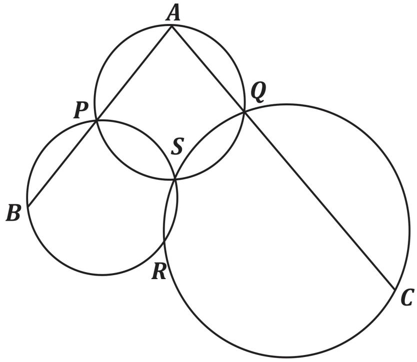
63. Hitunglah
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right).$$

64. Hitunglah
$$\int \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}\,dx.$$

65. Fungsi f didefinisikan pada $\mathbb{N}$ dengan
$$f(n)=1^n+2^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+(n-2)^3+(n-1)^2+n.$$
Tentukan nilai minimum dari
$$\frac{f(n+1)}{f(n)}.$$

66. Carilah penyelesaian dari persamaan
$$\frac{x^2-2x+5}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=4.$$

67. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 9

Tunjukkan bahwa titik B, R, dan C segaris (kolinear).

68. Apabila $0 < x < y$, maka buktikan bahwa

$$x^x y^y > y^x x^y.$$

69. Diketahui tiga bilangan real x, y, z sehingga

$$x + y + z = 5 \quad \text{dan} \quad xy + yz + zx = 3.$$

Tentukan nilai terbesar yang mungkin dari ketiga bilangan itu.

70. Satu set kartu bridge dibagikan secara acak sama banyak kepada 4 orang yaitu Ali, Budi, Candra, dan Doni. Tentukan peluang dari setiap peristiwa berikut:
    (a) Ali menerima semua kartu As.
    (b) Budi tidak menerima kartu As.
    (c) Candra menerima 5 kartu sekop, 5 kartu semanggi hitam, 2 kartu hati, dan 1 kartu intan.
    (d) Semua kartu sekop berada di tangan Ali dan Doni.
    (e) Semua kartu As dan King berada di tangan Budi dan Candra.
    (f) Setiap orang menerima satu kartu As.

71. Buktikan bahwa

$$2 < \frac{1}{{}^{2}\log \pi} + \frac{1}{{}^{5}\log \pi}$$

72. Diketahui $f(n)$ adalah jumlahan dari n suku pertama dari barisan

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \cdots, r, r, r+1, r+1, \cdots$$

    (a) Turunkan sebuah rumus untuk $f(n)$.
    (b) Buktikan bahwa $f(s+t) - f(s-t) = st$ dengan $s, t \in \mathbb{N}$ dan $s > t$.

73. Tentukan semua bilangan real $x > -1$ yang memenuhi

$$\frac{x^2}{\left(x + 1 - \sqrt{x+1}\right)^2} < \frac{x^2 + 3x + 18}{(x+1)^2}.$$

Petunjuk: Gunakan substitusi $y = \sqrt{x+1}$.

74. Tentukan semua bilangan real p sehingga persamaan

$$x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3 = 0$$

mempunyai tiga akar berbeda yang merupakan panjang sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku.

75. Andre dan Doni melakukan permainan sebagai berikut. Diberikan persamaan

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Secara bergantian, dimulai dari Andre, mereka akan memilih koefisien a, b, atau c yang belum dipilih pada langkah sebelumnya, dan mengganti nilainya dengan sebuah bilangan real. Andre memenangkan permainan jika persamaan tersebut mempunyai tiga akar real yang berbeda. Tunjukkan bahwa Andre selalu dapat memenangkan permainan bagaimana pun Doni bermain.

76. Apabila r adalah sebuah bilangan rasional taknegatif yang merupakan hampiran untuk $\sqrt{2}$, maka tunjukkan bahwa

$$\frac{r+2}{r+1}$$

selalu merupakan hampiran rasional yang lebih baik.

77. Apabila α adalah sebuah sudut lancip, maka buktikan

$$(1 + \sec\alpha)(1 + \csc\alpha) > 5.$$

78. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi-sisi a, b, dan c serta segitiga UVW dengan panjang sisi-sisi u, v, dan w sehingga

$$\begin{aligned} u(v + w - u) &= a^2 \\ v(w + u - v) &= b^2 \\ w(u + v - w) &= c^2. \end{aligned}$$

Buktikan bahwa ABC adalah segitiga lancip dan tuliskan besar sudut U, V, dan W dengan menggunakan besar sudut A, B, dan C.

79. Perhatikan

$$
\begin{aligned}
6^2 - 5^2 &= 11 \\
56^2 - 45^2 &= 1111 \\
556^2 - 445^2 &= 111111 \\
5556^2 - 4445^2 &= 11111111 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tuliskan sebuah rumus umum untuk pernyataan-pernyataan di atas dan buktikan.

80. Sebuah kompetisi matematika diikuti oleh 90 peserta. Setiap peserta berkenalan dengan paling sedikit 60 peserta lainnya. Salah seorang peserta, Amir, mengatakan bahwa setidaknya ada empat peserta yang banyak teman barunya sama. Periksa kebenaran pernyataan Amir.

To understand mathematics means to be able to do mathematics. And what does it mean doing mathematics? In the first place it means to be able to solve mathematical problems.

–George Polya (1887-1985)

Bab 2 Metode Pembuktian

Di bab ini kita akan mempelajari metode pembuktian matematis yang meliputi pembuktian langsung (termasuk di dalamnya adalah prinsip induksi matematika, prinsip sarang merpati, dan prinsip invarian) dan pembuktian taklangsung (metode kontraposisi dan metode kontradiksi). Pembaca diasumsikan telah mengenal konsep dasar dari landasan matematika seperti logika, himpunan, relasi dan fungsi, dan sistem bilangan.

2.1 Pembuktian Langsung

Misalkan P dan Q adalah dua pernyataan. Pernyataan bahwa hipotesis P dari implikasi $P \Rightarrow Q$ berakibat konklusi Q (dengan kata lain $P \Rightarrow Q$ suatu teorema) adalah pernyataan bahwa apabila hipotesis P benar, maka Q juga benar. Pembentukan bukti langsung dari $P \Rightarrow Q$ melibatkan pembentukan serangkaian pernyataan $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sehingga $P \Rightarrow R_1$, $R_1 \Rightarrow R_2, \ldots, R_n \Rightarrow Q$ (sesuai dengan hukum silogisma).

Contoh 2.1.1. *Kuadrat bilangan bulat ganjil juga merupakan bilangan bulat ganjil.*

Penyelesaian. Jika n sebuah bilangan bulat ganjil, maka $n = 2k - 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$ dan kuadrat dari n adalah

$$n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1.$$

Tuliskan $m = 2k^2 - 2k + 1$, maka m merupakan bilangan bulat dan berlaku $n^2 = 2m - 1$. Terbukti n^2 merupakan bilangan bulat ganjil. ◆

Contoh 2.1.2. *Tunjukkan jika $x, y, z \in \mathbb{R}$ memenuhi*

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1,$$

maka

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0.$$

Penyelesaian. Perhatikan, karena $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$, maka

$$\begin{aligned}
(x+y+z)\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) &= x+y+z \\
\frac{x(x+y+z)}{y+z} + \frac{y(x+y+z)}{z+x} + \frac{z(x+y+z)}{x+y} &= x+y+z \\
\frac{x^2}{y+z} + x + \frac{y^2}{z+x} + y + \frac{z^2}{x+y} + z &= x+y+z \\
\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &= 0. \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Contoh 2.1.3. Tunjukkan bahwa $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
2^{100} + 3^{100} &< 3^{100} + 3^{100} = 2 \cdot 3^{100} = 2 \cdot 3^3 \cdot 3^{97} = 54 \cdot 3^{97} \\
&< 64 \cdot 4^{97} = 4^3 \cdot 4^{97} = 4^{100}. \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Kadangkala dalam pembuktian kita perlu untuk memeriksa kasus demi kasus seperti pada contoh berikut.

Contoh 2.1.4. *Untuk setiap bilangan bulat positif $n > 1$ terdapat sebuah bilangan bulat positif p sehingga $n^2 < 4p < (n+1)^2$.*

Penyelesaian. Pertama kita buktikan untuk kasus $n > 1$ adalah bilangan positif genap. Jadi $n = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Jelas bahwa $p = k^2 + k$

adalah bilangan bulat positif dan berlaku

$$n^2 = 4k^2 < 4k^2 + 4k = 4p$$

dan

$$4p = 4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2 = (n + 1)^2.$$

Jadi pernyataan benar untuk bilangan bulat positif genap.

Selanjutnya kita buktikan untuk kasus $n > 1$ adalah bilangan bulat positif ganjil. Jadi $n = 2l + 1$ untuk suatu $l \in \mathbb{N}$. Jelas bahwa $q = l^2 + l + 1$ adalah bilangan bulat positif dan berlaku

$$n^2 = (2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 < 4l^2 + 4l + 4 = 4q$$

dan

$$4q = 4l^2 + 4l + 4 < 4l^2 + 8l + 4 = (2l + 2)^2 = (n + 1)^2.$$

Jadi pernyataan juga benar untuk bilangan bulat positif ganjil. Karena setiap bilangan bulat positif adalah genap atau ganjil, maka pernyataan terbukti untuk setiap bilangan bulat positif $n > 1$. ◆

Contoh 2.1.5. Tunjukkan bahwa $n^4 - 20n^2 + 4$ adalah bilangan komposit untuk setiap bilangan bulat n.

Penyelesaian. Ingat bahwa bilangan komposit adalah bilangan bulat yang tidak sama dengan 1 dan bukan bilangan prima. Jadi, strategi untuk membuktikan soal ini adalah dengan cara memfaktorkan bentuk $n^4 - 20n^2 + 4$. Kita dapat mencoba memfaktorkan sebagai

$$n^4 - 20n^2 + 4 = (n^4 - 20n^2 + 100) - 96 = (n^2 - 10)^2 - 96.$$

Namun hal ini tidak cukup banyak membantu sebab 96 bukanlah bilangan kuadrat sempurna. Kita dapat mencoba memfaktorkan dengan cara yang lain yaitu

$$\begin{aligned} n^4 - 20n^2 + 4 &= (n^4 - 4n^2 + 4) - 16n^2 \\ &= (n^2 - 2)^2 - (4n)^2 \end{aligned}$$

$$= (n^2 - 2 - 4n)(n^2 - 2 + 4n).$$

Sebagai langkah terakhir kita harus menunjukkan bahwa masing-masing dari kedua faktor terakhir bukanlah ± 1. Pertama, misalkan $n^2 - 2 - 4n = 1$, maka $n^2 - 4n - 3 = 0$. Dari sini kita mendapatkan $n = 2 \pm \sqrt{7}$ yang bukan bilangan bulat. Jadi, jika n bilangan bulat, maka $n^2 - 2 - 4n \neq 1$. Ketiga kasus yang lain dapat dibuktikan dengan cara yang serupa. ◆

Contoh 2.1.6. *Diberikan dua himpunan hingga X dan Y. Apabila $|X| = m$, $|Y| = n$, dan $|X \cap Y| = k$, maka buktikan bahwa*

$$|X \cup Y| = m + n - k.$$

Penyelesaian. Kita dapat mempartisi himpunan X ke dalam dua bagian, yakni

$$X \cap Y = \{x \in X : x \in Y\} \text{ dan } X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}.$$

Dengan kata lain,

$$X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y).$$

Dengan cara yang sama kita dapat menuliskan

$$Y = (X \cap Y) \cup (Y \setminus X).$$

Karena $|X \cap Y| = k$ dan $|X| = m$, maka

$$|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y| = m - k.$$

Demikian juga,

$$|Y \setminus X| = |Y| - |X \cap Y| = n - k.$$

Sekarang perhatikan bahwa

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ atau } x \in Y\} = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y) \cup (Y \setminus X).$$

Jadi,

$$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X| = m + n - k. \text{ ◆}$$

Contoh 2.1.7. *Carilah sebuah sukubanyak dengan koefisien bilangan bulat serta memiliki akar* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *dan* $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Penyelesaian. Pertama, kita cari sukubanyak yang memiliki akar $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Sukubanyak tersebut harus memiliki faktor linear $\left(x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right)$. Mengalikan dengan bentuk sekawannya memberikan

$$\left(x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right)\left(x + \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) = x^2 - \left(5 + 2\sqrt{6}\right).$$

Kita kalikan hasil terakhir dengan bentuk sekawannya untuk mendapatkan

$$\left(\left(x^2 - 5\right) + 2\sqrt{6}\right)\left(\left(x^2 - 5\right) - 2\sqrt{6}\right) = (x^2 - 5)^2 - 24 = x^4 - 10x^2 + 1.$$

Selanjutnya, kita cari sukubanyak yang memiliki akar $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Perhatikan bahwa apabila $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, maka

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^3 - 3 = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = x^3 + 6x - \left(3x^2 + 2\right)\sqrt{2}.$$

Perkalian hasil terakhir dengan bentuk sekawannya memberikan

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 + 6x - \left(3x^2 + 2\right)\sqrt{2}\right)\left(x^3 + 6x + \left(3x^2 + 2\right)\sqrt{2}\right) \\
&= \left(x^3 + 6x\right)^2 - 2\left(3x^2 + 2\right)^2 \\
&= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8.
\end{aligned}$$

Jadi, sukubanyak yang memiliki akar $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ dan $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ adalah

$$\left(x^4 - 10x^2 + 1\right)\left(x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\right). \ \diamond$$

Latihan Soal 2.1.

1. Buktikan jika m adalah bilangan bulat ganjil dan n adalah bilangan bulat genap, maka mn adalah bilangan bulat genap.
2. Buktikan: bilangan bulat n genap jika dan hanya jika k adalah jumlahan dua bilangan bulat ganjil.

3. Apabila m dan n adalah dua bilangan bulat yang habis dibagi 3, maka buktikan bahwa $m + n$ dan mn juga habis dibagi 3.
4. Buktikan untuk setiap bilangan real x berlaku

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \cdots + |x-10| \geq 25.$$

5. Buktikan bahwa kuadrat bilangan bulat apabila dibagi dengan 4 selalu bersisa 0 atau 1.
6. Buktikan jika m adalah bilangan asli ganjil, maka m^2 adalah bilangan asli ganjil.
7. Diberikan bilangan-bilangan bulat positif a, b, dan c yang memenuhi ac habis membagi bc. Tunjukkan bahwa a habis membagi b.
8. Tunjukkan bahwa kuadrat dari bilangan bulat ganjil selalu berbentuk $8k + 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.
9. Diketahui segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi tegak x dan y, serta panjang sisi miring z. Apabila luas segitiga tersebut adalah $\frac{z^2}{4}$, maka buktikan bahwa segitiga tersebut samakaki.
10. Tunjukkan bahwa $5n^2 + 3n + 7$ adalah bilangan ganjil untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.
11. Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ berlaku $n^2 + n$ adalah bilangan bulat genap.
12. Buktikan jika $p \in \mathbb{Q}$ dan $p^2 \in \mathbb{Z}$, maka $p \in \mathbb{Z}$.
13. Buktikan apabila $m < n$ adalah dua bilangan bulat yang berurutan dan m adalah bilangan genap, maka $m^2 + n^2 - 1$ habis dibagi 4.
14. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $n^3 - n$ habis dibagi 3.
15. Tunjukkan bahwa hanya ada tepat satu bilangan asli n sehingga $2^8 + 2^{11} + 2^n$ adalah bilangan kuadrat sempurna.
16. Diberikan $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan jika $x^2 + 5y = y^2 + 5x$, maka $x = y$ atau $x + y = 5$.
17. Buktikan jika n adalah sebuah bilangan asli dengan dua atau lebih digit, maka hasilkali digit-digitnya kurang dari n.

18. Tunjukkan

$$\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} < 2.$$

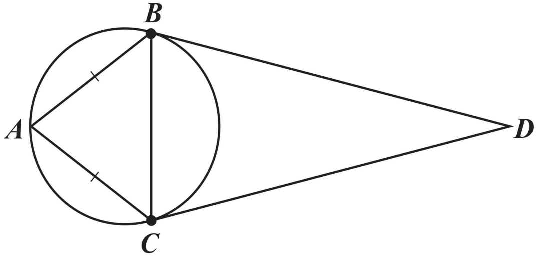
19. Carilah semua bilangan real a, b, dan c yang memenuhi persamaan

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 6abc.$$

20. Diberikan empat bilangan real taknegatif a, b, c, dan d yang memenuhi $a + b + c + d = 1$. Tunjukkan berlaku

$$ab + bc + cd \leq \frac{1}{4}.$$

21. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10

Sebuah segitiga lancip samakaki ABC ketiga titik sudutnya terletak pada sebuah lingkaran. Garis singgung lingkaran di titik B dan C bertemu di titik D dengan $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle CDB$. Hitunglah besar sudut $\angle BAC$.

22. Apakah ada bilangan bulat N sehingga $N^3 = 9k + 2$ untuk suatu bilangan bulat k? Jelaskan.

23. Dalam berapa cara seorang anak dapat memilih 5 bola dari 5 bola merah, 4 bola hitam, 3 bola putih, 2 bola hijau, dan 1 bola kuning? (Diasumsikan bahwa bola dengan warna yang sama adalah identik).

24. Tunjukkan jika $x \in (0, 4)$, maka

$$\frac{4}{x(4 - x)} \geq 1.$$

25. Buktikan apabila $a \in \mathbb{R}$ dan $r \neq 1$, maka berlaku

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = a\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Rumus ini dikenal sebagai rumus jumlahan deret geometri.

26. Buktikan untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, segitiga dengan panjang sisi-sisi

$$6 \cdot 10^{n+1}, \quad 1125 \cdot 10^{2n+1} - 8, \quad 1125 \cdot 10^{2n+1} + 8$$

adalah segitiga siku-siku.

27. Tentukan fungsi sukubanyak dengan derajat terkecil dan dengan koefisien-koefisien bulat yang memiliki $\sqrt{5}$ sebagai salah satu akarnya.

28. Diketahui persamaan $x^2 + px + q = 0$, dengan p dan q bilangan bulat, mempunyai akar-akar rasional. Buktikan bahwa akar-akar persamaan tersebut adalah bilangan bulat.

29. Diberikan matriks berukuran 2×2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

dengan $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Buktikan bahwa ketiga pernyataan berikut ekivalen:

(a) $\det(M) = 1$.

(b) $a = d = \pm 1$

(c) $\text{trace}(M) = \pm 2$ dan $a = d$.

30. Diberikan dua himpunan A dan B. Selisih simetris dari A dan B didefinisikan sebagai

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Buktikan:

(a) $A \Delta \emptyset = A$ dan $A \Delta A = \emptyset$.

(b) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cup A)$.

(c) Δ bersifat komutatif.

2.2 Pembuktian Taklangsung

Terdapat dua macam pembuktian taklangsung:

1. pembuktian dengan kontraposisi.
2. pembuktian dengan kontradiksi.

Apabila diberikan pernyataan $P \Rightarrow Q$, maka kedua macam pembuktian taklangsung ini dimulai dengan pengandaian bahwa konklusi Q salah. Sekarang kita bicarakan kedua macam pembuktian ini beserta dengan contoh-contohnya.

2.2.1 Metode Kontraposisi

Dalam pembuktian langsung dibuktikan $P \Rightarrow Q$, tetapi dalam metode kontraposisi ini yang dibuktikan adalah pernyataan ekivalennya, yakni $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Contoh 2.2.1. *Jika n adalah bilangan asli sehingga n^2 adalah bilangan genap, maka n juga bilangan genap.*

Penyelesaian. Kontraposisi pernyataan di atas adalah: jika n bilangan ganjil, maka n^2 juga bilangan asli ganjil. Pernyataan ini telah terbukti pada Contoh 2.1.2. Jadi terbukti bahwa pernyataan di atas benar. ◆

Contoh 2.2.2. *Diberikan bilangan bulat n dan p. Jika $n \geq 2$, maka n tidak habis membagi p atau n tidak habis membagi $p + 1$.*

Penyelesaian. Kita akan menunjukkan bahwa jika n habis membagi p dan sekaligus habis membagi $p+1$, maka $n < 2$. Jika n habis membagi p dan sekaligus habis membagi $p+1$, maka n habis membagi $(p+1)-p = 1$. Faktor dari 1 hanyalah 1 dan -1. Kita memperoleh $n = \pm 1$ dan terbukti $n < 2$. ◆

Contoh 2.2.3. *Misalkan $a \geq 0$ sebuah bilangan real. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $0 \leq a < \varepsilon$, maka $a = 0$.*

Penyelesaian. Jika $a = 0$ salah, maka haruslah $a > 0$. Selanjutnya dapat dipilih $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$, dan berlaku $\varepsilon_0 > 0$ dan $\varepsilon_0 < a$. Hal ini berakibat bahwa hipotesis $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ adalah salah. ◆

Contoh 2.2.4. *Diberikan bilangan bulat positif* $n > 1$. *Jika* $2^n - 1$ *adalah bilangan prima, maka n adalah bilangan prima.*

Penyelesaian. Misalkan $n > 1$ dan n bukan bilangan prima. Hal ini berarti terdapat bilangan-bilangan bulat a dan b dengan $1 < a, b < n$ sehingga $n = ab$. Ingat rumus pemfaktoran

$$x^b - 1 = (x - 1)\left(x^{b-1} + x^{b-2} + \cdots + 1\right).$$

Dengan menggunakan rumus di atas diperoleh

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \cdots + 1\right).$$

Sebagai akibatnya, $2^a - 1$ adalah sebuah faktor dari $2^n - 1$. Karena $1 < 2^a - 1 < 2^n - 1$, maka $2^n - 1$ bukan bilangan prima. ◆

Pembaca mungkin bertanya apakah konvers dari pernyataan di Contoh 2.2.4 berlaku, yakni apakah pernyataan: *jika* $n > 1$ *adalah bilangan prima, maka* $2^n - 1$ *adalah bilangan prima* benar? Jawabannya adalah tidak. Hal ini dapat diperlihatkan dengan menggunakan contoh penyangkal (*counterexample*). Ambil bilangan prima $n = 11$, maka

$$2^n - 1 = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

bukan bilangan prima.

Latihan Soal 2.2.1.

1. Jika n adalah bilangan asli sehingga n^2 adalah bilangan ganjil, maka tunjukkan n juga bilangan ganjil.
2. Tunjukkan jika $x^2 - 6x - 5$ adalah bilangan genap, maka x adalah bilangan ganjil.
3. Diberikan A dan B adalah dua subhimpunan dari S. Tunjukkan jika $A \subseteq B$, maka $B^c \subseteq A^c$.

4. Diberikan $a, b \in \mathbb{Z}$. Buktikan jika ab bilangan ganjil, maka a bilangan ganjil dan b bilangan ganjil.
5. Diketahui a dan b adalah dua bilangan bulat dengan $a \neq 0$. Jika a tidak habis membagi b, maka tunjukkan bahwa $ax^2 + bx + b - a$ tidak mempunyai akar bulat positif.
6. Tunjukkan jika n^2 tidak habis dibagi 4, maka n adalah bilangan ganjil.
7. Diketahui p adalah sebuah bilangan bulat positif. Apabila tidak terdapat bilangan bulat m dengan $1 < m \leq \sqrt{p}$ sehingga m adalah faktor dari p, maka buktikan bahwa p adalah bilangan prima.
8. Diberikan bilangan bulat n dan p. Tunjukkan jika $n^2(p^2 - 2p)$ adalah bilangan ganjil, maka n dan p keduanya adalah bilangan ganjil.
9. Diberikan $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan jika $xy^4 + x^3 \geq y^5 + x^2y$, maka $y \leq x$.
10. Buktikan apabila bilangan real x memenuhi $x^5 + 7x^3 + 5x \geq x^4 + x^2 + 8$, maka $x \geq 0$.

2.2.2 Metode Kontradiksi

Metode kontradiksi dikenal juga dengan nama metode *reductio ad absurdum*. Dalam metode ini akan dibuktikan pernyataan $P \Rightarrow Q$ dengan jalan menunjukkan bahwa P dan $\overline{Q}$ berakibat suatu kemustahilan. Metode kontradiksi didasarkan pada hukum ketidakmungkinan kontradiksi (*law of noncontradiction*) yang dikemukakan oleh Aristoteles. Hukum ini mengatakan bahwa sebuah pernyataan matematis tidak mungkin bernilai benar dan salah sekaligus .

Contoh 2.2.5. *Jika a sebuah bilangan real dan $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$.*

Penyelesaian. Andaikan $\frac{1}{a} > 0$ salah, maka yang berlaku adalah $\frac{1}{a} \leq 0$. Karena diketahui $a > 0$, maka $a.\frac{1}{a} \leq 0$. Hal ini berakibat $1 \leq 0$. Kontradiksi dengan fakta bahwa $1 > 0$. Jadi, pengandaian salah dan terbukti $\frac{1}{a} > 0$. ◆

Contoh 2.2.6. Tunjukkan bahwa untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$ berlaku

$$1 - \sin\theta \geq \frac{1}{2}\cos^2\theta.$$

Penyelesaian. Andaikan ada $\theta \in \mathbb{R}$ sehingga $1 - \sin\theta < \frac{1}{2}\cos^2\theta$. Dari sini kita memperoleh

$$\begin{aligned}
2 - 2\sin\theta &< \cos^2\theta \\
2 - 2\sin\theta - \cos^2\theta &< 0 \\
2 - 2\sin\theta - 1 + \sin^2\theta &< 0 \\
\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 &< 0 \\
(\sin\theta - 1)^2 &< 0.
\end{aligned}$$

Kontradiksi dengan fakta bahwa $x^2 \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. ◆

Contoh 2.2.7. *Diberikan bilangan-bilangan bulat m dan n. Jika m^2+n^2 adalah bilangan genap, maka $m+n$ adalah bilangan genap.*

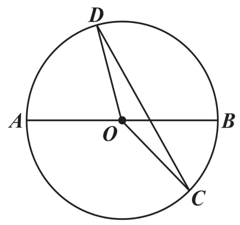
Penyelesaian. Andaikan $m+n$ adalah bilangan ganjil. Maka $(m+n)^2 = (m+n)(m+n)$ adalah bilangan ganjil (dapat dibuktikan dengan mudah menggunakan bukti langsung bahwa hasilkali dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil). Di lain pihak $(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$ adalah bilangan genap (karena $2mn$ adalah bilangan genap dan dari yang diketahui m^2+n^2 adalah bilangan genap). Sebagai akibatnya $(m+n)^2$ adalah bilangan genap dan sekaligus bilangan ganjil, suatu kemustahilan. Dengan demikian pengandaian salah dan terbukti $m + n$ adalah bilangan genap. ◆

Contoh 2.2.8. *Buktikan bahwa diameter adalah talibusur terpanjang dari sebuah lingkaran.*

Penyelesaian. Soal di atas dapat ditulis ulang menjadi

> Tidak ada talibusur dari sebuah lingkaran yang lebih panjang dari diameter.

Andaikan ada sebuah talibusur dari lingkaran, katakan AC, yang lebih panjang dari diameter lingkaran. Kita buat diameter lingkaran AB. Perhatikan bahwa sudut $\angle ACB$ besarnya adalah 90^o sebab $\angle ACB$ adalah sudut keliling yang menghadap sudut pusat setengah lingkaran (180^o). Dari sini kita memperoleh segitiga siku-siku ABC dengan panjang sisi miring AB lebih kecil dari panjang sisi tegak AC. Kontradiksi.
Bukti alternatif: Soal di atas dapat juga diselesaikan dengan bukti langsung sebagai berikut.



Gambar 11

Dibuat lingkaran dengan pusat O, diameter AB, dan sebarang talibusur yang bukan diameter CD. Akan ditunjukkan $AB > CD$. Karena CD bukan diameter, maka C, D, dan O tidak segaris. Oleh karena itu kita mempunyai segitiga ODC dan ketaksamaan segitiga memberikan $CO + OD > CD$. Mengingat AO, BO, CO, dan DO semuanya adalah jari-jari lingkaran, maka $AO = BO = CO = DO$. Dari sini berlaku

$$AB = AO + OB \quad \Longleftrightarrow \quad AB = CO + OD$$

dan kita memperoleh $AB > CD$. ◆

Contoh 2.2.9. *Buktikan bahwa tidak ada sukubanyak*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

dengan koefisien-koefisien bilangan bulat dan derajat sekurang-kurangnya 1 dengan sifat $P(0)$*,* $P(1)$*,* $P(2)$*, …, semuanya adalah bilangan prima.*

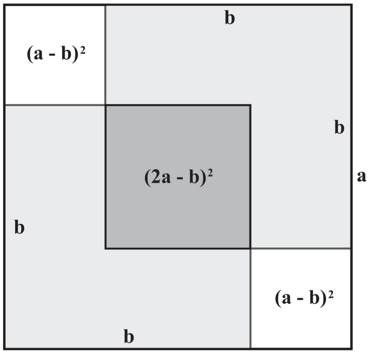
Penyelesaian. Andaikan pernyataan yang hendak dibuktikan tidak benar dan $P(0) = p$ untuk suatu bilangan prima p. Jadi, $a_0 = p$ dan

$P(kp)$ habis dibagi p untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena kita asumsikan bahwa semua bilangan ini adalah bilangan prima, maka $P(kp) = p$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Hal ini berakibat $P(x)$ mempunyai nilai yang sama untuk takhingga banyak x, sebuah kontradiksi. ◆

Contoh 2.2.10. *$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.*

Penyelesaian. Andaikan $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Jadi terdapat bilangan-bilangan bulat p dan q sehingga $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, yakni $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Kita dapat mengasumsikan bahwa p dan q positif dan tidak mempunyai faktor persekutuan selain 1 (mengapa?). Karena $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, maka $p^2 = 2q^2$, dan ini berarti bahwa p^2 adalah bilangan genap. Hal ini berakibat bahwa p juga genap (lihat Contoh 2.2.1). Mengingat bahwa p dan q tidak mempunyai faktor persekutuan selain 1, maka q haruslah bilangan ganjil. Karena p genap, sebut $p = 2l$ untuk suatu $l \in \mathbb{N}$, maka $p^2 = 2q^2$ berakibat $2l^2 = q^2$. Dari sini diperoleh bahwa q^2 genap dan akibatnya q juga genap. Kita memperoleh bahwa q adalah bilangan ganjil sekaligus bilangan genap, sebuah kontradiksi.

Bukti alternatif: Sekarang kita lihat sebuah bukti geometris yang diberikan oleh Stanley Tennenbaum pada tahun 1950-an:



Gambar 12

Andaikan $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Jadi, kita dapat menulis $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan bulat positif a dan b. Kita memperoleh $a^2 = 2b^2$.

Kita bentuk dua persegi dengan panjang sisi masing-masing a dan b dengan sifat luas salah satu persegi adalah dua kali luas persegi lainnya. Kita letakkan dua persegi dengan luas yang lebih kecil di dalam persegi dengan luas yang lebih besar, seperti pada Gambar 12. Luas persegi irisan di tengah sama dengan jumlah luas dua persegi kecil di ujung-ujung diagonal persegi besar, yakni $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$. Perhatikan bahwa persegi-persegi yang terletak pada diagonal ini mempunyai panjang sisi-sisi berupa bilangan bulat positif yang lebih kecil dari panjang sisi persegi-persegi semula. Dengan mengulang proses ini kita akan mendapatkan pasangan-pasangan persegi dengan luas sebarang kecil dan luas salah satu persegi adalah dua kali luas persegi lainnya (sebuah fenomena *infinite descent*). Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa bilangan bulat positif tidak mungkin kurang dari 1. ◆

Contoh berikutnya mengilustrasikan penggunaan beberapa metode kontradiksi di dalam satu masalah.

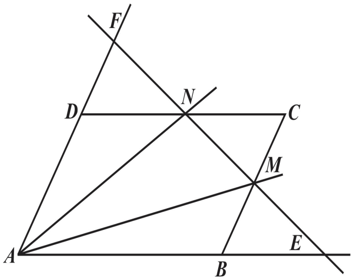
Contoh 2.2.11. *Jika m dan n adalah dua bilangan bulat ganjil, maka tunjukkan bahwa persamaan $x^2 + 2mx + 2n = 0$ tidak mempunyai akar rasional.*

Penyelesaian. Andaikan persamaan $x^2 + 2mx + 2n = 0$ mempunyai akar rasional, katakan $x = \dfrac{p}{q}$ dengan salah satu dari p dan q adalah bilangan ganjil dan $q \neq 0$. Dari sini kita memperoleh bahwa q haruslah bilangan ganjil, sebab kalau tidak demikian $p^2 = -2mqp - 2q^2n$, yang memberikan p^2, dan juga p, adalah bilangan genap. Selanjutnya perhatikan bahwa jika m' dan n' adalah bilangan bulat ganjil, maka $y^2 + 2m'y + 2n' = 0$ tidak memiliki akar yang berupa bilangan ganjil. Andaikan y adalah sebuah akar ganjil, maka y^2 adalah bilangan ganjil tetapi di lain pihak $y^2 = -2m'y - 2n'$ adalah bilangan genap, sebuah kontradiksi. Lebih lanjut, $y^2 + 2m'y + 2n' = 0$ juga tidak mempunyai akar berupa bilangan genap. Andaikan y adalah sebuah akar genap, maka $y = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Hal ini berakibat $4k^2 + 4m'k + 2n' = 0$, yakni $2k^2 + 2m'k + n' = 0$. Hal ini menimbulkan kontradiksi sebab $2k^2 + 2m'k$ adalah genap dan n' adalah ganjil. Karena $x = \dfrac{p}{q}$ memenuhi $x^2 + 2mx + 2n = 0$, maka p memenuhi

$y^2 + 2m'y + 2n' = 0$ dengan $m' = mq$ ganjil dan $n' = nq^2$ yang juga ganjil. Kontradiksi. ◆

Contoh 2.2.12. *Titik M dan N berturut-turut merupakan titik tengah sisi BC dan DC dari jajargenjang ABCD. Apakah garis AM dan AN membagi sudut $\angle BAD$ menjadi tiga bagian yang sama besar?*

Penyelesaian. Tidak! Perhatikan gambar berikut.



Gambar 13

Andaikan AM dan AN membagi sudut $\angle BAD$ menjadi tiga bagian sama besar serta misalkan MN memotong perpanjangan AB di E dan perpanjangan AD di F. Dari sini diperoleh $\angle FND = \angle CNM$ dan $\angle FDN = \angle NCM$ sebab AF sejajar dengan BC dan $DN = NC$. Sebagai akibatnya segitiga FDN kongruen dengan segitiga MCN. Kita mendapatkan $FN = NM$. Sekarang pandang segitiga AFM. AN adalah garis bagi sudut $\angle FAM$ sekaligus garis berat sisi FM. Jadi, $AF = AM$ dan $AN \perp FM$. Dengan cara yang sama diperoleh $AM \perp NE$. Jadi, ada dua sudut siku-siku di dalam segitiga AMN. Kontradiksi. ◆

Contoh 2.2.13. *Buktikan bahwa* $\cos 1^o$ *adalah bilangan irasional.*

Penyelesaian. Andaikan $\cos 1^o$ adalah bilangan rasional. Kita notasikan $z = \cos 1^o + i \sin 1^o$. Jelas bahwa $|z| = 1$, yang berarti $z\bar{z} = 1$. Dari sini kita memperoleh $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Jadi, $z + \frac{1}{z} = 2\cos 1^o$ adalah bilangan rasional. Rumus Euler memberikan $z^{45} + \frac{1}{z^{45}} = 2\cos 45^o = \sqrt{2}$, yakni sebuah bilangan irasional. Kontradiksi. ◆

Latihan Soal 2.2.2.

1. Apabila m, n dua bilangan asli dengan $m+n \geq 20$, maka buktikan $m \geq 10$ atau $n \geq 10$.
2. Tunjukkan bahwa lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ dan garis $x - y + 4 = 0$ tidak berpotongan.
3. Buktikan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ jika $x^2 \geq x$, maka $x \leq 0$ atau $x \geq 1$.
4. Diberikan bilangan bulat x dan bilangan prima p. Buktikan jika p habis membagi x, maka p tidak habis membagi $x + 1$.
5. Diberikan bilangan asli n dan bilangan prima p. Buktikan jika p habis membagi n^2, maka p habis membagi n.
6. Jika a dan b adalah dua bilangan bulat dengan b adalah bilangan genap, maka tunjukkan bahwa ± 1 bukan akar dari sukubanyak $p(x) = ax^4 + bx^2 + a$.
7. Diberikan bilangan-bilangan real a, b, c dengan $c \neq 0$. Tunjukkan jika cx^2+bx+a tidak mempunyai akar rasional, maka ax^2+bx+c juga tidak mempunyai akar rasional.
8. Buktikan bahwa bilangan-bilangan berikut adalah bilangan irasional:
$$\sqrt{2} - 1, \qquad \sqrt{3}, \qquad {}^2\log 5.$$
9. Buktikan bahwa $\sqrt{30}$ adalah bilangan irasional. Selanjutnya, buktikan juga bahwa $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ adalah bilangan irasional.
10. Tunjukkan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $4x - x^4 \leq 3$.
11. Buktikan bahwa di sebuah pesta dengan $n \geq 2$ orang yang hadir, terdapat sekurang-kurangnya dua orang yang memiliki banyak teman yang sama di dalam pesta tersebut.
12. Buktikan jika $n = k^3 + 1 \geq 3$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$, maka n bukan bilangan prima.
13. Jika x dan y adalah dua bilangan real taknol, maka tunjukkan bahwa sekurang-kurangnya satu dari dua ketaksamaan berikut berlaku
$$\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + 2y^2}}{2y}\right| < 1 \quad \text{atau} \quad \left|\frac{x - \sqrt{x^2 + 2y^2}}{2y}\right| < 1.$$

14. Buktikan bahwa tidak ada fungsi injektif $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan sifat untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}.$$

15. Tunjukkan bahwa tidak ada sukubanyak $p(x)$ dengan koefisien-koefisien bilangan bulat sehingga $p(1) = 3$ dan $p(3) = 2$.
16. Diberikan persegi $ABCD$ dan P adalah sebuah titik di dalam persegi sehingga $\angle PCD = \angle PDC = 15^o$. Buktikan bahwa ΔPAB adalah sebuah segitiga samasisi.
17. Jika $f(x)$ adalah sebuah sukubanyak dengan koefisien-koefisien bulat dan misalkan $f(1)$ dan $f(2)$ keduanya adalah bilangan ganjil, maka buktikan bahwa $f(x)$ tidak mempunyai akar bulat.
18. Tunjukkan bahwa fungsi

$$f(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right)$$

bukan fungsi periodik.
19. Buktikan bahwa sukubanyak $p(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 1998$ tidak dapat dituliskan sebagai hasil perkalian dua sukubanyak berderajat dua dengan koefisien-koefisien bilangan bulat.
20. Diberikan bilangan real x dan y sehingga $x - y \notin \mathbb{Z}$. Dibentuk dua himpunan $A = \{x + n : n \in \mathbb{N}\}$ dan $B = \{y + m : m \in \mathbb{N}\}$. Buktikan bahwa A dan B adalah dua himpunan yang saling asing.
21. Diberikan a adalah sebuah bilangan real positif. Buktikan bahwa terdapat bilangan real x_0 sehingga $x_0^2 = a$.
22. Buktikan bahwa deret harmonik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergen.
23. Untuk setiap tiga fungsi $f, g, h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, buktikan ada bilangan-bilangan real $x, y, z \in [0, 1]$ sehingga

$$|f(x) + g(y) + h(z) - xyz| \geq \frac{1}{3}.$$

24. Diketahui a, b, dan c adalah tiga bilangan asli yang merupakan panjang tiga sisi dari sebuah segitiga siku-siku dengan c adalah panjang sisi miring dan $\text{fpb}\{a, b, c\} = 1$. Buktikan bahwa salah satu dari a dan b adalah bilangan genap sementara yang lainnya ganjil sementara c pasti bilangan ganjil.
25. Diberikan sembilan bangun datar, yang masing-masing luasnya 1 satuan, sehingga gabungannya mempunyai luas 5 satuan. Tunjukkan bahwa ada dua dari sembilan bangun tersebut sehingga irisannya mempunyai luas lebih dari atau sama dengan $\frac{1}{9}$.
26. Jika p adalah faktor prima terkecil dari n dan $p > \sqrt[3]{n}$, maka tunjukkan bahwa $\frac{n}{p}$ adalah bilangan prima.
27. Diberikan f adalah sebuah fungsi dengan sifat:
    (a) $f(n)$ terdefinisi untuk setiap bilangan asli n,
    (b) $f(n)$ adalah bilangan bulat,
    (c) $f(2) = 2$,
    (d) $f(mn) = f(m)f(n)$ apabila $m > n$, dan
    (e) $f(m) > f(n)$ apabila $m > n$.

    Buktikan bahwa $f(n) = n$ untuk setiap bilangan asli n.
28. Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, maka buktikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij \cos\left(a_i - a_j\right) \geq 0.$$

29. Diberikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dengan $f(n) = n(n + 1)$. Tunjukkan bahwa tidak ada $m, n \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $4f(n) = f(m)$.
30. Panjang sisi-sisi sebuah segiempat adalah bilangan bulat positif. Panjang setiap sisi membagi jumlahan panjang ketiga sisi yang lain. Tunjukkan bahwa dua sisi dari segiempat panjangnya sama.
31. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga himpunan $A = \{1, \ldots, m\}$ dapat dipisahkan ke dalam dua subhimpunan P dan Q dengan $P \cup Q = A$, $P \cap Q = \emptyset$, dan hasilkali anggota-anggota P sama dengan hasilkali anggota-anggota Q.
32. Tunjukkan bahwa bilangan-bilangan asli berurutan a, b, dan c yang memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$ hanyalah $a = 3$, $b = 4$, dan $c = 5$.

33. Diberikan sukubanyak

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

dengan koefisien-koefisien bilangan bulat. Jika ada empat bilangan bulat berbeda a, b, c, dan d sehingga $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$, maka buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat k sehingga $P(k) = 8$.
34. Diberikan barisan bilangan asli a_1, a_2, a_3, $\ldots$ yang memenuhi $a_1 = 43$, $a_2 = 142$, dan

$$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Tunjukkan bahwa a_n dan a_{n+1} relatif prima untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
35. Diberikan segitiga ABC dan titik-titik D, E, F terletak di dalam segitiga sehingga berlaku

$$3[DBC] < [ABC], \quad 3[EAC] < [ABC], \quad 3[FAB] < [ABC],$$

dengan $[ABC]$ menyatakan luas segitiga ABC dan seterusnya. Tunjukkan bahwa titik D, E, dan F tidak mungkin ketiganya berhimpit.

2.3 Prinsip Induksi Matematika

Secara historis induksi matematika pertama kali tertulis secara eksplisit pada tahun 1650-an di dalam buku *Treatise on the Arithmetical Triangle* karangan Blaise Pascal. Namun demikian, penggunaan induksi matematika telah muncul secara implisit dalam karya dari seorang rabi Perancis bernama Levi ben Gerson dalam bukunya *The Art of the Calculator* pada tahun 1321. Induksi matematika merupakan sebuah metode pembuktian yang ampuh, khususnya untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berhubungan dengan bilangan asli. Hal ini yang terkait erat dengan fakta bahwa prinsip induksi matematika dapat diturunkan dari sebuah aksioma dasar sistem bilangan asli, yakni prinsip pengurutan baik (*well-ordering principle*).

Teorema 2.3.1 (Prinsip Pengurutan Baik)**.** *Setiap subhimpunan takkosong dari* $\mathbb{N}$ *mempunyai anggota terkecil.*

Prinsip pengurutan baik pada $\mathbb{N}$ dapat dijelaskan sebagai berikut. Jika $S \subseteq \mathbb{N}$, dan jika $S \neq \emptyset$, maka terdapat $m \in S$ sehingga $m \leq k$ untuk setiap $k \in S$. Sebuah contoh penggunaan prinsip pengurutan baik adalah untuk membuktikan algoritma pembagian dalam $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.3.2. *Jika a dan b dua bilangan bulat positif, maka terdapat dengan tunggal bilangan-bilangan bulat q dan r sehingga* $a = bq + r$ *dan* $0 \leq r < b$.

Bukti. Pertama, kita membuktikan bahwa ada bilangan-bilangan bulat q dan r dengan sifat yang diinginkan. Terdapat dua kasus trivial:

1. Jika $a < b$, maka $a = b.0 + a$.
2. Jika $b = 1$, maka $a = 1.a + 0$.

Sekarang kita mengasumsikan bahwa $a \geq b > 1$. Himpunan

$$C = \{k \in \mathbb{N} : bk \geq a\}$$

adalah sebuah himpunan takkosong dari bilangan-bilangan bulat positif. Menurut prinsip pengurutan baik, himpunan C memuat anggota terkecil p. Hal ini berakibat bahwa $b(p-1) < a \leq bp$. Jika $a = bp$, maka dipilih $q = p$ dan $r = 0$. Jika $a \neq bp$, maka dipilih $q = p - 1$ dan $r = a - b(p-1)$. Untuk dua kemungkinan tersebut, bilangan-bilangan bulat q dan r memiliki sifat-sifat yang diinginkan.

Selanjutnya, kita membuktikan ketunggalan dari bilangan-bilangan bulat q dan r. Misalkan terdapat dua penyajian untuk a, yakni

$$bq_1 + r_1 = a = bq_2 + r_2,$$

dengan $0 \leq r_1, r_2 < b$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, kita dapat menganggap bahwa $r_1 \geq r_2$. Hal ini berakibat bahwa $0 \leq r_1 - r_2 < b$ dan

$$0 \leq r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1) < b.$$

Jadi, $0 \leq q_2 - q_1 < 1$. Karena q_1 dan q_2 keduanya adalah bilangan bulat, maka $q_1 = q_2$ dan $r_1 = r_2$. Dengan kata lain, penyajian yang diinginkan untuk a tunggal. $\square$

Dengan menggunakan prinsip pengurutan baik kita dapat membuktikan prinsip induksi matematika. Kata induksi (*induction*) berasal dari kata dalam bahasa latin *inductio* yang berarti perubahan dari hal khusus ke hal yang umum.

Teorema 2.3.3 (Prinsip Induksi Matematika). *Apabila S adalah sebuah subhimpunan dari $\mathbb{N}$ dengan sifat:*

(1) $1 \in S$, dan

(2) untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $k \in S$, maka $k + 1 \in S$,

maka berlaku $S = \mathbb{N}$.

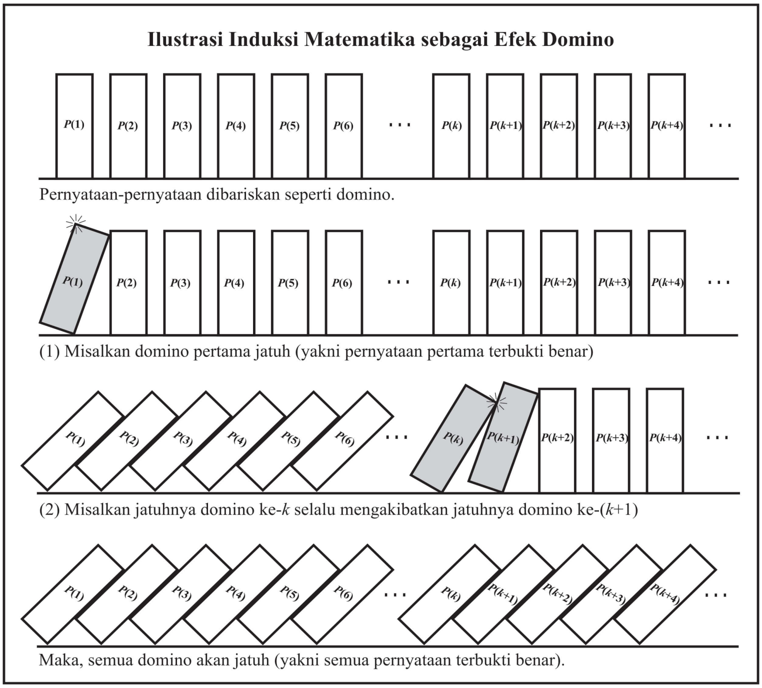
Bukti. Kita andaikan $S \neq \mathbb{N}$, maka himpunan $\mathbb{N} \setminus S$ tidak kosong dan, menurut prinsip pengurutan baik, $\mathbb{N} \setminus S$ mempunyai sebuah anggota terkecil, katakan m. Karena $1 \in S$ (hipotesis (1)), maka $m > 1$. Hal ini berarti $m - 1$ juga adalah bilangan asli. Dengan memperhatikan bahwa $m - 1 < m$ dan m merupakan anggota terkecil di dalam $\mathbb{N}$ sehingga $m \notin S$, maka disimpulkan bahwa $m - 1 \in S$. Kita menerapkan hipotesis (2) pada $k = m - 1 \in S$, dan diperoleh $k + 1 = (m - 1) + 1 = m \in S$. Timbul kontradiksi antara $m \notin S$ dengan $m \in S$. Jadi pengandaian salah dan yang benar $S = \mathbb{N}$. $\square$

Prinsip induksi matematika dapat dirumuskan secara lebih operasional sebagai berikut. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ adalah sebuah pernyataan yang memuat n. Apabila

(1') $P(1)$ benar, dan

(2') untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga benar,

maka $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Dalam $(2')$ asumsi *jika $P(k)$ benar* disebut *hipotesis induksi*. Dalam memperlihatkan $(2')$ berlaku, tidaklah penting memperhatikan kebenaran dari $P(k)$, tetapi yang menjadi fokus utama ialah memperlihatkan kebenaran implikasi jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar. Hal ini yang seringkali disebut sebagai *langkah induksi*.



Gambar 14. Ilustrasi prinsip induksi matematika.

Sekarang kita berikan beberapa contoh penggunaan prinsip induksi matematika.

Contoh 2.3.4. *Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, jumlahan n bilangan asli yang pertama diberikan oleh*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Penyelesaian. Untuk membuktikan rumus ini, kita sebut S adalah himpunan semua bilangan asli n sehingga rumus benar. Kita harus memeriksa kebenaran kondisi (1) dan (2) pada Teorema 2.3.3. Jika $n = 1$, maka diperoleh $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$, yang berarti $1 \in S$, yakni (1) dipenuhi. Selanjutnya diasumsikan bahwa $k \in S$, dan dari asumsi ini harus dibuktikan bahwa $k+1 \in S$. Apabila $k \in S$, maka

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Apabila pada kedua ruas kesamaan di atas ditambahkan $k + 1$, didapatkan

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{1}{2}k(k + 1) + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2).$$

Ini merupakan rumus yang diberikan untuk $n = k + 1$, jadi dapat kita simpulkan bahwa $k+1 \in S$. Dengan kata lain kondisi (2) pada Teorema 2.3.3 dipenuhi. Jadi, menurut prinsip induksi matematika, berlaku $S = \mathbb{N}$, yakni rumus di atas berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ◆

Contoh 2.3.5. *Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku*

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}.$$

Penyelesaian. Pertama, kita periksa kebenaran rumus untuk $n = 1$, yakni

$$\frac{1}{(3 \cdot 1 - 1)(3 \cdot 1 + 2)} = \frac{1}{10} = \frac{1}{6 \cdot 1 + 4}.$$

Kemudian kita asumsikan bahwa rumus benar untuk $n = k$ dan kita menunjukkan kebenaran rumus untuk $n = k + 1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} + \frac{1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)} \\
&= \frac{k}{6k+4} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} \\
&= \frac{3k^2+5k+2}{(6k+4)(3k+5)} \\
&= \frac{(3k+2)(k+1)}{(6k+4)(3k+5)} \\
&= \frac{k+1}{6(k+1)+4}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian menurut prinsip induksi matematika, rumus di atas benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ◆

Contoh 2.3.6. *Diberikan barisan Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *yakni* $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, *dan* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *untuk* $n \geq 1$. *Buktikan bahwa* F_{5n} *habis dibagi 5 untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Penyelesaian. Untuk $n = 1$ dan $n = 2$ pernyataan benar sebab $F_5 = 5$ dan $F_{10} = 55$ keduanya habis dibagi 5. Sekarang kita asumsikan pernyataan benar untuk $n = k$. Selanjutnya, untuk $n = k + 1$ kita memperoleh

$$\begin{aligned} F_{5(k+1)} &= F_{5k+5} \\ &= F_{5k+4} + F_{5k+3} \\ &= F_{5k+3} + F_{5k+2} + F_{5k+2} + F_{5k+1} \\ &= F_{5k+2} + F_{5k+1} + 2\left(F_{5k+1} + F_{5k}\right) + F_{5k+1} \\ &= F_{5k+1} + F_{5k} + 4F_{5k+1} + 2F_{5k} \\ &= 5F_{5k+1} + 2F_{5k}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $5F_{5k+1}$ habis dibagi 5 dan $2F_{5k}$ habis dibagi 5 dari hipotesis induksi, dan sebagai akibatnya $F_{5(k+1)}$ juga habis dibagi 5. Dengan demikian menurut prinsip induksi matematika, pernyataan benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ◆

Contoh 2.3.7. *Buktikan jika* $\cos(\pi a) = \frac{1}{3}$, *maka* $a \notin \mathbb{Q}$.

Penyelesaian. Andaikan $a \in \mathbb{Q}$, katakan $a = \frac{m}{n}$. Jadi, $\cos(na\pi) = \pm 1$. Kita akan buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\cos(na\pi) = \frac{m_n}{3^n},$$

dengan m_n adalah sebuah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 3. Hal ini akan mengakibatkan kontradiksi dengan pengandaian. Pernyataan benar untuk $n = 0$ dan $n = 1$. Kita asumsikan pernyataan benar untuk $n = k$. Untuk $n = k + 1$ kita memperoleh

$$\cos((k+1)a\pi) = 2\cos(a\pi)\cos(ka\pi) - \cos((k-1)a\pi), \quad k \geq 1.$$

Dengan menggunakan hipotesa induksi, kita memperoleh

$$\cos((k+1)a\pi) = \frac{m_{k+1}}{3^{k+1}}$$

dengan $m_{k+1} = 2m_k - 3m_{k-1}$. Karena m_k tidak habis dibagi 3, maka m_{k+1} juga tidak habis dibagi 3, dan terbuktilah hal yang diinginkan. ◆

Seringkali sebuah pernyataan $P(n)$ tidak benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$, tetapi hanya benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$, dengan n_0 adalah sebuah bilangan asli tertentu. Dalam hal ini kita memperumum prinsip induksi matematika sebagai berikut:

Teorema 2.3.8 (Prinsip Induksi Umum). *Apabila $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $P(n)$ adalah sebuah pernyataan untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ dengan sifat*

(1) $P(n_0)$ benar, dan

(2) untuk setiap $k \geq n_0$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar,

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$.

Bilangan asli n_0 di dalam teorema di atas disebut *basis induksi*.

Contoh 2.3.9. *Ketaksamaan $2^n > 2n+1$ tidak benar untuk $n = 1$ dan $n = 2$, tetapi benar untuk untuk $n = 3$. Apabila diasumsikan bahwa $2^k > 2k+1$, maka kita memperoleh*

$$2^{k+1} > 2(2k+1) = 4k+2 = 2k+(2k+2) > 2k+3 = 2(k+1)+1.$$

Karena $2k+2 > 3$ berlaku untuk setiap $k \geq 1$, maka langkah induksi di atas benar untuk setiap $k \geq 1$ (namun pernyataan tidak benar untuk $k = 1, 2$). Oleh karena itu, dengan menggunakan basis induksi $n_0 = 3$, kita dapat menggunakan prinsip induksi umum untuk menyimpulkan bahwa ketaksamaan $2^n > 2n+1$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Contoh 2.3.10. *Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$ berlaku*

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

Penyelesaian. Permasalahan di atas setara dengan membuktikan

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

Kita akan buktikan pernyataan terakhir dengan menggunakan prinsip induksi umum, yakni dengan basis induksi $n = 2$. Untuk $n = 2$ diperoleh

$$2\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} > 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}.$$

Selanjutnya kita asumsikan pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu

$$k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right) > (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right), \quad k \geq 2.$$

Sekarang kita buktikan pernyataan untuk $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
&(k+1)\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+}\right)\\
&= k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1}\\
&= k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1}\\
&> k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1}\\
&> k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+1}{2k+2}+\frac{1}{2k+2}\\
&> (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}\\
&= (k+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}\right). \blacklozenge
\end{aligned}$$

Sebuah versi lain dari prinsip induksi matematika yang seringkali digunakan adalah prinsip induksi di mana dalam hipotesis induksi kita tidak hanya mengasumsikan kebenaran pernyataan untuk suatu bilangan asli k, tetapi kita mengasumsikan bahwa pernyataan benar untuk semua bilangan asli yang kurang dari atau sama dengan k.

Teorema 2.3.11 (Prinsip Induksi Kuat). *Jika S adalah sebuah himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ sehingga*
(1”) $1 \in S$, *dan*
(2”) untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, *jika* $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq S$, *maka* $k + 1 \in S$,
maka $S = \mathbb{N}$.

Bukti. Bukti cukup jelas dengan menggunakan prinsip induksi matematika (Teorema 2.3.3) sebab jika $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq S$, maka $k \in S$. □

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan prinsip induksi kuat.

Contoh 2.3.12. *Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan bilangan real x_n dengan*

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad dan \quad x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), n \in \mathbb{N}.$$

Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Penyelesaian. Perhitungan langsung memberikan

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{7}{4}, x_5 = \frac{13}{8}, \ldots$$

Untuk $n = 1$ diperoleh

$$x_3 = x_{2.1+1} = 1 + \frac{1}{2^{2.1-1}} = \frac{3}{2}.$$

Kita asumsikan rumus benar untuk $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Sekarang kita akan membuktikan kebenaran rumus untuk $n = k + 1$. Dari definisi kita dapatkan $x_{2k+3} = \frac{1}{2}(x_{2k+2} + x_{2k+1})$, $x_{2k+2} = \frac{1}{2}(x_{2k+1} + x_{2k})$, dan $x_{2k+1} = \frac{1}{2}(x_{2k} + x_{2k-1})$. Hal ini berakibat $x_{2k+2} = \frac{3}{2}x_{2k+1} - \frac{1}{2}x_{2k-1}$ dan

$x_{2k+3} = \frac{5}{4}x_{2k+1} - \frac{1}{4}x_{2k-1}$. Jadi,

$$x_{2(k+1)+1} = \frac{5}{4}x_{2k+1} - \frac{1}{4}x_{2(k-1)+1}.$$

Dengan menggunakan hipotesis induksi, yakni kebenaran rumus untuk $n = k$ dan $n = k-1$, kita memperoleh

$$\begin{aligned}
x_{2(k+1)+1} &= \frac{5}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}} + \frac{1}{2^{2k-1}}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}} + \frac{1}{2^{2k-1}}\right) + \frac{5}{4}\frac{1}{2^{2k-1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}} + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k+1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2(k-1)-1}} + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2(k+1)-1}}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian menurut prinsip induksi kuat pernyataan benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. ◆

Contoh 2.3.13. *Diberikan $\alpha \in \mathbb{R}$ sehingga $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Buktikan bahwa*

$$\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Penyelesaian. Untuk $n = 1$ kita memperoleh $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$ menurut yang diketahui. Sekarang untuk setiap $n \leq k$ kita asumsikan $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$. Secara khusus, kita mempunyai $\alpha^{k-1} + \frac{1}{\alpha^{k-1}} \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} \in \mathbb{Z}$. Sekarang untuk $n = k+1$ berlaku

$$\alpha^{k+1} + \frac{1}{\alpha^{k+1}} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k}\right) - \left(\alpha^{k-1} + \frac{1}{\alpha^{k-1}}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Menurut prinsip induksi kuat terbuktilah yang diinginkan. ◆

Contoh 2.3.14. *Buktikan jika* x_1 *dan* x_2 *adalah akar-akar dari persamaan* $x^2 - 6x + 1 = 0$*, maka* $x_1^n + x_2^n$ *adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi* 5 *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Penyelesaian. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan $x^2 - 6x + 1 = 0$, maka $x_1 + x_2 = 6$ dan $x_1 x_2 = 1$. Jadi, untuk $n = 1$ terbukti $x_1 + x_2$ adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 5. Untuk $n = 2$,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6^2 - 1 = 34$$

juga merupakan bilangan bulat yang tidak habis dibagi 5. Kita asumsikan $x_1^n + x_2^n$ adalah bilangan bulat untuk semua $n \leq k - 1$. Untuk $n = k$ berlaku

$$\begin{aligned} x_1^k + x_2^k &= (x_1 + x_2)\left(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}\right) - x_1 x_2\left(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}\right) \\ &= 6\left(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}\right) - \left(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}\right) \\ &= 5\left(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}\right) + \left(\left(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}\right) - \left(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}\right)\right). \end{aligned}$$

Dari hipotesis induksi $x_1^{k-1} + x_2^{k-1}$ dan $x_1^{k-2} + x_2^{k-2}$ adalah bilangan bulat, yang berarti $x_1^k + x_2^k$ juga merupakan bilangan bulat. Prinsip induksi kuat memberikan bahwa $x_1^n + x_2^n$ adalah bilangan bulat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x_1^n + x_2^n$ tidak habis dibagi 5 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Andaikan m adalah bilangan asli terkecil sehingga $x_1^m + x_2^m$ habis dibagi 5. Perhitungan di awal memberikan $m > 2$. Dari langkah pengerjaan di atas kita memperoleh

$$x_1^m + x_2^m = 5\left(x_1^{m-1} + x_2^{m-1}\right) + \left(\left(x_1^{m-1} + x_2^{m-1}\right) - \left(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}\right)\right).$$

Dari sini kita memperoleh $\left(x_1^{m-1} + x_2^{m-1}\right) - \left(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}\right)$ juga habis dibagi 5. Perhatikan untuk bilangan asli $m - 1$ kita mempunyai

$$x_1^{m-1} + x_2^{m-1} = 5\left(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}\right) + \left(\left(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}\right) - \left(x_1^{m-3} + x_2^{m-3}\right)\right).$$

Dengan kata lain,

$$x_1^{m-3} + x_2^{m-3} = 5\left(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}\right) + \left(\left(x_1^{m-2} + x_2^{m-2}\right) - \left(x_1^{m-1} + x_2^{m-1}\right)\right).$$

Hal ini berakibat $x_1^{m-3} + x_2^{m-3}$ habis dibagi 5. Kontradiksi dengan m adalah bilangan asli terkecil sehingga $x_1^m + x_2^m$ habis dibagi 5. Terbuktilah yang diinginkan. ◆

Contoh 2.3.15. *Tunjukkan bahwa setiap barang yang harganya lebih dari 7 dollar selalu dapat dibayar dengan sejumlah uang logam 3 dollar atau sejumlah uang logam 5 dollar atau kombinasi keduanya.*

Penyelesaian. Pernyataan benar untuk basis induksi $k = 8$ sebab $8 = 3+5$. Kita asumsikan pernyataan benar untuk $k \geq 8$, yaitu setiap barang yang harganya lebih dari atau sama dengan 8 dollar selalu dapat dibayar dengan sejumlah uang logam 3 dollar atau sejumlah uang logam 5 dollar atau kombinasi keduanya. Kita perhatikan dua kasus:

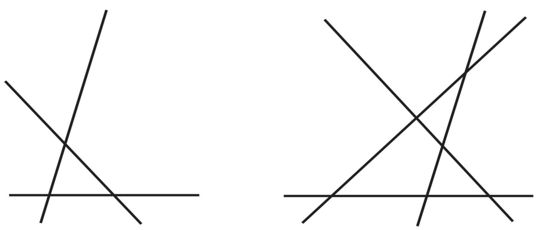
1. Jika $k-5 \geq 8$, maka menurut hipotesis induksi $k-5$ dapat dibayar dengan cara tersebut dan untuk barang dengan harga $k + 1$ kita mempunyai
$$k + 1 = (k - 5) + 3 + 3.$$
2. Jika $k - 5 < 8$, maka $k + 1 < 14$. Dari sini kita cukup memeriksa beberapa nilai yakni $k + 1 = 9, 10, 11, 12, 13$. Lebih jelasnya,
   (a) $9 = 3 + 3 + 3$
   (b) $10 = 5 + 5$
   (c) $11 = 3 + 3 + 5$
   (d) $12 = 3 + 3 + 3 + 3$
   (e) $13 = 5 + 5 + 3$.

Dengan demikian, prinsip induksi kuat memberikan kebenaran pernyataan untuk setiap $k > 7$. ◆

Induksi matematika adalah metode yang sangat bermanfaat untuk memverifikasi suatu hipotesis atau rumus yang diberikan. Di sisi lain, keterbatasan dari induksi matematika adalah prinsip tidak membantu kita untuk mendapatkan ide dari hipotesis tersebut. Untuk mendapatkan ide kita banyak menggunakan intuisi dan juga pengalaman.

Contoh 2.3.16. *Beberapa garis di bidang kita katakan berada dalam posisi umum apabila tidak ada dua garis yang sejajar dan tidak ada tiga garis yang konkuren (berpotongan di satu titik). Jika diberikan n garis di bidang dalam posisi umum berapa banyak daerah yang terbentuk yang mempartisi bidang?*

Penyelesaian. Kita notasikan dengan $S(n)$ banyaknya daerah di bidang yang terbentuk oleh n garis dalam posisi umum. Kita melakukan pengamatan melalui nilai-nilai n yang kecil. Kita gambar satu garis pada bidang dan kita peroleh $S(1) = 2$. Apabila kita tambah satu garis lagi kita mendapatkan $S(2) = 4$. Tambahan lagi satu garis memberikan $S(3) = 7$. Empat garis menghasilkan $S(4) = 11$.



$S(3) = 7$ $\qquad$ $S(4) = 11$

Gambar 15

Kita tuliskan hasil pengamatan ini dalam bentuk tabel

Banyaknya garis n	$S(n)$	Selisih $S(n) - S(n-1)$
1	2	
2	4	2
3	7	3
4	11	4

Kita mengamati pola dan memperoleh

$$S(n) = S(n-1) + n.$$

Ingat bahwa

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

yang berarti jika $T(n) = 1 + 2 + \cdots + n$, maka relasi yang sama berlaku yakni $T(n) = T(n-1) + n$. Sekarang kita periksa *dugaan* kita yaitu

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$:

n	$S(n)$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
1	2	1
2	4	3
3	7	6
4	11	10

Dugaan kita ternyata salah, tetapi dari tabel terakhir ini kita melihat bahwa $S(n)$ dan $\dfrac{n(n+1)}{2}$ hanya berselisih 1. Jadi, dugaan kita sekarang adalah

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

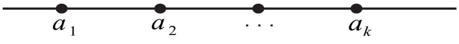
Kita buktikan dugaan ini dengan menggunakan induksi matematika. Pernyataan jelas benar untuk $n = 1$. Kita asumsikan sekarang pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu k garis dalam posisi umum akan membagi bidang ke dalam

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1$$

daerah. Selanjutnya, kita akan buktikan untuk $n = k+1$. Diberikan $k+1$ garis dalam posisi umum. Jika kita menghilangkan satu garis, katakan L, maka dari hipotesis induksi, k garis yang tersisa akan mempartisi bidang ke dalam

$$S(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

daerah. Karena ada $k + 1$ garis dalam posisi umum, maka k garis selain L akan memotong garis L di k titik yang berbeda: $a_1, a_2, \ldots, a_k$.



Gambar 16

Catat bahwa k titik ini membagi garis L ke dalam $k + 1$ selang. Masing-masing selang akan membagi satu daerah partisi dari bidang oleh k garis ke dalam dua daerah baru. Jadi, dari $k + 1$ daerah lama kita akan mendapatkan $2(k + 1)$ daerah baru, yakni

$$S(k+1) = S(k) + (k+1).$$

Dengan demikian,

$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

Dengan kata lain, dugaan kita benar untuk $n = k+1$. Kesimpulan kita adalah n garis dalam posisi umum akan mempartisi bidang ke dalam

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

daerah. ◆

Penggunaan metode induksi matematika yang tidak tepat (sembrono) dapat berakibat pada pengambilan kesimpulan yang salah.

Contoh 2.3.17. ***Akan dibuktikan****: Semua kuda mempunyai warna yang sama.*

Bukti*: Misalkan $n \in \mathbb{N}$ adalah banyaknya kuda. Apabila $n = 1$, pernyataan jelas benar, yakni satu kuda mempunyai warna yang sama, apapun warna itu. Sekarang diasumsikan bahwa setiap himpunan k kuda mempunyai warna yang sama. Selanjutnya diperhatikan kelompok $k+1$ kuda. Pilih sebarang k dari mereka (kita sebut himpunan k kuda ini sebagai K), maka menurut hipotesis induksi k kuda ini berwarna sama, katakan hitam. Satu kuda yang tidak terpilih, sebut x, akan ditentukan warnanya. Kemudian, pilih sebarang kelompok k kuda yang memuat x. Himpunan baru ini kita sebut K'. Dengan menggunakan hipotesis induksi sekali lagi, semua kuda di dalam himpunan K' berwarna sama (termasuk x). Dengan demikian, menurut prinsip induksi matematika, terbukti semua kuda berwarna sama.*

Klaim di atas tentu saja secara faktual salah karena pada kenyataannya terdapat kuda-kuda yang berbeda warna. Kesalahan pada "pembuktian" di atas adalah langkah induksi tidak benar ketika untuk membuktikan dari $n = 1$ ke $n = 2$. Dalam kasus ini, himpunan K dan K' tidak mempunyai anggota persekutuan, sehingga kita tidak dapat menggunakan hipotesis induksi untuk menyimpulkan bahwa kedua kuda mempunyai warna yang sama.

Sekarang kita akan menggunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketaksamaan AM-GM. Sebelumnya kita memerlukan sifat berikut.

Lema 2.3.18 (Ketaksamaan Young)**.** *Diberikan bilangan real positif p dan q yang memenuhi*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Untuk setiap bilangan real taknegatif x dan y berlaku

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Bukti. Jika $x = 0$ atau $y = 0$, maka ketaksamaan jelas dipenuhi. Sekarang kita asumsikan $x > 0$ dan $y > 0$. Kita pilih sebuah $y > 0$ tetap dan kita bentuk sebuah fungsi f dengan

$$f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$$

untuk setiap $x > 0$. Dengan menggunakan kalkulus (turunan) kita memperoleh pembuat maksimum dari fungsi f adalah $x = y^{1/p-1}$. Jadi berlaku $f(x) \leq f(y^{1/p-1})$ untuk setiap $x > 0$. Mudah dihitung bahwa

$$f(y^{1/p-1}) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) y^{p/p-1}.$$

Dengan mengingat bahwa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, kita dapatkan $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. □

Teorema 2.3.19 (Ketaksamaan AM-GM yang diperumum)**.** *Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x_j \in \mathbb{R}$, $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ berlaku*

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Bukti. Kita buktikan dengan menggunakan induksi matematika. Untuk $n = 1$ rumus benar karena kedua ruas sama dengan x_1. Kita asumsikan ketaksamaan benar untuk $n = k$. Selanjutnya, untuk $n = k + 1$ berlaku

$$\sqrt[k+1]{\prod_{j=1}^{k+1} x_j} = \sqrt[k+1]{\prod_{j=1}^{k} x_j \cdot x_{k+1}} = \left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{\frac{1}{k+1}} (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}$$
$$\leq \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^{\frac{k}{k+1}} (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

Sekarang kita menerapkan ketaksamaan Young (Lema 2.3.18) dengan

$$x = \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^{\frac{k}{k+1}}, \qquad y = (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}, \quad \text{dan} \quad p = \frac{k+1}{k}$$

untuk memperoleh

$$\sqrt[k+1]{\prod_{j=1}^{k+1} x_j} \leq \frac{k}{k+1}\left(\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^{\frac{k}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k}} + \frac{1}{k+1}\left((x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}$$
$$= \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} x_j. \qquad \square$$

Untuk kasus khusus $n = 2$ kita memperoleh: untuk setiap bilangan real positif x dan y berlaku

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y).$$

Contoh 2.3.20. *Apabila a, b, c adalah tiga bilangan real positif maka buktikan bahwa*

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Penyelesaian. Dari ketaksamaan AM-GM kita mempunyai

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \text{ dan } \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) &\geq \sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca} \\
(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{a^2b^2c^2} \\
(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8abc. \blacklozenge
\end{aligned}$$

Contoh terakhir di subbab ini menunjukkan bahwa *tidak semua* pernyataan yang berkaitan dengan bilangan asli memerlukan prinsip induksi matematika di dalam pembuktiannya. Seringkali pembuktian langsung lebih mudah dilakukan.

Contoh 2.3.21. *Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, berlaku*

$$n^3 + 1 > n^2 + 2n.$$

Penyelesaian. Karena $n > 1$, maka $n = m + 1$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Jadi,

$$\begin{aligned}
n^3 + 1 = (m+1)^3 + 1 &= m^3 + 3m^2 + 3m + 2 \\
&> 3m^2 + 3m + 2 \\
&= (m^2 + 2m^2 + 1) + (2m + m + 1) \\
&\geq (m^2 + 2m + 1) + (2m + 2) \\
&\geq (m+1)^2 + 2(m+1) \\
&= n^2 + 2n. \blacklozenge
\end{aligned}$$

Latihan Soal 2.3.

1. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

2. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}.$$

3. Buktikan apabila $a \in \mathbb{R}$ dan $r \neq 1$, maka berlaku

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = a\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

4. Diberikan bilangan bulat positif k. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k-1) = \frac{(k+n)!}{(k+n)(n-1)!}.$$

5. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n}.$$

6. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\prod_{j=1}^{n} \cos\frac{x}{2^j} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}, \quad 0 < x < \pi.$$

7. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

8. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

9. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

selalu habis dibagi 133.

10. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$7^{2n} - 2352n - 1$$

habis dibagi 2304, dengan menggunakan:
   (a) prinsip induksi matematika.
   (b) pemfaktoran melalui binomial Newton.
11. Tunjukkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15}$$

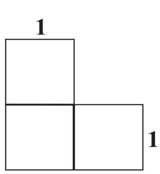
adalah bilangan bulat.
12. Buktikan bahwa $3^{2^n} - 1$ habis dibagi 2^{n+2} tetapi tidak habis dibagi 2^{n+3} untuk setiap bilangan asli n.
13. Tunjukkan untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$5 + 55 + \cdots + \underbrace{55\ldots5}_{n \text{ kali}} = \frac{5}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right).$$

14. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

15. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat bilangan bulat dengan n digit yang habis dibagi 2^n dan digit-digitnya hanya terdiri dari angka 2 dan 3.
16. Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, papan dengan ukuran $2^n \times 2^n$ persegi satuan dengan sebuah persegi satuan di salah satu pojoknya dihilangkan dapat diubini (tanpa tumpang tindih) dengan bangun berbentuk di bawah ini:



Gambar 17

17. Diketahui A dan B adalah dua matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen bilangan real dan berlaku $AB - BA = A$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$A^n B - BA^n = nA^n.$$

18. Tunjukkan bahwa $n! \leq n^n$ untuk setiap bilangan asli n.
19. Tentukan bilangan asli terkecil n_0 sehingga $2^n > n^3$ untuk setiap $n \geq n_0$. Buktikan jawaban anda.
20. Diberikan

$$a_n := \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

untuk setiap bilangan asli n.
   (a) Hitunglah a_1, a_2, a_3, a_4, dan a_5.
   (b) Berikan sebuah dugaan untuk rumus tertutup dari a_n untuk sebarang nilai n.
   (c) Buktikan dugaan anda dengan induksi matematika.
   (d) Tunjukkan bahwa deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

   konvergen dan tentukan nilai jumlahan deret ini.
21. Perhatikan:

$$\frac{1 - \frac{1}{2^3}}{1 + \frac{1}{2^3}} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right)$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2^3}}{1 + \frac{1}{2^3}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^3}}{1 + \frac{1}{3^3}} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 4}\right)$$

$$\vdots$$

Tulis dan buktikan rumus umum untuk pernyataan-pernyataan di atas.
22. Buktikan ketaksamaan Bernoulli: untuk setiap $x > -1$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

23. Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in [0, \pi]$ berlaku

$$|\sin(nx)| \leq n \sin x.$$

24. Tentukan semua bilangan asli n sehingga berlaku $n^2 < 2^n$, dan selanjutnya buktikan dengan prinsip induksi umum.
25. Buktikan bahwa jumlah sudut dalam dari sebarang segibanyak konveks bersisi n adalah $180^o(n-2)$.
26. Terdapat n titik biru dan n titik merah pada sebuah garis lurus, $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa jumlah semua jarak dua titik yang berwarna sama kurang dari atau sama dengan jumlah semua jarak dua titik yang berbeda warna.
27. Diberikan $z \in \mathbb{C}$. Buktikan jika $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$, maka

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

28. Barisan $(x_n)_{n\geq 0}$ didefinisikan secara rekursif: $x_0 = 0$, $x_1 = 4$, dan

$$x_n = 6x_{n-1} - 5x_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ berlaku $x_n = 5^n - 1$.

29. Barisan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ didefinisikan secara rekursif: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Buktikan bahwa

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

30. Diberikan segitiga siku-siku ABC dengan $\angle BAC = 90^o$. Apabila panjang sisi-sisi diberikan $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$, maka buktikan untuk setiap $n \geq 2$ berlaku

$$a^n \geq b^n + c^n.$$

31. Diberikan barisan Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, yakni $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, dan $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ untuk $n \geq 1$. Buktikan berlaku

(a)
$$F_n < 2^n.$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

(c)
$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

(d)
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

32. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa setiap perangko dengan nilai sekurang-kurangnya 12 sen selalu dapat digantikan dengan sejumlah perangko dengan nilai 4 sen atau sejumlah perangko dengan nilai 5 sen atau kombinasi keduanya.

33. Diberikan $S \subseteq \mathbb{N}$ dengan sifat

(1) $2^k \in S$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, dan

(2) jika $k \in S$ dan $k \geq 2$, maka $k - 1 \in S$.

Buktikan bahwa $S = \mathbb{N}$.

(Sifat ini dikenal dengan nama prinsip induksi maju-mundur).

34. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ adalah sebuah pernyataan yang memuat n. Apabila

(1) $P(2)$ benar.

(2) Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $P(k)$ benar maka $P(k-1)$ benar.

(3) Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $P(k)$ benar maka $P(2k)$ benar,

maka buktikan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

(Sifat ini dikenal dengan nama prinsip induksi Cauchy)

35. Jika $x \in \mathbb{R}$ dan $x > 0$, maka tunjukkan

$$x^{2019} + x^{2017} + x^{2015} + \cdots + \frac{1}{x^{2015}} + \frac{1}{x^{2017}} + \frac{1}{x^{2019}} \geq 2020.$$

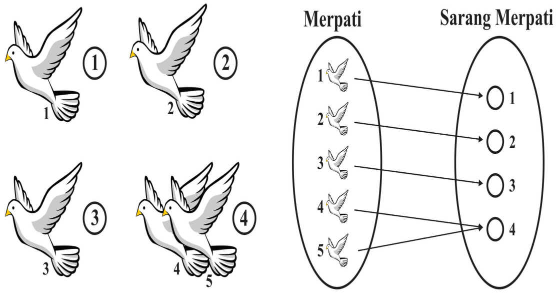
2.4 Prinsip Sarang Merpati

Prinsip sarang merpati (*pigeonhole principle*) dapat diilustrasikan secara sederhana sebagai berikut. Bayangkan anda memiliki 5 ekor burung merpati dan 4 buah kandang. Karena semua burung harus masuk kandang, maka akan ada satu kandang yang berisi sekurang-kurangnya dua merpati. Secara umum kita mempunyai teorema berikut.

Teorema 2.4.1 (Prinsip Sarang Merpati)**.** *Jika* $kn+1$ *obyek (*$k \geq 1$*) didistribusikan ke dalam n kotak, maka terdapat sebuah kotak yang memuat sekurang-kurangnya* $k+1$ *obyek.*

Bukti. Andaikan semua kotak memuat kurang dari $k+1$ obyek. Jadi, setiap kotak memuat paling banyak hanya k obyek. Sebagai akibatnya secara total hanya akan ada paling banyak kn obyek, kontradiksi. □

Prinsip ini, bahkan untuk kasus khusus $k = 1$, merupakan sebuah alat yang sangat ampuh untuk membuktikan pernyataan/teorema eksistensial.



Gambar 18. Ilustrasi prinsip sarang merpati

Walaupun prinsip sarang merpati telah muncul secara implisit setidaknya pada karya dari Jean Leurechon pada tahun 1624, namun sifat ini lebih sering diatributkan pada Peter Gustav Lejeune Dirichlet yang melakukan formalisasi dari prinsip sarang merpati pada tahun 1834.

Pada awalnya prinsip sarang merpati dikenal dengan nama prinsip kotak Dirichlet (*Dirichlet's box principle*). Istilah prinsip sarang merpati sendiri baru digunakan pertama kalinya pada tahun 1940 oleh matematikawan Raphael M. Robinson. Berikut ini adalah beberapa contoh sederhana yang berdasarkan prinsip sarang merpati.

1. Di antara tiga orang, ada dua orang dengan jenis kelamin sama.
2. Di antara 13 orang, ada dua orang yang lahir di bulan yang sama.
3. Di antara 366 orang, ada dua orang yang mempunyai hari ulang tahun yang sama.

Selanjutnya kita lihat beberapa contoh soal di mana penyelesaiannya menggunakan prinsip sarang merpati.

Contoh 2.4.2. *Sebelas bilangan dipilih dari* $\{1, 2, \ldots, 20\}$. *Tunjukkan bahwa ada dua bilangan yang jumlahannya adalah 21.*

Penyelesaian. Perhatikan sepuluh himpunan

$$\{1, 10\}, \{2, 19\}, \cdots, \{10, 11\}.$$

Menurut prinsip sarang merpati, ada dua bilangan yang berada pada himpunan yang sama, yakni jumlahannya 21. ◆

Contoh 2.4.3. *Kota Gotham memiliki 7500000 penduduk. Rambut yang dapat tumbuh pada kepala manusia paling banyak adalah 500000. Buktikan bahwa ada paling sedikit 15 penduduk kota Gotham yang memiliki banyak rambut yang sama.*

Penyelesaian. Kita misalkan ada 500001 sarang merpati yang kita beri label $0, 1, 2, \ldots 500000$. Selanjutnya setiap penduduk kota Gotham kita letakkan di sarang merpati sesuai dengan banyaknya rambut masing-masing. Karena $7500000 = 14 \cdot 500001 + 1$, maka menurut prinsip sarang merpati ada sebuah sarang yang memuat sekurang-kurangnya $14 + 1 = 15$ merpati. Dengan kata lain terdapat sekurang-kurangnya 15 penduduk kota Gotham yang memiliki banyak rambut yang sama. ◆

Contoh 2.4.4. *Tunjukkan bahwa di antara sebarang tujuh bilangan asli tidak lebih dari 126, dapat ditemukan dua bilangan asli, katakan x dan y, sehingga*

$$1 < \frac{y}{x} \leq 2.$$

Penyelesaian. Jika bilangan-bilangan asli $1, 2, \ldots, 126$ dipartisi ke dalam 6 himpunan, maka menurut prinsip sarang merpati, salah satu dari keenam himpunan tersebut akan memuat sekurang-kurangnya satu dari tujuh bilangan asli yang diberikan. Jadi, tujuan kita adalah memilih sebuah partisi sehingga di masing-masing dari 6 himpunan itu bilangan yang terbesar nilainya tidak lebih dari dua kali bilangan yang terkecil. Salah satu partisi yang memenuhi adalah

$$\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, \cdots, 13, 14\}, \{15, 16, \cdots, 29, 30\},$$
$$\{31, 32, \cdots, 61, 62\}, \{63, 64, \cdots, 125, 126\}. \ \diamond$$

Contoh 2.4.5. *Tunjukkan bahwa di antara sebarang 12 bilangan bulat positif dua digit yang berbeda, terdapat sekurang-kurangnya dua bilangan yang selisihnya berbentuk bilangan dua digit identik.*

Penyelesaian. Pertama kita ingat fakta bahwa sebuah bilangan bulat positif mempunyai dua digit identik jika dan hanya jika bilangan tersebut habis dibagi 11. Lebih lanjut hanya terdapat 11 sisa yang berbeda yang mungkin pada pembagian oleh 11 yakni 0, 1, 2, ..., 10. Jadi, menurut prinsip sarang merpati, di antara 12 bilangan yang berbeda terdapat sekurang-kurangnya dua bilangan yang memberikan sisa yang sama jika dibagi 11. Katakan dua bilangan itu adalah $a = 11k + m$ dan $b = 11l + m$. Perhatikan bahwa selisihnya adalah

$$a - b = 11(k - l)$$

yang jelas habis dibagi 11. Dengan kata lain, $a - b$ berbentuk bilangan dengan dua digit identik. ◆

Contoh 2.4.6. *Seorang pemain catur mempunyai 77 hari untuk mempersiapkan diri menghadapi sebuah turnamen. Dia merencanakan berlatih sekurang-kurangnya satu permainan setiap hari tetapi secara total tidak lebih dari 132 permainan. Tunjukkan bahwa terdapat beberapa hari yang berurutan di mana dia bermain tepat 21 permainan.*

Penyelesaian. Kita notasikan dengan a_1 sebagai jumlah permainan yang dimainkan pada hari pertama, a_2 sebagai jumlah permainan yang dimainkan pada hari pertama dan kedua, a_3 sebagai jumlah permainan yang dimainkan sampai pada hari ketiga, dan seterusnya. Barisan

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{77}$$

terdiri dari bilangan-bilangan yang berbeda dan semakin besar. Berdasarkan syarat bahwa total latihan permainan tidak lebih dari 132, maka $a_{77} \leq 132$. Jadi, kita mempunyai

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{77} \leq 132$$

dan

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < a_3 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 153.$$

Bilangan 21 berasal dari yang diberikan. Perhatikan bahwa

$$a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \ldots, a_{77} + 21$$

adalah 154 bilangan asli yang berada di antara 1 dan 153. Jadi, menurut prinsip sarang merpati, ada dua bilangan yang sama. Dua bilangan yang sama ini pastilah dalam bentuk

$$a_i = a_j + 21$$

untuk suatu $j < i$. Oleh karena itu, pada hari ke $j + 1$ sampai hari ke i, pemain catur telah melakukan latihan sebanyak 21 permainan. ◆

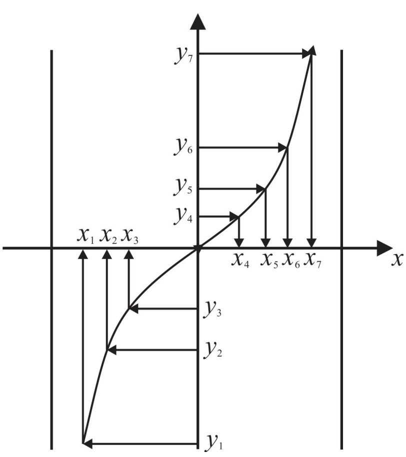
Contoh 2.4.7. *Buktikan bahwa apabila diberikan sebarang tujuh bilangan real $y_1, y_2, \ldots, y_7$ selalu dapat ditemukan dua bilangan y_i dan y_j sehingga*

$$0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Penyelesaian. Soal di atas sudah memuat petunjuk penting untuk menyelesaikannya. Melihat pernyataan yang dibuktikan kita akan teringat pada rumus selisih sudut untuk tangens

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

Kita sebut $x_k = \arctan y_k$ untuk $k = 1, \ldots, 7$. Jelas bahwa $x_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ untuk setiap k. Karena sebarang dua titik di dalam selang $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mempunyai jarak selalu kurang dari π, maka menurut prinsip sarang merpati dari tujuh titik $x_1, \ldots, x_7 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ terdapat x_i, x_j, $x_i \geq x_j$, sehingga $0 \leq x_i - x_j \leq \frac{\pi}{6}$.



Gambar 19

Karena tangens adalah fungsi naik monoton, maka

$$\tan 0 \leq \tan(x_i - x_j) \leq \tan\frac{\pi}{6}.$$

Dengan kata lain, kita memperoleh

$$0 \leq \frac{\tan x_i - \tan x_j}{1 + \tan x_i \tan x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

atau terbuktilah

$$0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \; \blacklozenge$$

Contoh 2.4.8. *Terdapat 6 titik yang berbeda di bidang. Setiap pasang titik dihubungkan dengan garis berwarna biru atau garis berwarna merah. Tunjukkan bahwa ada sebuah segitiga dengan semua sisinya garis biru atau sebuah segitiga dengan semua sisinya garis merah.*

Penyelesaian. Ambil sebarang titik dari enam titik tersebut, katakan A. Menurut prinsip sarang merpati, dari lima ruas garis yang dapat dibuat dari titik A, terdapat 3 garis yang berwarna sama. Kita asumsikan tiga garis itu adalah AB, AC, dan AD dan mempunyai warna merah. Ada dua kemungkinan:

1. segitiga BCD berwarna biru, atau
2. salah satu sisi dari BCD, katakan BC, berwarna merah, yang berarti segitiga ABC merah. ◆

Contoh 2.4.9. *Buktikan ada bilangan-bilangan bulat a, b, dan c, yang tidak semuanya nol, dan setiap nilai mutlaknya kurang dari* 10^6 *sehingga*

$$\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}.$$

Penyelesaian. Misalkan T adalah himpunan 10^{18} bilangan real berbentuk $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$ dengan setiap $r, s, t \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 10^6 - 1\right\}$ dan kita sebut $d = \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)10^6$. Perhatikan bahwa, jika $x \in T$, maka $x \in [0, d)$. Kita partisi selang ini ke dalam $10^{18} - 1$ subselang yang sama panjang dengan panjang setiap subselang $u = \dfrac{d}{10^{18} - 1}$. Menurut prinsip sarang merpati, dua dari 10^{18} bilangan anggota T, katakan

$$r_1 + s_1\sqrt{2} + t_1\sqrt{3} \quad \text{dan} \quad r_2 + s_2\sqrt{2} + t_2\sqrt{3}$$

pasti berada di subselang yang sama. Selisih kedua bilangan itu $(r_1 - r_2) + (s_1 - s_2)\sqrt{2} + (t_1 - t_2)\sqrt{3}$ memenuhi kondisi yang diminta sebab

$$u < \frac{10^7}{10^{18}} = 10^{-11}. \ \blacklozenge$$

Latihan Soal 2.4.

1. Di dalam laci terdapat kaos kaki berwarna hitam dan putih yang tercampur, di mana setiap kaos kaki dapat dipakai baik di kaki kiri ataupun kaki kanan. Apabila diambil sejumlah kaos kaki dari laci tanpa melihat warnanya, maka berapa minimum banyaknya kaos kaki yang harus diambil agar kita dapat menggunakan sepasang kaos kaki berwarna sama?
2. Diberikan 50 bilangan asli berbeda yang nilainya kurang dari 100. Buktikan ada dua bilangan asli yang jumlahannya 99.
3. Tunjukkan bahwa jika ada 5 titik terletak di dalam atau pada persegi dengan panjang sisi 1, maka ada 2 titik yang jaraknya tidak lebih dari $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
4. Jika ada n orang, $n > 1$, di mana setiap orang dapat berjabat tangan dengan orang lainnya, maka tunjukkan bahwa ada sepasang orang yang akan memiliki jumlah jabat tangan yang sama.
5. Pada bidang datar terdapat sebuah segitiga dan sebuah garis yang tidak melalui titik-titik sudut segitiga tersebut. Buktikan bahwa garis ini tidak mungkin memotong semua sisi segitiga.
6. Ada 9 orang yang akan duduk sebaris pada barisan 12 kursi. Tunjukkan bahwa ada tiga kursi berurutan yang tidak kosong.
7. Himpunan $\{1, 2, \ldots, 49\}$ dipartisi ke dalam tiga subhimpunan. Tunjukkan bahwa terdapat sekurang-kurangnya satu subhimpunan yang memuat tiga bilangan yang berbeda a, b, c sehingga $a + b = c$.
8. Diberikan sebarang 52 bilangan asli yang berbeda. Tunjukkan bahwa ada dua bilangan yang jumlahnya atau selisihnya adalah kelipatan 100. (Perhatikan bahwa 0 juga merupakan kelipatan dari 100).

9. Apabila tidak ada satu pun dari bilangan-bilangan a, $a + d$, $\ldots$, $a + (n - 1)d$ yang habis dibagi n, maka d dan n relatif prima.
10. Tunjukkan bahwa setiap himpunan yang berisi sepuluh bilangan bulat dua digit mempunyai dua subhimpunan saling asing dengan jumlahan anggota yang sama.
11. Dari sembilan titik yang terletak di dalam sebuah persegi satuan, tunjukkan bahwa ada tiga titik yang membentuk sebuah segitiga yang luasnya tidak lebih dari $\frac{1}{8}$.
12. Di dalam sebuah kantong terdapat 10 bola biru dan 7 bola merah. Tentukan banyaknya bola minimal yang harus diambil secara acak dari kantong agar terambil sekurang-kurangnya:
    (a) satu bola merah.
    (b) satu bola biru.
    (c) dua bola berwarna sama.
    (d) tiga bola berwarna sama.
13. Titik pusat gravitasi dari himpunan titik-titik $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\cdots$, $P_n(x_n, y_n)$ adalah titik $G(x_g, y_g)$ dengan

$$x_g = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, y_g = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

    Diberikan 13 titik latis pada bidang Cartesius. Tunjukkan bahwa ada 4 titik sehingga titik pusat gravitasinya adalah titik latis. (titik latis adalah titik dengan koordinat bilangan-bilangan bulat)
14. Seorang pasien diharuskan minum obat jenis tertentu sekurang-kurangnya satu butir per hari selama 30 hari. Jika jumlah maksimal obat yang boleh diminum pasien adalah 45 butir, maka tunjukkan bahwa ada beberapa hari yang berurutan di mana ia telah minum 14 butir obat.
15. Diketahui lima bilangan bulat positif x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Apabila susunan bilangan y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 merupakan permutasi dari susunan bilangan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, buktikan bahwa

$$z = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3)(y_4 - x_4)(y_5 - x_5)$$

    adalah bilangan genap.

16. Diberikan n bilangan bulat. Buktikan bahwa ada satu yang merupakan kelipatan dari n atau jika tidak demikian beberapa dari bilangan-bilangan tersebut jumlahannya adalah suatu kelipatan dari n.
17. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Tunjukkan bahwa di dalam sebarang subhimpunan dari A yang beranggotakan $n + 1$ bilangan terdapat dua bilangan di mana satu bilangan habis membagi bilangan yang lain.
18. 342 titik dipilih di dalam sebuah kubus dengan panjang sisi 7. Apakah kita dapat membuat sebuah kubus kecil dengan panjang sisi 1 di dalam kubus besar sehingga interior dari kubus kecil tidak memuat satu pun dari titik yang sudah dipilih di atas? Jelaskan.
19. Diberikan 10 ruas garis pada bidang dengan sifat setiap ruas garis panjangnya lebih dari 1 cm tetapi kurang dari 55 cm. Tunjukkan bahwa kita dapat memilih tiga ruas garis yang membentuk sisi-sisi sebuah segitiga.
20. Buktikan bahwa dari 6 orang yang hadir di sebuah pesta terdapat 3 orang yang saling mengenal satu sama lain atau terdapat 3 orang yang tidak saling mengenal satu sama lain. Apa yang dapat anda katakan apabila yang hadir di pesta hanya 5 orang?
21. Tunjukkan bahwa ada bilangan yang merupakan pangkat dari 3 yang tiga digit terakhirnya adalah 001.
22. Diberikan A adalah himpunan yang berisikan sepuluh bilangan asli yang dipilih dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 99\}$. Buktikan bahwa ada dua subhimpunan takkosong saling asing dari A dengan jumlahan anggota-anggota yang sama.
23. Terdapat $4^n + 1$ titik di dalam sebuah segitiga samasisi dengan panjang sisi 1. Tunjukkan bahwa ada sekurang-kurangnya dua titik yang berjarak tidak lebih dari $\dfrac{1}{2^n}$.
24. Tunjukkan bahwa ada dua bilangan pangkat dari 2021 yang selisihnya habis dibagi 2020.
25. Di dalam sebuah kubus dengan panjang rusuk 15 terdapat 11000 titik yang berbeda. Buktikan bahwa ada bola dengan panjang

jari-jari 1 yang memuat sekurang-kurangnya 6 dari 11000 titik tersebut.

26. Buktikan bahwa di antara 13 bilangan real terdapat dua bilangan, katakan x dan y sehingga

$$|x - y| \leq (2 - \sqrt{3})\,|1 + xy|.$$

27. Diketahui $X \subset \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ dan $|X| = 10$. Tunjukkan bahwa dapat dipilih dua subhimpunan dari X yang saling asing, katakan Y dan Z, sehingga berlaku

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{z \in Z} z.$$

28. Diberikan sebarang bilangan real y. Buktikan bahwa di antara bilangan-bilangan

$$y, 2y, \ldots, (n-1)y$$

terdapat satu bilangan yang selisihnya dengan sebuah bilangan bulat paling besar adalah $\frac{1}{n}$.

29. Setiap persegi satuan pada papan permainan berukuran 4×7 diwarnai dengan warna hitam atau putih. Tunjukkan dengan cara pewarnaan demikian, terdapat sebuah persegi panjang dengan keempat persegi di setiap sudutnya berwarna sama. Apakah hal ini benar juga untuk papan permainan berukuran 4×6?

30. Tunjukkan bahwa dari himpunan empat belas bilangan asli yang berbeda terdapat $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ sehingga dapat dibentuk dua subhimpunan dengan k anggota yang saling asing, $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ dan $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ dengan sifat

$$\left|\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right) - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_k}\right)\right| < 0,001.$$

2.5 Prinsip Invarian

Prinsip invarian biasanya diterapkan pada soal-soal yang bersifat algoritmis (permainan, transformasi), di mana terjadi iterasi atau perulangan. Invarian berarti *tidak berubah* terhadap iterasi, perulangan, atau mungkin perubahan parameter. Jadi, kita amati apa yang selalu tetap.

Contoh 2.5.1. *Di sebuah ruang kelas terdapat 50 siswa. Guru menuliskan bilangan-bilangan* $1, 2, 3, 4, \ldots 51$ *di papan tulis. Satu demi satu siswa dipanggil bergiliran untuk menghapus dua bilangan yang telah ditulis guru, kemudian menuliskan selisih dari dua bilangan yang dihapus tersebut. Misalkan* 17 *dan* 40 *dihapus, maka selisihnya yaitu* $|17 - 40| = 23$ *ditulis di papan tulis. Tunjukkan bahwa siswa terakhir yang dipanggil pasti menuliskan bilangan genap.*

Penyelesaian. Ketika seorang siswa menghapus dua bilangan, katakan x dan y, maka paritas dari $x + y$ sama dengan paritas dari bilangan yang ditulis, yakni $|x - y|$. Hal ini berarti, paritas dari jumlahan bilangan-bilangan di papan tulis tidak pernah berubah dari siswa pertama sampai siswa terakhir. Di sini kita menemukan hal yang invarian. Jumlahan seluruh bilangan mula-mula adalah

$$1 + 2 + \cdots + 51 = \frac{1}{2} \cdot 51 \cdot 52 = 51 \cdot 26,$$

yang paritasnya genap. Jadi, bilangan terakhir yang ditulis pasti juga bilangan genap. ◆

Contoh 2.5.2. *Kita ambil sebarang titik* $P = (a, b)$ *pada bidang dengan* $0 < b < a$. *Selanjutnya, kita mendefinisikan barisan* (x_n, y_n) *dengan*

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}.$$

Tentukan limit barisan (x_n, y_n).

Penyelesaian. Dengan mengalikan x_{n+1} dan y_{n+1} kita memperoleh

$$x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n = ab,$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Di sini kita telah menemukan sesuatu yang invarian, yakni nilai ab. Di awal kita mempunyai $y_0 < x_0$. Hubungan ini juga bersifat invarian. Misalkan $y_n < x_n$ untuk suatu n. Diperoleh x_{n+1} adalah titik tengah ruas garis yang menghubungkan x_n dan y_n. Lebih lanjut, $y_{n+1} < x_{n+1}$ karena rata-rata harmonik kurang dari rata-rata aritmetika. Jadi,

$$0 < x_{n+1} - y_{n+1} < \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{x_n - y_n}{2} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dari sini kita memperoleh

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x,$$

dengan $x^2 = ab$. Sebagai kesimpulan, barisan (x_n, y_n) konvergen ke $\left(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\right)$. ◆

Contoh 2.5.3. *Diberikan bilangan $m = 2020^{2021}$ dan $s(m)$ adalah jumlahan semua digit (dalam representasi basis 10) dari m. Tunjukkan bahwa $m - s(m)$ habis dibagi 9.*

Penyelesaian. Kita tidak mungkin menghitung nilai m, $s(m)$, dan $m - s(m)$ secara eksplisit. Kita mulai dengan menyelesaikan soal serupa yang lebih sederhana. Misalkan $a = 345$ dan $s(a)$ adalah jumlahan semua digit (dalam representasi basis 10) dari a yaitu $3+4+5 = 12$. Kita memperoleh $a - s(a) = 345 - 12 = 333$ habis dibagi 9. Hal ini membawa kita pada sebuah dugaan akan pernyataan yang lebih umum: *apabila x adalah sebarang bilangan bulat positif dan $s(x)$ adalah jumlahan semua digit (dalam representasi basis 10) dari x, maka $x - s(x)$ habis dibagi 9*. Dalam representasi basis 10 kita tuliskan

$$x = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

dengan $a_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $j = 0, 1, \ldots, k$ dan k adalah suatu bilangan bulat taknegatif. Dari sini kita mempunyai

$$s(x) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

yang memberikan

$$\begin{aligned} x - s(x) &= a_k \cdot \underbrace{999\ldots9}_{k-1 \text{ digit}} + a_{k-1} \cdot \underbrace{999\ldots9}_{k \text{ digit}} + \cdots + a_1 \cdot 9 \\ &= 9\left(a_k \cdot \underbrace{111\ldots1}_{k-1 \text{ digit}} + a_{k-1} \cdot \underbrace{111\ldots1}_{k \text{ digit}} + \cdots + a_1\right). \end{aligned}$$

Dari hasil terakhir ini kita dapat simpulkan bahwa berapa pun x maka $x - s(x)$ habis dibagi 9. Kita sudah menemukan sebuah hal yang invarian dan dengan memilih $x = 2020^{2021}$ terbuktilah pernyataan yang diinginkan. ◆

Sebagai catatan, pada contoh terakhir ini kita sebenarnya selain menerapkan prinsip invarian kita juga telah menggunakan strategi pemecahan masalah yaitu mencari pola dan memodifikasi masalah.

Contoh 2.5.4. *Apabila* $x, y > 0$ *dan* $0 < p < 1$*, maka buktikan*

$$(x + y)^p < x^p + y^p.$$

Penyelesaian. Tanpa mengurangi keumuman bukti kita dapat asumsikan $x + y = 1$. Hal ini dapat kita lakukan karena ketaksamaan pada soal bersifat invarian terhadap transformasi penskalaan (dilasi) $x \to tx$ dan $y \to ty$ dengan $t > 0$. Selanjutnya, jika $x + y = 1$, maka ketaksamaan jelas benar sebab jika $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$, maka $x < x^p$ dan $y < y^p$. ◆

Contoh 2.5.5. *Tentukan semua bilangan real* x *yang memenuhi persamaan*

$$\left(x^2 - 3x + 3\right)^2 - 3\left(x^2 - 3x + 3\right) + 3 = x.$$

Penyelesaian. Jika kita misalkan $f(x) = x^2 - 3x + 3$, maka kita diminta menyelesaikan persamaan $f(f(x)) = x$, yakni mencari titik invarian atau titik tetap dari fungsi $f \circ f$. Pertama, kita cari titik invarian dari f, yaitu penyelesaian dari $f(x) = x$. Setiap titik invarian dari f juga merupakan titik invarian dari $f \circ f$ sebab

$$f(x) = x \Longrightarrow f(f(x)) = f(x) \Longrightarrow f(f(x)) = x.$$

Penyelesaian dari $f(x) = x$ atau $x^2 - 4x + 3 = 0$ adalah $x = 3$ atau $x = 1$. Persamaan $f(f(x)) = x$ adalah sebuah persamaan sukubanyak berderajat empat $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$, di mana dua penyelesaiannya adalah $x = 3$ dan $x = 1$. Dengan demikian $(x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$ adalah faktor dari $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$. Dari sini dengan melakukan pembagian sukubanyak kita memperoleh faktor lainnya adalah $x^2 - 2x + 1$. Karena $x^2 - 2x + 1 = 0$ ekivalen dengan $(x - 1)^2 = 0$, maka tidak ada penyelesaian baru yang didapatkan dari sini. Sebagai kesimpulan, himpunan penyelesaian dari persamaan semula adalah $\{1, 3\}$. ◆

Latihan Soal 2.5.

1. Kita mulai dengan bilangan-bilangan asli $1, 2, \ldots, 4n - 1$. Dalam setiap langkah, kita mengganti sebarang dua bilangan asli dengan selisihnya. Buktikan bahwa setelah $4n - 2$ langkah hanya tersisa satu bilangan genap.
2. Sebuah lingkaran dibagi menjadi 6 sektor, berturut-turut diberi bilangan 1, 0, 1, 0, 0, 0. Setiap langkah, kita pilih dua sektor yang bersebelahan dan masing-masing bilangan pada sektor tersebut ditambah 1. Apakah mungkin dalam pada suatu saat keenam bilangan bernilai sama?
3. Ada sejumlah tanda + dan − di papan tulis. Dalam satu langkah, kita bisa hapus dua tanda, kemudian tulis + jika kedua tanda sama atau tulis − jika kedua tanda berbeda. Tunjukkan bahwa tanda terakhir tidak tergantung dari urutan penghapusan.
4. Misalkan kita mempunyai papan catur berukuran 8×8 dengan warna yang biasa (hitam dan putih). Kita boleh mencat ulang persegi-persegi pada papan catur dengan warna hitam atau putih

dengan aturan kita hanya boleh mencat:

(a) satu baris atau satu kolom, atau

(b) Persegi berukuran 2×2 (terdiri dari empat persegi satuan).

Tujuan kita adalah pada akhirnya hanya mendapatkan tepat satu persegi satuan berwarna hitam. Apakah tujuan ini dapat tercapai?

5. Seekor naga memiliki 100 kepala. Seorang ksatria mempunyai sebuah pedang sakti yang dapat memotong 5, 15, 17, atau 20 kepala naga dalam sekali tebas. Dalam masing-masing kasus, kepala naga akan tumbuh lagi berturut-turut sebanyak 17, 24, 2, atau 14. Naga akan mati apabila tidak memiliki satu kepala pun. Mungkinkah naga akan mati?
6. Alex menulis tiga bilangan yaitu 5, 6, dan 7. Setiap menit, Alex menghapus dua dari tiga bilangan, katakan p dan q. Selanjutnya dia menulis dua bilangan yaitu
$$\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b \quad \text{dan} \quad \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b.$$
Mungkinkah pada suatu saat Alex memperoleh tiga bilangan 2, 6, dan 10?
7. Sebuah ruangan pada mulanya kosong. Selanjutnya, pada setiap menit, ada dua kemungkinan: seseorang masuk ke ruang atau dua orang keluar dari ruang. Setelah tepat 3^{1999} menit, mungkinkah ruang tersebut berisi $3^{1000} + 2$ orang?
8. Di sebuah partai, setiap anggota memiliki paling banyak tiga musuh. Buktikan bahwa partai ini dapat dibagi menjadi dua kelompok, sehingga setiap anggota partai mempunyai paling banyak satu musuh di dalam kelompoknya.
9. Apabila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah sebarang permutasi dari bilangan-bilangan $1, 2, \ldots n$. Tunjukkan, jika n bilangan ganjil, maka $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ adalah bilangan genap.
10. Jika terdapat 127 orang bermain dalam sebuah turnamen tenis (permainan tunggal), maka tunjukkan bahwa pada akhir turnamen banyaknya orang yang telah bermain sebanyak bilangan ganjil permainan adalah bilangan genap.

11. Buktikan untuk sebarang bilangan real taknegatif a, b, c, x, y, z berlaku

$$(ax + by + cz)^2 \leq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

12. Diberikan barisan bilangan asli $1, 2, \ldots, 100$. Setiap menit kita memilih dua bilangan u dan v dari barisan ini untuk dihapus dan menggantinya dengan $uv + u + v$. Jelas bahwa hanya akan tersisa satu bilangan setelah 99 menit. Apakah bilangan yang tersisa ini bergantung pada pemilihan kita?
13. Tunjukkan bahwa tidak mungkin memilih tiga bilangan bulat a, b, dan c sehingga $a-b$ habis membagi $b-c$, $b-c$ habis membagi $c-a$, dan $c-a$ habis membagi $a-b$.
14. Diberikan empat bilangan bulat p, q, r, s dan misalkan keempatnya tidak sama. Kita mulai dengan quadrupel (p, q, r, s) dan secara berulang kita ganti (p, q, r, s) dengan $(p-q, q-r, r-s, s-p)$. Tunjukkan bahwa sekurang-kurangnya satu bilangan pada quadrupel pada suatu saat akan bernilai sebarang besar.
15. Ada 12 orang duduk melingkar pada sebuah meja bundar. Mereka bermain dengan 12 kartu. Pada awal permainan seseorang, katakan O_1, memiliki semua kartu. Setiap menit berikutnya, jika seseorang memiliki 2 atau lebih kartu, maka dia akan memberikan satu kartu kepada orang di sebelah kirinya dan satu kartu kepada orang di sebelah kanannya. Permainan berakhir apabila masing-masing orang memiliki tepat satu kartu. Berapa menit permainan ini akan berakhir?

Bab 3 Strategi Pemecahan Masalah Matematika

Kita ingat kembali tiga tahap pemecahan masalah matematis menurut A. Schoenfeld:

1. Analisis.
2. Eksplorasi.
3. Verifikasi.

Sementara itu empat langkah pemecahan masalah matematis menurut G. Polya adalah

1. Memahami masalah.
2. Menyusun rencana pemecahan masalah .
3. Melaksanakan rencana .
4. Mengkaji ulang jawaban .

Tahap kedua Schoenfeld (yakni eksplorasi) dan langkah kedua Polya (yakni menyusun rencana), bisa dikatakan bagian yang paling esensial dalam proses pemecahan masalah. Di bab ini kita akan melihat lebih dalam beberapa heuristik atau strategi pemecahan masalah matematis yang sering digunakan dalam tahap eksplorasi dan menyusun rencana, yang meliputi:

1. Mencari pola
2. Membuat gambar
3. Memodifikasi masalah
4. Memilih notasi dan substitusi yang tepat
5. Menggunakan simetri
6. Membagi ke dalam kasus-kasus
7. Mengerjakan secara mundur

8. Melihat kasus ekstrem
9. Memperumum
10. Berpikir alternatif

Daftar di atas tentu saja tidak lengkap namun dipandang cukup mewakili strategi pemecahan masalah matematis yang sering dipakai. Kita akan melihat satu demi satu kesepuluh strategi di atas melalui contoh-contoh soal.

3.1 Mencari Pola

Banyak ahli mengatakan bahwa matematika adalah ilmu tentang pola (*science of patterns*). Dalam konteks ini mencari pola (bilangan, himpunan, bentuk, perulangan, operasi, dan sebagainya) menjadi strategi yang alami dalam pemecahan masalah matematis. Pola yang muncul dapat dianalisis lebih lanjut dan akan memberikan ide untuk memecahkan masalah.

Contoh 3.1.1. *Hitunglah nilai dari*

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2019^2 - 2020^2.$$

Penyelesaian. Jumlahan ini mudah dihitung dengan memperhatikan pola yang muncul dari setiap pasang bilangan yang berdekatan, yakni

$$\begin{aligned}
&1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2019^2 - 2020^2\\
&= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + (2019^2 - 2020^2)\\
&= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \cdots + (2019-2020)(2019+2020)\\
&= (-1)(1+2) + (-1)(3+4) + \cdots + (-1)(2019-2020)\\
&= (-1)\,(1+2+3+4+\cdots+2019+2020)\\
&= (-1)\left(\frac{1}{2}2020(2020+1)\right)\\
&= -1010(2021)\\
&= -2041210. \ \diamond
\end{aligned}$$

Contoh 3.1.2. *Diketahui*

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}, \quad dan \quad f_(x) = f_0\left(f_{n-1}(x)\right), \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tentukan $f_{2020}(2020)$.

Penyelesaian. Perhatikan

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{1-x} \\
f_1(x) &= f_0\left(f_0(x)\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} \\
f_2(x) &= f_0\left(f_1(x)\right) = \frac{1}{1 - \frac{1-x}{-x}} = x \\
f_3(x) &= f_0\left(f_2(x)\right) = \frac{1}{1-x} = f_0(x).
\end{aligned}$$

Jadi, setelah melihat pola yang muncul kita mendapatkan secara umum

$$f_{n+3}(x) = f_n(x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Khususnya, kita mempunyai

$$f_{2020}(2020) = f_0(2020) = \frac{1}{1-2020} = -\frac{1}{2019}. \; \blacklozenge$$

Contoh 3.1.3. *Apabila 1000 dituliskan sebagai penjumlahan dari beberapa bilangan bulat positif dan kemudian bilangan-bilangan tersebut dikalikan, apa syarat yang harus dipenuhi supaya hasil perkaliannya terbesar? Berapa hasil perkalian terbesar itu?*

Penyelesaian. Misalkan $1000 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, akan dicari syarat pada a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sehingga $a_1 a_2 \cdots a_n$ terbesar. Kita dapat mencoba menyelidiki untuk bilangan-bilangan yang lebih kecil untuk menemukan pola yang berlaku secara umum. Syarat-syarat yang harus dipenuhi adalah

1. $a_i \neq 1$ untuk setiap i. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $a_i = 1$, maka $1000 = 1 + a_2 + \cdots + a_n$ dan hasil perkalian-

nya adalah $1 \cdot a_2 \cdots a_n$. Tetapi dapat dipandang juga $1000 = (1 + a_2) + \cdots + a_n$ dengan hasil perkaliannya $(1 + a_2) \cdots a_n$ yang lebih besar dari yang pertama. Jadi, haruslah $a_i \neq 1$ untuk setiap i.

2. $a_1 \leq 4$ untuk setiap i. Misalkan $a_1 > 4$, maka $a_1 = 5 = d$, $d \geq 0$. Jadi, $a_1 = 2 + (3 + d)$. Karena $2(3 + d) = 6 + 2d > 5 + d$, maka berlaku

$$2(3 + d)a_2 \cdots a_n > (5 + d)a_2 \cdots a_n.$$

   Dengan demikian haruslah $a_i \leq 4$ untuk setiap i.

3. $a_1 \neq 4$ untuk setiap i. Bila $a_1 = 4$, maka a_1 dapat diganti dengan dua buah bilangan 2 dan hasil perkaliannya tetap sama.

4. Di dalam himpunan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ hanya ada paling banyak dua bilangan 2. Apabila ada tiga buah bilangan 2, maka dapat digantikan dengan dua buah bilangan 3 yang memberikan hasil perkalian lebih besar.

Dengan demikian agar diperoleh hasil perkalian yang terbesar haruslah

$$1000 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{332} + 2 + 2$$

dan hasil perkalian yang terbesar adalah $2^2 \cdot 3^{332}$. ◆

Contoh 3.1.4. *Diketahui S adalah sebuah himpunan takkosong dan $*$ adalah sebuah operasi biner pada S yang memenuhi*

(1) $x * x = x$ untuk setiap $x \in S$, dan

(2) $(x * y) * z = (y * z) * x$ untuk setiap $x, y, z \in S$.

Buktikan bahwa $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in S$.

Penyelesaian. Jawaban di bawah ini adalah hasil mencoba-coba mencari pola, khususnya dengan menggunakan sifat siklis yang muncul di (2). Untuk setiap $x, y \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} x * y &= (x * y) * (x * y) \\ &= (y * (x * y)) * x \\ &= (x * (y * x)) * y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (y * (x * x)) * y \\
&= (x * (x * y)) * x \\
&= ((y * y)) * (x * x) \\
&= y * x. \ \diamond
\end{aligned}
$$

Contoh 3.1.5. *Tunjukkan tidak ada bilangan di dalam barisan*

$$11, 111, 1111, 11111, 111111, \ldots$$

yang merupakan bilangan kuadrat sempurna.

Penyelesaian. Setiap bilangan kuadrat sempurna pasti berbentuk $4k$ atau $4k + 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Untuk membuktikan pernyataan ini kita lihat dua kemungkinan. Jika n bilangan bulat genap, maka $n = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Jadi, $n^2 = 4k^2$. Jika n bilangan bulat ganjil, maka $n = 2l + 1$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. Jadi, $n^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 4(l^2 + l) + 1$. Sekarang kita perhatikan pola yang muncul pada barisan bilangan bulat pada soal:

$$
\begin{aligned}
11 &= 8 + 3 = 4 \cdot 2 + 3 \\
111 &= 108 + 3 = 4 \cdot 27 + 3 \\
1111 &= 1008 + 3 = 4 \cdot 252 + 3 \\
11111 &= 10008 + 3 = 4 \cdot 2502 + 3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Secara umum, sebarang suku dalam barisan tersebut berbentuk $111\ldots111$ yang dapat dituliskan sebagai

$$111\ldots111 = 111\ldots108 + 3 = 4k + 3,$$

untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Jadi, terbukti tidak ada suku dalam barisan tersebut yang berbentuk $4k$ atau $4k + 1$. Dengan kata lain, tidak ada suku yang merupakan bilangan kuadrat sempurna. $\diamond$

Contoh 3.1.6. *Perhatikan barisan* $(u_n)_{n\geq 0}$ *yang didefinisikan melalui* $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ *dan*

$$\det\begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = n!, \quad n \geq 0.$$

Buktikan bahwa u_n *adalah bilangan bulat untuk setiap n.*

Penyelesaian. Relasi rekursif untuk barisan $(u_n)_{n\geq 0}$ adalah

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}.$$

Kita lihat beberapa suku barisan ini:

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{1\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 2\\
u_4 &= \frac{2\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 3\\
u_5 &= \frac{3\cdot 2}{1} + \frac{2}{1} = 4\cdot 2\\
u_6 &= \frac{4\cdot 2\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 2}{2} = 4\cdot 3 + 1\cdot 3 = 5\cdot 3\\
u_7 &= \frac{5\cdot 3\cdot 4\cdot 2}{3} + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3} = 5\cdot 4\cdot 2 + 4\cdot 2 = 6\cdot 4\cdot 2\\
u_8 &= \frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 3}{4\cdot 2} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 2} = 6\cdot 5\cdot 3 + 5\cdot 3 = 7\cdot 5\cdot 3.
\end{aligned}$$

Dari pola yang kita dapatkan kita membuat dugaan bahwa

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdots.$$

Dugaan ini akan kita buktikan dengan prinsip induksi kuat. Kita asumsikan pernyataan benar untuk u_n, u_{n+1}, dan u_{n+2}. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
u_{n+3} &= \frac{u_{n+2}u_{n+1} + n!}{u_n}\\
&= \frac{(n+1)(n-1)(n-3)\cdots n(n-2)(n-4)\cdots + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)}\\
&= \frac{(n+1)n! + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+2)n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots} \\
&= (n+2)n(n-2)(n-4)\cdots
\end{aligned}
$$

Terbuktilah pernyataan yang diinginkan. ◆

Latihan Soal 3.1.

1. Tentukan banyaknya angka nol di belakang pada bilangan 100!.
2. Tentukan semua penyelesaian dari persamaan

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 0.$$

3. Hitunglah

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2017\cdot 2019}.$$

4. Misalkan kita akan menuliskan semua bilangan asli dari 1 sampai 2020. Berapa kali kita menuliskan angka 1?
5. Bilangan-bilangan real x_k didefinisikan dengan cara sebagai berikut:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{3} - 1, \quad \text{dan} \quad x_{k+2} = \frac{1 + x_{k+1}}{x_k}, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

   Tentukan x_{2019}.
6. Tentukan digit satuan dari bilangan 8^{2020}.
7. Perhatikan

$$
\begin{aligned}
3^2 + 4^2 &= 5^2 \\
5^2 + 12^2 &= 13^2 \\
7^2 + 24^2 &= 25^2 \\
9^2 + 40^2 &= 41^2.
\end{aligned}
$$

   Tuliskan rumus umum untuk pernyataan-pernyataan di atas dan buktikan.
8. Tentukan banyaknya faktor bulat positif dari 2019 dan 2020.

9. Apabila
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=A,$$
maka hitunglah nilai dari
$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.$$
10. Buktikan bahwa setiap bilangan di dalam barisan
$$49, 4489, 444889, 44448889, \ldots$$
adalah bilangan kuadrat sempurna.
11. Jika diketahui
$$x+\frac{1}{x}=-1,$$
maka tentukan
$$x^{99}+\frac{1}{x^{99}}.$$
12. Diberikan barisan Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, yakni $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, dan $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ untuk $n \geq 1$. Tanpa menggunakan induksi matematika, tunjukkan untuk setiap $n \geq 1$ berlaku
$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$
13. Apabila diketahui
$$\begin{aligned} a &\leq 1 \\ a+b &\leq 5 \\ a+b+c &\leq 14 \\ a+b+c+d &\leq 30, \end{aligned}$$
maka tunjukkan bahwa $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leq 10$.
14. Diketahui S adalah sebuah himpunan takkosong dan $*$ adalah sebuah operasi biner pada S yang memenuhi
   (1) $x*(x*y) = y$ untuk setiap $x \in S$, dan
   (2) $(y*x)*x = y$ untuk setiap $x, y, z \in S$.
   Buktikan bahwa $x*y = y*x$ untuk setiap $x, y \in S$.

15. Tunjukkan bahwa sebua bilangan bulat positif habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlahan digit-digitnya habis dibagi 9.
16. Diberikan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ adalah barisan bilangan-bilangan real taknol yang memenuhi

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-1} - x_{n-1}}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Berikan sebuah syarat perlu dan cukup pada x_1 dan x_2 agar x_n adalah bilangan bulat untuk takhingga banyak n.
17. Berapa maksimum banyak daerah yang terbentuk bila daerah di dalam lingkaran dibagi oleh 50 talibusur?
18. Misalkan

$$a = \left(10^4 + 324\right)\left(22^4 + 324\right)\left(34^4 + 324\right)\left(46^4 + 324\right)\left(58^4 + 324\right)$$

dan

$$b = \left(4^4 + 324\right)\left(16^4 + 324\right)\left(28^4 + 324\right)\left(40^4 + 324\right)\left(52^4 + 324\right).$$

Hitunglah nilai $\frac{a}{b}$.
19. Diberikan

$$T_n := \{A : A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

adalah himpunan dari semua subhimpunan dari himpunan A dan

$$a_n := |T_n|$$

adalah banyaknya anggota T_n.
    (a) Buktikan hubungan rekursif

$$a_n = 2a_{n-1}$$

    untuk setiap $n = 2, 3, \ldots$.
    (b) Buktikan bahwa $a_n = 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

20. Buatlah sebuah rumus umum untuk menentukan suku ke-n dari barisan

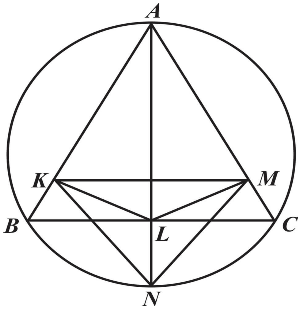
$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

3.2 Membuat Gambar

Sejauh memungkinkan, membuat gambar atau diagram atau grafik yang mendeskripsikan masalah akan sangat membantu dalam memahami soal secara visual dan sistematis. Gambar atau diagram yang representatif juga seringkali memberikan ide untuk mencari penyelesaian dari soal yang sebelumnya tidak terpikirkan ketika soal hanya berupa kalimat-kalimat. Buatlah gambar dengan ukuran yang cukup besar dan notasi (huruf, angka, simbol geometris) yang jelas.

Contoh 3.2.1. *Pada sebuah segitiga lancip ABC garis bagi yang ditarik dari titik sudut A memotong sisi BC di L dan memotong lingkaran luar segitiga ABC di N. Dari titik L ditarik garis-garis tegak lurus ke sisi AB dan AC sehingga memotong sisi AB dan AC berturut-turut di titik K dan M. Buktikan bahwa segiempat $AKNM$ dan segitiga ABC mempunyai luas yang sama.*

Penyelesaian. Soal geometri semacam ini akan lebih mudah dipahami ketika kita membuat gambar yang mengilustrasikan soal.



Gambar 20

Karena $\angle KAL = \angle MAL$, $\angle AKL = \angle AML$, dan segitiga AKL dan segitiga AML mempunyai sisi persekutuan yaitu AL maka diperoleh segitiga AKL kongruen dengan AML. Hal ini memberikan KM tegak lurus dengan AN. Jadi, luas segiempat $AKNM$ adalah $\frac{1}{2}AN \cdot KM$. Di sisi lain, $AKLM$ merupakan segiempat talibusur sebab sudut-sudut yang berhadapan saling berpelurus. Jadi, kita memperoleh $\angle AKM = \angle ALM$ yang berakibat

$$\frac{KM}{\sin \angle BAC} = \frac{AM}{\sin \angle AKM} = \frac{AM}{\sin \angle ALM} = AL.$$

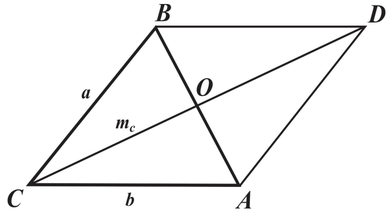
Karena $\angle BAL = \angle NAC$ dan $\angle ABL = \angle ANC$, maka segitiga ABL dan segitiga ANC sebangun. Hal ini berakibat $\dfrac{AB}{AL} = \dfrac{AN}{AC}$ atau $AB \cdot AC = AN \cdot AL$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\text{luas segitiga}\, ABC &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} AN \cdot AL \cdot \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} AN \cdot KM. \ \blacklozenge\end{aligned}$$

Contoh 3.2.2. *Diketahui a dan b adalah dua sisi dari sebuah segitiga dan m_c adalah garis berat yang ditarik ke sisi yang ketiga. Buktikan*

$$|m_c| \leq \frac{|a| + |b|}{2}.$$

Penyelesaian. Perhatikan gambar di bawah.



Gambar 21

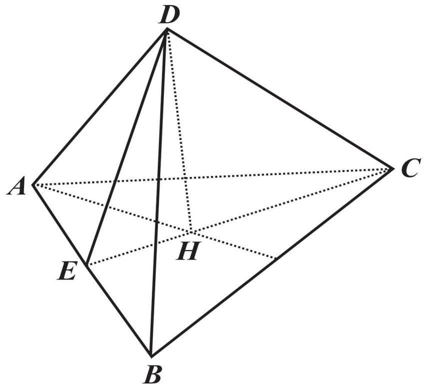
Misalkan $|BO| = |OA|$. Kita perpanjang CO hingga titik D sehingga $|CO| = |OD|$ dan diperoleh bahwa segiempat $ABCD$ adalah sebuah jajargenjang. Oleh karena itu, $|BD| = |CA| = |b|$. Selanjutnya, pada segitiga CBD kita mempunyai $|CD| < |CB| + |BD|$, yakni

$$2|m_c| < |a| + |b| \iff |m_c| \leq \frac{|a| + |b|}{2}. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.2.3. *Pada limas segitiga ABCD dengan D adalah titik puncak limas diketahui BD tegak lurus dengan CD. Proyeksi titik D ke bidang ABC berhimpit dengan titik berat segitiga ABC. Buktikan*

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6\left(AD^2 + BD^2 + CD^2\right).$$

Penyelesaian. Kita misalkan $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = p$, $BD = q$, dan $CD = r$.



Gambar 22

Karena $CDE \perp ABC$, maka $DE \perp AB$ dan $CE \perp AB$. Dalam segitiga DBE berlaku

$$DE^2 + BE^2 = DB^2 \iff DE^2 + BE^2 = q^2.$$

Dalam segitiga BCE berlaku

$$CE^2 + BE^2 = BC^2 \iff CE^2 + BE^2 = a^2 = q^2 + r^2.$$

Dari dua hasil di atas diperoleh

$$CE^2 - DE^2 = r^2 \iff r^2 + DE^2 = CE^2 \iff CD^2 + DE^2 = CE^2.$$

Kita mendapatkan $\angle CDE = 90^o$. Sebagai akibatnya, $CD \perp BD$ dan $CD \perp ED$. Jadi, $CD \perp ABD$, yang berakibat $CD \perp AD$ dan kita mempunyai $\angle CDA = 90^o$. Dari sini berlaku $q^2 + r^2 = a^2$, $p^2 + r^2 = b^2$, dan $p^2 + q^2 = c^2$. Penjumlahan ketiga persamaan terakhir memberikan

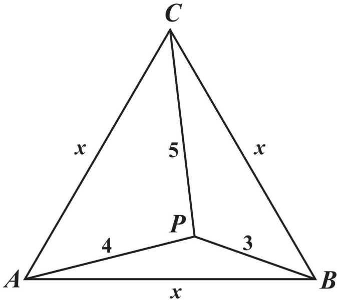
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 + 2q^2 + 2r^2 = 2\left(p^2 + q^2 + r^2\right).$$

Karena $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ maka

$$(a + b + c)^2 \leq 3 \cdot 2\left(p^2 + q^2 + r^2\right) = 6\left(p^2 + q^2 + r^2\right). \ \blacklozenge$$

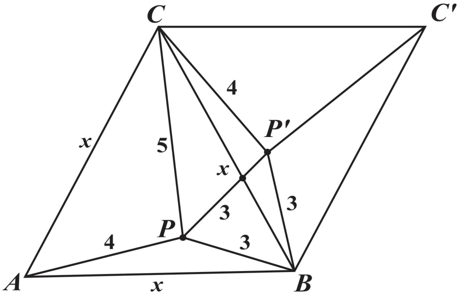
Contoh 3.2.4. *Diketahui P adalah sebuah titik di dalam segitiga samasisi ABC dengan PA = 4, PB = 3, dan PC = 5. Tentukan panjang sisi segitiga tersebut.*

Penyelesaian. Soal di atas dapat digambarkan seperti di bawah ini dan kita akan mencari nilai x.



Gambar 23

Segitiga ABC kita rotasi searah jarum jam sejauh 60^o dengan titik pusat rotasi adalah B. Misalkan P dan C bertransformasi berturut-turut menjadi P' dan C'.



Gambar 24

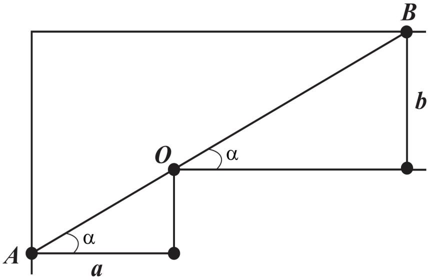
Kita perhatikan bahwa segitiga $PP'B$ samasisi dan karenanya $PP' = 3$. Karena segitiga $PP'C$ mempunyai panjang sisi-sisi 3, 4, dan 5, maka $\angle PP'C$ adalah sudut siku-siku. Dari sini diperoleh $\angle BP'C = 60^o + 90^o = 150^o$. Dengan menggunakan aturan kosinus diperoleh

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 150^o = 25 + 12\sqrt{3}.$$

Jadi, $x = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$. ◆

Contoh 3.2.5. *Sebuah koridor memiliki bentuk huruf L dengan lebar a satuan di satu sayap dan b satuan di sayap yang lain. Carilah panjang terbesar dari sebuah tongkat yang dapat dipindahkan dari satu sayap koridor ke sayap yang lain. Kita asumsikan bahwa ketebalan tongkat diabaikan dan selama perpindahan tongkat tetap horizontal (tidak berubah bentuk).*

Penyelesaian. Untuk lebih mudah memahami masalah kita ilustrasikan persoalan di atas melalui gambar berikut.



Gambar 25

Kita notasikan dengan α adalah sudut di antara 0^o dan 90^o. Selanjutnya, AB adalah sebuah ruas garis di pojok koridor yang menyinggung titik sudut O dari segitiga siku-siku koridor serta membentuk sudut α dengan salah satu dinding koridor. Terlihat bahwa AB adalah sebuah fungsi dari sudut α. Jadi, kita dapat membentuk fungsi

$$f(\alpha) = AB = AO + OB = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha}.$$

Sebuah tongkat dengan panjang l dapat dipindahkan dari satu sayap koridor ke sayap yang lain jika $l \leq f(\alpha)$ untuk setiap $\alpha \in (0^o, 90^o)$. Hal ini merupakan syarat perlu dan cukup, sehingga panjang terbesar l dari tongkat adalah nilai minimum dari fungsi $f(\alpha)$ pada selang $(0^o, 90^o)$.

Sampai di sini kita telah memahami masalah melalui ilustrasi serta notasi-notasi yang kita buat serta memformulasi tujuan kita. Untuk menyelesaikannya kita akan menggunakan metode dari kalkulus diferensial. Pertama kita mencari titik kritis fungsi f. Turunan pertama fungsi f adalah

$$f'(\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\left(\tan^3\alpha - \frac{b}{a}\right).$$

Karena $\tan^3\alpha$ adalah fungsi naik tegas bernilai dari 0 sampai ∞ untuk α dari 0^o sampai 90^o, maka terdapat dengan tunggal $\alpha_0 \in (0^o, 90^o)$ sehingga $\tan^3\alpha_0 = \frac{b}{a}$. Jadi, $f'(\alpha_0) = 0$. Lebih jauh, $f'(\alpha) < 0$ untuk $\alpha \in (0, \alpha_0)$ dan $f'(\alpha) > 0$ untuk $\alpha \in (\alpha_0, 90^o)$. Dengan kata lain, f mempunyai nilai minimum di α_0. Karena $\tan\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, maka

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1+\tan^2\alpha_0} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$$

dan

$$\sin^2\alpha_0 = 1-\cos^2\alpha_0 = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}.$$

Jadi,

$$f(\alpha_0) = \frac{a}{\cos\alpha_0} + \frac{b}{\sin\alpha_0} = \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Sebagai kesimpulan, panjang terbesar dari tongkat yang dapat dipindahkan dari satu sayap koridor ke sayap lain adalah

$$l = \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}. \;\blacklozenge$$

Contoh terakhir di subbab ini menunjukkan bahwa gambar/diagram juga dapat bermanfaat untuk menyelesaikan masalah aljabar/aritmetika.

Contoh 3.2.6. *Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari x kita notasikan dengan* $[x]$. *Jika a dan b adalah dua bilangan bulat positif yang tidak mempunyai faktor persekutuan, maka tunjukkan*

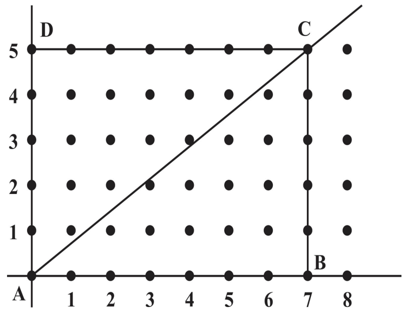
$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \left[\frac{3a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Penyelesaian. Ketika $b = 1$, kita memahami bahwa jumlahan di ruas kiri adalah nol, sehingga kesamaan benar. Sampai saat ini kita melihat bagaimana gambar dapat membantu memecahkan masalah aritmetika di atas. Perhatikan bahwa pernyataan yang ingin dibuktikan melibatkan dua variabel independen, yakni a dan b. Lebih lanjut, $\frac{a}{b}, \frac{2a}{b}, \frac{3a}{b}, \ldots$ adalah nilai-nilai dari fungsi $f(x) = \frac{ax}{b}$ untuk $x = 1, 2, 3, \ldots$. Apakah mungkin kita memberi interpretasi geometris pada $\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{2a}{b}\right], \ldots$?

Untuk memperjelas ide di atas, kita perhatikan kasus $a = 5$ dan $b = 7$. Titik-titik $P_k = \left(k, \frac{5k}{7}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ terletak pada garis $y = \frac{5x}{7}$ dan $\left[\frac{5k}{7}\right]$ sama dengan banyaknya titik latis pada garis tegak yang melalui P_k yang berada di atas sumbu x tetapi di bawah P_k. Jadi,

$$\sum_{k=1}^{6} \left[\frac{5k}{7}\right]$$

sama dengan banyaknya titik latis yang berada di dalam segitiga ABC.



Gambar 26

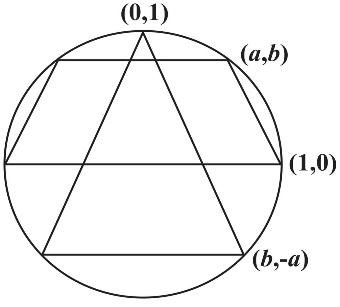
Dengan menggunakan sifat simetri, bilangan ini sama dengan setengah banyaknya titik latis di dalam persegi panjang $ABCD$. Terdapat $4 \times 6 = 24$ titik latis di dalam $ABCD$, yang berarti di dalam segitiga ABC terdapat 12 titik latis.

Argumentasi yang serupa dapat kita terapkan secara umum. Kondisi bahwa a dan b tidak mempunyai faktor persekutuan menjamin bahwa tidak ada titik latis di dalam persegi panjang $ABCD$ yang berada pada garis $y = \dfrac{ax}{b}$. Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{b-1} \left[\frac{ka}{b}\right] &= \frac{1}{2}\,(\text{banyaknya titik latis di dalam } ABCD) \\ &= \frac{(a-1)(b-1)}{2}. \ \blacklozenge\end{aligned}$$

Latihan Soal 3.2.

1. Di dalam sebuah lingkaran dibuat sebuah trapezium dengan keempat titik sudutnya terletak pada lingkaran dan salah satu sisinya berhimpit dengan diameter lingkaran. Selanjutnya dibuat segitiga dengan ketiga titik sudutnya terletak pada lingkaran dan ketiga sisi segitiga sejajar dengan sisi-sisi trapezium. Tunjukkan bahwa luas trapezium sama dengan luas segitiga.



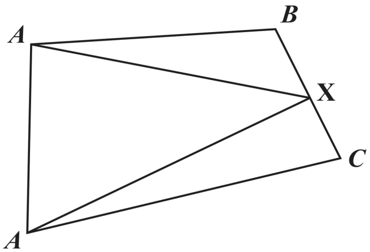
Gambar 27

2. Tiga garis tinggi dari suatu segitiga lancip panjangnya berturut-turut adalah 3, 4, dan 6. Hitunglah luas dan keliling segitiga tersebut.

3. Dua buah titik A dan B terletak pada satu sisi dari garis l. Buatlah lintasan terpendek yang dimulai dari A menyentuh l dan berakhir di B.

Gambar 28

4. Misalkan X adalah sebarang titik di antara B dan C pada sisi BC pada sebuah segiempat konveks $ABCD$ seperti pada gambar di bawah.



Gambar 29

   Sebuah garis ditarik melalui B sejajar dengan AX dan sebuah garis lain ditarik melalui C sejajar dengan DX. Kedua garis ini berpotongan di P. Buktikan bahwa luas segitiga APD sama dengan luas segiempat $ABCD$.

5. Persegi $ABDE$ dan $BCFG$ dibuat di luar segitiga ABC. Buktikan bahwa segitiga ABC samakaki jika DG sejajar dengan AC.
6. Buktikan bahwa terdapat tepat satu segitiga dengan panjang sisi-sisi adalah bilangan bulat positif yang berurutan dan salah satu sudutnya mempunyai besar dua kali sudut yang lainnya.
7. Di dalam segitiga ABC diketahui titik D, E, dan F terletak pada sisi BC sehingga AD, AE, dan AF berturut-turut merupakan garis tinggi, garis bagi, dan garis berat segitiga. Diketahui juga $AD = 12$ dan $AE = 13$. Tentukan panjang AF sehingga $\angle BAC$ adalah sudut
   (a) lancip
   (b) siku-siku
   (c) tumpul

8. Segitiga samasisi ABP dan ACQ dibentuk berturut-turut pada bagian luar sisi AB dan AC dari segitiga ABC. Buktikan $CP = BQ$.
9. Misalkan $ABCD$ adalah trapezium siku-siku dengan AB sejajar DC dan AB tegaklurus AD. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik P. Jika perbandingan luas segitiga APD dan luas trapezium $ABCD$ adalah $4 : 25$, maka tentukan nilai $AB : DC$.
10. Diketahui A dan B adalah dua titik di dalam lingkaran K. Buatlah sebuah lingkaran yang melalui A dan B serta menyinggung K.
11. Diberikan segitiga ABC. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut.
    (a)
    $$\frac{1}{2}(\sin B + \sin C) \leq \sin \frac{B+C}{2}.$$
    (b)
    $$\frac{m}{m+n}\sin B + \frac{n}{m+n}\sin C \leq \sin\left(\frac{m}{m+n}B + \frac{n}{m+n}C\right),$$
    dengan $m, n > 0$.

    Petunjuk: gunakan grafik $y = \sin x$.
12. Segitiga ABC mempunyai panjang sisi $AB = 20$, $AC = 21$, dan $BC = 29$. Titik D dan E terletak pada sisi BC dengan $BD = 8$ dan $EC = 9$. Tentukan besar $\angle DAE$.
13. Tunjukkan bahwa keliling terkecil dari segitiga samakaki yang panjang jari-jari lingkaran dalamnya adalah r sama dengan $6r\sqrt{3}$.
14. Dua sisi sebuah segitiga panjangnya adalah 8 dan 18. Garis bagi dari sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut mempunyai panjang $\frac{60}{13}$. Tentukan keliling dan luas segitiga tersebut.
15. Diberikan A dan B adalah dua titik yang tetap pada sebuah lingkaran sementara X dan Y adalah sebarang dua titik pada lingkaran sehingga XY merupakan diameter. Tentukan tempat kedudukan titik-titik potong garis AX dan BY.
16. Diketahui segitiga samasisi ABC dan sebuah titik P di luar segitiga sehingga jarak P ke A dan jarak P ke C tidak lebih jauh dari jarak P ke B. Buktikan bahwa $PB = PA + PC$ jika dan hanya jika P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.

17. Tuan dan Nyonya Budiman menghadiri sebuah acara yang juga dihadiri oleh tiga pasang suami istri yang lain. Terjadi jabat tangan di antara para tamu. Tidak ada tamu yang berjabat tangan dengan pasangannya sendiri, tidak ada tamu yang berjabat tangan dengan orang sama dua kali, dan tentu saja tidak ada tamu yang berjabat tangan dengan dirinya sendiri. Tuan Budiman kemudian bertanya kepada setiap tamu yang hadir berapa jabat tangan yang telah mereka lakukan. Tuan Budiman terkejut ketika mendapati bahwa setiap tamu memberikan jawaban yang berbeda. Berapa jabat tangan yang dilakukan Nyonya Budiman?
18. Diberikan segilima beraturan $PQRST$ dengan panjang sisi a dan panjang diagonal b. Tunjukkan bahwa
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 3.$$
19. Diberikan segitiga ABC dengan sudut siku-siku di C, $\angle ABC = 60^o$, dan $AB = 10$. Sebuah titik P dipilih secara acak di dalam segitiga ABC dan selanjutnya garis BP diperpanjang sampai memotong sisi AC di titik D. Tentukan peluang bahwa $BD > 5\sqrt{2}$.
20. Ada 4 bola di ruang dengan jari-jari 2, 2, 3, dan 3. Setiap bola menyinggung ketiga bola yang lainnya. Ada sebuah bola lainnya yang menyinggung keempat bola tersebut. Tentukan jari-jari bola ini.

3.3 Memodifikasi masalah

Seringkali dengan memodifikasi masalah ataupun membentuk masalah yang ekivalen (namun lebih sederhana) sangat membantu kita menyelesaikan masalah yang dihadapi. Strategi ini meliputi manipulasi aljabar ataupun trigonometri, substitusi ataupun perubahan variabel, pemanfaatan korespondensi satu-satu, dan penafsiran ulang masalah ke dalam bahasa cabang matematika yang lain (aljabar, geometri, analisis, kombinatorika, dan sebagainya).

Contoh 3.3.1. *Selesaikan persamaan*

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1.$$

Penyelesaian. Penjabaran dan penyederhanaan aljabar memberikan

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

dan ini merupakan persamaan sukubanyak yang tidak mudah diselesaikan. Ide kita sekarang adalah menyelesaikan masalah lain yang setara dengan soal di atas. Kita sebut $\frac{x}{x+1} = y$ dan sebagai akibatnya persamaan kita setara dengan sistem persamaan

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ \dfrac{x}{x+1} & = y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ x - y & = xy. \end{cases}$$

Selanjutnya, kita notasikan $x + (-y) = -p$ dan $x(-y) = q$. Karena $x^2 + y^2 = (x + (-y))^2 - 2x(-y)$, maka sistem persamaan terakhir dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{cases} (-p)^2 - 2q & = 1 \\ -p & = -q \end{cases} \iff \begin{cases} p^2 - 2q & = 1 \\ p & = q, \end{cases}$$

dan ini memberikan $p^2 - 2p - 1 = 0$. Jadi

$$p_1 = 1 + \sqrt{2}, q_1 = 1 + \sqrt{2}$$

dan

$$p_2 = 1 - \sqrt{2}, q_2 = 1 - \sqrt{2},$$

dan $\{x, -y\}$ adalah himpunan penyelesaian dari persamaan

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Dari sini, kita mempunyai dua kasus:

1. $p = 1 = 1 + \sqrt{2}$:

$$z^2 + (1 + \sqrt{2})z + (1 + \sqrt{2}) = 0.$$

Karena diskriminan $D = 1 + \sqrt{2}^2 - 4(1 + \sqrt{2}) < 0$, maka tidak ada penyelesaian real dari persamaan tersebut.

2. $p = q = 1 - \sqrt{2}$:

$$z^2 + (1 - \sqrt{2})z + (1 - \sqrt{2}) = 0,$$

dan

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}.$$

Jadi, kita mempunyai dua penyelesaian: $x = z_1$ dan $-y = z_2$ serta $x = z_2$ dan $-y = z_1$. Karena y adalah variabel dummy, maka kita hanya perlu memperhatikan penyelesaian dalam variabel x, yakni

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right). \ \diamond$$

Contoh 3.3.2. *Carilah rumus turunan ke n dari fungsi*

$$f(x) = \frac{2}{1 - x^2}.$$

Penyelesaian. Soal ini menjadi lebih mudah diselesaikan ketika kita menuliskan fungsi f ke dalam bentuk yang ekivalen, yaitu

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right).$$

Dari sini kita memperoleh

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1 - x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1 + x)^{n+1}}\right)$$

yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika. $\diamond$

Contoh 3.3.3. *Bilangan palindrom enam digit adalah bilangan asli yang berbentuk abccba dengan $a \neq 0$, $a \neq b$, dan $a \neq c$. Berapakah banyaknya bilangan palindrom enam digit yang habis dibagi 7?*

Penyelesaian. Perhatikan bahwa bilangan palindrom enam digit berbentuk

$$\begin{aligned} abccba &= 100001a + 10010b + 1100c \\ &= 7\,(14286a + 1430b + 157c) - (a - c). \end{aligned}$$

Dari sini kita melihat bahwa *abccba* habis dibagi 7 jika dan hanya jika $a - c$ habis dibagi 7. Dengan kata lain, masalah kita sekarang adalah mencari semua digit a dan c sehingga $a - c$ habis dibagi 7. Karena $a \neq 0$ dan c adalah digit desimal, maka $-8 \leq a - c \leq 9$. Jadi, nilai yang mungkin dari $a - c$ adalah -7, 0, atau 7.

- Jika $a - c = -7$, maka $(a, c) \in \{(1, 8), (2, 9)\}$.
- Jika $a - c = 0$, maka $(a, c) \in \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (9, 9)\}$.
- Jika $a - c = 7$, maka $(a, c) \in \{(7, 0), (8, 1), (9, 2)\}$.

Total ada 14 kemungkinan untuk pasangan terurut (a, c). Di setiap kasus, b adalah sebarang digit dari $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Jadi, ada $14 \cdot 10 = 140$ bilangan palindrom enam digit yang habis dibagi 7. ◆

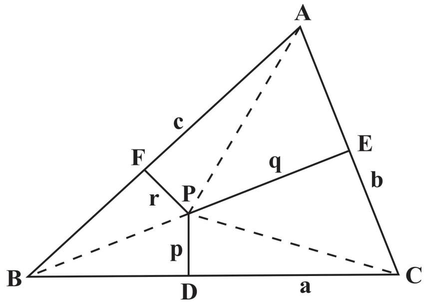
Contoh 3.3.4. *Diketahui P adalah sebuah titik di dalam segitiga ABC dan D, E, dan F berturut-turut adalah kaki proyeksi tegak lurus titik P pada sisi BC, CA, dan AB. Carilah semua titik P sehingga*

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

minimal.

Penyelesaian. Kita notasikan panjang BC, AC, AB, PD, PE, dan PF berturut-turut dengan a, b, c, p, q, dan r. Lihat gambar di bawah.
Kita ingin meminimumkan

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}.$$



Gambar 30

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
[\Delta ABC] &= [\Delta BCp] + [\Delta CAP] + [\Delta ABP] \\
&= \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}bq + \frac{1}{2}cr \\
&= \frac{ap + bq + cr}{2}.
\end{aligned}
$$

Dari sini kita tahu bahwa $ap+bq+cr$ adalah sebuah konstanta yang tidak bergantung pada posisi titik P. Oleh karena itu, kita dapat memodifikasi masalah dari meminimumkan $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}$ menjadi meminimumkan

$$(ap + bq + cr)\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}\right).$$

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
&(ap + bq + cr)\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}\right) \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + bc\left(\frac{q}{r} + \frac{r}{q}\right) + ac\left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right) \\
&\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\
&= (a + b + c)^2 .
\end{aligned}
$$

Ketaksamaan pada baris kedua berasal dari fakta bahwa untuk setiap $x, y > 0$ berlaku

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2,$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = y$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(ap + bq + cr)\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}\right)$ akan mencapai nilai minimumnya $(a + b + c)^2$ jika dan hanya jika $p = q = r$. Secara ekivalen, $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}$ mencapai nilai minimum ketika P adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC, yakni titik potong ketiga garis bagi segitiga ABC. ◆

Contoh 3.3.5. *Diberikan bilangan real positif a, b, c, d. Tunjukkan bahwa*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b + c + d} + \frac{c^3 + d^3 + a^3}{c + d + a} + \frac{d^3 + a^3 + b^3}{d + a + b}$$
$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Penyelesaian. Karena simetri yang muncul pada soal, maka cukup dibuktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x, y, dan z berlaku

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{x + y + z} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}. \tag{3.1}$$

Untuk melihat hal ini, perhatikan apabila ketaksamaan terakhir berlaku maka ruas kiri dari ketaksamaan awal bernilai sekurang-kurangnya

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{b^2 + c^2 + d^2}{3} + \frac{c^2 + d^2 + a^2}{3} + \frac{d^2 + a^2 + b^2}{3}$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Sekarang untuk membuktikan ketaksamaan (3.1), tanpa mengurangi keumuman bukti, dapat kita asumsikan bahwa $x + y + z = 1$. Misalkan $x + y + z \neq 1$, maka kita dapat membagi kedua ruas pada (3.1) dengan $(x + y + z)^2$ dan mengambil $X = \frac{x}{x + y + z}$, $Y = \frac{y}{x + y + z}$, dan $Z = \frac{z}{x + y + z}$. Jadi, masalah semula pada soal tereduksi menjadi masalah termodifikasi sebagai berikut: Diberikan bilangan real positif X, Y, dan Z sehingga $X + Y + Z = 1$. Buktikan

$$X^3 + Y^3 + Z^3 \geq \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{3}.$$

Kita akan buktikan ketaksamaan yang terakhir ini secara lebih umum yakni: Diberikan $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Untuk setiap bilangan bulat taknegatif k berlaku

$$\frac{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k}{n} \le x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + \cdots + x_n^{k+1}.$$

Ketaksamaan jelas benar untuk $k = 0$. Selanjutnya, asumsikan ketaksamaan benar untuk semua bilangan bulat taknegatif yang kurang dari k. Sekarang perhatikan bahwa ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan hipotesis induksi memberikan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{k+1}{2}} \frac{x_i^{\frac{k-1}{2}}}{n} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k-1}}{n^2} \right)^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k}}{n} \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} \right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} \right)^{1/2},$$

yang memberikan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} \le \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}.$$

Dengan demikian, menurut prinsip induksi kuat, ketaksamaan benar untuk setiap bilangan bulat taknegatif k. ◆

Contoh 3.3.6. *Carilah semua bilangan real x yang memenuhi persamaan*

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x).$$

Penyelesaian. Tidak ada penyelesaian real dari persamaan ini. Perhatikan bahwa dua fungsi pada masing-masing ruas persamaan mempunyai periode 2π. Jadi, kita dapat asumsikan $-\pi < x \le \pi$. Jika x

adalah sebuah penyelesaian, maka

$$\sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = \cos(\sin x) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin(-x)),$$

yakni $-x$ juga merupakan penyelesaian. Jadi, kita cukup menunjukkan bahwa persamaan tidak mempunyai penyelesaian pada selang $[0, \pi]$. Pada selang ini berlaku $0 \le \sin x \le 1 < \frac{\pi}{2}$, yang berarti $\cos(\sin x) > 0$. Agar $\sin(\cos x) > 0$, haruslah $0 \le x < \frac{\pi}{2}$. Karena fungsi $x - \sin x$ naik monoton dan bernilai nol di $x = 0$, maka $\sin x < x$ untuk $x > 0$. Secara khusus, berlaku $\sin(\cos x) < \cos x$. Di lain pihak, fungsi kosinus turun monoton pada $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, yang berarti $\cos x < \cos(\sin x)$. Dari dua hasil di atas kita mempunyai $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$. ◆

Contoh 3.3.7. *Hitunglah*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Penyelesaian. Teknik pengintegralan dari integral satu variabel tidak bisa menyelesaikan soal ini secara langsung. Salah satu cara untuk menyelesaikannya adalah mengubah masalah dari integral satu variabel menjadi integral dua variabel (integral lipat). Misalkan

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Dari sini kita memperoleh

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right) e^{-y^2}\, dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-y^2}\, dxdy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)^2}\, dxdy.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita mengubah masalah dari koordinat Cartesius menjadi koordinat kutub:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{p\to\infty} -\frac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_0^p \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.3.8. *Bilangan 5 dapat dituliskan sebagai jumlahan tiga bilangan asli (dengan memperhatikan urutan) dalam enam cara, yakni:*

$$5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1 = 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1.$$

Diberikan m dan n adalah dua bilangan asli dengan $m \le n$. Dalam berapa cara n dapat dituliskan sebagai jumlahan m bilangan asli (dengan memperhatikan urutan)?

Penyelesaian. Masalah pencacahan seperti ini seringkali dapat disederhanakan dengan melakukan identifikasi (melalui korespondensi satu-satu) antara sebuah himpunan dengan himpunan lain yang lebih mudah dicacah. Untuk soal ini kita tuliskan n sebagai jumlahan n buah bilangan 1:

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}.$$

Bilangan yang kita cari adalah banyaknya cara memilih $m - 1$ tanda jumlahan (+) dari $n - 1$ tanda jumlahan yang ada, yakni $\binom{n-1}{m-1}$. $\blacklozenge$

Latihan Soal 3.3.

1. Hitunglah
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}.$$
2. Tunjukkan bahwa persamaan $x^7-2x^5+10x^2-1=0$ tidak mempunyai akar yang lebih besar dari 1.
3. Urutkan keempat bilangan berikut ini dari yang terkecil nilainya sampai yang terbesar:
$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5}.$$
4. Selesaikan persamaan
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1.$$
5. Tentukan penyelesaian dari persamaan
$$\sin^2 \pi x+\sqrt{x^2+3x+2}=0.$$
6. Tentukan penyelesaian dari persamaan
$$x^{x^2-5x+6}=1.$$
7. Tentukan bilangan-bilangan real x, y, z yang memenuhi sistem persamaan
$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{2},\quad \frac{yz}{y+z}=\frac{1}{3},\quad \frac{zx}{z+x}=\frac{1}{7}.$$
8. Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat x, y, z yang memenuhi
$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$
9. Buktikan rumus Bhaskara: untuk setiap bilangan real positif a, b dengan $a \geq b$ berlaku
$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

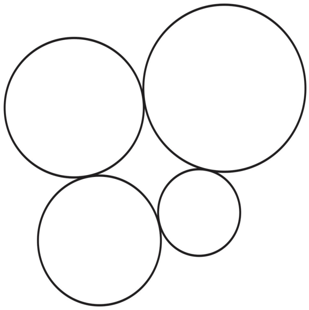
10. Tentukan peluang bahwa tiga buah titik yang dipilih secara acak pada sebuah lingkaran terletak pada sebuah setengah lingkaran yang sama.
11. Berapa banyak bilangan asli berbentuk *abcabcabc* yang habis dibagi 29?
12. Tunjukkan untuk $a, b > 0$ berlaku

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \ln \frac{b}{a}.$$

13. Carilah penyelesaian persamaan

$$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx},$$

dengan m adalah parameter real.
14. Empat buah lingkaran yang berbeda jari-jari disusun sehingga setiap lingkaran menyinggung di luar dua lingkaran lainnya. Buktikan bahwa ada lingkaran yang melewati empat titik singgung dari empat lingkaran tersebut.



Gambar 31

15. Bilangan 3 dapat dituliskan sebagai jumlahan satu atau lebih bilangan asli (dengan memperhatikan urutan), yakni 3, $1 + 2$, $2 + 1$, dan $1 + 1 + 1$. Tunjukkan bahwa setiap bilangan asli n juga dapat dituliskan dengan cara demikian dalam 2^{n-1} cara.
16. Diberikan bilangan asli n. Carilah banyaknya quadrupel bilangan bulat positif (a, b, c, d) sehingga

$$0 \le a \le b \le c \le d \le n.$$

17. Diketahui AP adalah garis tinggi segitiga ABC dan titik Q berada pada sisi BC sehingga $\angle BAQ = \angle CAP$. Buktikan bahwa garis AQ melalui titik pusat lingkaran luar segitiga ABC.
18. Hitunglah
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{\frac{1}{n}}.$$
Petunjuk: Gunakan identitas $x = e^{\ln x}$ untuk $x > 0$.
19. Jika α, β, γ adalah sudut-sudut dalam sebuah segitiga yang memenuhi $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1$, maka tunjukkan bahwa salah satu dari ketiga sudut tersebut adalah 120^o.
20. Buktikan bahwa matriks
$$\begin{pmatrix} 10^{30}+5 & 10^{10}+4 & 10^7+2 & 10^{18}+10 \\ 10^5+6 & 10^{100}+3 & 10^8+10 & 10^{15}+20 \\ 10^{14}+5 & 80^{19}+4 & 10^4+5 & 10^{40}+4 \\ 10^{50}+2 & 10^{13}+6 & 10^{23}+8 & 10^9+17 \end{pmatrix}$$
mempunyai invers.

3.4 Memilih Notasi dan Substitusi yang Tepat

Salah satu hal penting di dalam proses pemecahan masalah matematis adalah menerjemahkan soal matematika ke dalam bentuk notasi matematika. Semua konsep kunci harus diidentifikasi dan diberi label dan kemudian dicari hubungannya. Dalam konteks tertentu penggunaan notasi juga dikaitkan dengan transformasi dari satu notasi ke notasi yang lain (substitusi).

Contoh 3.4.1. *Hitunglah nilai*
$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}} - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}.$$

Penyelesaian. Soal ini sekilas tampak rumit dan memerlukan perhitungan yang panjang. Dengan memperkenalkan notasi baru yang sederhana, ternyata soal ini dapat diselesaikan dengan mudah. Misalkan

$$x := \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}} \quad \text{dan} \quad y := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}.$$

Dari sini berlaku $x^2 = x$ yang memberikan $x = 0$ sebab $x > 0$. Demikian juga kita memperoleh $y^2 = 2+y$ atau $(y-2)(y+1) = 0$, dan karena $y > 0$, maka $y = 2$. Jadi, jawabannya adalah $x - y = 2 - 2 = 0$. ◆

Contoh 3.4.2. *Jika x, y, dan z adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi $xyz = 1$, maka tunjukkan bahwa*

$$\frac{xy}{1+y+xy} + \frac{yz}{1+z+yz} + \frac{xz}{1+x+xz} = 1.$$

Penyelesaian. Kita mungkin akan langsung mencoba menyederhanakan ruas kiri dari identitas di atas dan menggunakan asumsi $xyz = 1$ untuk mendapatkan ruas kanan yang sama dengan 1. Namun hal ini membawa kita pada perhitungan yang rumit. Dengan memperkenalkan notasi baru pada soal ini kita dapat menyelesaikannya dengan mudah. Karena $xyz = 1$, maka ada bilangan-bilangan real taknol a, b, dan c sehingga

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad \text{dan} \quad z = \frac{c}{a}.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
&\frac{xy}{1+y+xy} + \frac{yz}{1+z+yz} + \frac{xz}{1+x+xz} \\
&= \frac{\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}} + \frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}} + \frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}} \\
&= \frac{a}{c+b+a} + \frac{b}{a+c+b} + \frac{c}{b+a+c} \\
&= \frac{a+b+c}{a+b+c} \\
&= 1. \text{ ◆}
\end{aligned}$$

Contoh 3.4.3. *Di suatu pagi turun hujan salju sangat lebat dan dengan laju yang tetap. Sebuah mesin pembersih salju mulai bekerja pada pukul 08.00. Pada pukul 09.00 mesin itu telah berjalan 2 km dan pada pukul 10.00 mesin itu telah berjalan 3 km. Apabila diketahui mesin membersihkan salju dengan volume tetap per jam, tentukan waktu mulai terjadi hujan salju.*

Penyelesaian. Sekilas terlihat tidak cukup informasi pada soal yang membantu kita untuk menyelesaikannya. Untuk dapat memahami soal secara sistematis kita harus mulai dengan mengidentifikasi semua besaran yang tidak diketahui. Kita misalkan t adalah waktu yang sudah berjalan sejak salju mulai turun dan T adalah lama waktu mesin pembersih salju sudah bekerja (dihitung dari $t = 0$). Misalkan juga $x(t)$ adalah jarak yang sudah ditempuh oleh mesin pembersih salju pada waktu t. Dalam hal ini kita hanya tertarik pada nilai $x(t)$ dengan $t \geq T$. Terakhir, kita gunakan notasi $h(t)$ untuk ketinggian salju pada waktu t.

Sekarang kita siap untuk menerjemahkan soal ke dalam notasi-notasi yang sudah ditetapkan di atas. Informasi bahwa salju turun dengan laju konstan mengimplikasikan bahwa ketinggian salju bertambah dengan laju konstan, yakni ada konstanta c sehingga

$$\frac{dh}{dt} = c.$$

Integrasikan kedua ruas untuk mendapatkan $h(t) = ct + d$, untuk suatu konstanta d. Karena $h(0) = 0$ maka $d = 0$, yang berarti $h(t) = ct$. Selanjutnya, informasi bahwa mesin pembersih salju membersihkan salju dengan laju konstan berarti bahwa kecepatan mesin berbanding terbalik dengan ketinggian salju di setiap waktu t. Sebagai contoh, dua kali ketinggian salju berkorespondensi dengan setengah dari kecepatan mesin. Secara simbolis, untuk $t \geq T$, ada konstanta k sehingga

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{h(t)} = \frac{k}{ct} = \frac{K}{t},$$

dengan $K = \dfrac{k}{c}$.

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan kita memperoleh

$$x(t) = K \ln t + C,$$

untuk suatu konstanta C. Kita mempunyai tiga kondisi yang diketahui: $x(T) = 0$, $x(T + 1) = 2$, dan $x(T + 2) = 3$. Dengan menggunakan dua dari tiga kondisi ini nilai dari K dan C dapat ditentukan dan dengan kondisi satunya kita dapat menentukan nilai T (detail diserahkan kepada pembaca):

$$T = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618 \text{ jam} \approx 37 \text{ menit } 5 \text{ detik.}$$

Sebagai kesimpulan, kita dapat mengatakan bahwa salju mulai turun pada pukul 07:22:55. ◆

Contoh 3.4.4.
1. *Jika $n \in \mathbb{N}$ sehingga $2n + 1$ adalah bilangan kuadrat sempurna, maka tunjukkan bahwa $n+1$ adalah jumlahan dari dua bilangan kuadrat sempurna yang berurutan.*
2. *Jika $3n + 1$ adalah bilangan kuadrat sempurna, maka tunjukkan bahwa $n + 1$ adalah jumlahan dari tiga bilangan kuadrat sempurna.*

Penyelesaian. Dengan memilih notasi yang tepat, maka masalah di atas akan menjadi masalah aljabar sederhana.
(1). Misalkan $2n+1 = s^2$ untuk suatu $s \in \mathbb{Z}$. Karena s^2 adalah bilangan ganjil, maka s juga adalah bilangan ganjil. Misalkan $t \in \mathbb{Z}$ sehingga $s = 2t+1$. Dari sini kita mendapatkan $2n+1 = (2t+1)^2$, dan akibatnya

$$n = \frac{(2t + 1)^2 - 1}{2} = \frac{4t^2 + 4t}{2} = 2t^2 + 2t.$$

Jadi,

$$n + 1 = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t + 1)^2.$$

(2). Misalkan $3n + 1 = s^2$ untuk suatu $s \in \mathbb{Z}$. Jelas bahwa s bukan kelipatan dari 3, yang berarti $s = 3t \pm 1$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}$. Jadi,

$3n + 1 = (3t \pm 1)^2$, dan karenanya

$$n = \frac{(3t \pm 1)^2 - 1}{3} = \frac{9t^2 \pm 6t}{3} = 3t^2 \pm 2t.$$

Kita memperoleh

$$n + 1 = 3t^2 \pm 2t + 1 = 2t^2 + (t \pm 1)^2 = t^2 + t^2 + (t \pm 1)^2. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.4.5. *Tentukan semua penyelesaian real dari persamaan*

$$\sqrt[4]{13 + x} + \sqrt[4]{4 - x} = 3.$$

Penyelesaian. Dengan menggunakan notasi $a = \sqrt[4]{13 + x}$ dan $b = \sqrt[4]{4 - x}$ masalah di atas setara dengan sistem persamaan

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \\ a^4 + b^4 &= 17. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 17 &= a^4 + b^4 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ &= \left((a + b)^2 - 2ab\right)^2 - 2a^2b^2 \\ &= (9 - 2ab)^2 - 2(ab)^2 \\ &= 81 - 36ab + 2(ab)^2. \end{aligned}$$

dan didapatkan persamaan kuadrat $(ab)^2 - 18ab + 32 = 0$. Penyelesaian dari persamaan kuadrat ini adalah $ab = 2$ atau $ab = 16$. Jadi, ada dua kemungkinan:

1. $a + b = 3$ dan $ab = 2$. Dari sini diperoleh $a = 1$ dan $b = 2$ atau $a = 2$ dan $b = 1$. Jika $a = 1$, maka $13 + x = 1$, yang berarti $x = -12$. Jika $a = 2$, maka $13 + x = 16$, yang berarti $x = 3$.
2. $a + b = 3$ dan $ab = 16$. Dari sini diperoleh $a^2 - 3a + 16 = 0$, yang tidak mempunyai penyelesaian real.

Dengan demikian himpunan penyelesaian persamaan semula adalah $\{-12, 3\}$. ◆

Contoh 3.4.6. *Tentukan turunan dari fungsi*

$$y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Penyelesaian. Kita bisa mengerjakan langsung dengan menggunakan turunan fungsi komposisi:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(1 + x^2)^2} \\
&= \frac{1 + x^2}{\sqrt{(1 + x^2)^2 - 4x^2}} \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 + x^4}} \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)} \\
&= \frac{2}{1 + x^2}.
\end{aligned}$$

Sebagai alternatif penyelesaian, kita juga dapat menggunakan substitusi yang akan menyederhanakan soal. Pilih $x = \tan\theta$, maka

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} \\
&= \arcsin \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \\
&= \arcsin(\sin 2\theta) \\
&= 2\arctan x.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}. \quad ◆$$

Contoh 3.4.7. *Tentukan*

$$\int \frac{\sin x \cos x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\, dx.$$

Penyelesaian. Memilih substitusi yang tepat sering muncul dalam permasalahan menghitung integral seperti pada soal ini. Kita ambil substitusi $u = a\cos^2 x + b\sin^2 x$ dan diperoleh $du = 2(b-a)\sin x \cos x\,dx$. Jadi,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\,dx &= \frac{1}{2(b-a)}\int \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{2(b-a)}\ln|u| + c \\ &= \frac{1}{2(b-a)}\ln\left|a\cos^2 x + b\sin^2 x\right| + c,\end{aligned}$$

asalkan $a \neq b$. Apabila $a = b$, maka integral pada soal menjadi lebih sederhana, yakni

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin x \cos x}{a\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}\,dx \\ &= \frac{1}{2a}\int \sin 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{4a}\cos 2x + c. \;\blacklozenge\end{aligned}$$

Latihan Soal 3.4.

1. Tiga kelompok nelayan berhasil menangkap 113 ekor ikan. Rata-rata jumlah ikan yang ditangkap oleh setiap nelayan di kelompok pertama, kedua, dan ketiga berturut-turut adalah 13, 5, dan 4. Apabila diketahui ada 16 nelayan, maka tentukan banyaknya nelayan di setiap kelompok.
2. Apabila
$$\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\frac{5}{3},$$
maka hitunglah
$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}.$$
3. Tuliskan bilangan real berikut ke dalam bentuk pecahan yang pa-

ling sederhana

$$\sqrt[3]{-2,370370370\ldots}$$

4. Andi meminta Budi untuk memilih sebuah bilangan asli dari 1 sampai 10 dan tidak memberitahukan kepadanya. Andi kemudian meminta Budi untuk: menambahkan bilangan yang telah dipilih dengan 7, selanjutnya hasilnya dikalikan 2, selanjutnya hasilnya dikurangi 8, selanjutnya hasilnya dibagi 2, dan terakhir kurangi hasilnya dengan bilangan yang dipilih tadi. Andi mengatakan kepada Budi bahwa hasil akhirnya adalah 3. Bagaimana Andi mengetahui hal ini?
5. Tentukan turunan dari fungsi

$$y = \arctan \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$$

Petunjuk: pilih substitusi $x = \cos\theta$.
6. Buktikan bahwa

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$$

adalah bilangan rasional.
7. Carilah penyelesaian dari persamaan

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$$

8. Hitunglah

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots111}_{2020 \text{ angka}} - \underbrace{222\ldots222}_{1010 \text{ angka}}}.$$

9. Tentukan bilangan rasional a, b, dan c yang memenuhi

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

10. Perbandingan panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah $3 : 7 : 8$. Tunjukkan bahwa sudut-sudut dalam segitiga tersebut membentuk barisan aritmetika.

11. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi persamaan

$$2 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} + 3^x \cdot 2^{y+1} + 2^{2y} - 2^{y+2} + 5 = 0.$$

12. Diketahui n adalah bilangan asli sehingga $n + 88$ dan $n - 28$ keduanya merupakan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai n yang mungkin.
13. Diberikan fungsi f memenuhi

$$f(x) + 2f\left(\frac{2020}{x}\right) = 3x$$

untuk setiap $x > 0$. Tentukan nilai $f(1)$.
14. Misalkan P_1, P_2, ..., P_{12} adalah titik-titik sudut yang berurutan dari sebuah segi-12 beraturan (*dodecagon*). Apakah diagonal-diagonal P_1P_9, P_2P_{11}, dan P_4P_{12} berpotongan di satu titik?
15. Hitunglah

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x}\, dx.$$

16. Diketahui sebuah bilangan empat digit adalah bilangan kuadrat sempurna, dua digit pertamanya sama, dan dua digit terakhirnya juga sama. Tentukan bilangan tersebut.
17. Apabila m dan n adalah bilangan bulat positif, maka tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

18. Diberikan $-1 < a_0 < 1$ dan selanjutnya kita definisikan secara rekursif

$$a_n = \left(\frac{1 + a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

dan

$$A_n = 4^n (1 - a_n).$$

Hitunglah $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
19. Diketahui a, b, c, d adalah bilangan-bilangan real taknol, sehingga tiga di antaranya positif dan satu negatif serta berlaku

$a + b + c + d = 0$. Buktikan bahwa ada segitiga yang panjang sisi-sisinya adalah

$$\sqrt{\frac{a+b}{ab}}, \sqrt{\frac{b+c}{bc}}, \sqrt{\frac{a+c}{ac}}.$$

20. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$$

3.5 Menggunakan Simetri

Munculnya simetri di dalam soal seringkali memberikan jalan untuk mengurangi pekerjaan mencari penyelesaian. Sebuah contoh sederhana, fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2$ adalah sebuah fungsi genap yang berarti grafiknya simetris terhadap sumbu y. Jadi, untuk menggambar grafiknya kita hanya perlu tahu grafik fungsi f yang berada di sebelah kanan sumbu y dan kemudian tinggal dicerminkan terhadap sumbu y untuk mendapatkan grafik fungsi f yang berada di sebelah kiri sumbu y. Sebuah contoh lain, kita perhatikan perkalian

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right).$$

Karena setiap faktor simetris dalam a, b, dan c (yang berarti hasil perkalian tidak berubah jika sebarang pasangan variabelnya dipertukarkan), demikian juga dengan perkaliannya. Misalnya, jika a^3 muncul di dalam perkalian, maka b^3 dan c^3 juga akan muncul. Demikian pula, jika a^2b muncul di dalam perkalian, maka a^c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b juga akan muncul dan lebih lanjut mereka akan muncul dengan koefisien yang sama. Jadi, perkalian di atas akan berbentuk

$$A(a^3+b^3+c^3) + B(a^b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + C(abc).$$

Mudah diperiksa bahwa $A = 1$, $B = 0$, dan $C = -3$.

Contoh 3.5.1. *Hitunglah jumlahan*

$$\frac{1}{5^{-10}+1}+\frac{1}{5^{-9}+1}+\cdots+\frac{1}{5^{-1}+1}+\frac{1}{5^{0}+1}+\frac{1}{5^{1}+1}+\cdots+\frac{1}{5^{10}+1}$$

Penyelesaian. Sifat simetri dapat kita terapkan dengan menuliskan jumlahan ini sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5^{-10}+1}+\frac{1}{5^{-9}+1}+\cdots+\frac{1}{5^{-1}+1}+\frac{1}{5^{0}+1}+\frac{1}{5^{1}+1}+\cdots+\frac{1}{5^{10}+1}\\
&=\left(\frac{1}{5^{-10}+1}+\frac{1}{5^{10}+1}\right)+\left(\frac{1}{5^{-9}+1}+\frac{1}{5^{9}+1}\right)+\cdots+\\
&\quad\left(\frac{1}{5^{-1}+1}+\frac{1}{5^{1}+1}\right)+\frac{1}{5^{0}+1}\\
&=\left(\frac{5^{10}+1+5^{-10}+1}{1+5^{-10}+5^{10}+1}\right)+\left(\frac{5^{9}+1+5^{-9}+1}{1+5^{-9}+5^{9}+1}\right)+\cdots+\\
&\quad\left(\frac{5^{1}+1+5^{-1}+1}{1+5^{-1}+5^{1}+1}\right)+\frac{1}{1+1}\\
&=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{10}+\frac{1}{2}\\
&=\frac{21}{2}.\ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Contoh 3.5.2. *Panjang sisi-sisi sebuah segitiga berupa tiga bilangan bulat berurutan dan panjang jari-jari lingkaran dalamnya adalah 4 satuan. Tentukan panjang jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut.*

Penyelesaian. Kita dapat memisalkan panjang sisi-sisi segitiga tersebut adalah n, $n+1$, dan $n+2$ untuk suatu bilangan asli n. Namun hal ini akan menimbulkan kesulitan teknis dalam perhitungan. Ide yang lebih baik adalah dengan memanfaatkan simetri yakni memisalkan ketiga sisi segitiga adalah $n-1$, n, dan $n+1$ untuk suatu bilangan asli $n > 1$. Dari sini kita mendapatkan setengah keliling adalah $s = \frac{1}{2}(n-1+n+n+1) =$

$\frac{3}{2}n$ dan dengan rumus Heron diperoleh

$$L = \sqrt{\frac{3}{2}n\left(\frac{3}{2}n - n + 1\right)\left(\frac{3}{2}n - n\right)\left(\frac{3}{2}n - n - 1\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}n\sqrt{\frac{1}{4}n^2 - 1}.$$

Karena panjang jari-jari lingkaran dalamnya adalah 4 satuan, maka

$$r_d = \frac{L}{s} \iff 4 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}n\sqrt{\frac{1}{4}n^2 - 1}}{\frac{3}{2}n}.$$

Dari sini kita memperoleh $\frac{1}{4}n^2 - 1 = 48$, yakni $n = 14$. Jadi, panjang sisi-sisi segitiga tersebut adalah 13, 14, dan 15 dan luas segitiga $L = r_d \cdot s = 84$. Dengan demikian panjang jari-jari lingkaran luar segitiga adalah

$$r_l = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.5.3. *Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan*

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = xyz \\ 2y^2 + 2z^2 = xyz \\ 2z^2 + 2x^2 = xyz \end{cases}$$

Penyelesaian. Dengan mengambil selisih dari setiap dua persamaan di atas kita memperoleh

$$\begin{cases} (x - z)(x + z) = 0 \\ (y - z)(y + z) = 0 \\ (y - x)(y + x) = 0 \end{cases}$$

Sifat simetris dari sistem persamaan ini memberikan bahwa jika (a, a, a) adalah sebuah penyelesaian, maka $(-a, -a, a)$, $(-a, a, -a)$, dan $(a, -a, -a)$ juga merupakan penyelesaian. Dari $2a^2 + 2a^2 = a^3$ kita memperoleh $a = 0$ atau $a = 4$. Jadi, penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah

$$(0,0,0),(4,4,4),(-4,-4,4),(-4,4,-4),(4,-4,-4). \ \diamond$$

Contoh 3.5.4. *Hitunglah*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}\,dx.$$

Penyelesaian. Soal ini tidak dapat diselesaikan dengan teknik pengintegralan yang biasa karena integran tidak memiliki antiturunan. Kita ambil substitusi $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ untuk memperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}\,dx &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^{\sqrt{3}}}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\frac{1}{(\tan t)^{\sqrt{3}}}}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\frac{1}{(\tan x)^{\sqrt{3}}}}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^{\sqrt{3}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}\,dx.
\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Kita perhatikan bahwa pangkat $\sqrt{3}$ pada soal tidak mempunyai arti penting dan dapat diganti dengan bilangan real positif berapa pun. Hal yang harus diperhatikan adalah fungsi integran selalu terdefinisi dan kontinu pada selang $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Teknik yang dapat kita pelajari dari soal ini adalah kita dapat melakukan pengubahan variabel secara simetris

$t = a + b - x$ pada integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ untuk mendapatkan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\,(a + b - x)\;dx,$$

yang seringkali berguna dalam perhitungan integral tentu ketika metode lain tidak dapat digunakan. ◆

Contoh 3.5.5. *Apakah mungkin terdapat tiga fungsi kuadrat $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x)$ sehingga persamaan $f(g(h(x))) = 0$ mempunyai delapan akar yakni* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$*?*

Penyelesaian. Andaikan ada tiga fungsi kuadrat f, g, dan h dengan sifat demikian. Maka, $h(1), h(2), \ldots, h(8)$ adalah akar dari sukubanyak berderajat empat $f(g(x))$. Karena $h(a) = h(b)$, $a \neq b$ jika dan hanya jika a dan b simetrik terhadap sumbu parabola, maka $h(1) = h(8)$, $h(2) = h(7)$, $h(3) = h(6)$, $h(4) = h(5)$ dan parabola $y = h(x)$ simetrik terhadap garis $x = \frac{9}{2}$. Lebih lanjut, kita mempunyai $h(1) < h(2) < h(3) < h(4)$ atau $h(1) > h(2) > h(3) > h(4)$. Perhatikan bahwa $g(h(1))$, $g(h(2))$, $g(h(3))$, dan $g(h(4))$ adalah akar-akar dari fungsi kuadrat $f(x)$. Jadi, $g(h(1)) = g(h(4))$ dan $g(h(2)) = g(h(3))$, yang berakibat $h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$. Misalkan $h(x) = ax^2 + bx + c$, maka kondisi terakhir mengakibatkan $a = 0$. Kontradiksi. ◆

Contoh 3.5.6. *Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan*

$$\tan x = \tan(x + 10^o)\tan(x + 20^o)\tan(x + 30^o).$$

Penyelesaian. Kita akan memunculkan simetri dengan melakukan perubahan variabel $y = x + 15^o$. Persamaan sekarang menjadi

$$\tan(y - 15^o) = \tan(y - 5^o)\tan(y + 5^o)\tan(y + 15^o)$$

yang setara dengan

$$\frac{\sin(y - 15^o)\cos(y + 15^o)}{\cos(y - 15^o)\sin(y + 15^o)} = \frac{\sin(y - 5^o)\sin(y + 5^o)}{\cos(y - 5^o)\cos(y + 5^o)}.$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri kita mendapatkan

$$\frac{\sin(-30^o) + \sin 2y}{\cos(30^o) + \sin 2y} = \frac{\cos(-10^o) - \cos 2y}{\cos(-10^o) + \cos 2y}$$

yang setara dengan

$$\frac{2\sin 2y - 1}{2\sin 2y + 1} = \frac{\cos 10^o - \cos 2y}{\cos 10^o + \cos 2y}.$$

Kita memperoleh

$$\sin 4y = \cos 10^o$$

dan persamaan ini dipenuhi ketika $4y = 80^o + k\,360^o$ dan $4y = 100^o + k\,360^o$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian nilai-nilai x yang memenuhi persamaan pada soal adalah $x = 5^o + k\,90^o$ dan $x = 10^o + k\,90^o$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. ◆

Latihan Soal 3.5.

1. (a) Gunakan simetri untuk menghitung perkalian

$$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2).$$

   (b) Jika $x + y + z = 0$, maka tunjukkan

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)\left(\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}\right) = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}.$$

   Petunjuk: gunakan substitusi $z = -x - y$ dan terapkan teorema binomial.

2. Diberikan a sebuah bilangan real positif dan n sebuah bilangan asli. Hitunglah jumlahan

$$\frac{1}{a^{-n} + 1} + \frac{1}{a^{-(n-1)} + 1} + \cdots + \frac{1}{a^{-1} + 1} + \frac{1}{a^0 + 1} + \frac{1}{a^1 + 1} + \cdots + \frac{1}{a^n + 1}.$$

3. Diberikan fungsi $f(x) = ax^7 + bx^3 - cx - 5$, dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$. Apabila $f(-7) = 7$, maka tentukan $f(7)$.

4. Carilah semua akar persamaan

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

5. Buktikan, tanpa menggunakan induksi matematika, bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

6. Manakah yang lebih besar:

$$200! \quad \text{atau} \quad 100^{200}.$$

7. Tentukan semua segitiga ABC yang memenuhi

$$\tan(A - B) + \tan(B - C) + \tan(C - A) = 0.$$

8. Diketahui fungsi f memenuhi

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x,$$

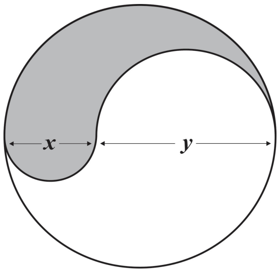
untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Hitunglah nilai $f(2)$.

9. Diberikan persegi $ABCD$ dan titik E di dalam persegi sehingga $\angle ECD = \angle EDC = 15^o$. Buktikan bahwa segitiga AEB adalah segitiga samasisi.

10. Tentukan semua pasangan bilangan bulat taknegatif (a, b, x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b = xy \\ x + y = ab. \end{cases}$$

11. Gambar di bawah menunjukkan gabungan sebuah lingkaran dan sebuah setengah lingkaran dengan diameter x dan y dengan kedua titik pusatnya segaris. Berapakah perbandingan luas daerah yang diarsir dengan luas daerah yang tidak diarsir?



Gambar 32

12. Tentukan semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{4x^2+1} & = y \\ \dfrac{4y^2}{4y^2+1} & = z \\ \dfrac{4z^2}{4z^2+1} & = x \end{cases}$$

13. Tunjukkan bahwa

$$1^{2019} + 2^{2019} + \cdots + 2018^{2019}$$

habis dibagi 2019.

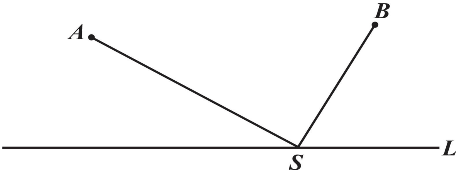
14. Carilah semua penyelesaian bulat positif dari persamaan

$$xy + yz + zx = xyz + 2.$$

15. Hitunglah

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\ dx.$$

16. Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 33

Orang-orang yang tinggal di sekitar daerah A dan bekerja di daerah

B mengantarkan anaknya ke sekolah dalam perjalanan berangkat kerja. Pada sepanjang jalan raya L di manakah harus dibangun sekolah S agar jarak tempuh orang-orang tersebut minimal? (Ketika sebuah lokasi S untuk sekolah telah ditetapkan, maka akan dibangun jalan AS dan SB.)

17. Carilah semua bilangan real x dan y yang memenuhi

$$x^3 + y^3 = 7 \quad \text{dan} \quad x^2 + y^2 + x + y + xy = 4.$$

18. Diberikan

$$f(x) := \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\,dt, \qquad x > 0.$$

Hitunglah nilai $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

19. Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) sehingga

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

20. Tunjukkan bahwa hasilkali empat suku berurutan dari barisan aritmetika bilangan-bilangan bulat ditambah pangkat empat dari selisih barisan aritmetika tersebut selalu merupakan bilangan kuadrat sempurna.

3.6 Membagi ke dalam Kasus-kasus

Seringkali sebuah masalah dapat dibagi ke dalam sejumlah submasalah (masalah yang lebih kecil), di mana masing-masing submasalah dapat dikerjakan secara terpisah kasus demi kasus. Secara khusus hal ini benar ketika masalah memuat kuantor universal (*untuk setiap/untuk semua*). Sebagai contoh, bukti dari sebuah pernyataan yang memuat "untuk setiap bilangan bulat ..." mungkin dapat diselesaikan dengan mudah dengan cara memperhatikan kasus bilangan bulat genap dan bilangan bulat ganjil secara terpisah. Contoh lain, sebuah masalah menyangkut segitiga bisa jadi menjadi mudah dikerjakan ketika kita membagi ke dalam kasus-kasus yakni apakah segitiga tersebut lancip, siku-siku, atau tumpul. Heuristik dalam subbab ini seringkali dinyatakan dalam kalimat “jika kita tidak dapat menyelesaikan sebuah masalah, maka carilah masalah yang berkaitan dan lebih sederhana dan selesaikanlah.

Contoh 3.6.1. *Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan*

$$|x - 1| < |x - 3|.$$

Penyelesaian. Ingat definisi nilai mutlak

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Jadi,

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{jika } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{jika } x < 1 \end{cases}$$

dan

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{jika } x \geq 3 \\ 3 - x & \text{jika } x < 3. \end{cases}$$

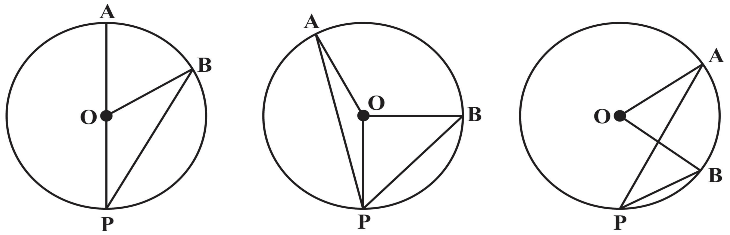
Selanjutnya, kita memperhatikan tiga kasus: $x \geq 3$, $1 \leq x < 3$, dan $x < 1$.

1. Kasus 1: $x \geq 3$. Kita mempunyai $|x-1| = x-1$ dan $|x-3| = x-3$ dan pertidaksamaan semula menjadi $x - 1 < x - 3$ yang berlaku jika dan hanya jika $-1 < -3$. Karena hasil terakhir adalah sebuah kemustahilan maka tidak ada yang memenuhi $|x - 1| < |x - 3|$ untuk $x \geq 3$.
2. Kasus 2: $1 \leq x < 3$. Kita mempunyai $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 3| = 3 - x$ dan pertidaksamaan semula menjadi $x - 1 < 3 - x$ yang berlaku jika dan hanya jika $2x < 4$. Jadi, untuk $1 \leq x < 3$ pertidaksamaan $|x - 1| < |x - 3|$ dipenuhi oleh $1 \leq x < 2$.
3. Kasus 3: $x < 1$. Kita mempunyai $|x-1| = 1-x$ dan $|x-3| = 3-x$ dan pertidaksamaan semula menjadi $1 - x < 3 - x$ yang ekivalen dengan $1 < 3$. Jadi, ketaksamaan $|x - 1| < |x - 3|$ dipenuhi untuk semua $x < 1$.

Dari ketiga kasus di atas kita dapat simpulkan bahwa pertidaksamaan $|x - 1| < |x - 3|$ dipenuhi oleh $x < 2$. ◆

> **Contoh 3.6.2.** *Buktikan bahwa sudut keliling dari sebuah lingkaran besarnya adalah setengah dari sudut pusat yang menghadap busur yang sama.*

Penyelesaian. Diberikan lingkaran dengan titik pusat O dan sudut keliling APB seperti pada gambar.



Gambar 34

Untuk semua kasus pada gambar kita akan membuktikan bahwa $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

- *Kasus 1*: titik pusat O terletak pada PA. Karena sudut luar sebuah segitiga sama dengan jumlah sudut dalam yang berlawanan dan karena segitiga OPB samakaki, maka

$$\angle AOB = \angle OPB + \angle OBP = 2\angle OPB = 2\angle APB.$$

- *Kasus 2*: Titik pusat O berada di dalam $\angle APB$. Perpanjang garis PO sehingga memotong lingkaran di D. Dari kasus 1 kita memperoleh $\angle AOD = 2\angle APD$ dan $\angle DOB = 2\angle DPB$. Dengan menjumlahkan kedua persamaan ini kita mendapatkan hasil yang diinginkan.
- *Kasus 3*: Titik pusat O terletak di luar $\angle APB$. Perpanjang garis PO sehingga memotong lingkaran di D. Dari kasus 2 kita memperoleh $\angle DOB = 2\angle DPB$ dan $\angle DOA = 2\angle DPA$. Pengurangan persamaan pertama dengan persamaan kedua memberikan hasil yang diinginkan. ◆

Contoh 3.6.3. *Kita akan menuliskan n bilangan real yang berbeda, $n \geq 3$, sekeliling lingkaran sehingga setiap bilangan bernilai sama dengan hasilkali bilangan yang ada di kirinya dengan bilangan yang ada di kanannya. Tentukan semua nilai n yang mungkin.*

Penyelesaian. Nilai yang mungkin hanyalah $n = 6$. Kita akan membuktikan pernyataan ini melalui kasus-kasus banyaknya bilangan n. Misalkan n bilangan real tersebut adalah $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan diletakkan sekeliling lingkaran dalam urutan searah jarum jam.

- Jika $n = 3$, maka berlaku $a_1 = a_2a_3$ dan $a_2 = a_1a_3$. Dari sini diperoleh $a_3^2 = 1$, yang berarti $a_3 = \pm 1$. Dengan cara yang sama didapatkan $a_1 = \pm 1$ dan $a_2 = \pm 1$. Menurut prinsip sarang merpati, sekurang-kurangnya dua dari tiga bilangan ini haruslah sama. Jadi, tidak mungkin $n = 3$.
- Jika $n = 4$, maka berlaku $a_2 = a_1a_3 = a_4$. Tidak mungkin.
- Jika $n = 5$, maka berlaku $a_2 = a_1a_3$, $a_3 = a_2a_4$, dan $a_4 = a_3a_5$. Dari sini diperoleh $a_1a_3a_5 = 1 = a_3a_5a_2$, yang berarti $a_1 = a_2$. Tidak mungkin.
- Jika $n = 6$, maka ada susunan bilangan yang memenuhi misalnya $2, 6, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$.
- Jika $n \geq 7$, maka seperti pada kasus $n = 5$, kita memperoleh $a_1a_3a_5 = 1 = a_3a_5a_7$, yang memberikan $a_1 = a_7$. Tidak mungkin. ◆

Contoh 3.6.4. *Buktikan bahwa untuk setiap bilangan irasional a terdapat bilangan irasional b dan c sehingga a+b and ac keduanya adalah bilangan rasional sementara ab dan a + c keduanya adalah bilangan irasional.*

Penyelesaian. Ambil sebarang bilangan irasional a. Kita definisikan $c = \frac{1}{a}$ atau $c = \frac{2}{a}$. Kita memperoleh $ac = 1$ atau $ac = 2$, yang merupakan bilangan rasional. Perhatikan bahwa

$$a + c = \frac{a^2+1}{a} \quad \text{atau} \quad a + c = \frac{a^2+2}{a}.$$

Karena

$$\frac{a^2+2}{a} - \frac{a^2+1}{a} = \frac{1}{a}$$

merupakan bilangan irasional, maka salah satu dari $a + c = \frac{a^2+1}{a}$ atau $a + c = \frac{a^2+2}{a}$ adalah irasional. Untuk mendefinisikan b, kita perhatikan dua kasus:

1. Kasus 1: jika a^2 irasional, maka kita definisikan $b = -a$. Kita mendapatkan $a + b = 0$ rasional dan $ab = -a^2$ irasional.
2. Kasus 2: Jika a^2 rasional, maka kita definisikan $b = a^2 - a$. Dari sini kita memperoleh $a + b = a^2$ rasional dan $ab = a^2(a - 1)$. Karena $a = \frac{ab}{a^2} + 1$ irasional, maka $ab = a^2(a-1)$ juga irasional. ◇

Berikut ini adalah contoh pembuktian ke dalam kasus-kasus *tipe bootstrap*, yakni pembuktian dilakukan secara bertahap dari kasus yang paling sederhana sampai ke yang paling kompleks, di mana hasil di kasus yang sederhana dipakai untuk membuktikan di kasus yang lebih kompleks.

Contoh 3.6.5. *Diberikan fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan sifat $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ (sifat aditif). Buktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap $r \in \mathbb{R}$ berlaku*

$$f(rx) = rf(x).$$

Penyelesaian. Pernyataan akan dibuktikan dalam enam kasus secara bootstrap:

1. $r = 0$.
2. $r \in \mathbb{N}$.
3. r bilangan bulat negatif.
4. $r = \frac{1}{n}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

5. $r \in \mathbb{Q}$, yakni $r = \dfrac{m}{n}$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.
6. $r \in \mathbb{R}$.

Kasus 1. Perhatikan bahwa $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, yang berarti $f(0) = 0$. Jadi, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = \cdot f(x)$.

Kasus 2. Kita akan menunjukkan bahwa $f(nx) = nf(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan menggunakan prinsip induksi matematika. Untuk $n = 1$, $f(1x) = f(x) = 1f(x)$ berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Sekarang kita asumsikan pernyataan benar untuk $n = k$ yakni $f(kx) = kf(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Kita tunjukkan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k + 1$:

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x).$$

Jadi, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $f(nx) = nf(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Kasus 3. Kita akan menunjukkan bahwa $f(nx) = nf(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap bilangan bulat negatif n. Karena $-n \in \mathbb{N}$, maka menurut hasil di Kasus 2 berlaku $f(-nx) = -nf(x)$. Selanjutnya dengan memanfaatkan hasil di kasus 1,

$$0 = f(0) = f(nx + (-nx)) = f(nx) + f(-nx) = f(nx) - nf(x).$$

Jadi diperoleh $f(nx) = nf(x)$. Dari kasus 1, kasus 2 dan kasus 3 kita memperoleh bahwa $f(nx) = nf(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Kasus 4. Apabila $r = \dfrac{1}{n}$ dengan n adalah bilangan bulat taknol, kita akan menunjukkan bahwa $f(rx) = rf(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan kasus 2 atau kasus 3 berlaku

$$f(x) = f\left(n\left(\frac{1}{n}\right)x\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right).$$

Dari sini diperoleh $f\left(\dfrac{1}{n}x\right) = \dfrac{1}{n}f(x)$.

Kasus 5. Ambil sebarang bilangan rasional r dan sebarang bilangan real x. Jadi, $r = \dfrac{m}{n}$, dengan m, n adalah dua bilangan bulat taknol. Maka dengan menggunakan kasus 2, kasus 3, dan kasus 4 kita mendapatkan

$$f(rx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m\frac{1}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x).$$

Kasus 6. Ambil sebarang bilangan real r. Karena $\mathbb{Q}$ bersifat padat (*dense*) di dalam $\mathbb{R}$, maka terdapat barisan bilangan rasional $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sehingga barisan ini konvergen ke r, yakni $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$. Lebih lanjut, karena f fungsi kontinu, maka fungsi dan limit dapat ditukar. Kedua fakta ini bersama-sama dengan kasus 5 memberikan

$$f(rx) = f\left(\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)x\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = rf(x). \;\blacklozenge$$

Sebuah teknik membagi dalam kasus yang sangat penting adalah memperhatikan kasus paritas, yakni kasus yang berkaitan dengan sifat genap atau ganjil dari bilangan bulat.

Contoh 3.6.6. *Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi persamaan $x^2 - y^2 = 2022$.*

Penyelesaian. Untuk memperlihatkan kebenaran pernyataan di atas, kita akan mengerjakannya dalam kasus-kasus menurut *paritas* dari x dan y.

1. Jika x dan y keduanya genap, maka $x = 2m$ dan $y = 2n$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Jadi,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2022 \\ (2m)^2 - (2n)^2 &= 2022 \\ 4m^2 - 4n^2 &= 2022 \\ 4(m^2 - n^2) &= 2022. \end{aligned}$$

   Kita mendapatkan kontradiksi sebab 2022 tidak habis dibagi 4.

2. Jika x dan y keduanya ganjil, maka $x = 2m + 1$ dan $y = 2n + 1$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Jadi,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2022 \\ (2m+1)^2 - (2n+1)^2 &= 2022 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4m^2 + 4m + 1 - 4n^2 - 4n - 1 &= 2022 \\ 4(m^2 + m - n^2 - n) &= 2022. \end{aligned}$$

Kembali kita mendapatkan kontradiksi sebab 2022 tidak habis dibagi 4.

3. Jika x genap dan y ganjil, maka $x = 2m$ dan $y = 2n + 1$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Jadi,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2022 \\ (2m)^2 - (2n + 1)^2 &= 2022 \\ 4m^2 - 4n^2 - 4n - 1 &= 2022 \\ 4(m^2 - n^2 - n) - 1 &= 2022. \end{aligned}$$

Di sini terjadi kontradiksi sebab ruas kiri adalah bilangan ganjil dan ruas kanan adalah bilangan genap.

4. Jika x ganjil dan y genap, maka $x = 2m + 1$ dan $y = 2n$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Jadi,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2022 \\ (2m + 1)^2 - (2n)^2 &= 2022 \\ 4m^2 + 4m + 1 - 4n^2 &= 2022 \\ 4(m^2 + m - n^2) + 1 &= 2022. \end{aligned}$$

Kembali terjadi kontradiksi sebab paritas kedua ruas berbeda.

Karena semua kemungkinan paritas dari x dan y menimbulkan kemustahilan maka terbuktilah pernyataan pada soal. ◆

Contoh 3.6.7. *Barisan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ didefinisikan melalui hubungan*

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3\right)}{3x_n^2 + 1}, \quad n \geq 1,$$

dengan $a \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa barisan ini konvergen dan carilah nilai limit barisannya.

Penyelesaian. Kita akan menyelesaikan soal ini dengan memperhatikan kasus-kasus untuk a:

1. Jika $a = 0$, maka $x_n = 0$ untuk setiap $n \geq 1$ dan $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
2. Jika $a = 1$, maka $x_n = 1$ untuk setiap $n \geq 1$ dan $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
3. Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka x_{n+1} mempunyai tanda yang sama dengan x_n. Hal ini berakibat $x_n > 0$ untuk setiap $n \geq 1$. Perhatikan bahwa
$$x_{n+1} - 1 = \frac{(x_n - 1)^3}{3x_n^2 + 1}.$$
Dari sini kita memperoleh bahwa $x_{n+1} - 1$ dan $x_n - 1$ mempunyai tanda yang sama. Kita perhatikan dua subkasus:
   - Jika $a \in (0, 1)$, maka $x_n < 1$ untuk setiap $n \geq 1$.
   - Jika $a > 1$, maka $x_n > 1$ untuk setiap $n \geq 1$.

   Sekarang kita pandang
$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n(1 - x_n^2)}{3x_n^2 + 1},$$
yang memberikan bahwa barisan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naik monoton dan terbatas ke atas oleh 1, atau turun monoton dan terbatas ke bawah oleh 1. Untuk kedua kemungkinan ini, ada $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ dan lebih jauh, $L > 0$. Dengan mengambil $n \to \infty$ diperoleh
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n\left(x_n^2 + 3\right)}{3x_n^2 + 1} \iff L = \frac{L(L^2 + 3)}{3L^2 + 1} \iff L = 1.$$
4. Jika $a < 0$, maka kita bentuk barisan $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dengan $y_n := -x_n$ untuk setiap $n \geq 1$. Dari sini kita kembali pada kasus 3 di atas dan diperoleh $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen dengan
$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$
Sebagai akibatnya kita memperoleh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen dengan
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1.$$
(Pada kasus 4 ini kita juga telah memanfaatkan strategi menggu-

nakan sifat simetri.)

Sebagai kesimpulan, barisan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen untuk semua nilai $a \in \mathbb{R}$ dengan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -1 & \text{jika } a < 0 \\ 0 & \text{jika } a = 0 \\ 1 & \text{jika } a > 0. \end{cases}$$

◆

Latihan Soal 3.6.

1. Buktikan ketaksamaan segitiga: untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

2. Jika n adalah bilangan asli, maka n adalah bilangan prima atau n bilangan kuadrat sempurna, atau n habis membagi $(n-1)!$.
3. Ada 100 siswa dengan tinggi yang berbeda-beda sedang berbaris dalam 10 baris dan 10 kolom. Selanjutnya, siswa tertinggi di setiap baris dipilih dan yang terpendek dari siswa-siswa tertinggi ini kita sebut X. Siswa terpendek di setiap kolom juga dipilih dan yang tertinggi dari siswa-siswa terpendek ini kita sebut Y. Jika X dan Y adalah dua orang yang berbeda, maka manakah yang lebih tinggi: X atau Y?
4. Tentukan semua x yang memenuhi pertidaksamaan

$$|x - 2| + 3|x - 1| \leq 1.$$

5. Tentukan penyelesaian dari persamaan

$$\left|x^2 - 2|x| + 1\right| = 3|2 - x| - 1.$$

6. Sebuah kereta meninggalkan stasiun A pada jam x menit y dan tiba di stasiun B pada jam y menit z. Waktu perjalanan yang ditempuh adalah z jam x menit. Tentukan semua nilai yang mungkin untuk x.
7. Diberikan fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) \neq 0$ untuk

setiap $x \in \mathbb{R}$ dan memenuhi

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \quad \text{untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}.$$

Buktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$$f(\alpha x) = (f(x))^{\alpha}.$$

8. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi $x^3 - y^3 = 4(x - y)$ dan $x^3 + y^3 = 2(x + y)$.
9. Kita akan melakukan pengubinan pada lantai persegi berukuran $N \times N$. Kita mempunyai dua macam ubin: ubin persegi dengan panjang sisi 5 dan ubin persegi panjang berukuran 1×3. Tentukan semua nilai N sehingga lantai dapat terubini secara penuh tanpa ada ubin yang saling tumpang tindih.
10. Buktikan jika a dan b adalah bilangan bulat ganjil, maka $a^2 - b^2$ habis dibagi 8.
11. Tentukan fungsi $F(x)$ jika diketahui untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$F(x)F(y) - F(xy) = x + y.$$

12. Buktikan $2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ tidak habis dibagi 3 untuk setiap bilangan bulat n.
13. Berapa banyak cara seorang anak dapat memilih 5 bola dari dalam sebuah kotak yang berisi 5 bola merah, 4 bola hitam, 3 bola putih, 2 bola hijau, dan 1 bola kuning, apabila diketahui bahwa bola-bola yang berwarna sama adalah identik.
14. Terdapat n tongkat dengan panjang $1, 2, \ldots, n$. Berapa banyak segitiga tak kongruen yang dapat dibentuk dari 3 tongkat yang dipilih dari n tongkat tersebut?
15. Tunjukkan bahwa di dalam sebarang partisi himpunan $\{1, 2, \ldots, 9\}$ ke dalam dua subhimpunan, kita selalu dapat menemukan di dalam salah satu dari dua subhimpunan tersebut sebuah barisan aritmetika dengan tiga suku.
16. Tentukan bilangan prima terbesar yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a^4 + b^4 + 13$ untuk suatu bilangan prima a dan b.

17. Carilah semua tripel bilangan asli (x, y, z) yang memenuhi persamaan
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 4.$$
18. Tentukan semua penyelesaian real positif dari sistem persamaan
$$x^y = z, \quad y^z = x, \quad z^x = y.$$
19. Terdapat 12 titik pada bidang. Ada 5 titik yang konsiklis dan dari 7 titik yang lainnya tidak ada 3 titik yang segaris serta tidak ada yang konsiklis dengan 5 titik sebelumnya. Berapakah banyaknya lingkaran yang melalui sekurang-kurangnya 3 titik dari 12 titik tersebut?
20. Tentukan bilangan real m sehingga persamaan
$$\left(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)\right)\left(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)\right) = 0$$
mempunyai tepat tiga akar yang berbeda.

3.7 Mengerjakan secara Mundur

Bila diberikan soal, kita biasanya akan bekerja maju yaitu memulai dari hipotesis/asumsi/hal yang diketahui menuju ke kesimpulan/hal yang diminta. Namun seringkali suatu soal lebih mudah diselesaikan dengan teknik bekerja mundur. Mengerjakan secara mundur berarti mengasumsikan kebenaran kesimpulan dari pernyataan dalam masalah dan kemudian menurunkan deduksi dari kesimpulan tersebut sampai kita mendapatkan sesuatu yang telah diketahui atau sesuatu yang mudah dibuktikan. Setelah kita sampai pada hipotesis atau hal yang diketahui pada masalah, maka kita membalik langkah-langkah pengerjaan pada argumentasi mundur tadi dan maju sampai mencapai kesimpulan.

Contoh 3.7.1. *Tunjukkan untuk setiap bilangan real positif x berlaku*
$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Penyelesaian. Dengan teknik bekerja mundur, kita mulai dari kesimpulan yaitu $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Karena $x > 0$, kita bisa kalikan kedua ruas dengan x untuk mendapatkan $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Hasil terakhir ini dapat ditulis menjadi $(x-1)^2 \geq 0$, yang merupakan sebuah fakta bahwa untuk setiap bilangan real y berlaku $y^2 \geq 0$. Dengan demikian, kita menuliskan secara formal penyelesaian soal ini dimulai dari fakta bahwa jika $x \in \mathbb{R}$, maka $(x-1)^2 \geq 0$. Penjabaran kuadrat memberikan $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Dari asumsi bahwa $x > 0$ kita dapat mengalikan ketaksamaan tersebut dengan $\frac{1}{x}$ untuk mendapatkan $x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$. Bentuk terakhir ini dapat ditulis ulang menjadi $x + \frac{1}{x} \geq 2$, yakni kesimpulan yang diinginkan. ◆

Contoh 3.7.2. *Tunjukkan*

$$\frac{10^{2019}+1}{10^{2020}+1} > \frac{10^{3019}+1}{10^{3020}+1}.$$

Penyelesaian. Untuk menyederhanakan kita gunakan notasi $a = 10^{2019}$ dan $b = 10^{1000}$. Jadi, kita harus membuktikan

$$\frac{a+1}{10a+1} > \frac{ab+1}{10ab+1}.$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan ide pembuktian, kita bekerja mundur dari hal yang akan dibuktikan. Jika $\frac{a+1}{10a+1} > \frac{ab+1}{10ab+1}$, maka

$$\begin{aligned}
(a+1)(10ab+1) &> (10a+1)(ab+1) \\
10a^2b + a + 10ab + 1 &> 10a^2b + 10a + ab + a \\
9ab &> 9a \\
b &> 1.
\end{aligned}$$

Jelas, hal ini benar karena $b = 10^{1000} > 1$. Jadi, dengan mulai dari fakta bahwa $10^{1000} > 1$ dan membalik langkah-langkah pengerjaan di atas, kita akan mendapatkan hasil yang diinginkan. ◆

Contoh 3.7.3. *Manakah yang lebih besar nilainya:* 2^{350} *atau* 5^{150}*?*

Penyelesaian. Kita andaikan $2^{350} < 5^{150}$. Kemudian kita tuliskan dalam pangkat yang sama, yaitu $(2^7)^{50} < (5^3)^{50}$. Dari sini kita mendapatkan $2^7 < 5^3$, yang berarti $128 < 125$. Ini sebuah kontradiksi. Jadi, yang benar adalah $2^{350} > 5^{150}$. Bukti formal dimulai dari fakta $128 > 125$ dan selanjutnya membalik langkah-langkah di atas. ◆

Contoh 3.7.4. *Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real positif* x, y, z *berlaku*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

Penyelesaian. Teknik bekerja mundur dimulai dengan mengasumsikan hal yang akan dibuktikan, yakni $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$. Kedua ruas ketaksamaan kita kalikan 2 untuk memperoleh

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz.$$

Selanjutnya kita tuliskan ulang ketaksamaan ini menjadi

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0.$$

Dari sini kita memperoleh $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. Ketaksamaan terakhir adalah sebuah tautologi sebab berlaku $r^2 \geq 0$ untuk setiap $r \geq 0$. Setelah kita mendapatkan ide pembuktian selanjutnya bukti formal untuk soal ini dilakukan dengan membalik langkah-langkah di atas dimulai dari fakta bahwa untuk setiap bilangan real positif x, y, z berlaku $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. ◆

Contoh 3.7.5. *Diberikan* α *sebuah bilangan real dengan* $0 < \alpha < \pi$*. Buktikan fungsi* F *dengan*

$$F(\theta) = \frac{\sin\theta + \sin(\theta + \alpha)}{\cos\theta - \cos(\theta + \alpha)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$$

adalah fungsi konstan.

Penyelesaian. Dalam teknik bekerja mundur, kita mulai dari yang akan dibuktikan yaitu kita misalkan bahwa F adalah fungsi konstan. Jadi, $F(\theta) = F(0)$ untuk setiap θ dengan $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$. Kita memperoleh

$$\frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$(\sin\theta + \sin(\theta+\alpha))\,(1-\cos\alpha) = \sin\alpha\,(\cos\theta - \cos(\theta+\alpha))$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \sin\theta\cos\alpha - \sin(\theta+\alpha)\cos\alpha$$

$$= \sin\alpha\cos\theta - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha)$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - (\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta)$$

$$-(\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha)) = 0$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha-\alpha) = 0.$$

Kesamaan terakhir adalah sebuah identitas. Untuk mendapatkan bukti dari pernyataan pada soal kita harus membalik langkah-langkah pengerjaan di atas, yaitu memulai dengan identitas

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha-\alpha) = 0.$$

Perlu diperhatikan bahwa pada akhir dari bukti kita harus yakin bahwa kita tidak melakukan pembagian dengan nol. Hal ini mudah diperiksa sebab $1 - \cos\alpha \neq 0$ untuk $0 < \alpha < \pi$ dan $\cos\theta - \cos(\theta+\alpha) > 0$ untuk $0 \leq \theta < \theta + \alpha \leq \pi$. ◆

Contoh 3.7.6. *Pada sebuah turnamen setengah kompetisi diikuti oleh m pemain dengan $m > 1$. Setiap pemain bertemu sekali dengan setiap pemain lainnya dengan hasil kalah atau menang, dan tidak ada hasil berimbang. Misalkan M_j dan K_j berturut-turut adalah jumlah menang dan kalah dari pemain ke j, maka tunjukkan*

$$\sum_{j=1}^{m} M_j^2 = \sum_{j=1}^{m} K_j^2.$$

Penyelesaian. Kita misalkan

$$\sum_{j=1}^{m} M_j^2 = \sum_{j=1}^{m} K_j^2.$$

Dari sini diperoleh

$$\sum_{j=1}^{m} \left(M_j^2 - K_j^2\right) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{m} \left(M_j - K_j\right)\left(M_j + K_j\right) = 0.$$

Catat bahwa $M_j + K_j = n - 1$ untuk setiap j, sehingga

$$\begin{aligned}
(n-1)\sum_{j=1}^{m} \left(M_j - K_j\right) &= 0 \\
\sum_{j=1}^{m} \left(M_j - K_j\right) &= 0 \\
\sum_{j=1}^{m} M_j &= \sum_{j=1}^{m} K_j.
\end{aligned}$$

Persamaan terakhir benar sebab total banyaknya permainan yang dimenangkan oleh n pemain harus sama dengan total banyaknya permainan dimana setiap pemain kalah. Bukti pernyataan pada soal diperoleh dengan cara membalik langkah-langkah di atas. ◆

Latihan Soal 3.7.

1. (a) Diberikan x, y dua bilangan real positif. Tunjukkan bahwa

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

   (b) Diberikan a, b dua bilangan real positif dengan $a + b = 1$. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real positif x dan y berlaku

$$\frac{2}{\frac{a}{x} + \frac{b}{y}} \leq ax + by.$$

2. Apabila x dan y adalah dua bilangan real positif, maka tunjukkan bahwa berlaku $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
3. Buktikan untuk setiap bilangan real taknegatif a dan b berlaku

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}.$$

4. Diberikan x dan y adalah dua bilangan real positif sehingga $x + y = 1$. Buktikan

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

5. Misalkan a, b, dan c menyatakan panjang sisi dari sebuah segitiga ABC, tunjukkan bahwa

$$2\,(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4\,(ab + bc + ca)\,.$$

6. Dua lingkaran bersinggungan di luar di titik A. Sebuah garis singgung persekutuan kedua lingkaran tersebut menyinggung masing-masing lingkaran di titik B dan C. Selanjutnya, ruas garis AB diperpanjang sehingga memotong lingkaran kedua di titik D. Tunjukkan bahwa CD adalah diameter lingkaran kedua.
7. Diberikan segiempat talibusur dengan panjang sisi-sisi a, b, c, dan c serta panjang diagonal p dan q. Buktikan sifat Ptolemaeus: perkalian panjang diagonal sama dengan jumlah perkalian panjang sisi yang berhadapan, yakni $pq = ac + bd$.
8. Manakah yang lebih besar:

$$\sqrt[9]{9!} \quad \text{atau} \quad \sqrt[10]{10!}\ ?$$

9. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, c berlaku

$$a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b} \leq \left(a^a b^b c^c\right)^2.$$

10. Carilah semua bilangan real x, y yang memenuhi

$$x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2} \leq x(2y + 1).$$

3.8 Melihat Kasus Ekstrem

Strategi ini didasarkan pada prinsip ekstremal. Diberikan himpunan hingga $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ yang anggota-anggotanya dapat diurutkan menurut sebuah relasi urutan $\leq$. Maka terdapat $h^*, h_* \in H$ sehingga $h_* \leq h_j$ dan $h_j \leq h^*$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, n$. Anggota h^* dan h_* berturut-turut disebut elemen maksimal dan elemen minimal dari H. Himpunan H dapat berupa himpunan bilangan real, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan asli, himpunan jarak-jarak antara titik pada bidang, himpunan luas segitiga, himpunan nilai fungsi, himpunan penyelesaian persamaan, dan sebagainya.

Contoh 3.8.1. *Diketahui $p(x)$ adalah sebuah sukubanyak dengan koefisien-koefisien bilangan bulat. Diberikan a, b, c adalah tiga bilangan bulat taknol yang berbeda. Tentukan semua sukubanyak $p(x)$ yang memenuhi $p(a) = b$, $p(b) = c$, dan $p(c) = a$.*

Penyelesaian. Karena a, b, dan c adalah tiga bilangan bulat taknol yang berbeda, maka $|a - b|$, $|b - c|$, $|c - a|$ adalah tiga bilangan bulat positif yang berbeda. Jadi, ada yang *terkecil* dari ketiga bilangan tersebut. Tanpa mengurangi keumuman bukti kita misalkan

$$|a - b| < |b - c| < |c - a|,$$

yakni $|a - b|$ adalah elemen terkecil. Andaikan ada $p(x)$ dengan sifat di atas, maka $p(x)$ haruslah memenuhi

$$\begin{aligned} p(x) - b &= (x - a)f(x) \\ p(x) - c &= (x - b)g(x) \\ p(x) - a &= (x - c)h(x), \end{aligned}$$

dengan $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x)$ adalah sukubanyak-sukubanyak dengan koefisien bulat. Apabila pada persamaan pertama kita ambil $x = c$, maka diperoleh

$$a - b = p(c) - b = (c - a)f(x).$$

Selanjutnya, dengan mengambil nilai mutlak kedua ruas didapatkan

$$|a - b| = |c - a||f(x)| \geq |c - a| \cdot 1 = |c - a|.$$

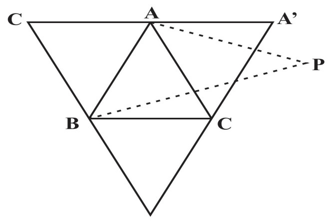
Hal ini berakibat $|a - b| \geq |c - a|$, sebuah kontradiksi. ◆

Contoh 3.8.2. *Setiap tiga titik dari n titik pada bidang membentuk segitiga dengan luas kurang dari atau sama dengan 1. Buktikan bahwa n titik tersebut semuanya terletak pada sebuah segitiga dengan luas kurang dari atau sama dengan 4.*

Penyelesaian. Terdapat $\binom{n}{3}$ segitiga yang dapat dibentuk dari n titik tersebut. Selanjutnya, kita pilih segitiga dengan *luas terbesar*, katakan segitiga ABC. Kita misalkan luas segitiga $ABC = l$. Jelas, $l \leq 1$. Melalui masing-masing titik sudut A, B, dan C dibuat garis yang sejajar dengan sisi di depannya. Ketiga garis tersebut berpotongan dan membentuk segitiga $A'B'C'$ yang kongruen dengan segitiga ABC. Jelas bahwa luas segitiga $A'B'C'$, katakan m, memenuhi

$$m = 4l \leq 4 \cdot 1 = 4.$$

Kita akan memperlihatkan bahwa n titik tersebut semuanya terletak di dalam segitiga $A'B'C'$. Andaikan ada titik P yang berada di luar segitiga, maka titik P dan segitiga ABC akan dipisahkan oleh salah satu sisi $A'B'$, $B'C'$, atau $C'A'$ (lihat gambar di bawah).



Gambar 35

Tanpa mengurangi keumuman bukti, kita asumsikan bahwa P dan segitiga ABC dipisahkan oleh sisi $A'B'$. Perhatikan bahwa segitiga ABC dan segitiga ABP memiliki alas yang sama, AB. Karena jarak P ke AB lebih besar daripada jarak C ke AB maka dapat disimpulkan bahwa luas segitiga ABC kurang dari luas segitiga ABP. Hal ini bertentangan dengan maksimalitas luas segitiga ABC. Terbukti n titik tersebut semuanya terletak di dalam segitiga $A'B'C'$. ◆

Contoh 3.8.3. *Buktikan bahwa* $n\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Penyelesaian. Andaikan ada $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $k\sqrt{2}$ adalah bilangan bulat. Jadi, himpunan

$$S := \left\{k \in \mathbb{Z} : k\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\right\}$$

tidak kosong. Karena S himpunan hingga dan dapat diurutkan, maka terdapat $m \in S$ yang *paling kecil* (minimal). Perhatikan bahwa

$$m\left(\sqrt{2} - 1\right) = m\sqrt{2} - m \in \mathbb{Z}$$

dan

$$m\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{2} = 2m - m\sqrt{2} \in \mathbb{Z}.$$

Dari sini kita dapat menyimpulkan bahwa $m(\sqrt{2} - 1) \in S$. Di lain pihak berlaku bahwa $m(\sqrt{2} - 1) < m$. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa m adalah unsur minimal di dalam S. ◆

Contoh 3.8.4. *Tunjukkan bahwa*

$$(1 + \sin x)(1 + \cos x) \leq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian. Pada soal ini kita diminta menunjukkan sebuah batas atas untuk $(1 + \sin x)(1 + \cos x)$. Kita menerapkan *nilai maksimum dan minimum* dari fungsi sin dan cos, yakni $-1 \leq \sin x \leq 1$ dan $-1 \leq$

$\cos x \leq 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jadi,

$$\begin{aligned}
(1+\sin x)(1+\cos x) &\leq 1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x \\
&= 1+(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}\sin 2x \\
&= 1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\sin 2x \\
&\leq 1+\sqrt{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1 \\
&= \frac{3}{2}+\sqrt{2}. \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Contoh 3.8.5. *Diketahui S adalah sebuah subhimpunan dari*

$$\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$$

dengan sifat jumlahan dari setiap dua anggota S yang berbeda bukan anggota S. Tentukan maksimum banyaknya anggota dari himpunan S yang mungkin.

Penyelesaian. Misalkan m adalah *maksimum* banyaknya anggota S.

1. Jika m bilangan ganjil, maka himpunan $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ dapat dipartisi ke dalam bentuk $\{x, m-x\}$ dengan $1 \leq x \leq \dfrac{m-1}{2}$, dengan masing-masing himpunan memuat paling banyak satu anggota S. Jadi,
$$|S| \leq \frac{m-1}{2}+1 = 499+1 = 500.$$
2. Jika m bilangan genap, maka himpunan $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ dapat dipartisi ke dalam bentuk $\{x, m-x\}$ dengan $1 \leq x \leq \dfrac{m-1}{2}-1$ bersama himpunan satu titik $\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$. Dalam hal ini,
$$|S| \leq \frac{m-1}{2}-1+1+1 = \frac{m}{2}+1 \leq 501.$$

Karena himpunan $\{500, 501, \ldots, 1000\}$ memenuhi sifat yang diinginkan, maka bilangan maksimum yang dicari adalah 501. Dapat diperiksa lebih lanjut bahwa $\{500, 501, \ldots, 1000\}$ adalah satu-satunya himpunan dengan 501 anggota dengan sifat yang diinginkan pada soal. ◆

Contoh 3.8.6. *Tunjukkan jika α, β, dan γ adalah sudut-sudut dari sebuah segitiga, maka berlaku*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{4}.$$

Penyelesaian. Karena $\alpha+\beta+\gamma = 180^o$, maka $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2} < 90^o$. Selanjutnya, karena $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = 90^o$, maka

$$\frac{\alpha}{2} = 90^o - \left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) < 90^o - \frac{\beta}{2} < 90^o.$$

Jadi,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} < \sin\left(90^o - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sin\beta < \frac{1}{2}.$$

Kita asumsikan bahwa γ adalah *sudut terkecil* dari antara tiga sudut tersebut. Jadi, $\gamma \le \frac{180^o}{3} = 60^o$ dan berarti $\frac{\gamma}{2} \le 30^o$. Kita memperoleh $\sin\frac{\gamma}{2} \le \sin 30^o = \frac{1}{2}$. Dengan demikian,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$ ◆

Latihan Soal 3.8.

1. Tanpa menggunakan kalkulator, tunjukkan bahwa

$$\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{7} < 7 \quad \text{dan} \quad \sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4} > 4.$$

2. Himpunan S beranggotakan semua titik pada bidang dengan sifat setiap titik anggota S adalah titik tengah dari dua titik anggota S yang lain. Buktikan bahwa S adalah himpunan takhingga.
3. Tunjukkan bahwa perkalian n bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi oleh $n!$

4. Misalkan a dan b adalah dua akar real dari persamaan kuadrat

$$x^2 - (k-1)x + (k^2 + 3k + 4) = 0$$

untuk suatu $k \in \mathbb{R}$. Tentukan nilai maksimum dari $a^2 + b^2$.

5. Diberikan sejumlah hingga titik pada bidang, tidak semuanya kolinear. Tunjukkan terdapat garis yang melewati tepat dua titik.
6. Diberikan tujuh bilangan asli yang berbeda yang jumlahannya adalah 100. Tunjukkan bahwa ada tiga bilangan asli yang jumlahnya tidak kurang dari 50.
7. Tunjukkan bahwa tidak ada quadrupel bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi persamaan

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2).$$

8. Pada sebuah pesta, tidak ada pria yang berdansa dengan semua wanita, tetapi setiap wanita berdansa dengan paling sedikit satu pria. Buktikan terdapat dua pasang p_1w_1 dan p_2w_2 sehingga p_1 tidak berdansa dengan w_2 dan w_1 juga tidak berdansa dengan p_2.
9. Diketahui n adalah bilangan asli dan $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tentukan nilai maksimum dari jumlah

$$\sum_{i<j} \left| x_i - x_j \right|.$$

10. Seribu bilangan dituliskan pada keliling sebuah lingkaran. Setiap bilangan adalah rata-rata aritmetika dari dua bilangan lain yang mengapitnya. Tunjukkan bahwa semua bilangan tersebut adalah sama.
11. $2n + 1$ koboi ($n > 1$) berdiri di sebuah lapangan yang memiliki jam besar di tengah-tengahnya. Pada saat jam 12.00, setiap koboi akan menembak koboi yang jaraknya paling dekat dengan dia. Jika diketahui jarak setiap dua koboi berbeda, maka buktikan
    (a) Paling tidak ada satu koboi yang hidup.
    (b) Tidak ada koboi yang ditembak oleh lebih dari lima koboi lainnya.
    (c) Lintasan peluru tidak mungkin saling menyilang.

(d) Lintasan peluru tidak mungkin membentuk sebuah segibanyak tertutup.

12. Tentukan semua tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}.$$

13. Jika x dan y adalah panjang dua sisi siku-siku pada sebuah segitiga dan memenuhi hubungan
$$\sqrt{x^2 - 6x\sqrt{2} + 19} + \sqrt{y^2 - 4y\sqrt{3} + 4} \leq 3,$$
maka tentukan keliling segitiga tersebut.

14. Diketahui A adalah himpunan siswa di dalam sebuah kelas dengan sifat untuk setiap dua siswa p dan q di A yang mempunyai jumlah teman yang sama tidak terdapat siswa r yang berteman dengan p dan q sekaligus. Buktikan bahwa terdapat siswa di kelas tersebut yang memiliki tepat satu teman.

15. Buktikan bahwa terdapat takhingga banyak bilangan prima yang berbentuk $6n - 1$.

3.9 Memperumum

Heuristik ini tampaknya bersifat paradoks atau bertentangan dengan intuisi kita: alih-alih menyelesaikan langsung masalah yang khusus, kita memperumum ataupun mengabstraksi masalah tersebut. Namun demikian seringkali sebuah masalah dapat disederhanakan dan dapat lebih mudah dipahami ketika kita memperumumnya. Perlu diingat bahwa perumuman dan abstraksi adalah dua ciri dasar dari matematika modern. Perumuman memberikan sudut pandang yang lebih luas terhadap sebuah masalah, membuang hal-hal yang tidak esensial serta menyediakan sebuah koleksi teknik baru dalam menangani masalah.

Contoh 3.9.1. *Manakah yang lebih besar*
$$\sqrt{2019} + \sqrt{2020} \quad \textit{atau} \quad \sqrt{2018} + \sqrt{2021}\ ?$$

Penyelesaian. Kita formulasikan masalah di atas secara umum. Kita sebut $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ dan $b_n = \sqrt{n-1} + \sqrt{n+2}$. Perhatikan

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &< 0, \end{aligned}$$

sebab $\sqrt{n+2} + \sqrt{n} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$. Jadi, secara umum berlaku

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n-1} + \sqrt{n+2},$$

dan khususnya untuk $n = 2019$ berlaku

$$\sqrt{2019} + \sqrt{2020} > \sqrt{2018} + \sqrt{2021}. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.9.2. *Hitunglah*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$

Penyelesaian. Kita akan mengerjakan soal ini dalam konteks yang lebih umum. Pertama, kita definisikan

$$S(x) := \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k.$$

Alasan penggunaan variabel x adalah agar kita dapat menggunakan teknik analisis fungsi. Kita ingat rumus deret geometri

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

Turunan kedua ruas memberikan

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Selanjutnya, kita kalikan kedua ruas dengan x dan menurunkan sekali lagi dan kemudian mengalikan dengan x lagi, untuk mendapatkan

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k = \frac{x(1+x) - x^{n+1}(nx-n-1)^2 - x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

Jadi,

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} \\ &= 6 - \frac{1}{2^{n-2}}\left(\frac{1}{2}n - n - 1\right)^2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 6 - \left(\frac{n^2+4n+6}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \lim_{n\to\infty} S\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+6}{2^n}\right) = 6. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.9.3. *Hitunglah nilai determinan Vandermonde berikut*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. Kita asumsikan $a_i \neq a_j$ untuk $i \neq j$, karena kalau tidak demikian determinan di atas bernilai nol. Untuk memahami soal lebih jauh dan mendapatkan ide secara umum, kita perhatikan kasus $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Sekarang kita ganti c dengan variabel x. Maka, determinan akan berupa sukubanyak $P(x)$ berderajat 2. Lebih lanjut, $P(a) = P(b) = 0$ sebab jika c diganti dengan a atau b, maka matriks yang bersesuaian memiliki dua baris yang identik. Jadi,

$$P(x) = A(x - a)(x - b)$$

untuk suatu konstanta A. Perhatikan bahwa A adalah koefisien dari suku x^2 dan ini nilainya sama dengan

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

Kita memperoleh $A = b - a$ dan determinan 3×3 yang diinginkan adalah

$$P(c) = (b - a)(c - a)(c - b).$$

Kasus umum untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ dikerjakan secara analog. Kita misalkan nilai determinan pada soal adalah D_n. Ganti a_n pada baris terakhir matriks dengan variabel x. Hal ini berakibat determinan adalah sukubanyak $P_n(x)$ berderajat $n-1$, yang bernilai nol di $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dari teorema faktor dalam sukubanyak kita mempunyai

$$P_n(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{n-1}),$$

untuk suatu konstanta A. Seperti pada kasus $n = 3$, A adalah koefisien dari suku x^n dan dengan mengekspansikan menurut baris terakhir kita memperoleh $A = D_{n-1}$. Dari sini

$$D_n = P_n(a_n) = D_{n-1}\left((a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})\right).$$

Argumentasi serupa kita ulangi untuk D_{n-1}, D_{n-2}, dan seterusnya dan pada akhirnya kita memperoleh

$$D_n = \prod_{k=2}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k-1}(a_k - a_j)\right). \ \blacklozenge$$

Contoh berikut ini menunjukkan strategi mencari pola, membagi dalam kasus paritas, dan memperumum yang digunakan bersama-sama.

Contoh 3.9.4. *Buktikan bahwa tidak ada bilangan prima di dalam barisan bilangan*

$$10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$$

Penyelesaian. Suku-suku dalam barisan itu dapat ditulis sebagai

$$1 + 10^4, 1 + 10^4 + 10^8, \cdots, 1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4n}, \cdots$$

Secara lebih umum, untuk sebarang bilangan bulat $x > 1$ diperoleh

$$1 + x^4, 1 + x^4 + x^8, \cdots, 1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4n}, \cdots$$

Sekarang kita kerjakan dalam dua kasus.

1. Jika n ganjil, yakni $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} &1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4(2m+1)} \\ &= 1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{8m}x^4 \\ &= (1 + x^4) + x^8(1 + x^4) + \cdots + x^{8m}(1 + x^4) \\ &= (1 + x^4)(1 + x^8 + \cdots + x^{8m}). \end{aligned}$$

   Jadi, untuk $m > 0$ bilangan tersebut komposit. Untuk $m = 0$ dan $x = 10$ diperoleh bilangan komposit $10001 = 73 \cdot 137$.

2. Jika n genap, yakni $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} &1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4(2k)} \\ &= \frac{1 - (x^4)^{2k+1}}{1 - x^4} \\ &= \frac{1 - (x^{2k+1})^4}{1 - x^4} \\ &= \left(\frac{1 - (x^{2k+1})^2}{1 - x^2}\right)\left(\frac{1 + (x^{2k+1})^2}{1 + x^2}\right), \end{aligned}$$

   yakni sebuah bilangan komposit. ◆

Contoh 3.9.5. *Apabila diketahui*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

maka hitunglah

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

Penyelesaian. Kita akan mengerjakan integral yang lebih umum

$$f(a) := \int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx, \quad a \geq 0,$$

dengan menggunakan teknik penurunan parameter. Dengan mengambil turunan terhadap a dari kedua ruas pada kesamaan di atas kita memperoleh

$$f'(a) = \int_0^\infty \frac{2x \sin ax \cos ax}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}\,dx.$$

Selanjutnya, dengan memilih substitusi $y = 2ax$ kita mendapatkan $dy = 2a\,dx$ dan

$$f'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

Pengintegralan kedua ruas memberikan

$$f(a) = \frac{\pi a}{2} + c,$$

dengan c adalah sebuah konstanta. Karena $f(0) = 0$, maka $c = 0$. Jadi,

$$f(a) = \frac{\pi a}{2}, \ \ a \geq 0.$$

Jawaban dari soal di atas diperoleh dengan memilih $a = 1$, yakni

$$f(1) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.9.6. *Buktikan identitas Ramanujan*

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}=3$$

untuk $x > 1$.

Penyelesaian. Mencari jawaban soal ini dalam bentuk bilangan secara langsung akan sulit. Oleh karena itu kita akan mengerjakan lebih umum dalam bentuk fungsi. Untuk itu kita definisikan fungsi $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$f(x) := \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots}}}}. \tag{3.2}$$

Mudah diperiksa bahwa f adalah fungsi naik monoton. Sekarang kita akan menunjukkan bahwa f terbatas ke atas. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq \sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)\cdots}}} \\
&\leq \sqrt{2x\sqrt{3x\sqrt{4x\cdots}}} \\
&\leq \sqrt{2x\sqrt{4x\sqrt{8x\cdots}}} \\
&= 2^{\sum \frac{k}{2^k}} x^{\sum \frac{1}{2^k}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots} \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Jadi, $f(x) \leq 2x$ untuk setiap $x \geq 1$. Kita juga mempunyai

$$f(x) \geq \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}} = x \geq \frac{1}{2}(x+1).$$

Dua hasil terakhir memberikan

$$\frac{1}{2}(x+1) \leq f(x+1) \leq 2(x+1).$$

Dengan mengkuadratkan (3.2) kita mendapatkan persamaan fungsional

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1,$$

dan akibatnya

$$x\frac{x+1}{2} + 1 \leq f(x)^2 \leq 2x(x+1) + 1.$$

Karena $\sqrt{\frac{1}{2}x(x+1)+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)$ dan $\sqrt{2x(x+1)+1} \leq \sqrt{2}(x+1)$, maka

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1) \leq f(x) \leq \sqrt{2}(x+1).$$

Secara rekursif, untuk setiap $n \geq 1$, kita memperoleh

$$2^{-\frac{1}{2^n}}(x+1) \leq f(x) \leq 2^{\frac{1}{2^n}}(x+1).$$

Dengan mengambil limit $n \to \infty$, prinsip apit memberikan $x + 1 \leq f(x) \leq x + 1$, yakni $f(x) = x + 1$. Secara khusus untuk $x = 2$ kita memperoleh identitas Ramanujan

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}} = 3. \ \blacklozenge$$

Latihan Soal 3.9.

1. (a) Buktikan bahwa $n^3 - n$ habis dibagi 3 untuk setiap bilangan asli n.
   (b) Buktikan bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk setiap bilangan asli n.
   (c) Berikan sebuah pernyataan umum yang memuat (a) dan (b) sebagai kasus khusus.
2. (a) Diberikan $A = \{1, 2\}$. Berapa banyak fungsi bijektif yang dapat dibentuk dari A ke A?
   (b) Diberikan $A = \{1, 2, 3\}$. Berapa banyak fungsi bijektif yang dapat dibentuk dari A ke A?

(c) Berikan sebuah pernyataan umum yang memuat (a) dan (b) sebagai kasus khusus dan selanjutnya buktikan.

3. Manakah yang lebih besar:

$$\sqrt[3]{60} \quad \text{atau} \quad 2 + \sqrt[3]{7}\ ?$$

4. Tentukan nilai jumlahan berikut:

(a)
$$\sum_{j=1}^{n} 3^j \binom{n}{k}$$

(b)
$$\sum_{j=1}^{n} j^2 \binom{n}{k}$$

(c)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \binom{n}{k}$$

Petunjuk: Ingat bentuk umum binomial Newton

$$(1 + x)^n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{k} x^j.$$

5. Tunjukkan bahwa

$$\frac{2020^3 + 2019^3 + 3 \cdot 2020 \cdot 2019 - 1}{2021^2 + 2020^2 + 1}$$

adalah sebuah bilangan bulat. Tentukan nilai bilangan bulat tersebut.

6. Buktikan setiap pernyataan berikut:

(a)
$$\cos 1^o + \sec 1^o \geq 2.$$

(b)
$$\pi \leq^2 \log 9 +^3 \log 4.$$

7. Putri mempunyai 10 dompet dan 44 koin uang logam. Dia ingin menyimpan koin-koinnya ke dalam 10 dompet tersebut sehingga

setiap dompet berisi koin dengan jumlah yang berbeda dari dompet yang lain.

(a) Apakah hal itu dapat dilakukan Putri?

(b) Buatlah sebuah perumuman untuk masalah di atas dengan p dompet dan n koin uang logam.

(c) Masalah ini akan menjadi menarik ketika

$$n = \frac{(p+1)(p-2)}{2}.$$

Jelaskan.

8. Hitunglah

$$\sqrt{1 + 1997 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000}.$$

9. Buktikan

$$0 < \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} < 3.$$

10. Hitunglah nilai

$$6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{666\ldots6}_{2020 \text{ kali}}.$$

11. (a) Diberikan segitiga siku-siku dengan panjang sisi miring 25 dan luas 84. Hitunglah panjang kedua sisi siku-siku segitiga tersebut.

(b) Kita akan memperumum soal di atas. Diberikan segitiga siku-siku dengan panjang sisi miring r dan luas L. Turunkan sebuah rumus untuk menghitung panjang kedua sisi siku-siku segitiga tersebut.

(c) Dengan menggunakan rumus yang anda peroleh pada bagian (b), hitunglah keliling segitiga siku-siku dengan panjang sisi miring $2\sqrt{5}$ dan luas $2\sqrt{6}$.

12. Hitunglah nilai dari deret takhingga

$$\frac{1}{2^1 - 2^{-1}} + \frac{1}{2^2 - 2^{-2}} + \frac{1}{2^4 - 2^{-4}} + \frac{1}{2^8 - 2^{-8}} + \cdots$$

13. Tentukan jumlahan digit-digit dari

$$(100000 + 10000 + 1000 + 100 + 10 + 1)^2 .$$

14. Buktikan bahwa $\sqrt{97}$ adalah bilangan irasional.
15. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan

$$a_n := \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

   (a) Hitunglah a_n untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
   (b) Buatlah dugaan sebuah rumus tertutup untuk a_n dan buktikan.
16. Buktikan:

$$2019 - \frac{2019^2}{2} < \ln 2020 < 2019 - \frac{2019^2}{2 \cdot 2020}.$$

17. Hitunglah nilai determinan dari matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix}.$$

   Petunjuk: Tuliskan d sebagai sebuah variabel x.
18. Hitunglah

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx.$$

   Petunjuk: Perumum soal menjadi

$$f(m) := \int_0^1 \frac{x^m - 1}{\ln x}\, dx$$

   dan gunakan teknik penurunan parameter.
19. Hitunglah nilai deret takhingga

$$\frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \cdots$$

20. Diketahui tiga bilangan real positif a, b, c dengan $abc = 1$. Tun-

jukkan jika

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c,$$

maka

$$\frac{1}{a^{2020}} + \frac{1}{b^{2020}} + \frac{1}{c^{2020}} \geq a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}.$$

3.10 Berpikir Alternatif

Ketika menghadapi masalah matematika kita seringkali berpikir dengan pola yang baku dan bahkan terkesan kaku terhadap konteks soal yang dihadapi. Dalam banyak hal berpikir alternatif adalah cara yang lebih baik dan efektif dalam menyelesaikan persoalan. Sebagai contoh, seringkali sebuah masalah geometri dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan kalkulus ataupun sebuah masalah aljabar lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan metode kombinatorial.

Contoh 3.10.1. *Tunjukkan bahwa $n^3 + 6n^2 - 4n + 3$ habis dibagi 3 untuk setiap bilangan asli n.*

Penyelesaian. Melihat soal semacam ini kita akan langsung berpikir metode induksi matematika. Tetapi pembaca dapat mencoba bahwa langkah induksi untuk soal ini tidaklah mudah dilakukan. Sebuah cara mudah membuktikan soal ini adalah melalui pemfaktoran. Dengan menuliskan $n^3 + 6n^2 - 4n + 3$ sebagai $(n^3 - 4n) + 6n^2 + 3$, maka untuk membuktikan soal di atas, maka cukup ditunjukkan bahwa $n^3 - 4n$ habis dibagi 3 untuk setiap bilangan asli n. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$n^3 - 4n = n^3 - n - 3n = n(n^2 - 1) - 3n = (n - 1)n(n + 1) - 3n.$$

Bentuk terakhir ini selalu habis dibagi 3 sebab $3n$ habis dibagi 3 dan $(n - 1)n(n + 1)$ habis dibagi 3 karena merupakan perkalian tiga bilangan asli yang berurutan. ◆

Contoh 3.10.2. *Tentukan nilai minimum global dari fungsi* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$f(x, y) = 3^{x+y}\left(3^{x-1} + 3^{y-1} - 1\right).$$

Penyelesaian. Pertama kali melihat soal ini pikiran kita mungkin akan langsung terpaku pada penyelesaian menggunakan teknik dari kalkulus, yakni menggunakan turunan fungsi. Tentu saja hal ini dapat dilakukan tetapi memerlukan perhitungan yang cukup panjang dan rumit. Adakah cara alternatif menyelesaikan soal tanpa kalkulus? Apabila kita menuliskan fungsi di atas dalam bentuk

$$3f(x, y) + 1 = 3^{2x+y} + 3^{x+2y} + 1 - 3 \cdot 3^{x+y},$$

maka kita memperoleh bentuk $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ dengan $a = \sqrt[3]{3^{2x+y}}$, $b = \sqrt[3]{3^{x+2y}}$, dan $c = 1$. Dengan menerapkan ketaksamaan AM-GM kita memperoleh bahwa $3f(x, y) + 1 \geq 0$. Lebih jauh, $3f(x, y) + 1 = 0$ ketika $a = b = c$, yakni ketika $2x + y = x + 2y = 0$. Dengan demikian, nilai minimum global dari f adalah $f(0, 0) = -\frac{1}{3}$. ◆

Contoh 3.10.3. *Diberikan bilangan real positif* a, b, c *dengan* $abc = 1$. *Buktikan bahwa*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Penyelesaian. Hal pertama yang muncul dalam pikiran kita ketika membaca soal ini adalah ini masalah aljabar yaitu membuktikan ketaksamaan dan *harus* dikerjakan secara aljabar. Salah satu cara alternatif adalah dengan menggunakan kalkulus. Kita tunjukkan bahwa fungsi

$$f(x) = a^x + b^x + c^x$$

adalah fungsi naik monoton untuk $x \geq 0$. Turunan pertama fungsi ini adalah

$$f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c.$$

Dari sini kita hanya dapat menyimpulkan bahwa $f'(0) = \ln(abc) = \ln 1 = 0$. Lebih lanjut, turunan kedua fungsi ini adalah

$$f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b + c^x \ln^2 c$$

dan jelas bahwa $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \geq 0$. Jadi f' adalah fungsi naik monoton. Hal ini berakibat

$$f'(x) \geq f'(0) = 0$$

untuk $x \geq 0$. Hasil terakhir ini menunjukkan bahwa f fungsi naik monoton untuk $x \geq 0$. ◆

Contoh 3.10.4. *Hitunglah limit*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

Penyelesaian. Secara naif kita mungkin akan mencoba menyelesaikan soal ini secara langsung dengan berbagai metode perhitungan limit yang kita kenal. Namun apabila kita menuliskan $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ sebagai

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

maka kita akan segera mengenali bentuk ini sebagai jumlahan Riemann fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \frac{1}{1+x}$ terhadap partisi

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

dengan titik partisi $\xi_i = \frac{i}{n} \in [x_i, x_{i+1}]$. Dengan demikian

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

◆

Contoh 3.10.5. *Buktikan bahwa terdapat takhingga banyaknya bilangan prima.*

Penyelesaian. Kita notasikan himpunan semua bilangan prima dengan $\mathcal{P}$. Pertama harus kita pahami bahwa takhingga di sini adalah takhingga terhitung (*countably infinite*), sebab $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$. Terdapat lebih dari 150 pembuktian untuk pernyataan di atas.

Bukti klasik diberikan oleh Euclid pada tahun 300 sebelum Masehi. Kita ambil sebarang himpunan hingga dari bilangan-bilangan prima $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ dan selanjutnya kita bentuk bilangan bulat positif $n = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$. Dari sifat dasar bilangan bulat, n memiliki sebuah faktor prima, katakan p. Apabila p adalah salah satu dari p_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, maka p habis membagi $p_1 p_2 \ldots p_r$. Sebagai akibatnya, p juga habis membagi $1 = n - p_1 p_2 \ldots p_r$, sebuah kemustahilan. Jadi, $p \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. Dengan kata lain, himpunan hingga $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ tidak mungkin memuat semua bilangan prima.

Sebuah bukti yang cukup singkat diberikan oleh S. Northshield pada tahun 2015. Andaikan $\mathcal{P}$ adalah himpunan hingga, maka

$$0 < \prod_{p \in \mathcal{P}} \sin \frac{\pi}{p} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sin \left(\frac{\pi \left(1 + 2 \prod_{q \in \mathcal{P}} q\right)}{p} \right) = 0.$$

Kontradiksi. ◆

Contoh 3.10.6. *Diketahui $m, n \in \mathbb{N}$. Buktikan*

$$1 + \frac{n}{m+n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots m} = \frac{m+n}{m}.$$

Penyelesaian. Kita mungkin akan mencoba menyelesaikan soal ini secara aljabar dengan menggunakan sifat-sifat bilangan asli. Namun dapat dilihat bahwa cara ini kurang menarik karena melibatkan kalkulasi teknis yang panjang dan rumit. Sebuah alternatif penyelesaian yang elegan adalah melalui teori peluang sebagai berikut. Pandang sebuah kotak berisi n bola putih dan m bola hitam. Misalkan A_i adalah kejadian mendapatkan bola putih pertama pada pengambilan acak ke-i.

Kita memperoleh

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{m}{m+n}\\
P(A_2) &= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}\\
P(A_3) &= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{m}{m+n-2}\\
&\vdots\\
P(A_m) &= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Catat bahwa $A_1, A_2, \ldots, A_m$ adalah kejadian-kejadian yang saling asing dan hal ini berakibat

$$\begin{aligned}
1 &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m)\\
&= \frac{m}{m+n}\left(1 + \frac{n}{m+n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots m}\right).
\end{aligned}$$

Terbuktilah identitas yang diinginkan. ◆

Contoh 3.10.7. *Buktikan bahwa untuk segitiga dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c serta luas A berlaku ketaksamaan Weitzenböck*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A.$$

Penyelesaian. **Cara 1**. (Bukti langsung) Dengan menggunakan rumus Heron, yakni

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2},$$

dan ketaksamaan AM-GM kita memperoleh

$$\begin{aligned}
16A^2 &= (a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)\\
16A^2 &\leq (a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\\
4A &\leq \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \sqrt{3}\frac{a^2+b^2+c^2}{3},
\end{aligned}$$

atau terbukti $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$. Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b = c$, yaitu untuk segitiga samasisi.

Cara 2. (Bukti kontradiksi) Andaikan $a^2 + b^2 + c^2 < 4\sqrt{3}A$. Kita memperoleh

$$2bc \sin\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Di lain pihak aturan kosinus memberikan $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$. Kuadratkan dan jumlahan kedua persamaan ini dan didapatkan

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > a^4 + b^4 + c^4.$$

Ketaksamaan terakhir setara dengan

$$\left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2 + \left(c^2 - a^2\right)^2 < 0$$

dan ini merupakan sebuah kontradiksi.

Cara 3. (Memodifikasi soal) Segitiga samasisi dengan panjang sisi c mempunyai garis tinggi dengan panjang $\frac{c}{2}\sqrt{3}$. Sebarang segitiga dengan panjang sisi c mempunyai garis tinggi dengan panjang $\frac{c}{2}\sqrt{3} + y$. Garis tinggi ini sisi c menjadi $\frac{c}{2} - x$ dan $\frac{c}{2} + x$. Dalam hal ini x dan y adalah deviasi panjang sisi dari segitiga samasisi. Kita memperoleh

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}A \\
&= \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + 2\left(y + \frac{c}{2}\sqrt{3}\right)^2 + c^2 - 2\sqrt{3}c\left(y + \frac{c}{2}\sqrt{3}\right) \\
&= 2x^2 + 2y^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $x = y$, yaitu untuk segitiga samasisi.

Cara 4. (Bekerja mundur) Kita mulai dari yang ingin dibuktikan

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &\geq 4\sqrt{3}A \\
\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 &\geq 3(a + b + c)(a - b + c)(-a + b + c)(a + b - c) \\
\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 &\geq 3\left(2a^2b^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4\right)
\end{aligned}$$

Dari sini kita memperoleh

$$4a^4 + 4b^4 + 4c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4a^2c^2 \geq 0$$

yang setara dengan

$$\left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2 + \left(c^2 - a^2\right)^2 \geq 0$$

Cara 5. (Menggunakan sifat fungsi konveks) Dari rumus luas segitiga

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta,$$

kita memperoleh

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 2A\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Sekarang kita gunakan fakta bahwa fungsi $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x$ adalah fungsi konveks, yakni

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 3f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\csc\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Jadi, terbukti $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4A\sqrt{3}$.

Cara 6. (Memperumum) Cara ini memberikan hasil yang lebih umum yang dikenal dengan ketaksamaan Hadwiger-Finsler dan pernyataan pada soal menjadi kasus khusus. Dari aturan kosinus diperoleh

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
&= (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos\alpha) \\
&= (b - c)^2 + 4A\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} \\
&= (b - c)^2 + 4A\tan\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian kita mendapatkan

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4A\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right).$$

Karena $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ dan karena tangens adalah fungsi cembung, maka berlaku

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \geq 3\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = 3\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Jadi, kita memperoleh

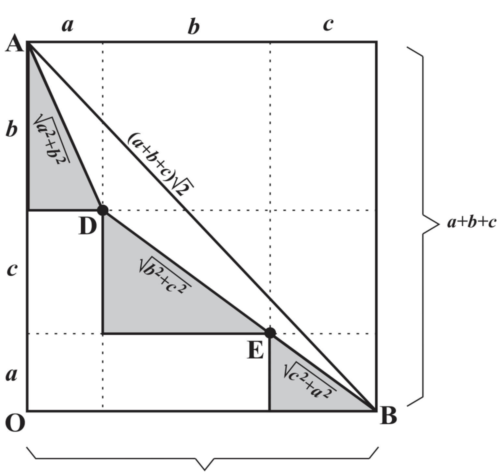
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4A\sqrt{3} \geq 4A\sqrt{3}.$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, yakni jika dan hanya jika $a = b = c$. ◆

Contoh 3.10.8. *Diberikan bilangan real positif a, b, dan c. Buktikan*

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq (a+b+c)\sqrt{2}.$$

Penyelesaian. Bukti aljabar untuk pernyataan rumit dan kurang intuitif. Sebuah cara berpikir alternatif untuk mendapatkan ide pembuktian adalah melalui gambar berikut



Gambar 35

Seringkali *pembuktian* semacam ini dikenal dengan nama bukti tanpa kata (*proof without words*). ◆

Contoh 3.10.9. *Buktikan*

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Penyelesaian. Soal ini tidak begitu mudah diselesaikan langsung dengan menggunakan teori trigonometri. Salah satu cara alternatif yang elegan adalah melalui bilangan kompleks. Misalkan

$$z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}.$$

Dari rumus Euler diperoleh $z^7=\cos\pi+i\sin\pi=-1$. Jadi, $z^7+1=0$. Kita juga mempunyai

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\\
&=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\frac{1}{2}\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)\\
&=\frac{z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1}{2z^5}.
\end{aligned}$$

Karena $z^7+1=0$, maka $z^{10}=-z^3$ dan $z^8=-z$. Jadi,

$$\begin{aligned}
&z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1\\
&=z^6+z^4-z^3+z^2-z+1\\
&=z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1+z^5\\
&=\frac{z^7+1}{z+1}+z^5\\
&=z^5.
\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{z^5}{2z^5}=\frac{1}{2}. \ \blacklozenge$$

Contoh 3.10.10. *Diberikan $x, y, z \in \mathbb{R}$ memenuhi*

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Tentukan nilai $xy + 2yz + 3zx$.

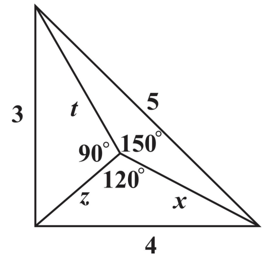
Penyelesaian. Soal ini merupakan jenis sistem persamaan taklinear, sehingga tidak ada prosedur baku untuk menyelesaikannya. Penyelesaian secara aljabar akan rumit. Kita akan melihat alternatif lain penyelesaian soal ini melalui geometri. Beberapa hal yang kita amati adalah

- Munculnya angka 9, 16, dan 25. Ini adalah sebuah tripel Pythagoras dan memberikan petunjuk akan penyelesaian secara geometri ataupun interpretasi geometris dari soal.
- Hal yang ditanyakan bukanlah x, y, dan z melainkan nilai dari $xy+2yz+3zx$, yang mungkin adalah luas dari segitiga atau segiempat. Jadi, bukan ide yang baik untuk mencari masing-masing dari x, y, dan z.
- Bentuk $\frac{y^2}{3}$ muncul dua kali. Apabila kita notasikan $t^2 = \frac{y^2}{3}$, maka diperoleh

$$x^2 + \sqrt{3}xt + t^2 = 25, \quad t^2 + z^2 = 9, \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Persamaan pertama dan ketiga terlihat seperti aturan kosinus sementara persamaan kedua terlihat seperti rumus Pythagoras. Lebih jauh, persamaan pertama dan ketiga dapat ditulis sebagai

$$x^2 + t^2 - 2xt\cos 150^o = 25, \quad z^2 + x^2 - 2zx\cos 60^o = 16.$$



Gambar 36

Dari gambar di atas dan dengan menerapkan rumus luas segitiga kita mendapatkan

$$\frac{1}{2}tz + \frac{\sqrt{3}}{4}xz + \frac{1}{4}xt = 6.$$

Dengan demikian,

$$L = xy + 2yz + 3zx = \sqrt{3}xt + 2\sqrt{3}tz + 3zx = 4v\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}.$$ ◆

Contoh 3.10.11. *Buktikan identitas*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad n \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n.$$

Penyelesaian. Soal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan definisi kombinasi dan perhitungan aljabar. Kita akan menggunakan interpretasi kombinatorial untuk membuktikan identitas tersebut. Misalkan kita akan membentuk sebuah panitia (termasuk ketua) yang terdiri dari k orang yang dapat dipilih dari n orang yang ada. Pertama, kita dapat memilih k anggota panitia dalam $\binom{n}{k}$ cara dan memilih ketua panitia dalam k cara. Jadi, banyak cara membentuk panitia adalah $k\binom{n}{k}$. Di lain pihak, kita dapat terlebih dahulu memilih ketua panitia dalam n cara dan selanjutnya memilih $k-1$ anggota panitia dari $n-1$ orang dalam $\binom{n-1}{k-1}$, yang memberikan banyak cara membentuk panitia adalah $n\binom{n-1}{k-1}$. Dari dua perhitungan di atas terbuktilah identitas yang diinginkan. Secara umum, metode kombinatorial seperti ini dikenal dengan nama metode menghitung dua kali. ◆

Contoh 3.10.12. *Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Penyelesaian. **Cara 1**. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika: lihat Contoh 2.3.4.

Cara 2. Dengan menggunakan sifat simetri. Kita misalkan

$$x = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n.$$

Cukup jelas bahwa,

$$x = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 3 + 2 + 1.$$

Dengan menjumlahkan kedua bentuk di atas secara simetris pada posisi yang bersesuaian, kita memperoleh

$$2x = (1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\cdots+((n-2)+3)+((n-1)+2)+(n+1).$$

Dari sini kita mendapatkan

$$2x = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1) + (n + 1)}_{n \text{ kali}}$$

yang memberikan

$$x = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Cara 3. Kita akan menggunakan metode kombinatorial. Laura mengundang n temannya untuk datang ke pesta ulang tahunnya. Semua yang diundang dapat hadir dan semua orang di pesta saling berjabat tangan dengan setiap orang lain tepat satu kali.

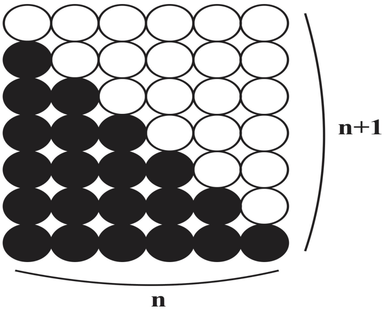
- Ada $n + 1$ orang di dalam pesta dan setiap orang berjabat tangan dengan n orang lain. Jadi, ada $n(n + 1)$ jabat tangan yang terjadi. Namun terjadi kelebihan hitung dua kali, sebab dengan cara di atas kita menghitung jabat tangan A dengan B sekaligus jabat tangan B dengan A. Karena setiap orang berjabat tangan tepat satu kali, maka banyaknya jabat tangan adalah $\frac{1}{2}n(n + 1)$.
- Misalkan tamu datang satu per satu. Laura akan berjabat tangan dengan semua n tamu. Tamu yang pertama datang akan berjabat tangan dengan Laura dan $n - 1$ tamu lainnya. Tamu yang kedua datang akan berjabat tangan dengan Laura, tamu pertama, dan $n-2$ tamu lainnya. Tamu yang ketiga datang akan berjabat tangan dengan Laura, tamu pertama, tamu kedua, dan $n-3$ tamu lainnya,

dan seterusnya. Dengan demikian, total banyaknya jabat tangan adalah $n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1$.

Dari dua cara menghitung di atas, kita simpulkan

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Cara 4. Bukti tanpa kata:



Gambar 37

◆

Latihan Soal 3.10.

1. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0,$$

maka buktikan bahwa x_1^3 dan x_2^3 adalah akar-akar persamaan

$$y^2 - \left(a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd\right)y + (ad - bc)^3 = 0.$$

2. Tentukan nilai minimum dari fungsi $f : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x, y, z) = x^z + y^z - (xy)^{\frac{z}{4}}.$$

3. Hitunglah limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}\right).$$

4. Carilah nilai A, B, dan C yang memenuhi

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

5. Apabila diketahui $x^2 + 3xy - y^2 = 7$ dan $x^2 - xy + 3y^2 = -1$ tentukan nilai $x^2 + xy + y^2$.
6. Tunjukkan bahwa $n^3 + 5n$ habis dibagi 6 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
7. Untuk setiap bilangan asli $n > 2$ tunjukkan

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

8. Diberikan $a, b, c, d > 0$. Buktikan

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

9. Carilah nilai minimum dari

$$|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

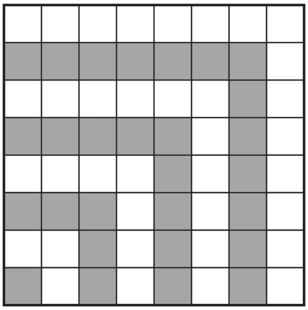
untuk $x \in \mathbb{R}$.
10. Diketahui $(0,0)$, $(a,11)$, dan $(b,37)$ adalah titik-titik sudut dari sebuah segitiga samasisi. Tentukan nilai ab.
11. Jika S_n menyatakan jumlahan n bilangan asli yang pertama, maka tentukan nilai deret takhingga

$$S = \frac{S_1}{1} + \frac{S_2}{2} + \frac{S_3}{4} + \cdots + \frac{S_n}{2^{n-1}} + \cdots$$

12. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $n^5 - 5n^3 + 4n$ habis dibagi 120.
13. Buktikan untuk setiap bilangan asli n berlaku

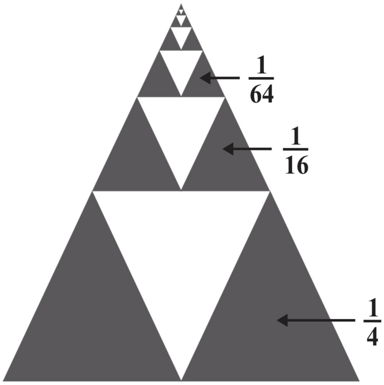
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Apakah interpretasi untuk identitas di atas. Berikan juga penjelasan bukti tanpa kata dari identitas di atas melalui gambar berikut:


Gambar 38

14. Tunjukkan
$$13! = 112296^2 - 79896^2.$$

15. Tunjukkan
$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}.$$
Berikan juga penjelasan bukti tanpa kata dari identitas di atas melalui gambar berikut:



Gambar 39

16. Hitunglah
$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx \quad \text{dan} \quad \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

17. Buktikan
$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

18. Berapakah banyaknya quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a + b + c + d = 15$ apabila diketahui $a > 0$, $b > 2$, $c > 2$, dan $d > 3$?
19. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan
$$\sin x + \sin y + \sin z = \frac{3}{2}, \quad \cos x + \cos y + \cos z = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$
20. Diberikan $a \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa
$$f(x) = \frac{\sin x + \sin(x + a)}{\cos x - \cos(x - a)}$$
adalah fungsi konstan.
21. Diberikan bilangan-bilangan real $a, b, c > 0$. Buktikan bahwa dapat dibuat segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b, dan c jika dan hanya jika $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ untuk sebarang $p, q \in \mathbb{R}$ dengan $p + q = 1$.
22. Untuk setiap bilangan real x, y, z, buktikan ketaksamaan
$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} \geq \sqrt{x^2 + xz + z^2}.$$
23. Hitunglah nilai
$$\cos 36^o - \cos 72^o \quad \text{dan} \quad \cos 36^o \cos 72^o.$$
24. Buktikan
$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$
25. Tunjukkan
$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$$
dan
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}.$$
Petunjuk: Pandang bentuk $(1 + i)^n$.

26. Tunjukkan bahwa persamaan

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2020}}{2020!} = 0$$

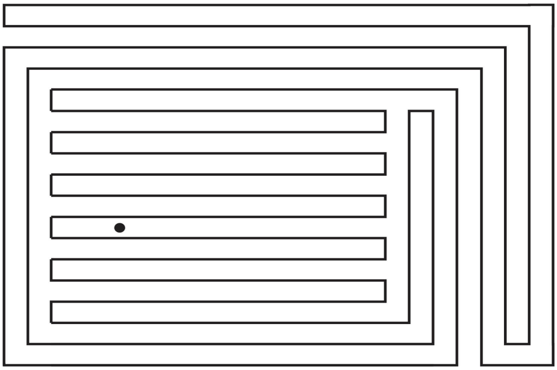
tidak mempunyai akar real.

27. Buktikan identitas

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

   (a) dengan menggunakan binomial Newton
   (b) dengan menggunakan metode kombinatorial menghitung dua kali.

28. Tentukan apakah titik berada di dalam atau di luar kurva.



Gambar 40

29. Buktikan identitas

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad n \in \mathbb{N},$$

dengan jalan menghitung banyaknya tripel (a, b, c) yang memenuhi

$$a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{dan} \quad a < c,\ b < c$$

dalam dua cara.

30. Diberikan bilangan asli $n \geq 4$. Buktikan

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-4}{n-k}\binom{n+4}{k} = (n+4)\binom{2n-1}{n-1}.$$

31. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$$\sqrt{x + 32 - 8\sqrt{x + 16}} + \sqrt{x + 41 - 10\sqrt{x + 16}} = 1.$$

32. Buktikan bahwa fungsi

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}\left((1 + x)\sqrt{1 + x} - (1 - x)\sqrt{1 - x}\right)}{x\left(2 + \sqrt{1 - x^2}\right)},$$

untuk $0 < |x| < 1$ adalah fungsi konstan.

33. Pada jaman dahulu kala, raja memberikan kesempatan kepada seorang tahanan untuk dapat dibebaskan. Raja memberikan $2n$ bola identik (bahan, bentuk, ukuran, berat) namun berbeda warna, n berwarna hijau dan n berwarna merah. Tahanan diminta memasukkan bola-bola tersebut ke dalam dua buah kotak yang identik. Selanjutnya, sebuah kotak akan dipilih secara acak dan dari kotak yang terpilih sebuah bola akan diambil secara acak. Jika bola yang terambil berwarna hijau, tahanan akan langsung dibebaskan, namun apabila yang terambil adalah bola merah maka tahanan akan tetap dalam penjara. Bagaimana tahanan tersebut harus memasukkan bola-bola ke dalam kedua kotak agar kesempatannya untuk bebas dari penjara sebesar mungkin?

34. Diberikan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pada latihan ini kita akan mencari invers dari matriks A dengan sebuah metode alternatif melalui teorema Cayley-Hamilton yang mengatakan "*setiap matriks persegi memenuhi persamaan karakteristiknya*".

(a) Carilah persamaan karakteristik matriks A, yakni sebuah persamaan sukubanyak dalam variabel λ yang diperoleh dari

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

dengan I adalah matriks identitas dengan ukuran sama dengan matriks A.

(b) Periksa kebenaran teorema Cayley-Hamilton untuk matriks A di atas.

(c) Gunakan teorema Cayley-Hamilton untuk mencari invers matriks A.

35. Diberikan fungsi

$$f(x) = \frac{607}{607x + 1} + \frac{692}{692x + 1} + \frac{-701}{-701x + 1}.$$

Tunjukkan bahwa $f^{(12)}(0) \neq 0$.

Daftar Pustaka

[1] Andreescu, T., and Feng, Z. (2001). *101 Problems in Algebra*. Canberra: AMT Publishing.

[2] Andreescu, T., and Feng, Z. (2002). *102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team*. Boston: Birkhauser.

[3] Andreescu, T., and Feng, Z. (2005). *103 Trigonometry Problems from the Training of the USA IMO Team*. Boston: Birkhauser.

[4] Andreescu, T., Andrica, D., and Feng, Z. (2007). *104 Number Theory Problems from the Training of the USA IMO Team*. Boston: Birkhauser.

[5] Andreescu, T., Mortici, C., and Tetiva, M. (2017). *Mathematical Bridges*. New York: Birkhauser.

[6] Andreescu, T.,Mushkarov, O., and Stoyanov, L. (2006). *Geometric Problems on Maxima and Minima*. Boston: Birkhauser.

[7] Bloch, E. D. (2011). *Proofs and Fundamentals*, 2nd edition. New York: Springer.

[8] Budhi, W. S. (2003). *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: Penerbit Ricardo.

[9] Devlin, K. (2000). *Language of Mathematics: Making the Invisible Visible*. New York: W.H. Freeman and Company.

[10] Devlin, K. (2004). *Sets, Functions, and Logic. An Introduction to Abstract Mathematics*, 3rd edition. Boca Raton: CRC Press.

[11] Djukic, D. et al (2011). *The IMO Compendium*, 2nd edition. New York: Springer.

[12] Engel, A. (1998). *Problem Solving Strategies*. Berlin: Springer.

[13] Erickson, M. (2012). *Aha! Solutions*. Washington DC: Mathematical Association of America.

[14] Galovich, S. (1993). *Doing Mathematics. An Introduction to Proofs and Problem Solving*. Orlando: Saunders College Publishing.

[15] Gelca, R. and Andreescu, T. (2007). *Putnam and Beyond*. New York: Springer.

[16] Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*, 2nd edition. New York: Springer.

[17] Gowers, T. (2008). *The Princeton Companion to Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

[18] Grieser, D. (2018). *Exploring Mathematics. Problem Solving and Proof*. Cham: Springer.

[19] Grigorieva, E. (2013). *Methods of Solving Complex Geometry Problems*. Cham: Springer.

[20] Grigorieva, E. (2015). *Methods of Solving Nonstandard Problems*. Cham: Springer.

[21] Grigorieva, E. (2016). *Methods of Solving Sequence and Series Problems*. Cham: Springer.

[22] Grigorieva, E. (2018). *Methods of Solving Number Theory Problems*. Cham: Springer.

[23] Houston, K. (2009). *How to Think Like a Mathematician*. New York: Cambrige University Press.

[24] Kisacanin, B. (2002). *Mathematical Problems and Proofs. Combinatorics, Number Theory and Geometry*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

[25] Krantz, S. G. (1997). *Techniques of Problem Solving*. Providence: American Mathematical Society.

[26] Krusemeyer, M. I., Gilbert, G. T., and Larson, L. C. (2012). *A Mathematical Orchard*. Providence: American Mathematical Society.

[27] Larson, L. C. (1983). *Problem Solving through Problems*. Berlin: Springer.

[28] Liljedahl, P. *et al*. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Cham: Springer.

[29] Louridas, S. E. and Rassias, M. T. (2013). *Problem Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry*. New York: Springer.

[30] Lozansky, E. and Rousseau, C.(1996). *Winning Solutions*. New York: Springer.

[31] Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., and Deigado, R. V. (2009). *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Basel: Birkhauser.

[32] Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., and Deigado, R. V. (2015). *Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad*. Basel: Birkhauser.

[33] Neto, A. C. M. (2017). *An Excursion through Elementary Mathematics, volume 1 Real Numbers and Functions*. Cham: Springer.

[34] Neto, A. C. M. (2018). *An Excursion through Elementary Mathematics, volume 2 Euclidean Geometry*. Cham: Springer.

[35] Neto, A. C. M. (2018). *An Excursion through Elementary Mathematics, volume 3 Discrete Mathematics and Polynomial Algebra*. Cham: Springer.

[36] Newman, D. J. (1982). *A Problem Seminar*. New York: Springer.

[37] Mynard, F. (2019). *An Introduction to the Language of Mathematics*. Cham: Springer.

[38] Polya, G. (1973). *How to Solve It*, 2nd edition. New Jersey: Princeton University Press.

[39] Polya, G. and Kilpatrick, J. (1974). *The Stanford Mathematics Problem Book*. New York: Teachers College Press.

[40] Posamentier, A. S. and Krulik, S. (1998). *Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions*. Thousand Oaks: Corwin Press, Inc.

[41] Posamentier, A. S. and Salkind, C. T. (1988). *Challenging Problems in Algebra*. New York: Dover Publications, Inc.

[42] Posamentier, A. S. and Salkind, C. T. (1988). *Challenging Problems in Geometry*. New York: Dover Publications, Inc.

[43] Rassias, M. T. *et al* (2011). *Problem Solving and Selected Topics in Number Theory*. New York: Springer.

[44] Schoenfeld, A. G. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London: Academic Press.

[45] Soberon, P. (2013). *Problem Solving Methods in Combinatorics*. Basel: Springer.

[46] Soifer, A. (2009). *Mathematics as Problem Solving*, 2nd edition. New York: Springer.

[47] Soifer, A. (2017). *Competitions for Young Mathematicians. Perspectives from Five Continents*. Cham: Springer.

[48] Solow, D. (2014). *How to Read and Do Proofs*, 6th edition. New Jersey: John Wiley and Sons.

[49] Stewart, I. and Tall, D. (2015). *Foundations of Mathematics*, 2nd edition. Oxford: Oxford University Press.

[50] Susilo, F. (2012). *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[51] Tao, T. (2006). *Solving Mathematical Problems. A Personal Perspective*, 2nd edition. New York: Oxford University Press.

[52] Tiwari, V. and Seshan, V. (2017). *Pathfinder for Olympiad Mathematics*. New Delhi: Pearson.

[53] Zeitz, P. (2007). *The Art and Craft of Problem Solving*, 2nd edition. New Jersey: John Wiley and Sons.

Glosarium

Akibat Pernyataan yang dibuktikan bernilai benar yang merupakan konsekuensi langsung (dapat dibuktikan dengan mudah) dari teorema atau proposisi.

Aksioma Asumsi dasar dari suatu situasi atau kerangka berpikir matematis. Pernyataan yang kita asumsikan benar tanpa perlu harus dibuktikan.

Alat pemecahan masalah matematis Teknik-teknik yang lebih terfokus dan trik-trik untuk situasi spesifik.

Aritmetika Cabang matematika yang mempelajari pola bilangan dan pencacahan

Bukti Penjabaran dan argumentasi matematis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan (teorema, proposisi, lema, atau akibat).

Definisi Pernyataan yang merupakan penjelasan dari makna matematis dari suatu kata/istilah.

Dugaan Pernyataan yang diyakini bernilai benar namun belum mempunyai penjelasan yang cukup dan sah secara matematis mengapa pernyataan itu benar.

Geometri Cabang matematika yang mempelajari pola bentuk

Heuristik Strategi dalam pemecahanan masalah matematika

Heuristik pemecahan masalah matematika Sekumpulan strategi yang sering dipakai dalam tahap eksplorasi (langkah Schoenfeld) dan menyusun rencana (langkah Polya) yang antara lain meliputi mencari pola, membuat gambar, memodifikasi masalah, memilih notasi dan substitusi yang tepat, menggunakan simetri, membagi ke dalam kasus-kasus, mengerjakan secara mundur, melihat kasus ekstrem, memperumum, dan berpikir alternatif.

Kalkulus Cabang matematika yang mempelajari pola pergerakan dan laju perubahan

Langkah Pemecahan Masalah Polya Memahami masalah, menyusun rencana, melaksanakan rencana, mengkaji ulang jawaban

Langkah Pemecahan Masalah Schoenfeld Analisis, eksplorasi, verifikasi

Lema Pernyataan yang dibuktikan bernilai benar yang biasanya digunakan untuk membuktikan pernyataan benar lainnya (teorema atau proposisi). Lema sering disebut sebagai teorema kecil.

Logika Cabang matematika yang mempelajari pola berpikir dan bernalar

Masalah matematis Pertanyaan yang memerlukan banyak pemikiran dan banyak koleksi teori dan teknik matematika yang kita miliki, sebelum pada akhirnya strategi yang benar untuk memecahkan pertanyaan tersebut dapat kita tentukan.

Matematika Ilmu yang mempelajari tentang pola (*science of patterns*) Pola-pola yang dipelajari tersebut dapat berupa obyek yang real ataupun imajinasi, visual ataupun mental, statis ataupun dinamis, kualitatif ataupun kuantitatif, serta bersifat murni-rekreasional ataupun aplikatif. (definisi menurut Keith Devlin)

Matematikawan Orang yang mempelajari ilmu matematika.

Metode pembuktian matematis Cara mengkontruksi bukti matematis dari sebuah pernyataan (lema, proposisi, teorema, akibat) yang terbagi ke dalam pembuktian langsung dan pembuktian taklangsung.

Metode kontradiksi Pembuktian pernyataan $P \Rightarrow Q$ dengan cara menunjukkan bahwa P dan $\overline{Q}$ berakibat suatu kemustahilan. Metode kontradiksi disebut juga dengan metode *reductio ad absurdum*.

Metode kontraposisi Pembuktian pernyataan $P \Rightarrow Q$ dengan cara membuktikan kontraposisinya yakni $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Landasan matematika Cabang matematika yang sangat fundamental karena digunakan di semua cabang matematika yang meliputi teori logika matematika dan teori himpunan.

Pernyataan Sebuah kalimat yang dapat bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya.

Prinsip induksi matematika Sifat himpunan bilangan asli yang mengatakan bahwa jika $S \subseteq \mathbb{N}$ memenuhi $1 \in S$ dan bila $k \in S$ berakibat $k + 1 \in S$, maka $S = \mathbb{N}$

Prinsip induksi umum Sebuah perumuman dari prinsip induksi matematika di mana basis induksi dimulai dari suatu bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$.

Prinsip invarian Dalam sebuah algoritma (permainan, transformasi) di mana terjadi iterasi atau pengulangan, carilah sesuatu hal yang tidak berubah.

Prinsip pengurutan baik Sifat himpunan bilangan asli yang mengatakan bahwa setiap subhimpunan takkosong dari $\mathbb{N}$ memiliki anggota terkecil

Prinsip sarang merpati Jika $kn + 1$ obyek ($k \geq 1$) didistribusikan ke dalam n kotak, maka terdapat sebuah kotak yang memuat sekurang-kurangnya $k + 1$ obyek.

Proposisi Pernyataan yang dibuktikan bernilai benar tetapi tidak begitu penting dibandingkan dengan teorema.

Strategi pemecahanan masalah matematis Ide matematis dan psikologis untuk memulai dan memahami masalah.

Taktik pemecahan masalah matematis Berbagai metode matematis yang dapat digunakan untuk banyak situasi yang berbeda.

Teorema Pernyataan yang dibuktikan bernilai benar sekaligus mempunyai makna / interpretasi / peranan yang menarik dan penting.

Teori Peluang Cabang matematika yang mempelajari pola kemungkinan dan kejadian acak

Topologi Cabang matematika yang mempelajari pola posisi dan hubungan kedekatan antar obyek

Indeks

Biodata Penulis

Herry Pribawanto Suryawan adalah dosen di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma. Gelar Sarjana Sains diperoleh dari Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada. Sewaktu menjadi mahasiswa S1 ia pernah mewakili Indonesia pada *International Scientific Olympiad on Mathematics* di Iran. Ia kemudian memperoleh gelar Magister Sains di bidang analisis matematika dari Institut Teknologi Bandung. Program doktoral di bidang matematika ditempuhnya di Technische Universität Kaiserslautern, Jerman dengan beasiswa dari DAAD dan berhasil meraih gelar Dr. rer. nat. (*Doktor rerum naturalium*). Selanjutnya ia mendapatkan beasiswa *Swiss Government Excellent Scholarship* untuk menempuh program *postdoctoral* di University of Zurich, Swiss. Bidang penelitian yang diminatinya adalah analisis stokastik (khususnya analisis derau putih) dan model stokastik. Mata kuliah yang diampu antara lain kalkulus diferensial, kalkulus integral, kalkulus peubah banyak, kalkulus vektor, analisis real, fungsi kompleks, sistem dinamika, proses stokastik, persamaan diferensial stokastik, dan pemecahan masalah matematis. Beberapa karya ilmiahnya telah terbit pada jurnal nasional maupun internasional.