

VOLUME 2/NO.1/2014

ISN : 2337-392X



# PROSIDING

**SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA,  
STATISTIKA, PENDIDIKAN MATEMATIKA,  
DAN KOMPUTASI**

## **Peranan Matematika dan Statistika dalam Menyikapi Perubahan Iklim**



<http://seminar.mipa.uns.ac.id>

**Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Sebelas Maret Surakarta  
Jl. Ir. Sutami 36 A Solo - Jawa Tengah**

## **Tim Prosiding**

### **Editor**

---

Purnami Widyaningsih, Respatiwan, Sri Kuntari,  
Nughthoh Arfawi Kurdhi, Putranto Hadi Utomo, dan Bowo Winarno

### **Tim Teknis**

---

Hamdani Citra Pradana, Ibnu Paxibrata, Ahmad Dimyathi,  
Eka Ferawati, Meta Ilafiani, Dwi Ardian Syah,  
dan Yosef Ronaldo Lete B.

### ***Layout & Cover***

---

Ahmad Dimyathi

***Tim Reviewer***

Drs. H. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.  
Dr. Sri Subanti, M.Si.  
Dr. Dewi Retno Sari Saputro, MKom.  
Drs. Muslich, M.Si.  
Dra. Mania Roswitha, M.Si.  
Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.  
Drs. Pangadi, M.Si.  
Drs. Sutrima, M.Si.  
Drs. Sugiyanto, M.Si.  
Dra Etik Zukhronah, M.Si.  
Dra Respatiwulan, M.Si.  
Dra. Sri Sulistijowati H., M.Si.  
Irwan Susanto, DEA  
Winita Wulandari, M.Si.  
Sri Kuntari, M.Si.  
Titin Sri Martini, M.Kom.  
Ira Kurniawati, M.Pd.

*Steering Committee*

Prof. Drs.Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.  
Prof. Dr. Budi Murtiyasa, M.Kom.  
Prof. Dr. Dedi Rosadi, M.Sc.  
Prof. Dr. Ir. I Wayan Mangku, M.Sc.  
Prof. Dr. Budi Nurani, M.S.  
Dr. Titin Siswantining, DEA  
Dr. Mardiyana, M.Si.  
Dr. Sutikno, M.Si.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa sehingga prosiding seminar nasional Statistika, Pendidikan Matematika dan Komputasi ini dapat diselesaikan.

Prosiding ini bertujuan mendokumentasikan dan mengkomunikasikan hasil presentasi paper pada seminar nasional dan terdiri atas 95 *paper* dari para pemakalah yang berasal dari 30 perguruan tinggi/politeknik dan institusi terkait. Paper tersebut telah dipresentasikan di seminar nasional pada tanggal 18 Oktober 2014. Paper didistribusikan dalam 7 kategori yang meliputi kategori Aljabar 14%, Analisis 9%, Kombinatorik 8%, Matematika Terapan 14%, Komputasi 7%, Statistika Terapan 27%, dan Pendidikan Matematika 19%.

Terima kasih disampaikan kepada pemakalah yang telah berpartisipasi pada desiminasi hasil kajian/penelitian yang dimuat pada prosiding ini. Terimakasih juga disampaikan kepada tim *reviewer*, tim prosiding, dan *steering committee*.

Semoga prosiding ini bermanfaat.

Surakarta, 28 Oktober 2014

Ketua Panitia



Dr. Dewi Retno Sari Saputro, M.Kom

The image shows a circular logo for the 'Seminar Nasional Matematika Universitas Sebelas Maret 2014'. The logo features a blue star with '2014' in the center, surrounded by the text 'Seminar Nasional Matematika' and 'Universitas Sebelas Maret'. A handwritten signature in black ink is written over the logo.

## DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul .....	i
Tim Prosiding .....	ii
Tim <i>Reviewer</i> .....	iii
<i>Steering Committee</i> .....	iv
Kata Pengantar .....	v
Daftar Isi .....	vi

## BIDANG ALJABAR

Bentuk-Bentuk Ideal pada Semiring $(\mathbf{D}_{n \times n}(\mathbb{Z}^+), +, \cdot)$ <i>Dian Winda Setyawati</i> .....	1
Penentuan Lintasan Kapasitas Interval Maksimum dengan Pendekatan Aljabar Max-Min Interval <i>M. Andy Rudhito dan D. Arif Budi Prasetyo</i> .....	8
Karakterisasi Aljabar Pada Graf Bipartit <i>Soleha, Dian W. Setyawati</i> .....	18
Semigrup Bentuk Bilinear Terurut Parsial Reguler Lengkap dalam Batasan Quasi-Ideal <i>Fuzzy</i> <i>Karyati, Dhoriva Urwatul Wutsqa</i> .....	26
Syarat Perlu dan Cukup Ring Lokal Komutatif Agar Ring Matriksnya Bersih Kuat (-Reguler Kuat) <i>Anas Yoga Nugroho, Budi Surodjo</i> .....	34
Sifat-sifat Modul Komultiplikasi Bertingkat <i>Putri Widi Susanti, Indah Emilia Wijayanti</i> .....	42
Ideal dari Ring Polinomial $F_n^2[x] \text{ mod}(x^n-1)$ untuk Kontrol Kesalahan dalam Aplikasi Komputer <i>Komar Baihaqi dan Iis Herisman</i> .....	49
Submodul Hampir Prima <i>Dyana Patty, Sri Wahyuni</i> .....	55
Subgrup Normal suatu Grup Perkalian dari Ring Pembagian yang Radikal atas Subring Pembagian Sejati <i>Juli Loisiana Butarbutar dan Budi Surodjo</i> .....	64
Sifat dan Karakterisasi Submodul Prima Lemah $S(N)$ <i>Rosi Widia Asiani, Sri Wahyuni</i> .....	73
Modul Distributif dan Multiplikasi <i>Lina Dwi Khusnawati, Indah Emilia Wijayanti</i> .....	83

Penjadwalan Keberangkatan Kereta Api di Jawa Timur dengan Menggunakan Model Petrinet dan Aljabar Max-plus Ahmad Afif, Subiono .....	92
Minimalisasi Norm Daerah Hasil dari Himpunan Bayangan Matriks Aljabar Maks-Plus dengan Sebagian Elemen Ditentukan <i>Antin Utami Dewi, Siswanto, dan Respatiwulan</i> .....	107
Himpunan Bayangan Bilangan Bulat Matriks Dua Kolom dalam Aljabar Maks-Plus <i>Nafi Nur Khasana, Siswanto, dan Purnami Widyaningsih</i> .....	112
<b>BIDANG ANALISIS</b>	
Ruang 2-Norma Selisih <i>Sadjidon, Mahmud Yunus, dan Sunarsini</i> .....	120
Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif pada Ruang $C[a,b]$ -Metrik $(\ell_p, d^{C[a,b]})$ <i>Sunarsini, Sadjidon, Mahmud Yunus</i> .....	124
Generalisasi Ruang Barisan Yang Dibangkitkan Oleh Fungsi Orlicz <i>Nur Khusnussa'adah dan Supaman</i> .....	132
Gerakan Kurva Parameterisasi Pada Ruang Euclidean <i>Iis Herisman dan Komar Baihaqi</i> .....	141
Penggunaan Metode Transformasi Diferensial Fraksional dalam Penyelesaian Masalah Sturm-Liouville Fraksional untuk Persamaan Bessel Fraksional <i>Marifatun, Sutrima, dan Isnandar Slamet</i> .....	148
Konsep Topologi Pada Ruang $C[a,b]$ <i>Muslich</i> .....	155
Kekompakan Terkait Koleksi Terindeks Kontinu dan Ruang Topologis Produk <i>Hadrian Andradi, Atok Zulijanto</i> .....	162
A Problem On Measures In Infinite Dimensional Spaces <i>Herry Pribawanto Suryawan</i> .....	171
Masalah Syarat Batas Sturm-Liouville Singular Fraksional untuk Persamaan Bessel <i>Nisa Karunia, Sutrima, Sri Sulistijowati H</i> .....	179
<b>BIDANG KOMBINATORIK</b>	
Pelabelan Selimut $(a,d)$ -H-Anti Ajaib Super pada Graf Buku <i>Frey Kurnita Sari, Mania Roswitha, dan Putranto Hadi Utomo</i> .....	187

Digraf Eksentrik Dari Graf Hasil Korona Graf Path Dengan Graf Path <i>Putranto Hadi Utomo, Sri Kuntari, Tri Atmojo Kusmayadi</i> .....	193
Super $(a, d)$ -H-Antimagic Covering On Union Of Stars Graph <i>Dwi Suraningsih, Mania Roswitha, Sri Kuntari</i> .....	198
Dimensi Metrik pada Graf <i>Umbrella</i> <i>Hamdani Citra Pradana dan Tri Atmojo Kusmayadi</i> .....	202
Dimensi Metrik pada Graf <i>Closed Helm</i> <i>Deddy Rahmadi dan Tri Atmojo Kusmayadi</i> .....	210
Pelabelan Selimut $(a,b)$ - $C_{s+2}$ -Anti Ajaib Super pada Graf <i>Generalized Jahangir</i> <i>Anna Amandha, Mania Roswitha, dan Bowo Winarno</i> .....	215
Super $(a,d)$ -H-Antimagic Total Labeling On Sun Graph <i>Marwah Wulan Mulia, Mania Roswitha, and Putranto Hadi Utomo</i> .....	223
Maksimum dan Minimum Pelabelan $\gamma$ pada Graf <i>Flower</i> <i>Tri Endah Puspitosari, Mania Roswitha, Sri Kuntari</i> .....	231

#### BIDANG MATEMATIKA TERAPAN

Penghitungan Volume Konstruksi dengan Potongan Melintang <i>Mutia Lina Dewi</i> .....	238
Pola Pengubinan Parabolis <i>Theresia Veni Dwi Lestari dan Yuliana Pebri Heriawati</i> .....	247
Analisis Kestabilan Model Mangsa Pemangsa Hutchinson dengan Waktu Tunda dan Pemanenan Konstan <i>Ali Kusnanto, Lilis Saodah, Jaharuddin</i> .....	257
Susceptible Infected Zombie Removed (SIZR) Model with Quarantine and Antivirus <i>Lilik Prasetyo Pratama, Purnami Widyaningsih, and Sutanto</i> .....	264
Model Endemik <i>Susceptible Exposed Infected Recovered Susceptible (SEIRS)</i> pada Penyakit Influenza <i>Edwin Kristianto dan Purnami Widyaningsih</i> .....	272
Churn Phenomenon Pengguna Kartu Seluler dengan Model <i>Predator-Prey</i> <i>Rizza Muamar As-Shidiq, Sutanto, dan Purnami Widyaningsih</i> .....	279
Pemodelan Permainan <i>Flow Colors</i> dengan <i>Integer Programming</i> <i>Irfan Chahyadi, Amril Aman, dan Farida Hanum</i> .....	283
Optimasi Dividen Perusahaan Asuransi dengan Besarnya Klaim Berdistribusi Eksponensial <i>Ali Shodiqin, Supandi, Ahmad Nashir T</i> .....	292



Permasalahan Kontrol Optimal Dalam Pemodelan Penyebaran Penyakit <i>Rubono Setiawan</i> .....	300
Model Pengoptimuman <i>Dispatching</i> Bus pada Transportasi Perkotaan: Studi Kasus pada Beberapa Koridor Trans Jakarta <i>Farida Hanum, Amril Aman, Toni Bakhtiar, Irfan Cahyadi</i> .....	306
Model Pengendalian Epidemi dengan Vaksinasi dan Pengobatan <i>Toni Bachtiar dan Farida Hanum</i> .....	315
How Realistic The Well-Known Lotka-Volterra Predator-Prey Equations Are <i>Sudi Mungkasi</i> .....	323
Aplikasi Kekongruenan Modulo pada Algoritma Freund dalam Penjadwalan Turnamen <i>Round Robin</i> <i>Esthi Putri Hapsari, Ira Kurniawati</i> .....	334

#### BIDANG KOMPUTASI

Aplikasi Algoritma Enkripsi Citra <i>Digital</i> Berbasis <i>Chaos</i> Menggunakan <i>Three Logistic Map</i> <i>Suryadi MT, Dhian Widya</i> .....	344
Implementasi Jaringan Syaraf Tiruan Untuk Mengklasifikasi Kualitas Citra Ikan <i>Muhammad Jumnahdi</i> .....	352
Sistem Pengkonversi Dokumen eKTP/SIM Menjadi Suatu Tabel <i>Nurul Hidayat, Ikhwan Muhammad Iqbal, dan Muhammad Mushonnif Junaidi</i> .....	360
Kriptografi Kurva Eliptik Elgamal Untuk Proses Enkripsi-Dekripsi Citra Digital Berwarna <i>Daryono Budi Utomo, Dian Winda Setyawati dan Gestihayu Romadhoni F.R</i> .....	373
Penerapan <i>Assosiation Rule</i> dengan Algoritma Apriori untuk Mengetahui Pola Hubungan Tingkat Pendidikan Orang Tua terhadap Indeks Prestasi Kumulatif Mahasiswa <i>Kuswari Hernawati</i> .....	384
Perancangan Sistem Pakar Fuzzy Untuk Pengenalan Dini Potensi Terserang Stroke <i>Alvida Mustika R., M Isa Irawan dan Harmuda Pandiangan</i> .....	394
Miniatur Sistem Portal Semiotomatis Berbasis Sidik Jari pada Area Perpakiran <i>Nurul Hidayat, Ikhwan Muhammad Iqbal, dan Devy Indria Safitri</i> .....	405

## BIDANG STATISTIKA

Uji Van Der Waerden Sebagai Alternatif Analisis Ragam Satu Arah <i>Tanti Nawangsari</i> .....	417
Analisis Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Keberhasilan Mahasiswa Politeknik (Studi Kasus Mahasiswa Polban) <i>Euis Sartika</i> .....	425
Distribusi Prior Dirichlet yang Diperumum sebagai Prior Sekawan dalam Analisis Bayesian <i>Feri Handayani, Dewi Retno Sari Saputro</i> .....	439
Pemodelan Curah Hujan Dengan Metode <i>Robust</i> Kriging Di Kabupaten Sukoharjo <i>Citra Panindah Sari, Dewi Retno Sari S, dan Muslich</i> .....	444
Premi Tunggal Bersih Asuransi Jiwa Endowment Unit Link Dengan Metode Annual Ratchet <i>Ari Cahyani, Sri Subanti, Yuliana Susanti</i> .....	453
Uji Siegel-Tukey untuk Pengujian Efektifitas Obat Depresan pada Dua Sampel Independen <i>David Pratama dan Getut Pramesti</i> .....	462
Aplikasi <i>Almost Stochastic Dominance</i> dalam Evaluasi Hasil Produksi Padi di Indonesia <i>Kurnia Hari Kusuma, Isnandar Slamet, dan Sri Kuntari</i> .....	470
Pendeteksian Krisis Keuangan Di Indonesia Berdasarkan Indikator Nilai Tukar Riil <i>Dewi Retnosari, Sugiyanto, Tri Atmojo</i> .....	475
Pendekatan <i>Cross-Validation</i> untuk Pendugaan Data Tidak Lengkap pada Pemodelan AMMI Hasil Penelitian Kuantitatif <i>Gusti Ngurah Adhi Wibawa dan Agusrawati</i> .....	483
Aplikasi Regresi Nonparametrik Menggunakan Estimator Triangle pada Data Meteo Vertical dan Ozon Vertikal, Tanggal 30 Januari 2013 <i>Nanang Widodo, Tony Subiakto, Dian Yudha R, Lalu Husnan W</i> .....	493
Pemodelan Indeks Harga Saham Gabungan dan Penentuan Rank Correlation dengan Menggunakan Copula <i>Ika Syattwa Bramantya, Retno Budiarti, dan I Gusti Putu Purnaba</i> .....	502
Identifikasi Perubahan Iklim di Sentra Produksi Padi Jawa Timur dengan Pendekatan <i>Extreme Value Theory</i> <i>Sutikno dan Yustika Desi Wulan Sari</i> .....	513
Analisis Data Radiasi Surya dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Menggunakan Estimator Kernel Cosinus <i>Nanang Widodo, Noer Abdillah S.N.S.N, Dian Yudha Risdianto</i> .....	523

Pengujian Hipotesis pada Regresi Poisson Multivariate dengan Kovariansi Merupakan Fungsi dari Variabel Bebas <i>Triyanto, Purhadi, Bambang Widjanarko Otok, dan Santi Wulan Purnami</i>	533
Perbandingan Metode Ordinary Least Squares (OLS), Seemingly Unrelated Regression (SUR) dan Bayesian SUR pada Pemodelan PDRB Sektor Utama di Jawa Timur <i>Santosa, AB, Iriawan, N, Setiawan, Dohki, M</i>	544
Studi Model Antrian M/G/1: Pendekatan Baru <i>Isnandar Slamet</i>	557
Pengaruh Pertumbuhan Ekonomi dan Konsumsi Energi Terhadap Emisi CO <sub>2</sub> di Indonesia: Pendekatan Model Vector Autoregressive (VAR) <i>Fitri Kartiasih</i>	567
Estimasi Parameter Model Epidemi <i>Susceptible Infected Susceptible (SIS)</i> dengan Proses Kelahiran dan Kematian <i>Pratiwi Rahayu Ningtyas, Respatiwulan, dan Siswanto</i>	578
Pendeteksian Krisis Keuangan di Indonesia Berdasarkan Indikator Harga Saham <i>Tri Marlina, Sugiyanto, dan Santosa Budi Wiyono</i>	584
Pemilihan Model Terbaik untuk Meramalkan Kejadian Banjir di Kecamatan Rancaekek, Kabupaten Bandung <i>Gumgum Darmawan, Restu Arisanti, Triyani Hendrawati, Ade Supriatna</i>	592
Model Markov <i>Switching Autoregressive (MSAR)</i> dan Aplikasinya pada Nilai Tukar Rupiah terhadap Yen <i>Desy Kurniasari, Sugiyanto, dan Sutanto</i>	602
Pendeteksian Krisis Keuangan di Indonesia Berdasarkan Indikator Pertumbuhan Kredit Domestik <i>Pitaningsih, Sugiyanto, dan Purnami Widyaningsih</i>	608
Pemilihan Model Terbaik untuk Meramalkan Kejadian Banjir di Bandung dan Sekitarnya <i>Gumgum Darmawan, Triyani Hendrawati, Restu Arisanti</i>	615
Model Probit Spasial <i>Yuanita Kusuma Wardani, Dewi Retno Sari Saputro</i>	623
Peramalan Jumlah Pengunjung Pariwisata di Kabupaten Boyolali dengan Perbandingan Metode Terbaik <i>Indiawati Ayik Imaya, Sri Subanti</i>	628
Pemodelan Banyaknya Penderita Demam Berdarah <i>Dengue (DBD)</i> dengan Regresi <i>Kriging</i> di Kabupaten Sukoharjo <i>Sylviana Yusriati, Dewi Retno Sari Saputro, Sri Kuntari</i>	638

Ekspektasi Durasi Model Epidemii <i>Susceptible Infected (SI)</i> <i>Sri Kuntari, Respatiwan, Intan Permatasari</i> .....	646
--	-----

## BIDANG PENDIDIKAN

Konsep Pembelajaran Integratif dengan Matematika Sebagai Bahasa Komunikasi dalam Menyongsong Kurikulum 2013 <i>Surya Rosa Putra, Darmaji, Soleha, Suhud Wahyudi</i> , .....	653
Penerapan Pendidikan Lingkungan Hidup Berbasis Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran Matematika <i>Urip Tisngati</i> .....	664
Studi Respon Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Berdasarkan Taksonomi SOLO (Structure of Observed Learned Outcome) <i>Herlin Widia, Urip Tisngati, Hari Purnomo Susanto</i> .....	677
Desain Model Discovery Learning pada Mata Kuliah Persamaan Diferensial <i>Rita Pramujiyanti Khotimah, Masduki</i> .....	684
Efektivitas Pembelajaran Berbasis Media Tutorial Interaktif Materi Geometri <i>Joko Purnomo, Agung Handayanto, Rina Dwi Setyawati</i> .....	693
Pengembangan Modul Pembelajaran Matematika Menggunakan Pendekatan Problem Based Learning (PBL) Pada Materi Peluang Kelas VII SMP <i>Putri Nurika Anggraini, Imam Sujadi, Yemi Kuswardi</i> .....	703
Pengembangan Bahan Ajar Dalam Pembelajaran Geometri Analitik Untuk Meningkatkan Kemandirian Mahasiswa <i>Sugiyono, Himmawati Puji Lestari</i> .....	711
Pengembangan Strategi Pembelajaran Info Search Berbasis PMR untuk Meningkatkan Pemahaman Mata Kuliah Statistika Dasar 2 <i>Joko Sungkono, Yuliana, M. Wahid Syaifuddin</i> .....	724
Analisis Miskonsepsi Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Pada Mata Kuliah Kalkulus I <i>Sintha Sih Dewanti</i> .....	731
Kemampuan Berpikir Logis Mahasiswa yang Bergaya Kognitif Reflektif vs Impulsif <i>Warli</i> .....	742
Model Pembelajaran Berbasis Mobile <i>Yayu Laila Sulastri, Luki Luqmanul Hakim</i> .....	753

Profil Gaya Belajar Myers-Briggs Tipe Sensing-Intuition dan Strateginya Dalam Pemecahan Masalah Matematika <i>Rini Dwi Astuti, Urip Tisngati, Hari Purnomo Susanto</i> .....	760
Penggunaan Permainan Matematika Berbasis Lingkungan Hidup untuk Meningkatkan Minat dan Keterampilan Matematis Peserta Didik <i>Rita Yuliasuti</i> .....	772
Tingkat Pemahaman Peserta PLPG Matematika Rayon 138 Yogyakarta Tahun 2014 Terhadap Pendekatan Saintifik Pada Kurikulum 2013 Berdasarkan Kuesioner Awal dan Akhir Pelatihan <i>Beni Utomo, V. Fitri Rianasari dan M. Andy Rudhito</i> .....	784
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Melalui Pendekatan RME dengan CD Interaktif Berbasis Pendidikan Karakter Materi Soal Cerita Kelas III <i>Sri Surtini, Ismartoyo, dan Sri Kadarwati</i> .....	791
E-Learning Readiness Score Sebagai Pedoman Implementasi E-Learning <i>Nur Hadi Waryanto</i> .....	805
Pengembangan Lembar Kerja Siswa (LKS) Matematika Realistik di SMP Berbasis Online Interaktif <i>Riawan Yudi Purwoko, Endro Purnomo</i> .....	817
IbM APE Matematika Bagi TK Pinggiran Di Kota Malang <i>Kristina Widjajanti, Mutia Lina Dewi</i> .....	826

# PENENTUAN LINTASAN KAPASITAS INTERVAL MAKSIMUM DENGAN PENDEKATAN ALJABAR MAX-MIN INTERVAL

M. Andy Rudhito dan D. Arif Budi Prasetyo  
Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma

**ABSTRAK.** Artikel ini membahas suatu metode penentuan lintasan kapasitas maksimum suatu jaringan berkapasitas interval dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min interval. Pembahasan merupakan hasil kajian teoritis yang didasarkan literatur dan suatu perhitungan menggunakan program *MATLAB*. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa lintasan kapasitas interval maksimum dapat ditentukan melalui lintasan kapasitas real maksimum yang terkait. Lintasan kapasitas real maksimum dapat ditentukan dengan memodifikasi matriks star dari matriks bobot jaringan, setelah menentukan kapasitas maksimum jaringannya melalui matriks star tersebut. Suatu lintasan merupakan lintasan kapasitas interval maksimum jika dan hanya lintasan tersebut merupakan lintasan kapasitas real maksimum, di mana untuk semua busur yang terletak pada lintasan, kapasitasnya dinaikkan menjadi batas atas kapasitasnya dan semua busur yang tidak terletak pada lintasan, kapasitasnya diturunkan batas bawah kapasitasnya. Untuk menentukan lintasan kapasitas real maksimum dibantu program *MATLAB*, yang selanjutnya digunakan untuk menentukan lintasan kapasitas interval maksimum.

**Kata Kunci:** lintasan, kapasitas maksimum, aljabar max-min, interval

## 1. PENDAHULUAN

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real  $\mathbf{R}$  dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan untuk menentukan kapasitas maksimum suatu lintasan dengan kapasitas *crisp*, yang berupa bilangan real (Gondran dan Minoux, 2008[1]). Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan kadang-kadang kapasitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai kapasitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Kapasitas-kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Dalam hal ini kapasitas jaringan dapat dimodelkan dengan suatu interval bilangan real, yang selanjutnya disebut dengan interval dan kapasitasnya disebut *kapasitas interval*.

Pemodelan dan analisa pada masalah kapasitas maksimum lintasan dengan kapasitas yang berupa interval, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang membahas, terlebih dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min seperti halnya yang telah dilakukan untuk model deterministik dan probabilistik. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil analitis dan lebih mempermudah dalam komputasinya

Artikel ini akan membahas analisis penentuan lintasan kapasitas interval maksimum dalam jaringan dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min interval. Untuk memudahkan dalam perhitungan numeriknya, akan dibantu suatu program komputer dengan menggunakan *MATLAB*.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Aljabar Max-Min dan Matriks

Terlebih dahulu ditinjau konsep-konsep dasar aljabar max-min dan matriks atas aljabar max-min. Pembahasan konsep serupa dapat dilihat pada Baccelli, dkk. (2001) [2], dan Gondran and Minoux, (2008) [1].

Diberikan  $\mathbf{R}_\varepsilon^+ := \mathbf{R}^+ \cup \{\varepsilon\}$  dengan  $\mathbf{R}^+$  adalah himpunan semua bilangan real nonnegatif dan  $\varepsilon := +\infty$ . Pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  didefinisikan operasi berikut:

$$\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon^+, a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := \min(a, b).$$

Dapat ditunjukkan bahwa  $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$  merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral  $0 = 0$  dan elemen satuan  $\varepsilon = +\infty$ . Kemudian  $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$  disebut dengan *aljabar max-min*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurang tidak dituliskan), *operasi  $\otimes$  mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi  $\oplus$* . Karena  $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus)$  merupakan semigrup komutatif idempoten, maka relasi " $\preceq_m$ " yang didefinisikan pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  dengan  $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$  merupakan *urutan parsial* pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Karena  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  merupakan semiring idempoten, maka operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  *konsisten* terhadap urutan  $\preceq_m$ , yaitu  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$ , jika  $a \preceq_m b$ , maka  $a \oplus c \preceq_m b \oplus c$ , dan  $a \otimes c \preceq_m b \otimes c$ . Aljabar max-min  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  *tidak memuat pembagi nol* yaitu  $\forall x, y \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$  berlaku: jika  $x \otimes y = \min(x, y) = 0$ , maka  $x = 0$  atau  $y = 0$ .

Operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_\varepsilon^+, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$ . Untuk  $\alpha \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$ , dan  $A, B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  didefinisikan  $\alpha \otimes A$ , dengan  $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$  dan  $A \oplus B$ , dengan  $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$ . Untuk  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times p}$ ,  $B \in$

$\mathbf{R}_\varepsilon^{+p \times n}$  didefinisikan  $A \otimes B$ , dengan  $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}$ . Matriks  $A, B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  dikatakan *sama* jika  $A_{ij} = B_{ij}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Didefinisikan matriks matriks  $O \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ , di mana  $(O)_{ij} := 0$ , untuk setiap  $i$  dan  $j$ , dan matriks  $E \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ , di mana  $(E)_{ij} := \begin{cases} \varepsilon, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ . Dapat ditunjukkan bahwa  $(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}, \oplus, \otimes)$  merupakan semiring

idempoten dengan elemen netral matriks  $O$  dan elemen satuan matriks  $E$ . Sedangkan  $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  merupakan semimodul atas  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ . Pangkat  $k$  dari matriks  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$  dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan:  $A^{\otimes 0} = E_n$  dan  $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$  untuk  $k = 1, 2, \dots$ .

Konsep-konsep dalam aljabar max-min sangat terkait dengan konsep-konsep dalam teori graf. Untuk itu dalam bagian ini akan diawali dengan meninjau kembali beberapa konsep dalam teori graf.

Suatu *graf berarah*  $G$  didefinisikan sebagai suatu pasangan  $G = (V, A)$  dengan  $V$  adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut *titik* dan  $A$  adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota  $A$  disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah  $G$  adalah suatu barisan berhingga busur  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$  dengan  $(i_k, i_{k+1}) \in A$  untuk suatu  $l \in \mathbf{N}$  (= himpunan semua bilangan asli) dan  $k = 1, 2, \dots, l - 1$ . Diberikan graf berarah  $G = (V, A)$  dengan  $V = \{1, 2, \dots, p\}$ . Graf berarah  $G$  dikatakan *berbobot* jika setiap busur  $(j, i) \in A$  dikawankan dengan suatu bilangan real  $A_{ij}$ . Bilangan real  $A_{ij}$  disebut *bobot* busur  $(j, i)$ , dilambangkan dengan  $w(j, i)$ . *Graf preseden* dari matriks  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$  adalah graf berarah berbobot  $G(A) = (V, A)$  dengan  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  dan  $A = \{(j, i) \mid w(j, i) = A_{ij} \neq 0\}$ . Sebaliknya untuk setiap graf berarah berbobot  $G = (V, A)$  selalu dapat didefinisikan suatu matriks  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$  dengan

$$A_{ij} = \begin{cases} w(j, i), & \text{jika } (j, i) \in A \\ 0, & \text{jika } (j, i) \notin A. \end{cases}, \text{ yang disebut } \textit{matriks bobot} \text{ graf } G.$$

Dalam masalah lintasan kapasitas maksimum, untuk suatu graf berarah berbobot dengan matriks bobotnya  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ ,  $A_{ij}$  adalah bilangan real nonnegatif dan merupakan *kapasitas* busur  $(j, i)$ , yaitu aliran maksimum yang dapat melalui busur  $(j, i)$ . Diberikan  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ , dapat ditunjukkan dalam Rudhito (2013) [6], bahwa  $(A^{\otimes k})_{st}$  adalah kapasitas maksimum semua lintasan dalam  $G(A)$  dengan panjang  $k$ , dengan  $t$  sebagai titik awal dan  $s$  sebagai titik akhirnya. Jika tidak ada lintasan dengan panjang  $k$  dari  $t$  ke  $s$ , maka kapasitas bobot maksimum didefinisikan sama dengan 0. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa  $\forall p \geq n, A^{\otimes p} \preceq_m E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1}$ , sehingga dapat didefinisikan operasi bintang (\*) untuk  $A$  berikut  $A^* := E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n+1} \oplus \dots$  yang berarti juga bahwa  $A^* := E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1}$ . Lebih lanjut telah ditunjukkan juga dalam Rudhito (2013) [6], bahwa unsur  $(A^*)_{ij}$  merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan titik awal  $j$  dan titik akhir  $i$ .

## 2.2 Aljabar Max-Min Interval dan Matriks

Selanjutnya ditinjau konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min interval (Rudhito, 2013 [4]), dan matriks atas aljabar max-min interval (Rudhito, 2013 [6]). Konsep ini analog dengan konsep-konsep dalam aljabar max-plus interval dalam Rudhito, 2011 [4].

*Interval* dalam  $\mathbf{R}_\varepsilon^+$  berbentuk  $x = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbf{R}_\varepsilon^+ \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \bar{x}\}$ . Didefinisikan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon = \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbf{R}^+, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \bar{x}\} \cup \{\{\varepsilon, \varepsilon\}\}$ . Pada  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$  didefinisikan operasi  $\bar{\oplus}$  dan  $\bar{\otimes} : x \bar{\oplus} y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$  dan  $x \bar{\otimes} y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$ , untuk setiap  $x, y \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ . Misalnya  $[1, 3] \bar{\oplus} [0, 2] = [1, 3]$ ,  $[1, 3] \bar{\otimes} [0, 2] = [0, 2]$ ,  $[1, 4] \bar{\oplus} [2, 3] = [2, 4]$ , dan  $[1, 4] \bar{\otimes} [2, 3] = [1, 3]$ . Dapat ditunjukkan



bahwa  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$  merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$  disebut *aljabar max-min interval* dan cukup dituliskan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ .

Selanjutnya operasi  $\overline{\oplus}$  dan  $\overline{\otimes}$  pada  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$  dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ . Didefinisikan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ . Matriks anggota  $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  disebut *matriks interval max-min*. Matriks  $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  dikatakan *sama* jika  $A_{ij} = B_{ij}$ . Diketahui  $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ ,  $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ . Didefinisikan operasi perkalian skalar  $\overline{\otimes}$  dengan  $\alpha \overline{\otimes} A$  adalah matriks yang unsur ke- $ij$ -nya  $(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} A_{ij}$ , dan operasi  $\overline{\oplus}$  dengan  $A \overline{\oplus} B$  adalah matriks yang unsur ke- $ij$ -nya  $(A \overline{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ . Diketahui  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times p}, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p \times n}$ . Didefinisikan operasi  $\overline{\otimes}$  dengan  $A \overline{\otimes} B$  adalah matriks yang unsur ke- $ij$ -nya:  $(A \overline{\otimes} B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \overline{\otimes} B_{kj}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m, j =$

$1, 2, \dots, n$ . Didefinisikan matriks  $E \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$ , dengan  $(E)_{ij} := \begin{cases} \varepsilon, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ .

Didefinisikan pula matriks  $O \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$ , dengan:  $(O)_{ij} := 0$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Pangkat  $k$  dari matriks  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$ , dalam aljabar max-min interval didefinisikan dengan:  $A^{\overline{\otimes} 0} = E_n$  dan  $A^{\overline{\otimes} k} = A \overline{\otimes} A^{\overline{\otimes} k-1}$  untuk  $k = 1, 2, \dots$ .

Untuk setiap matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  didefinisikan matriks  $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$  dan  $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ , berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* matriks interval  $A$ . Diberikan matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ , dengan  $\underline{A}$  dan  $\overline{A}$  berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas matriks interval  $A$ . Didefinisikan *interval matriks* dari  $A$ , yaitu  $[\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}\}$  dan  $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b = \{[\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}\}$ .

Dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  selalu dapat ditentukan dengan tunggal *interval matriks*  $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ , dan sebaliknya. (Rudhito, 2013 [7]). Jadi matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  dapat dipandang sebagai interval matriks  $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ . Matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$  *bersesuaian dengan* interval matriks  $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ , dan dituliskan " $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ ". Demikian juga berlaku  $\alpha \overline{\otimes} A \approx [\alpha \overline{\otimes} \underline{A}, \alpha \overline{\otimes} \overline{A}]$  dan  $A \overline{\oplus} B \approx [\underline{A} \overline{\oplus} \underline{B}, \overline{A} \overline{\oplus} \overline{B}]$ . Untuk  $A, B \in$

$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}$  berlaku  $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$ . Untuk matriks interval  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m \times p}$  dan  $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{p \times n}$  juga berlaku  $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$ .

Seperti dalam bobot real, konsep grap juga dapat diperluas untuk bobot interval. Diberikan graf berarah  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  dengan  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, p\}$ . Graf berarah  $\mathcal{G}$  dikatakan *berbobot interval* jika setiap busur  $(j, i) \in \mathcal{A}$  dikawankan dengan suatu interval (tertutup) bilangan real  $A_{ij} \in (\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}) - \{[\varepsilon, \varepsilon]\})$ . Interval bilangan real  $A_{ij}$  disebut *bobot interval* busur  $(j, i)$ , dinotasikan dengan  $w(j, i)$ . Dalam penyajiannya dengan gambar untuk graf berarah berbobot interval, busur diberi label bobot intervalnya. Didefinisikan *graf preseden interval* dari matriks  $A \in (\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^+))^{n \times n}$  adalah graf berarah berbobot interval  $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  dengan  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{A} = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$ . Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot interval  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  selalu dapat didefinisikan suatu matriks  $A \in (\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^+))^{n \times n}$ , yang disebut *matriks bobot interval* graf  $\mathcal{G}$

di mana  $A_{ij} = \begin{cases} w(j, i), & \text{jika } (j, i) \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{jika } (j, i) \notin \mathcal{A}. \end{cases}$  Jelas bahwa graf berarah berbobot interval tersebut merupakan graf preseden interval dari  $A$ .

Dalam masalah lintasan kapasitas interval maksimum,  $A_{ij}$  adalah interval tertutup yang batas bawah dan atasnya berupa bilangan real nonnegatif dan merupakan *kapasitas interval* busur  $(j, i)$ , yaitu interval aliran maksimum yang dapat melalui busur  $(j, i)$ . Seperti halnya dalam kasus kapasitas real di atas, dalam Rudhito, 2014 [8], diperoleh suatu hasil mengenai kapasitas maksimum suatu lintasan dalam jaringan dengan kapasitas interval berikut. Jika  $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{n \times n}$  adalah matriks bobot interval suatu graf berarah berbobot, maka unsur  $(A^*)_{ij}$  adalah merupakan kapasitas interval maksimum lintasan dengan titik awal  $j$  dan titik akhir  $i$ .

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Penentuan Lintasan Kapasitas Real Maximum

Terlebih dahulu dibahas hasil pada penentuan lintasan kapasitas maximum yang berupa bilangan real. Dalam Rudhito (2013) [7], pada tinjauan pustaka di atas, bahwa unsur  $(A^*)_{ij}$  merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan ujung titik  $j$  dan pangkal titik  $i$ , dengan  $A$  adalah matriks bobot pada graf berarah berbobot yang terkait. Dari hasil ini kemudian dapat ditentukan lintasan dengan kapasitas maksimum yang berawal dari titik 1 dan berakhir di titik  $n$  dalam suatu jaringan lintasan searah seperti dalam definisi berikut. Selanjutnya lintasan yang dimaksud adalah lintasan yang berawal dari titik 1 dan berakhir di titik  $n$ .

**Definisi 3.1.** Suatu *jaringan lintasan searah*  $S$  adalah suatu graf berarah berbobot terhubung kuat taksiklik  $S = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ , dengan  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$  yang memenuhi: jika  $(i, j) \in \mathcal{A}$ , maka  $i < j$ .

Dari hasil Rudhito (2013) [7], diperoleh bahwa  $(A^*)_{n1}$  merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan titik awal 1 dan titik akhir  $n$ . Kapasitas maksimum lintasan dengan titik awal 1 dan titik akhir  $n$  seperti ini selanjutnya disebut *kapasitas maksimum jaringan*. Selanjutnya didefinisikan busur kapasitas maksimum dan lintasan kapasitas maksimum.

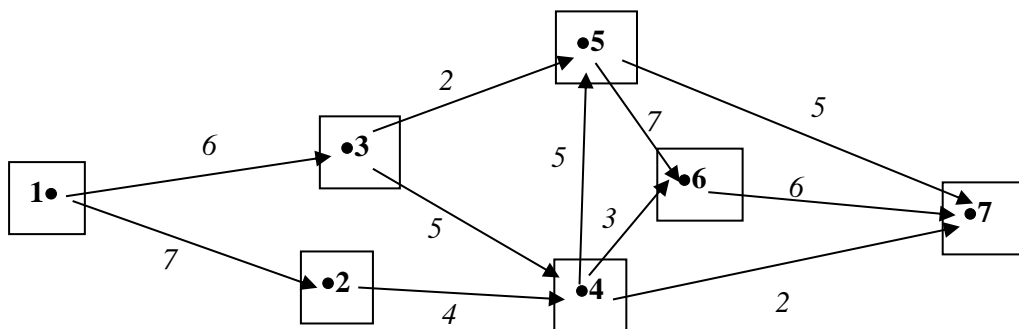
**Definisi 3.2.** Suatu busur  $(j, i)$  dalam jaringan lintasan searah dengan  $n$  titik merupakan **busur kapasitas maksimum** jika kapasitasnya tidak kurang dari kapasitas maksimum jaringan. Suatu lintasan disebut **lintasan kapasitas maksimum** jika seluruhnya terdiri dari busur kapasitas maksimum.

Dari definisi di atas dan hasil sebelumnya dapat diperoleh hasil pada teorema berikut.

**Teorema 3.1.** Diberikan jaringan lintasan searah dengan  $n$  titik dan matriks bobotnya  $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ . Suatu busur  $(j, i)$  dalam jaringan merupakan **busur kapasitas maksimum** jika dan hanya jika  $A_{ij} - (A^*)_{n1} \geq 0$ .

*Bukti.* Jelas dari Definisi 3.2 dan hasil pada kapasitas maksimum jaringan. □

**Contoh 3.1** Diberikan suatu jaringan berkapasitas seperti pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 3.1. Suatu Jaringan Lintasan Searah Berkapasitas Real

Matriks bobot graf berarah berbobot pada jaringan berkapasitas di atas adalah matriks  $A$  di bawah ini. Dengan menggunakan program yang disusun dengan menggunakan *MATLAB*, dengan input matriks  $A$  tersebut, diperoleh output program matriks  $A^*$  sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 7 & \varepsilon & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

sehingga diperoleh  $(A^*)_{71} = 5$ . Selanjutnya diperoleh

$$A - (A^*)_{71} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 2 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 1 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -1 & 0 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -3 & 0 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -2 & 2 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Dari matriks  $A - (A^*)_{71}$  nampak bahwa busur kapasitas maksimum adalah (1,2), (1,3), (3,4), (4,5), (5,6) dan (6,7), sehingga lintasan  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$  merupakan lintasan kapasitas real maksimum. Untuk lintasan mulai busur (1,2) tidak membentuk lintasan kapasitas real maksimum karena (2,4) bukan merupakan busur kapasitas maksimum.

### 3.2 Penentuan Lintasan Kapasitas Interval Maximum

Berikut diberikan pengertian lintasan kapasitas interval maksimum dan teorema yang memberikan cara penentuannya. Pengertian dan hasil merupakan didasarkan pada pengertian lintasan kritis kabur dan teorema cara menentukan lintasan kritis kabur, seperti yang dibahas dalam Chanas and Zielinski, 2001 [3] dan Rudhito, 2011[4].

**Definisi 3.3.** Suatu *jaringan lintasan searah*  $S$  dengan *kapasitas interval* adalah suatu graf berarah berbobot interval terhubung kuat taksiklik  $S = (V, A)$ , dengan  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  yang memenuhi: jika  $(i, j) \in A$ , maka  $i < j$ .

**Definisi 3.4.** Suatu lintasan  $p \in P$  disebut *lintasan kapasitas interval maksimum* di dalam jaringan jika terdapat suatu himpunan yang anggotanya adalah kapasitas real  $A_{ij}$ , di mana  $A_{ij} \in [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]$ ,  $(i, j) \in A$ , sedemikian hingga, setelah mengganti kapasitas interval  $A_{ij}$  dengan waktu  $A_{ij}$ ,  $p$  merupakan lintasan kapasitas real maksimum.

**Definisi 3.5** Suatu busur  $(k, l) \in A$  merupakan *busur kapasitas interval maksimum* di dalam  $S$  jika terdapat suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah kapasitas real  $A_{ij} \in [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]$ ,  $(i, j) \in A$ , sedemikian hingga, setelah mengganti kapasitas interval  $A_{ij}$  dengan kapasitas real  $A_{ij}$ ,  $(k, l)$  merupakan kapasitas real maksimum.

Berikut diberikan teorema yang mengkaitkan antara lintasan kapasitas interval maksimum dengan busur kapasitas interval maksimum.

**Teorema 3.2** Jika suatu lintasan  $p \in P$  merupakan lintasan kapasitas interval maksimum, maka semua busur yang termuat dalam  $p$  merupakan busur kapasitas interval maksimum.

*Bukti.* Andaikan lintasan  $p \in P$  merupakan lintasan kapasitas interval maksimum, maka menurut Definisi 3.4, terdapat suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah kapasitas real  $A_{ij}$ , di mana  $A_{ij} \in [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]$ ,  $(i, j) \in A$ , sedemikian hingga, setelah mengganti kapasitas interval  $A_{ij}$  dengan waktu  $A_{ij}$ ,  $p$  merupakan lintasan kapasitas real maksimum. Selanjutnya menurut Definisi 3.1 semua busur yang termuat dalam  $p$  merupakan busur

kapasitas real maksimum untuk suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah kapasitas real  $A_{ij}$ , di mana  $A_{ij} \in [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}]$ ,  $(i, j) \in \mathbf{A}$  tersebut. Dengan demikian menurut Definisi 3.5 semua busur yang termuat dalam  $p$  merupakan busur kapasitas interval maksimum.  $\square$

Berikut diberikan Teorema yang memberikan syarat perlu dan cukup suatu lintasan kapasitas interval maksimum.

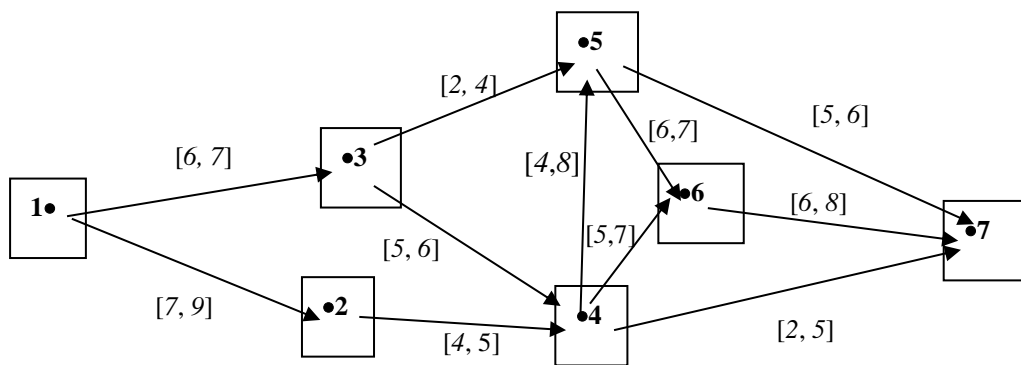
**Teorema 3.3** Suatu lintasan  $p \in P$  merupakan lintasan kapasitas interval maksimum di dalam  $S$  jika dan hanya jika  $p$  merupakan lintasan kapasitas real maksimum, di mana kapasitas interval  $A_{ij} \in [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}]$ ,  $(i, j) \in \mathbf{A}$ , diganti dengan kapasitas real  $A_{ij}$  yang ditentukan dengan rumus berikut

$$A_{ij} = \begin{cases} \bar{A}_{ij} & \text{jika } (i, j) \in p \\ \underline{A}_{ij} & \text{jika } (i, j) \notin p \end{cases} \quad (3.1)$$

Bukti :  $\Rightarrow$  : Andaikan  $p$  lintasan kapasitas interval maksimum, maka menurut Definisi 3.4, terdapat suatu himpunan kapasitas  $A_{ij}$ ,  $A_{ij} \in [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}]$ ,  $(i, j) \in \mathbf{A}$ , sedemikian hingga  $p$  merupakan lintasan kapasitas real maksimum, setelah mengganti kapasitas interval  $A_{ij}$  dengan kapasitas real  $A_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathbf{A}$ . Jika untuk semua busur yang terletak pada  $p$  kapasitasnya dinaikkan dari  $A_{ij}$  menjadi  $\bar{A}_{ij}$  dan semua busur yang tidak terletak pada  $p$  kapasitasnya diturunkan dari  $A_{ij}$  menjadi  $\underline{A}_{ij}$ , maka lintasan  $p$  tersebut merupakan lintasan dengan kapasitas real maksimum dalam  $S$  untuk konfigurasi waktu tempuh yang baru. Dengan demikian menurut Teorema 3.2 lintasan  $p$  merupakan lintasan kapasitas real maksimum.

$\Leftarrow$  : Mengingat lintasan  $p$  merupakan lintasan kapasitas real maksimum dengan himpunan kapasitas real  $A_{ij}$ ,  $A_{ij} \in [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}]$ , yang ditentukan dengan rumus (3.1), maka menurut Definisi 3.4, lintasan  $p$  merupakan lintasan kapasitas interval maksimum.  $\square$

**Contoh 3.2** Diberikan suatu jaringan berkapasitas seperti pada Gambar 3.2 di bawah ini.



Gambar 3.2. Suatu Jaringan Berkapasitas Interval

Untuk lintasan  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ , dengan menerapkan rumus 3.1 diperoleh matriks bobot

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan bantuan program *MATLAB* diperoleh lintasan kapasitas real maksimum berikut:  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ ,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$  dan  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$  dengan kapasitas real maksimum lintasan 5. Jadi  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$  bukan merupakan lintasan kapasitas interval maksimum, karena lintasan terbut bukan merupakan lintasan kapasitas real maksimum dalam formasi kapasitas tersebut. Hasil perhitungan selengkapnya untuk seluruh lintasan dalam jaringan diberikan dalam Tabel 3.1 di bawah ini.

**Tabel 3.1 Hasil Perhitungan Lintasan Kapasitas Interval Maksimum Contoh 3.2**

No	Lintasan $p$	Kap Int Maks	Lint Kap Real Maks (rumus 3.1)	Kap Real Maks	Kesimpulan
1	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ ,	5	bukan kap interval maks
2	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ ,	5	bukan kap interval maks
3	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ ,	6	kap interval maksimum
4	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$	6	bukan kap interval maks
5	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	6	kap interval maksimum
6	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	5	kap interval maksimum
7	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	5	kap interval maksimum
8	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	5	kap interval maksimum
9	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	5	kap interval maksimum
10	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7$	[5, 6]	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	5	bukan kap interval maks

#### 4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa lintasan kapasitas interval maksimum dapat ditentukan melalui lintasan kapasitas real maksimum yang terkait. Lintasan kapasitas real maksimum dapat ditentukan dengan memodifikasi matriks star dari matriks bobot jaringan, setelah menentukan kapasitas maksimum jaringannya melalui matriks star tersebut. Suatu lintasan merupakan lintasan kapasitas interval maksimum jika dan hanya lintasan tersebut merupakan lintasan kapasitas real maksimum, di mana untuk semua busur yang terletak pada lintasan, kapasitasnya dinaikkan menjadi batas atas kapasitasnya dan semua busur yang tidak terletak pada lintasan, kapasitasnya diturunkan batas bawah kapasitasnya. Selanjutnya dapat dilakukan penelitian untuk jaringan dengan kapasitas *fuzzy*, yaitu kapasitasnya yang berupa bilangan *fuzzy*.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. Synchronization and Linearity. New York: John Wiley & Sons.
- [2] Gondran, M and Minoux, M. 2008. Graph, Dioids and Semirings. New York: Springer.
- [3] Chanas, S. and Zielinski, P. 2001. Critical path analysis in the network with fuzzy activity times. *Fuzzy Sets and Systems*. 122. pp. 195–204.
- [4] Rudhito, Andy. 2011. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur. Disertasi: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.
- [5] Rudhito, Andy. 2013. Aljabar Max-Min Interval. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA*, tanggal 18 Mei 2013, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta: M-97 – M-102.
- [6] Rudhito, Andy. 2013. Matriks atas Aljabar Max-Min Interval. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains dan Matematika*, tanggal 15 Juni 2013, FSM Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga: 115-121.
- [7] Rudhito, Andy. 2013. Analisa Kapasitas Maksimum Lintasan dengan Pendekatan Aljabar Max-Min. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. Program Studi S1 Pendidikan Matematika FKIP UNS, tanggal 20 November 2013, Surakarta: 128 -134.
- [8] Rudhito, Andy. 2014. Analisa Kapasitas Interval Maksimum Lintasan dengan Pendekatan Aljabar Max-Min Interval. *JMME (Journal on mathematics and Mathematics Education)*. Program Magister Pendidikan Matematika UNS. Juli 2014 (akan terbit).

