Prosiding
Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
Tahun 2015

Tema:
Peran Pendidikan Matematika dalam Menyiapkan Generasi Pembelajar yang Siap Menghadapi Tantangan Global

Editor:

Prof. Dr. Budiyono, M.Sc.
Dr. Mardiyana, M.Si.
Dr. Imam Sujadi, M.Si.
Dr. Budi Usodo, M.Pd.
Sutopo, S.Pd., M.Pd.
Rubono Setiawan, S.Si., M.Sc

ISBN: 978-602-7048-61-4

Diterbitkan Oleh:

Program Studi Pendidikan Matematika
Fak. Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sebelas Maret Surakarta
Jl. Ir. Sutami No. 36 A Kentingan Surakarta 57126
Telp/Fax 0271-632450 Email: pmath.uns@gmail.com

Artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2015 yang diselenggarakan oleh Program Studi S1 Pendidikan Matematika FKIP UNS Surakarta di Aula Gedung Pascasarjana UNS pada Tanggal 7 Nopember 2015. Versi Online dapat diakses di http://math.fkip.uns.ac.id.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas rahmat-nya Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Tahun 2015 dapat diterbitkan. Prosiding ini merupakan kumpulan dari sebagian besar artikel ilmiah yang dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matetika tahun 2015 yang mengambil tema "Peran Pendidikan Matematika dalam menyiapkan generasi pembelajar yang siap menghadapi tantangan global". Kegiatan ini diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sebelas Maret pada tanggal 7 Nopember 2015 di Aula Gedung Pasca Sarjana UNS.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada editor prosiding dan seluruh panitia seminar yang telah bekerja keras sehingga seminar ini dapat terlaksana dengan sukses. Semoga prosiding ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Surakarta, 14 Nopember 2015

Ketua Panitia

Sutopo, S.Pd, M.Pd

Daftar Isi

Makalah Pendamping : Pendidikan Matematika

SISTEM KOORDINAT KARTESIUS DALAM GEOMETRI DIMENSI EMPAT

Raimundus Ciku Koten[1)], Marcellinus Andy Rudhito[2)]
1) Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika JPMIPA FKIP USD
Kampus III Universitas Sanata Dharma, Paingan, Maguwohardjo, Yogyakarta,
email: kotencikuraimundus@gmail.com
2) Program Studi Pendidikan Matematika JPMIPA FKIP USD
Kampus III Universitas Sanata Dharma, Paingan, Maguwohardjo, Yogyakarta,
email: rudhito@usd.ac.id

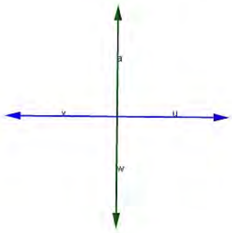
ABSTRAK

Penelitian Penelitian ini bertujuan untuk menemukan dan memahami serta menjelaskan keadaan dan gambaran dari Geometri Euclides geometri dimensi empat baik secara umum maupun khusus. Penelitian ini dilakukan dengan metode studi pustaka dari beberapa teori seperti Geometri Euclides, Relativitas Einstein dan Ruang Minkowski. Selain itu, penelitian ini juga menggunakan metode uji coba akulturasi teori guna mencapai tujuan penelitian yang diinginkan. Pada dasarnya Geometri Euclides dimensi empat yang dikenal sekarang adalah dimensi ruang dan waktu (Ruang Minkowski). Melalui pendalaman dan pengkajian dimensi ruang dan waktu ini, peneliti menyadari adanya kejanggalan mengenai anggapan geometri dimensi empat ruang dan waktu sebagai Geometri Euclides dimensi empat. Berkaitan dengan pendapat dan pemahaman peneliti ini, maka pada penelitian ini peneliti menunjukkan kejanggalan tersebut secara ilmiah yang dapat dipertanggungjawabkan nilai kebenarannya. Kejanggalan ataupun kekeliruan anggapan tersebut diperbaiki oleh peneliti dengan penataan ulang kajian yaitu memposisikan Ruang Minkowski sebagai suatu bentuk kejadian khusus dari Geometri Euclides mengenai kerangka acuan inersia. Dalam upaya penataan ulang teori dan anggapan tersebut, peneliti juga menjelaskan gambaran umum keadaan Geometri Euclides dimensi empat sebagai hasil dari uji coba akulturasi teori. Gambaran umum tersebut meliputi elemen khusus geometri dimensi empat: “semesta“, sistem koordinat geometri dimensi empat dan bangun khusus geometri dimensi empat: “semesta tesseract“. Implikasi dari gambaran umum Geometri Euclides dimensi empat ini adalah terjelaskannya keberadaan vektor – vektor orthogonal pada Ruang Euclides yang merupakan hasil atau bentukkan dari vektor – vektor semu sebagai akibat ketidakmampuan dan tidak akuratnya pandangan mata manusia. Dengan kata lain, keorthogonalan vektor – vektor dalam Ruang Euclides merupakan sketsa sederhana yang dapat membantu manusia agar lebih memahami ruang dan elemen – elemennya.

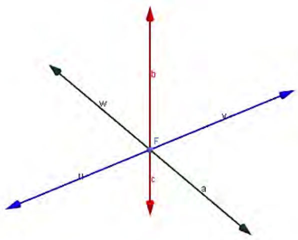
Kata Kunci: Geometri Euclides, Ruang Minkowski, Teori Relativitas Einstein, geometri dimensi empat, sistem koordinat kartesius.

PENDAHULUAN

Geometri Euclides merupakan geometri yang diperkenalkan dan dikembangkan oleh matematikawan dari Alexandria, Euclides, sekitar tiga ratus tahun sebelum masehi. Menurut Coxeter(1969), Euclides menyusun secara rapi pemahaman mengenai geometri berdasarkan konsep, teorema dan pembuktiannya sebagai identitas asli dari geometri [9]. Penyusunan pemahaman geometri yang tertata rapi tersebut diperkenalkan pada masyarakat luas dalam tiga belas buku yang dikenal sebagai *Euclid's Elements.*Secara ringkas, pada penataan tersebut Euclides memperkenalkan 10 prinsip utama yang terdiri dari lima postulat dan lima pembuktian sebagai dasar dari *The Elements*,(Burton, David M. 2011) [5]. Berdasarkan prinsip utama itulah, dapat dilihat dan dipahami bahwa Euclides memfokuskan geometri pada kelima postulat tersebut kemudian dikembangkan menjadi beberapa bagian menurut hubungan sebab akibatnya.



Gambar 1: Koordinat Kartesius Dimensi Dua



Gambar 2: Koordinat Kartesius Dimensi Tiga

Dimensi dapat diartikan sebagai jumlah arah di mana perubahan dapat terjadi dalam suatu sistem. Mengacu pada Geometri Euclides, perubahan yang terjadi dalam suatu sistem tersebut digambarkan pada beberapa sumbu yang membagi sistem menjadi beberapa bagian yang sama. Sebagai contoh, pada geometri dimensi duaterdiri dari dua buah sumbu$X$ dan Y yang membagi sistem dimensi dua menjadi 4 (empat) bagian yang sama, yaitu: XOY, $YO(-X)$, $(-X)O(-Y)$, dan $(-Y)OX$, seperti pada Gambar 1.1. Pada geometri dimensi tiga terdiri dari tiga buah sumbu$X$, Y dan Z yang membagi sistem dimensi tiga menjadi 8 (delapan) bagian yang sama, yaitu: $YXZO$, $XZ(-Y)O$, $(-Y)(-X)ZO$, $(-X)YZO$, $YX(-Z)O$, $X(-Z)(-Y)O$, $(-Y)(-X)(-Z)O$, dan $(-X)Y(-Z)O$, seperti pada Gambar 1.2. Dari sumbu - sumbu yang diberikan tersebut, masing – masing sumbu mewakili ukuran besaran pokok yang sama yaitu panjang sehingga mampu berada dalam satu sistem kajian yang dibentuk dalam satu kesatuan koordinat yang diperkenalkan pertama kali oleh Rene Descartes dan dikenal umum sebagai Koordinat Kartesius.

Sejak awal mula munculnya era baru geometri yang ditandai dengan lahirnya Geometri Euclides, geometri mulai berkembang pesat seiring dengan perkembangan jaman. Dari perkembangan tersebut ide – ide dan teori – teori baru mulai bermunculan untuk membantu manusia dalam memaknai hidup dan mengukur segala sesuatu yang ada di bumi bahkan yang ada pada alam semesta. Salah satu ide atau teori tersebut adalah teori mengenai ruang – waktuatau “*spacetime”*. Teori *“spacetime”* ini diungkapkan oleh Hermann Minkowski yang melanjutkan Teori Relativitas Einstein, yang secara singkatdimaknai sebagai geometri dimensi empat ruang – waktu.Teori ruang – waktuini dipandang dan diyakini sebagai bentuk dari dimensi empat yang dapat dilihat dari dimensi tiga dan waktu yang dijalankan dalam suatu sistem.

Menanggapi fakta yang ada, peneliti mencoba mengikuti alur pemikiran teori tersebut secara keseluruhan dan memahaminya. Dari proses pemahaman tersebut peneliti merasa bahwa terdapat kejanggalan ide atau teori tersebut. Secara hakiki, peneliti tidak menyalahkan teori tersebut tetapi yang menjadi inti dari permasalahannya adalah “Apakah dimensi ruang– waktubenar merupakan geometri dimensi empat yang melanjutkan Geometri Euclides? Apakah waktu memang tepat untuk dijadikan subjek pengamatan dalam suatu sistem berpadanan dengan koordinat pada sistem Koordinat Kartesius? Ataukah dimensi ruang – waktuhanyalah merupakan penerapan dari dimensi tiga?

Berdasarkan definisi dimensi, dapat dilihat bahwa dimensi menunjukan jumlah arah di mana perubahan dapat terjadi dalam suatu sistem. Disisi lain, anggapan bahwa geometri dimensi empat ruang – waktusebagai geometri dimensi empat menimbulkan pertanyaan karena melibatkan waktu dalam sistem. Dasar jumlah arah pada dimensi yang sering kita gunakan pada Koordinat Kartesius menggunakan besaran pokok panjang yang disimbolkan dalam bentuk sumbu X, Y, dan Z, sedangkan dimensi ruang – waktumenggabungkan waktu yang memiliki besaran pokok waktu kedalam koordinat X, Y, dan Z tersebut. Menurut peneliti adalah suatu kejanggalan bahwa panjang dan waktu dijadikan subyek pengamatan pada suatu sistem hingga menghasilkan makna geometri dimensi baru. Apakah tepat demikian ataukah waktu hanya memberikan gambaran untuk penerapan geometri dimensi tiga saja sehingga geometri dimensi ruang dan waktuyang dianggap sebagai geometri dimensi empat adalah suatu bentuk kesalahan dalam pemahaman teori ruang – waktu? Dalam pengkajian yang lebih mendalam mengenai dimensi, dimensi adalah bagian utama dari geometri yang diteliti. Pengamatan geometri, khususnya dimensi selalu berada pada keadaan statis di mana pada keadaan dinamis yaitu bergerak pada selang waktu tertentu, dianggap dan diyakini sebagai suatu penerapan yang dipelajari pada cabang ilmu fisika.

Berdasarkan penalaran – penalaran di atas, peneliti meyakini bahwa waktu tidak dapat dijadikan sebagai bagian dari sistem koordinat untuk menunjukan adanya geometri dimensi baru. Dari keyakinan tersebut, yang menjadi pertanyaan baru adalah seperti apakah bentukgeometri dimensi empat yang dapat dianggap sebagai lanjutanGeometri Euclides tersebut? Pertanyaan tersebut menjadikan peneliti terinspirasi untuk menemukan jawabannya.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan membaca, mempelajari, mengkaji dan menganalisis materi dari buku – buku ataupun – jurnal yang berkaitan dengan topik skripsi. Selain itu, penelitian ini juga menggunakan metode uji coba akulturasi teori , yaitu penggabungan ide dari teori – teori yang berkaitan dengan topik skripsi guna menghasilkan sesuatu yang baru dengan maksud pencapaian tujuan skripsi yang ada.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Sistem Koordinat Kartesius

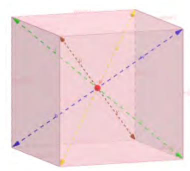
Sistem koordinat dalam kaitannya dengan sistem dimensi merupakan suatu bentuk wadah ataupun aturan dasar dalam representasi sistem dimensi secara grafis. Pada sistem Koordinat Kartesius, sistem koordinat ini menggunakan teknik yang lebih memperhatikan ukuran panjang vektor satuan dari masing – masing vektor yang ada dalam suatu keseluruhan sistem dimensi tersebut sebagai bagian penting dalam hal penentuan posisi titik yang kemudian dapat dikembangkan menjadi bentuk elemen khusus lainnya. Untuk setiap geometri sistem dimensi baik geometri dimensi dua maupun geometri dimensi tiga memiliki perbandingan yang sama dengan jumlah vektor – vektor arah pada sistem koordinatnya. Untuk sistem dua dimensi memiliki dua buah vektor arah pada sistem koordinatnya yaitu vektor x dan vektor y, dan untuk sistem tiga dimensi memiliki tiga buah vektor arah pada sistem koordinatnya yaitu vektor X, vektor Y dan vektor Z. Di samping hal tersebut di atas, dilihat dari definisinya sistem dimensi dapat dikatakan sebagai jumlah perubahan yang dapat terjadi dalam dalam suatu sistem, di mana setiapperubahan tersebut dapat direpresentasikan oleh suatu vektor arah. Oleh sebab itu, untuk mendapatkan ataupun memperoleh bentuk sistem koordinat geometri dimensi empat dibutuhkan empat buah vektor yang berlainan arah. Dimisalkan keempat vektor tersebut adalah $e_1 = x, e_2 = y, e_3 = z \; dan \; e_4 = w.$

Ketika vektor – vektor arah ditentukan untuk menjadi bagian dari suatu bentuk sistem koordinat geometri dimensi empat yang utuh, permasalahan selanjutnya adalah bentuk tatanan keempat vektor arah tersebut dalam sistem. Merujuk pada sistem Koordinat Kartesius yang telah ada, baik geometri dimensi dua maupun geometri dimensi tiga terlihat bahwa setiap vektor arah yang ada membentuk suatu sistem koordinat yang utuh yang membagi sistem tersebut menjadi beberapa bagian sistem yang kongruen. Pada sistem Koordinat Kartesius dimensi dua, sistem dimensi terbagi menjadi empat bagian yang sama dan juga pada sistem Koordinat Kartesius dimensi tiga, sistem dimensi terbagi menjadi delapan bagian yang sama. Oleh sebab itu, dalam hal sistem Koordinat Kartesius dimensi empat, keempat vektor arah $e_1, e_2, e_3\ dan\ e_4$ haruslah membentuk suatu ruang sistem yang dapat terbagi menjadi beberapa bagian sistem yang sama.

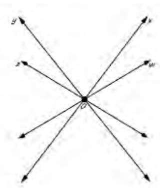
Berdasarkan permasalahan bentukan vektor arah dengan bagian sistem yang sama, peneliti terinspirasi dengan bentukan meja biasa. Seperti yang diketahui bahwa jumlah kaki meja biasa yang berfungsi sebagai tumpuan meja adalah sebanyak empat buah. Jika dianggap kaki meja tersebut sebagai keempat vektor arah tersebut. Keempat kaki meja tersebut jika disilangkan sehingga saling berpotongan pada salah satu titik pusat tertentu maka titik pusat tersebut dapat dikatakan sebagai titik pusat vektor (titik asal). Dalam hal bagian sistem yang kongruen, kondisi ini akan memaksakan keadaan kaki meja sebelum disilangkan haruslah sama panjang dengan panjang dan lebar meja itu sendiri. Dari keadaan tersebut maka terbentuklah suatu bentuk riil dari sistem koordinat dimensi empat. Dalam hal representasi inspirasi tersebut di ataske dalam bentuk matematis, keadaan tersebut dapat direpresentasikan melalui perpaduan suatu bentuk kubus dengan diagonal – diagonal ruangnya. Dengan keadaan diagonal ruang kubus adalah vektor – vektor arahnya dan titik persekutuan diagonal ruang tersebut adalah titik pusat (titik asal) sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat tersebut.

Gambar 3: Meja Biasa

Gambar 4: Meja Biasa Dengan Keadaan Yang Diinginkan



Gambar 5: Vektor Arah Dalam Kubus



Gambar 6: Sistem Koordinat Dimensi Empat

Berdasarkan keadaan dan bentuk dari representasi diatas, maka dapat dapat disimpulkan bahwa bentuk terakhir diatas (Gambar 6) merupakan bentuk dari suatu sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat. Secara singkat, sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat dapat di defenisikan sebagai berikut:

Defenisi :

Sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat adalah suatu sistem koordinat kartesius yang terbentuk dari empat buah vektor berlainan arah dengan besaran pokok sama yang terjadi dalam suatu sistem melalui suatu titik asal tertentu.

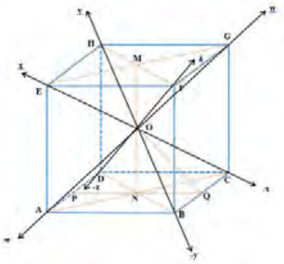
Lebih lanjut, elemen khusus geometri dimensi empat ini dinamakan sebagai *"semesta"*. Semesta dapat di defenisikan sebagai berikut:

Defenisi :

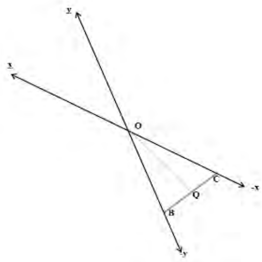
Semesta adalah himpunan dari beberapa ruang berbeda yang terletak dalam suatu sistem yang sama.

Lebih lanjut berikut akan ditunjukkan beberapa sifat lain dari sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat.

1. Besar sudut antar vektor yang berdekatan.
   a. Diketahui: Gambar 7: Sistem Koordinat Geometri Dimensi Empat pada Kubus ABCD.EFGH
   b. Akan Dicari: $\angle BOC = ?$
   c. Penyelesaian:



Gambar 7: Sistem Koordinat Geometri Dimensi Empat



Gambar 8: Segitiga BOC

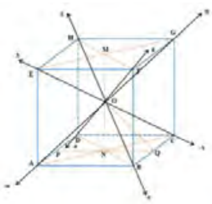
No	Pernyataan	Alasan
1	$AB = BC = CD = DE = 1$	Diketahui pada gambar
2	$OB = OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Diketahui pada gambar
3	$Cos(BOC) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$	Aturan Cosinus
4	$Cos(BOC) = \frac{1}{3}$	3
5	$ArcCos(BOC) = 70.5287793655093$	4
6	$ArcCos(BOC) \approx 70.5$	5
7	$\angle BOC = 70{,}5^0$	

Jadi, diperoleh bahwa besar sudut yang terdapat pada vektor – vektor yang berdekatan pada sistem koordinat – wxyz adalah $70{,}5^0$

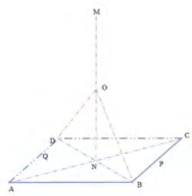
Sifat 2 :

Sudut yang dibentuk oleh garis – garis vektor yang berdekatan pada suatu sistem koordinat dimensi empat adalah sama dengan $70{,}5^0$.

2. Besar sudut antar vektor yang berhadapan.
   a. Diketahui: Gambar 9: sistem koordinat geometri dimensi empat pada suatu kubus.
   a. Akan dicari: $\angle BOD =?$
   b. Penyelesaian:



Gambar 9: Sistem Koordinat Geometri Dimensi Empat



Gambar 10: Segitiga BOD

No	Pernyataan	Alasan
1	$AB = BC = CD = DE = 1$	Diketahui pada gambar
2	$OB = OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Diketahui pada gambar
3	$BD = \sqrt{2}$	Diketahui pada gambar

4	$Cos(BOD) = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{2}^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$	Aturan Cosinus
5	$Cos(BOD) = \left(-\frac{1}{3}\right)$	4
6	$ArcCos(BOD) = 109.4712206344907$	5
7	$ArcCos(BOD) \approx 109.5$	6
8	$\angle BOD = 109{,}5^0$	

Jadi, diperoleh bahwa besar sudut yang terdapat pada vektor – vektor yang berhadapan pada sistem koordinat – wxyz adalah $109{,}5^0$

Sifat 3 :

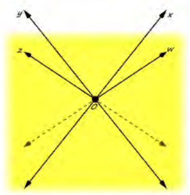
Besar sudut antar garis – garis vektor yang berhadapan pada suatu koordinat dimensi empat adalah sama dengan $109{,}5^0$.

Koordinat Bidang

Mengacu pada bentuk sistem bagian yang kongruen, vektor – vektor arah pada sistem tiga dimensi membentuk bidang vektor (bidang koordinat) agar dapat terlihat jelas sistem bagian yang terbentuk tersebut. Dengan kondisi yang sama tersebut, maka akan dilakukan hal yang sama pada vektor – vektor koordinat sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat.

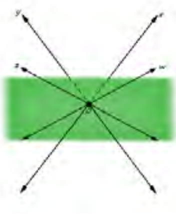
Adapun pada suatu sistem koordinat dimensi empat dapat membentuk enam buah bidang koordinat, yaitu: bidang koordinat *wx*, bidang koordinat *xy*, bidang koordinat *yz*, bidang koordinat *wz*, bidang koordinat *wy* dan bidang koordinat *xz* seperti yang ditampilkan pada gambar berikut.

Gambar 11: bidang koordinat*wx*

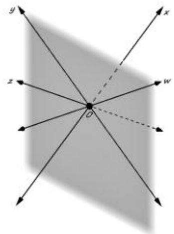


Gambar 12: bidang koordinat*xy*

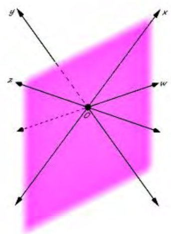
Gambar 13: bidang koordinat*yz*



Gambar 14: bidang koordinat*wz*

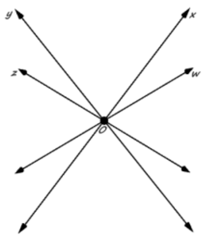


Gambar 15: bidang koordinat*wy*

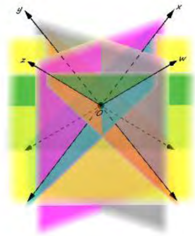


Gambar 16: bidang koordinat*xz*

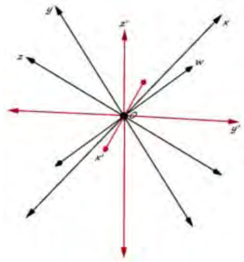
Hasil bentukan kondisi ini secara keseluruhan dapat direpresentasikan melalui gambar berikut.



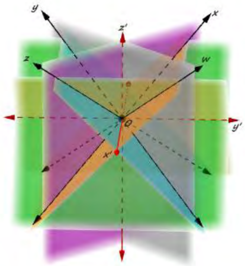
Gambar 17: Sistem Koordinat Kartesius Geometri Dimensi Empat



Gambar 18: Sistem Koordinat Kartesius Geometri Dimensi Empat Dengan Bidang Vektornya



Gambar 19: Sistem Koordinat Kartesius Geometri Dimensi Empat dan Vektor Semu



Gambar 20: Sistem Koordinat Kartesius Geometri Dimensi Empat Dengan Bidang Vektornya dan Vektor Semu

Berdasarkan gambar sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat diatas (Gambar 17 – Gambar 20), dapat dilihat bahwa perpotongan bidang koordinat membentuk tiga buah koordinat lain yang bukan merupakan sumbu koordinat dimensi empat. Koordinat tersebut adalah koordinat yang saling orthogonal seperti sumbu – sumbu koordinat yang ditampilkan pada sistem Koordinat Kartesius dimensi tiga. Sumbu – sumbu koordinat ini, melalui keadaannya sebagai bentukan dari bidang koordinat pada sistem koordinat geometri dimensi empat maka disebut sebagai sumbu – sumbu koordinat semu. Sumbu semu X' merupakan perpotongan antara bidang vektor WYdengan bidang vektor XZ. Sumbu semu Y' merupakan perpotongan antara bidang vektor WZ dengan bidang vektor XY.Sumbu semu Z' merupakan perpotongan antara bidang vektor WX dengan bidang vektor YZ.

Defenisi :

Sumbu koordinat semu merupakan sumbu koordinat dalam suatu sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat yang terbentuk dari perpotongan dua buah koordinat bidang pada sistem koordinat tersebut.

Pada suatu sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat diketahui bahwasistem bagian yang terbentuk adalah sebanyak 6 sistem bagian yang sama (masing – masing bagian disebut *"heksan"*) dengan setiap heksan terdiri dari 4 ruang sistem yang berbeda (masing – masing bagian disebut *"heksakuadran"*).

Pada suatu sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat bidang – bidang koordinat yang terbentuk membagi semesta dimensi empat menjadi 6 bagian yang sama dan diberi nama sebagai berikut:

1. Heksan I

   Merupakan bagian semesta yang dibatasi oleh bidang *O.WX*, bidang *O.XY*, bidang *O.YZ* dan bidang *O.WZ*.
2. Heksan II

   Merupakan bagian semesta yang dibatasi oleh bidang *O.W(-Y)*, bidang *O.(-X)(-Y)*, bidang *O.(-X)Z* dan bidang *O.WZ*.
3. Heksan III

Merupakan bagian semesta yang dibatasi oleh bidang *O.(-Y)(-Z)*, bidang *O.(-W)(-Z)*, bidang *O.(-W)(-X)* dan bidang *O.(-X)(-Y)*.

4. Heksan IV

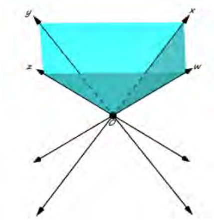
Merupakan bagian semesta yang dibatasi oleh bidang *O.(-W)Y*, bidang *O.XY*, bidang *O.X(-Z)* dan bidang *O.(-W)(-Z)*.

5. Heksan V

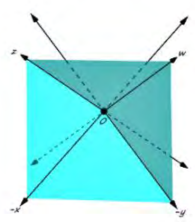
Merupakan bagian semesta yang dibatasi oleh bidang *O.W(-Y)*, bidang *O.(-Y)(-Z)*, bidang *O.X(-Z)* dan bidang *O.WX*.

6. Heksan VI

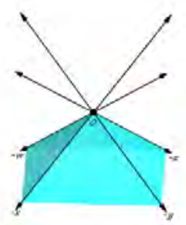
Merupakan bagian semesta yang dibatasi oleh bidang *O.(-W)(-X)*, bidang *O.(-X)Z*, bidang *O.YZ* dan bidang *O.(-W)Y*.



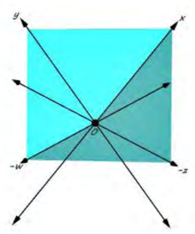
Gambar 21: Heksan I



Gambar 22: Heksan II

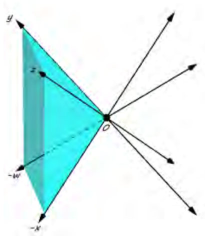


Gambar 23: Heksan III



Gambar24: Heksan IV

Gambar 25: Heksan V



Gambar 26: Heksan VI

Secara matematis, kondisi tersebut di atas dapat dinyatakan melalui pernyataan berikut. Andaikan titik $P(w, x, y, z)$ adalah sembarang titik dalam semesta dimensi empat, maka letak titik P dapat ditentukan sebagai berikut:

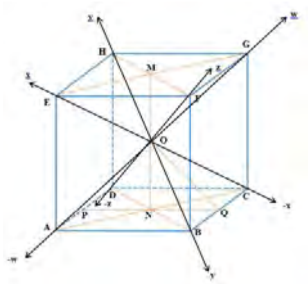
1. Jika $w > 0, x > 0, y > 0, z > 0$, maka titik P terletak pada heksan I.
2. Jika $w > 0, x < 0, y < 0, z > 0$, maka titik P terletak pada heksan II.
3. Jika $w < 0, x < 0, y < 0, z < 0$, maka titik P terletak pada heksan III.
4. Jika $w < 0, x > 0, y > 0, z < 0$, maka titik P terletak pada heksan IV.
5. Jika $w > 0, x > 0, y < 0, z < 0$, maka titik P terletak pada heksan V.
6. Jika $w < 0, x < 0, y > 0, z > 0$, maka titik P terletak pada heksan VI.

Sifat 4 :

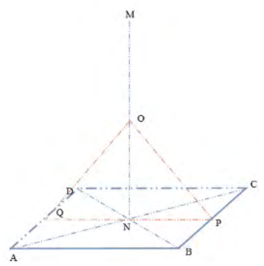
Pada suatu sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat, bidang – bidang koordinat yang ada akan membagi sistem dimensi menjadi enam bagian semesta yang sama.

Berikut akan ditentukan besar sudut yang dibentuk oleh bidang – bidang koordinat yang saling berhadapan.

a. Diketahui: Gambar 4.26: Sistem Koordinat Kartesius Geometri Dimensi Empat pada Kubus ABCD.EFGH.
b. Akan dicari: $\angle QOP = ?$
c. Penyelesaian:



Gambar 27: Sistem Koordinat Geometri Dimensi Empat



Gambar 28: Segitiga QOP

Bukti:

No	Pernyataan	Alasan
1	$AB = BC = CD = DE = 1$	Diketahui pada gambar
2	$OA = OD = OB = OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Diketahui pada gambar
3	$Segitiga\ AOD \cong Segitiga\ BOC$	1, 2, (s, s, s)
4	$OP = OQ$	3
5	$OP^2 = OQ^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$	Dalil Phytagoras
6	$OP^2 = OQ^2 = \frac{1}{2}$	5
7	$OP = OQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	6
8	$Cos(QOP) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1^2}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$	Aturan Cosinus
9	$Cos(QOP) = 0$	8
10	$ArcCos(QOP) = 90$	9
11	$\angle QOP = 90^0$	

Jadi, diperoleh bahwa besar sudut pada bidang – bidang yang berhadapan pada sistem koordinat – wxyz adalah 90^0

Sifat 5 :

Sudut yang dibentuk oleh bidang – bidang koordinat yang saling berhadapan pada suatu sistem koordinat dimensi empat adalah sama dengan 90^0.

Posisi Titik Semesta.

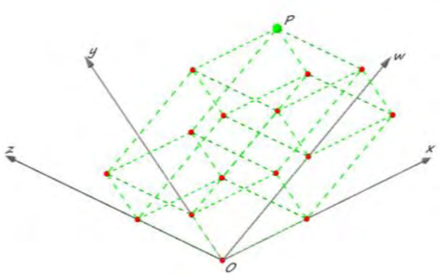
Posisi titik semesta dapat ditentukan jika telah diketahui koordinat – koordinat titik tersebut. Adapun hal terpenting dalam menentukan posisi titik adalah langkah – langkah menentukan posisi titik tersebut. Jika diketahui suatu titik $P(w_1, x_1, y_1, z_1)$ maka dapat dijelaskan langkah – langkah menentukan posisi titik semesta P tersebut dalam sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat sebagai berikut:

1. Lukislah sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat.
2. Buatlah garis bayang pada sumbu koordinat $w = w_1$.
3. Pada ujung garis bayang sumbu koordinat $w = w_1$ buatlah garis bayang pada sumbu koordinat $x = x_1$.
4. Pada ujung garis bayang sumbu koordinat$x = x_1$ buatlah garis bayang pada sumbu koordinat $y = y_1$.
5. Pada ujung garis bayang sumbu koordinat$y = y_1$ buatlah garis bayang pada sumbu koordinat $z = z_1$.

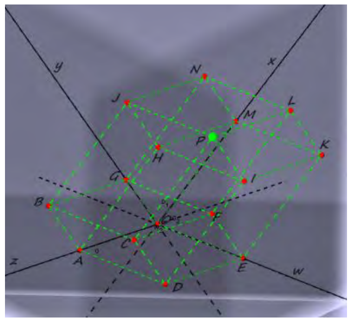
6. Buatlah titik pada titik ujung garis $z = z_1$tersebut. Namailah titik tersebut sesuai dengan nama titik yang diminta. Dalam hal ini adalah $P(w_1, x_1, y_1, z_1)$

Cara menentukan posisi tersebut diatas merupakan salah satu cara dari berbagai macam kombinasi cara yang dapat kita gunakan. Selanjutnya, jika berbagai kombinasi cara menentukan posisi titik tersebut dgunakan bersama – sama pada suatu sistem koordinat kartesius geometri dimensi empat, maka diperoleh beberapa titik lain sebagai berikut:

$A(0,0,0,z_1)$	$B(0,0,y_1,z_1)$	$C(0,x_1,y_1,z_1)$	$D(w_1,0,0,z_1)$	$E(w_1,0,0,0)$
$F(w_1,x_1,0,0)$	$G(0,0,y_1,0)$	$H(0,x_1,0,z_1)$	$I(w_1,x_1,0,z_1)$	$J(0,x_1,y_1,z_1)$
$K(w_1,x_1,0,0)$	$L(w_1,x_1,y_1,0)$	$M(0,x_1,0,0)$	$N(0,x_1,y_1,0)$	$O(0,0,0,0)$

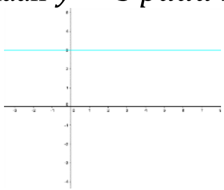


Gambar 29: Posisi Titik

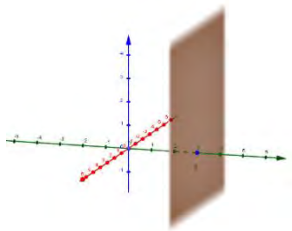


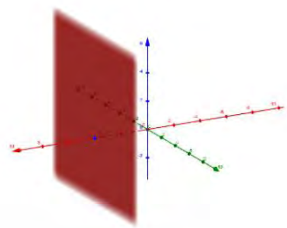
Gambar 30: Posisi Titik

Secara lebih lanjut, diketahui bahwa dalam geometri analitik dimensi dua, grafik dari persamaan yang memuat x dan y adalah berbentuk suatu garis, seperti contoh persamaan $y = 3\ pada\ \mathbb{R}^2$ dan $x = 4\ pada\ \mathbb{R}^2$. Sedangkan, dalam geometri analitik dimensi tiga grafik dari persamaan yang memuat x, y dan z adalah berbentuk suatu bidang, seperti contoh persamaan $y = 3\ pada\ \mathbb{R}^3$ dan $x = 4\ pada\ \mathbb{R}^3$.


Gambar 31: $y = 3\ pada\ \mathbb{R}^2$


Gambar 32: $x = 4\ pada\ \mathbb{R}^2$


Gambar 33: $y = 3\ pada\ \mathbb{R}^3$


Gambar 34: $x = 4\ pada\ \mathbb{R}^3$

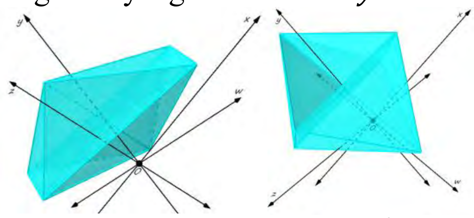
a. Berdasarkan pemikiran tersebut, maka dalam geometri analitik dimensi empat grafik dari persamaan yang memuat w, x, y dan z haruslah suatu bentuk ruang. Berikut akan dicontohkan persamaan ruang tersebut dalam sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat.
b. Contoh:
c. Berikut ini akan diselidiki dan direpresentasikan himpunan semua titik – titik dalam $\mathbb{R}^4$ yang memenuhi syarat berikut:
a. $w = 0$
b. $y = 3$
c. $x = 4$

d. $w - z = 0$

a. Persamaan $w = 0$ menyatakan himpunan $\{(w, x, y, z) | w = 0\}$, di mana himpunan seluruh titik pada $\mathbb{R}^4$ dengan unsur koordinat w adalah 0, hal ini menunjukan bahwa himpunan tersebut tidak lain adalah ruang xyz.

Gambar 35 : $w = 0$ $pada$ $\mathbb{R}^4$

b. Persamaan $y = 3$ menyatakan himpunan $\{(w, x, y, z) | y = 3\}$, di mana himpunan seluruh titik pada $\mathbb{R}^4$ dengan unsur koordinat y adalah 3. Hal ini menunjukan bahwa himpunan tersebut tidak lain adalah ruang wxz yang melalui titik $y = 3$.

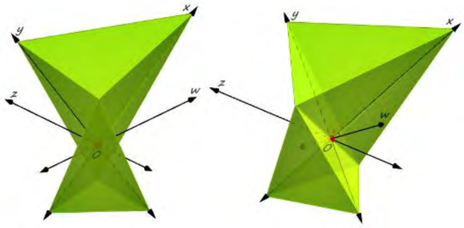


Gambar 36 : $y = 3$ $pada$ $\mathbb{R}^4$

c. Persamaan $x = 4$ menyatakan himpunan $\{(w, x, y, z) | x = 4\}$, di mana himpunan seluruh titik pada $\mathbb{R}^4$ dengan unsur koordinat x adalah 4. Hal ini menunjukan bahwa himpunan tersebut tidak lain adalah ruang wyz yang melalui titik x= 4.

Gambar 37: $x = 4$ $pada$ $\mathbb{R}^4$

d. Persamaan $w - z = 0$ menyatakan himpunan $\{(w, x, y, w) | w \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, di mana himpunan seluruh titik pada $\mathbb{R}^4$ dari sumbu koordinat w dan z adalah sama. Hal ini menunjukan bahwa himpunan tersebut tidak lain adalah ruang $w = z$.



Gambar 38: $w = z$ $pada$ $\mathbb{R}^4$

Lebih lanjut, melalui sistem Koordinat Kartesius geometri dimensi empat akan ditunjukan bahwa pada geometri dimensi empat juga berlaku sifat: *"untuk setiap elemen khusus dimensi* $n - 1$ *dapat dipandang sebagai suatu bentuk perpotongan dari dua buah elemen khusus dimensi* n*"*. Secara sederhana dapat dinyatakan bahwa jika terdapat beberapa persamaan ruang berbeda dalam $\mathbb{R}^4$, maka perpotongan antara dua buah ruang tersebut akan membentuk sebuah bidang, perpotongan antara dua buah bidang akan membentuk sebuah garis dan perpotongan dua buah garis akan membentuk sebuah titik. Sebagai contoh, akan dicontohkan ilustrasi berikut:

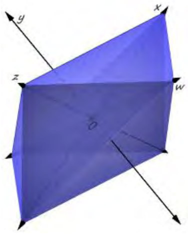
Contoh:

Diketahui empat buah persamaan ruang dalam $\mathbb{R}^4$ adalah $w = 0, x = 0, y = 0$ dan $z = 0$. Berikut akan ditentukan bidang, garis dan titik perpotongan ruang – ruang tersebut.

Ruang – ruang yang dimaksud pada persamaan – persamaan ruang yang diketahui adalah sebagai berikut:

Gambar 39: $w = 0\ pada\ \mathbb{R}^4$

Gambar 40: $x = 0\ pada\ \mathbb{R}^4$



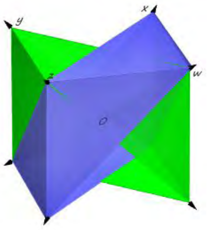
Gambar 41: $y = 0\ pada\ \mathbb{R}^4$

Gambar 42: $z = 0\ pada\ \mathbb{R}^4$

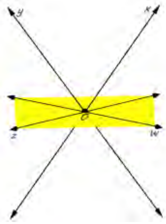
Perpotongan ruang - ruang tersebut akan membentuk bidang seperti pada gambar berikut:

Gambar 43: Perpotongan $w = 0$ dan $x = 0$

Gambar 44: Bidang yz

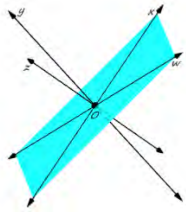


Gambar 45: Perpotongan $x = 0$ dan y= 0



Gambar 46: Bidang wz

Gambar 47: Perpotongan y= 0 dan z= 0

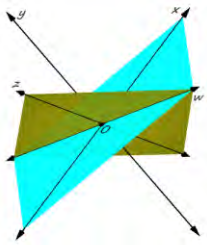


Gambar 48: Bidang wx

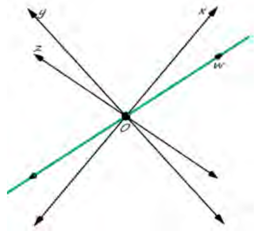
Perpotongan bidang - bidang tersebut diatas akan membentuk garis seperti pada gambar berikut:

Gambar 49: Perpotongan Bidang wz dan yz

Gambar 50: Garis z

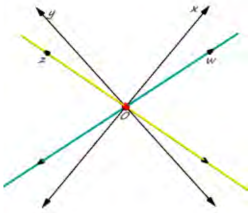


Gambar 51: Perpotongan Bidang wx dan wz

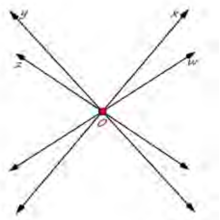


Gambar 52: Garis w

Perpotongan garis – garis tersebut diatas akan membentuk titik seperti pada gambar berikut:



Gambar 53: Perpotongan garis w dan z



Gambar 54: Titik O(Titik Asal)

Jadi, dapat ditentukan dan ditunjukan bahwa untuk setiap elemen khusus dimensi $n-1$ dapat dipandang sebagai suatu bentuk perpotongan dari dua buah elemen khusus dimensi n.

SIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya adapun hal – hal yang dapat disimpulkan adalah sebagai berikut:

Elemen khusus dimensi empat lanjutan Geometri Euclides disebut sebagai "semesta". Dimensi empat dapat direpresentasikan secara grafis melalui suatu sistem koordinat dimensi empat yang didefinisikan sebagai suatu sistem koordinat yang terbentuk dari empat buah vektor berlainan arah dengan besaran pokok sama dalam suatu sistem melalui suatu titik persekutuan tertentu.Grafik persamaan linear yang melibatkan variabel w, x, y dan $z$pada sistem koordinat geometri dimensi empat akan membentuk ruang, bidang, garis dan titik.

Saran

Berdasarkan penelitian yang dilakukan ini, adapun saran yang ingin diberikan oleh pembaca sekalian adalah:

1. Untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan sistem koordinat polar, tabung ataupun bola dalam semesta dimensi empat.
2. Dimensi empat yang dibahas dalam tulisan ini bersifat gagasan baru dengan representasi yang dinarasikan dan hanya dapat direpresentasikan secara abstrak. Pemahaman selanjutnya tidak tergantung pada keadaan riil dalam kehidupan sehari – hari dikarenakan kehidupan kita yang masih terbatas pada dimensi tiga. Kajian penelitian

lanjutan dapat menggunakan sistem ruang semesta ini sebagai bandingan dengan keadaan yang tak diketahui pada lubang hitam.

DAFTAR PUSTAKA

Addington, A. S. (1920). *Spacetime and Gravitation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Africk, Henry. (2013). *Elementary College Geometry.* New York: New York City College of Technology.

Ashton, C. H. (1902). *Plane and Solid Analytic Geometry.* New York: Charles Scribner's Sons.

Born, Max. (1922). *Einstein Theory of Relativity.* (Henry L. Brose, Trans.). New York: E. P. Dutton and Company Publishers.

Burton, David M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction.* New York: McGraw – Hill.

Cajori, Florian. (1993). *A History of Mathematical Notations*. New York: Dover Publications Inc.

Candy, A. L. (1904). *The Elements of Plane and Solid Analytic Geometry.* Boston: D. C. Heath and Co., Publishers.

Carrol, Sean. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Chicago: Pearson Education, Inc.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometri*. Toronto: John Wiley & Sons Inc.

Donder, T. D. (1927). *The Mathematical Theory of Relativity.* Massachuesetts: Massachuesetts Institute of Technology.

Durell, F. (1911). *Plane and Solid Geometry.* New York: Charles E. Merill Co.

Einstein, Albert. (1921). *Relativity: The Special and General Theory.* (Robert W. Lawson, Trans.). New York: Henry Holt and Company.

Eisenhart, Luther Pfahler. (1960). *Coordinate Geometry*. New York: Dover Publications Inc.

Failor, I. N. (1906). *Plane and Solid Geometry.* New York: The Century Co.

Hart, C. A., & Feldman, D. D. (1912). *Plane and Solid Geometry.* (J. H. Tanner, Virgil Snyder, Ed.). London: American Book Company.

Hawking, Stephen W., & Mlodinow, Leonard. (2010). *The Grand Design.* New York: Bantam Books.

Katz, Victor J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction.* Boston: Pearson Education Inc.

Mendelson, E. (1997). *Introduction to Mathematical Logic.* London: Chapman and Hall.

Palmer, C. I., & Taylor, D. P. (1918). *Plane and Solid Geometry.* (George William Myers, Ed.). New York: Scott, Foresman and Company.

Pavlov, D. G. dkk. (2007). *Space Time Structure: Algebra and Geometry.* Moscow: Russian Hypercomplex Society, Lilia Print.

Petkov, V. (Ed.). (2010). *Minkowski Spacetime : A Hundred Years Later.* New York: Springer.

Petkov, Vesselin. (2012). *Spaceand Time: Minkowski's Papers on Relativity.* Montreal: Minkowski Institute Press.

Prenowitz, Walter. & Jordan, Meyer. (1989). *Basic Concepts of Geometry.* New York: Ardsley House Publishers.

Siceloft, L. P., dkk. (1922). *Analytic Geometry.* Boston: Ginn and Company.

Silberstein, L. (1914). *The Theory of Relativity.* London: Macmillan and Co. Limited.

Smith, J. H. (1876). *Elements of Geometry.* London: Rivingtons.

Smythies, John. (2003). *Space, Time and Consciousness.* Journal of Consciousness Studies, 10, No. 3, 2003, pp. 47–56.

Tuckey, C. O. & Armisted, W. (1953). *Coordinate Geometry.* New York: Longmans, Green and Co.

Wells, W. (1909). *Plane and Solid Geometry.* Boston: D. C. Heath and Co., Publishers.