

*Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 02 Juni 2012*



PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA

Tanggal 02 Juni 2012, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978-979-99314-6-7

Bidang:

- Matematika dan Pendidikan Matematika
- Fisika dan Pendidikan Fisika
- Kimia dan Pendidikan Kimia
- Biologi dan Pendidikan Biologi
- Ilmu Pengetahuan Alam



Tema:

**Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik, dan Praktisi MIPA
Untuk Membangun Insan yang Kompetitif dan Berkarakter Ilmiah**

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Tahun 2012

DAFTAR ISI

Tim Editor.....	i
Kata Pengantar.....	ii
Sambutan Ketua Panitia.....	iii
Sambutan Dekan.....	iv
Daftar Isi.....	v
Makalah Utama 1 (Langkah Sembiring).....	A
Makalah Utama 2 (Sudjoko).....	B

MAKALAH PENDIDIKAN MATEMATIKA

EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN DENGAN PROGRAM *CABRI* IBANDING PEMBELAJARAN KONVENSIONAL PADA TOPIK JARAK GARIS ENGAN BIDANG DALAM BANGUN RUANG KELAS X SMA N 1 DEPOK SLEMAN (Ambar Tri Wahyuni dan M. Andy Rudhito)..... M-1

POLA KESALAHAN PADA OPERASI PEMBAGIAN BILANGAN PECAHAN : STUDI KASUS PADA 4 SISWA KELAS VII B SMP N 3 DEPOK SLEMAN TAHUN PELAJARAN 2008/2009 (Anik Yuliani, S.Pd., M.Pd.)..... M-7

PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN KOPERATIF TIPE *THINK TALK WRITE* TERHADAP KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH PADA SISWA SMA (Asep Ikin Sugandi)..... M-15

UPAYA MENGATASI KESULITAN BELAJAR TOPIK MENENTUKAN JARAK DALAM RUANG DIMENSI TIGA DENGAN PEMBELAJARAN REMEDIAL YANG MEMANFAATKAN PROGRAM *CABRI 3D* UNTUK SISWA KELAS X.3 SMA PANGUDI LUHUR YOGYAKARTA (Bella Wicasari dan M. Andy Rudhito)..... M-23

PEMANFAATAN PROGRAM *CABRI 3D* PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA MATERI PRISMA DAN LIMAS DI KELAS VIII C SMP JOANNES BOSCO YOGYAKARTA DALAM UPAYA MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA (Carolina Ndaru Pangestika dan M. Andy Rudhito)..... M-31

TEORI KECERDASAN MAJEMUK: APA DAN BAGAIMANA MENGAPLIKASIKANNYA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA (Djamilah Bondan Widjajanti)..... M-39

PENINGKATAN MOTIVASI BELAJAR KALKULUS DIFFERENSIAL MELALUI METODE EKSPOSITORI DENGAN PEMBERIAN KUIS (Dra Sumargiyani)..... M-47

KESALAHAN SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA:TEMUAN BERHARGA BAGI PARA GURU DALAM KEGIATAN *LESSON STUDY* (Elly Arliani).....M-53

IMPLEMENTASI METODE <i>INQUIRY</i> DIPADUKAN DENGAN STRATEGI KOOPERATIF UNTUK MEMBANGUN KEMAMPUAN BERFIKIR KRITIS MATEMATIS PADA SISWA SMP (Endang L, Fitriana Yuli S., dan Wahyu S).....	M-57
PENERAPAN ANALISIS KONJOIN RANCANGAN KOMBINASI LENGKAP DENGAN JENIS RESPON <i>RATING</i> PADA PREFERENSI MAHASISWA TERHADAP KUALITAS DOSEN SEKOLAH TINGGI ILMU STATISTIK (Fitri Catur Lestari, S. Si., M. Si.).....	M-65
REMEDIASI MENGGUNAKAN PROGRAM FLASH PADA MATERI OPERASI HITUNG BILANGAN BULAT (Hamidah, M.Pd. Dan Nursiah, S.Pd.).....	M-73
PENGARUH <i>SELF EFFICACY</i> TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIK (Hamidah, M.Pd).....	M-79
PENINGKATAN MOTIVASI BELAJAR KALKULUS DIFFERENSIAL MELALUI METODE EKSPOSITORI UPAYA MENGATASI KESULITAN BELAJAR SISWA KELAS VII SMP KANISIUS PAKEM PADA POKOK BAHASAN SEGITIGA DENGAN MEMANFAATKAN PROGRAM <i>GEOGEBRA</i> DALAM PROSES PEMBELAJARAN REMEDIAL (Ignatius Candra Budhiawan dan M. Andy Rudhito).....	M-85
EVALUASI TERHADAP HASIL PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS PENDIDIKAN KARAKTER DI INDONESIA (Ika Wahyu Anita, S.Pd., M.Pd).....	M-95
PEMANFAATAN PROGRAM <i>CABRI 3D</i> UNTUK MEMBANTU PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA POKOK BAHASAN MENENTUKAN BESAR SUDUT ANTARA DUA GARIS DALAM RUANG DIMENSI TIGA DI KELAS X SEMESTER II SMA MARSUDI LUHUR YOGYAKARTA (Maria Immaculata Ray Bastiani, dan M. Andy Rudhito).....	M-101
E-LEARNING READINESS TO E-LEARNING MATURITY (Nur Hadi Waryanto).....	M-109
MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DAN KOMUNIKASI MATEMATIK SISWA SMA MELALUI PENDEKATAN <i>OPEN-ENDED</i> DENGAN PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE <i>COOP-COOP</i> (Rafiq Zulkarnaen).....	M-119
PEMBELAJARAN MATEMATIKA REALISTIK SEBAGAI UPAYA UNTUK MENUMBUHKEMBANGKAN KEPEDULIAN SISWA TERHADAP LINGKUNGAN (Rifka Zammilah).....	M-129
<i>PERFORMANCE ASSESSMENT</i> DALAM PERSPEKTIF <i>MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING</i> (Sri Andayani dan Djemari Mardapi).....	M-137

RANCANGAN DAN PENGEMBANGAN MODUL ELEKTRONIK PEMBELAJARAN PROGRAM LINEAR DENGAN PROGRAM <i>GEOGEBRA</i> PADA KELAS X TKJ B SMK N 2 DEPOK SLEMAN TAHUN AJARAN 2011/2012 (Suko Baryoto Adi Raharjo dan M. Andy Rudhito).....	M-147
PENGEMBANGAN KARAKTER BANGSA MELALUI INTEGRASI NILAI KEISLAMAN DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA (Suparni, S.Pd., M.Pd.).....	M-157
MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS DAN KREATIF MATEMATIK SISWA SMA MELALUI PEMBELAJARAN KOOPERATIF <i>THINK-TALK-WRITE</i> (TTW) (Wahyu Hidayat).....	M-163
METODE <i>PEER LESSON</i> UNTUK MELATIHKAN KOMPETENSI PEDAGOGIK DAN PENDIDIKAN KARAKTER PADA MATA KULIAH <i>MICROTEACHING</i> (Wasilatul Murtafiah, S.Pd., M.Pd., Dan Ervina Maret S, S.Si., M.Pd.).....	M-175
UPAYA MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA MENGGUNAKAN <i>MACRO MEDIA FLASH</i> SISWA KELAS V SD ISLAM TERPADU LUQMANUL HAKIM DAN SD ISLAM TERPADU AL-KHAIRAT YOGYAKARTA (Dra. Widayati, MSc.).....	M-185

MAKALAH MATEMATIKA

PENGGUNAAN METODE BAYESIAN OBYEKTIF DALAM PEMBUATAN GRAFIK PENGENDALI <i>p</i> -CHART Adi Setiawan	M-1
SISTEM KENDALI DAN NAVIGASI WAHANA BAWAH AIR TANPA AWAK UNTUK MENUNJANG PERTAHANAN DAN KEAMANAN NEGARA Annisa Dwi S., Fatma Ayu N.F.A., Putra S. B., Andri A., Muflih M. K.....	M-9
PENDEKATAN CART DAN REGRESI LOGISTIK PADA POLA TINGKAT KEPARAHAN KORBAN KECELAKAAN LALU LINTAS DI SURABAYA Atika Nurani Ambarwati, Heri Kuswanto, Ismaini Zain	M-17
PREDIKSI SUKU BUNGA BANK INDONESIA (<i>BI RATE</i>) MENGGUNAKAN MODEL <i>NEURO FUZZY</i> Ayu Azmy Amalia, Agus Maman Abadi	M-27
STUDI MENGENAI MUNCULNYA BIFURKASI HOPF PADA MODEL DIFUSI PERIKLANAN Ayu Luhur Yusdiana Yati, Kus Prihantoso Krisnawan	M-35
IDENTIFIKASI SINYAL OUT OF CONTROL PADA DIAGRAM KONTROL FUZZY MULTIVARIAT PADA PRODUKSI BOTOL RC COLA 800 ML PT. IGLAS (PERSERO) GRESIK Ayundyah Kesumawati, Muhammad Mashuri, Irhamah	M-41

APLIKASI PERHITUNGAN JARAK ANTARA DUA *WAYPOINT* PADA
GOOGLE MAPS

Kuswari HernawatiM-143

METODE HIMPUNAN AKTIF UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH
PEMROGRAMAN KUADRATIK KONVEKS

Yudith Kase, Lusia Krismiyati Budiasih.....M-149

SYARAT CUKUP ORDE KEDUA DALAM OPTIMISASI KONVEKS

Lusia Krismiyati Budiasih.....M-157

SISTEM LINEAR MAX-PLUS INTERVAL WAKTU INVARIANT
AUTONOMOUS

M. Andy Rudhito.....M-163

ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK
(*MEASLES*) DENGAN VAKSINASI MENGGUNAKAN MODEL ENDEMI
SIR

Marhendra Ali Kurniawan, Fitriana Yuli S, M.Si.M-171

ANALISIS KOINTEGRASI DATA RUNTUN WAKTU INDEKS HARGA
KONSUMEN BEBERAPA KOMODITAS BARANG KOTA DI JAWA
TENGAH

Mariani Jaya Saputra, Adi Setiawan, Tundjung Mahatma.....M-177

PROTOKOL PERJANJIAN KUNCI BERDASARKAN MASALAH
FAKTORISASI ATAS SEMIGRUP NON-KOMUTATIF

Muhamad Zaki Riyanto.....M-185

DESAIN KENDALI ROBUST DENGAN PENDEKATAN PERMAINAN
DINAMIS UNTUK SISTEM LINEAR TIME INVARIANT (LTI)

Muhammad Wakhid Musthofa.....M-193

MODEL EFISIENSI DISTRIBUSI *HONEYWELL WINDTRONICS WIND
TURBINE* PADA RADIUS TERTENTU

Nabih Ibrahim Bawazir, Dwi PrihastutiM-205

PENGUJIAN STRUKTUR MATEMATIKA GRUP BERBASIS OSP (OPEN
SOURCE PROGRAM)

Ngarap Im Manik, Don Tasman, Pretty Christyaningrum Turang.....M-215

STRATEGI VAKSINASI *PULSE* UNTUK MENGATASI EPIDEMI
PENYAKIT CAMPAK BERDASARKAN MODEL *SIR*

Nikenasih Binatari, M.Si., Eminugroho Ratna Sari, M.Sc.....M-223

PEMODELAN *STRUCTURAL EQUATION MODELING* (SEM) BERBASIS
VARIANS PADA DERAJAT KESEHATAN DI PROPINSI JAWA TIMUR
2010

Noermayanti Hidayat, Dr.Bambang Widjanarko Otok, S.Si., M.Si.....M-229

SISTEM LINEAR MAX-PLUS INTERVAL WAKTU INVARIANT AUTONOMOUS

M. Andy Rudhito

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USDPaingan Maguwoharjo Yogyakarta
email: arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Telah dibahas sistem linear max-plus waktu invariant autonomous (SLMIA), di mana waktu aktifitasnya berupa bilangan real. Dalam sistem linear max-plus interval waktu invariant autonomous (SLMIIA), ada ketidakpastian dalam waktu aktifitasnya, sehingga waktu aktifitas ini dimodelkan sebagai interval bilangan real. Artikel ini membahas tentang generalisasi SLMIA menjadi SLMIIA dan analisis input-output SLMIIA, serta sifat periodiknya. Dapat ditunjukkan bahwa SLMII berupa suatu sistem persamaan linear max-plus interval. Analisa input-output SLMII dapat dibahas melalui penyelesaian suatu sistem persamaan linear max-plus interval. Sifat periodik SLMIIA dapat diperoleh dari nilai nilai eigen dan vektor eigen interval matriks keadaan dalam sistemnya.

Kata-kata kunci: Sistem Linear, Max-Plus, Interval, Waktu Invariant, Input-Output, Autonomous.

PENDAHULUAN

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya tidak diketahui dengan pasti. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti. Ketidakpastian waktu aktifitas jaringan ini dapat dimodelkan dalam suatu interval, yang selanjutnya di sebut waktu aktifitas interval. Aljabar max-plus (himpunan semua bilangan real $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi max dan plus) telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah: penjadwalan (proyek) dan sistem antrian, lebih detailnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al.* (2001), Rudhito, A. (2003). Dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003) telah dibahas pemodelan dinamika sistem produksi sederhana dengan pendekatan aljabar max-plus. Secara umum model ini berupa sistem linear max-plus waktu invariant.

Konsep aljabar max-plus interval yang merupakan perluasan konsep aljabar max-plus, di mana elemen-elemen yang dibicarakan berupa interval telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2008). Pembahasan mengenai matriks atas aljabar max-plus telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2011a). Dalam Rudhito, dkk (2011b) telah dibahas eksistensi penyelesaian sistem persamaan linear max-plus interval.

Sejalan dengan cara pemodelan dan pembahasan input-output sistem linear max-plus waktu invariant (SLMI) seperti dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003), dan dengan memperhatikan hasil-hasil pada aljabar max-plus interval, dalam Rudhito (2011) telah dibahas pemodelan dan analisa input-output sistem linear max-plus interval waktu invariant (SLMII), yaitu sistem linear max-plus waktu invariant dengan waktu aktifitas interval. Dalam situasi tertentu ada suatu SLMI yang keadaannya tidak dipengaruhi kedatangan input, yang disebut dengan SLMI autonomous (SLMIA). Seperti halnya pada SLMII, dalam makalah ini akan dibahas pemodelan dan analisa input-output sistem linear max-plus interval waktu invariant autonomous (SLMIIA). Terlebih dahulu akan dibahas pengertian dan konsep dasar dalam aljabar max-plus dan aljabar max-plus interval yang akan digunakan dalam pembahasan utama artikel ini.

ALJABAR MAX-PLUS

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan nilai eigen dan vektor eigen max-plus. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al.* (2001), Rudhito, A. (2003). Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan \mathbf{R} adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada \mathbf{R}_ε didefinisikan operasi berikut: $\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon, a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$. Kemudian

$(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan \mathbf{R}_{\max} . Relasi “ \preceq_m ” pada \mathbf{R}_{\max} didefinisikan dengan $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$.

Operasi \oplus dan \otimes pada \mathbf{R}_{\max} dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p \times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j . Relasi “ \preceq_m ” pada $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan dengan $A \preceq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B$. Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^n := \{x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \dots, n\}$. Unsur-unsur dalam \mathbf{R}_{\max}^n disebut vektor atas \mathbf{R}_{\max} .

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus matriks A* jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbf{R}_{\max}^n$ dengan $v \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Vektor v tersebut disebut *vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ* . Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa skalar $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^n (A^{\otimes k})_{ii} \right)$, merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A. Lebih lanjut untuk $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, jika $B_{ii}^+ = 0$, maka kolom ke- i matriks B^* merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Kolom-kolom ke- i matriks B^* di atas, yang merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$, disebut *vektor-vektor eigen fundamental* yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Dapat ditunjukkan bahwa kombinasi linear max-plus vektor-vektor eigen fundamental matriks A juga merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$. Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ irreduisibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$, untuk setiap i, j dengan $i \neq j$. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks irreduisibel $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ mempunyai nilai eigen max-plus tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A)$, dengan x sebagai vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan λ , maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ irreduisibel, maka A mempunyai nilai eigen max-plus tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A)$.

ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Bagian ini membahas konsep dasar aljabar max-plus interval dan teknik pengoperasian matriks atas aljabar max-plus interval. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada Rudhito, dkk (2011a).

Interval (tertutup) x dalam \mathbf{R}_{\max} adalah suatu himpunan bagian dari \mathbf{R}_{\max} yang berbentuk $x = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \bar{x}\}$. Interval x dalam \mathbf{R}_{\max} di atas disebut *interval max-plus*, yang selanjutnya akan cukup disebut interval. Suatu bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon := \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbf{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \bar{x}\} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon$ didefinisikan operasi \oplus dan \otimes dengan: $x \oplus y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ dan $x \otimes y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$, $\forall x, y \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon)$. Kemudian $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang dilambangkan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max})\}$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$, didefinisikan $\alpha \otimes$

A, dengan $(\alpha \bar{\otimes} A)_{ij} = \alpha \bar{\otimes} A_{ij}$ dan $A \bar{\oplus} B$, dengan $(A \bar{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \bar{\oplus} B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Untuk $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times p}$, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{p \times n}$, didefinisikan $A \bar{\otimes} B$ dengan

$$(A \bar{\otimes} B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \bar{\otimes} B_{kj} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n. \text{ Operasi } \bar{\oplus} \text{ konsisten terhadap}$$

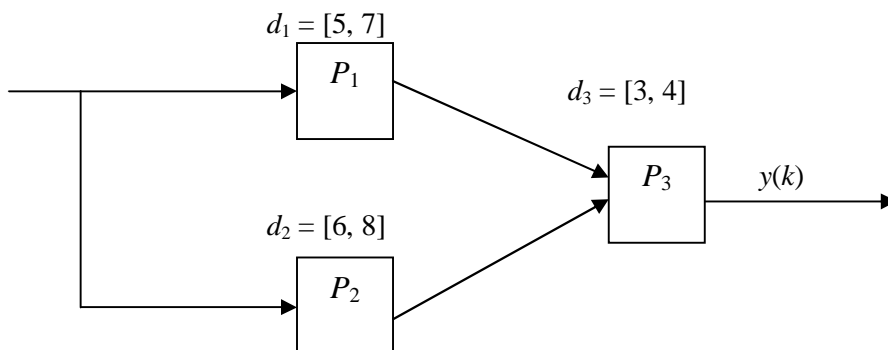
urutan \preceq_{Im} , yaitu jika $A \preceq_{\text{Im}} B$, maka $A \bar{\oplus} C \preceq_{\text{Im}} B \bar{\oplus} C$. Operasi $\bar{\otimes}$ juga konsisten terhadap urutan \preceq_{Im} , yaitu jika $A \preceq_{\text{Im}} B$, maka $A \bar{\otimes} C \preceq_{\text{Im}} B \bar{\otimes} C$.

Untuk $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $\bar{A} = (\bar{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Didefinisikan *interval matriks* dari A, yaitu $[\underline{A}, \bar{A}] = \{A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \bar{A}\}$. Dapat ditunjukkan untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* $[\underline{A}, \bar{A}]$ dan sebaliknya. Matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}]$. Interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}]$ disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval A* dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^n := \{\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \mid x_i \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}, i = 1, \dots, n\}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^n$ disebut *vektor interval atas* $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$. Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^m$.

Berikut diberikan definisi dan eksistensi nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval. Pembahasan lebih lengkap diberikan dalam Rudhito (2011c). Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$. Skalar interval $\lambda \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus interval matriks interval A* jika terdapat suatu vektor interval $\mathbf{v} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^n$ dengan $\mathbf{v} \neq \mathbf{e}_{n \times 1}$ sehingga $A \bar{\otimes} \mathbf{v} = \lambda \bar{\otimes} \mathbf{v}$. Vektor \mathbf{v} tersebut disebut *vektor eigen max-plus interval matriks interval A yang bersesuaian dengan λ* . Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$. Dapat ditunjukkan skalar interval $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\bar{A})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A. Vektor eigen interval dapat dibentuk melalui vektor eigen fundamental untuk masing-masing matriks batas bawah dan atasnya, jika diperlukan dapat dilakukan modifikasi dengan membentuk kombinasi linearnya. Suatu matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, dikatakan *irreduisibel* jika setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ irreduisibel. Dapat ditunjukkan bahwa $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ irreduisibel jika dan hanya jika $\underline{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ irreduisibel. Lebih lanjut jika matriks interval A irreduisibel, maka $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\bar{A})]$ merupakan nilai eigen max-plus interval tunggal matriks interval A, dengan \mathbf{v} adalah vektor eigen max-plus interval yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$, di mana $v_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

PEMODELAN SISTEM PRODUKSI SEDERHANA

Diperhatikan suatu sistem produksi sederhana (Schutter, 1996) yang disajikan dalam Gambar 1 berikut:



Gambar 1. Sistem Produksi Sederhana

Sistem ini terdiri dari 3 unit pemrosesan P_1, P_2, P_3 . Bahan baku dimasukkan ke P_1 dan P_2 , diproses dan dikirimkan ke P_3 . Interval waktu pemrosesan untuk P_1, P_2 dan P_3 berturut-turut adalah $d_1 = [5, 7]$ $d_2 = [6, 8]$ dan $d_3 = [3, 4]$ satuan waktu. Pada input sistem dan antara unit pemrosesan terdapat penyangga (*buffer*), yang berturut-turut disebut penyangga input dan penyangga internal, dengan kapasitas yang cukup besar untuk menjamin tidak ada penyangga yang meluap (*overflow*). Dalam keadaan awal sistem, penyangga input dan beberapa penyangga internal tidak kosong, kemudian bahan baku dimasukkan pada sistem dengan laju tertentu sedemikian hingga penyangga input tidak pernah kosong. Jadi mesin-mesin sudah bekerja pada kondisi awal, dan untuk berikutnya tidak perlu menunggu kedatangan input, karena input sudah selalu tersedia. Suatu unit pemrosesan hanya dapat mulai bekerja untuk suatu produk baru jika ia telah menyelesaikan pemrosesan produk sebelumnya. Diasumsikan bahwa setiap unit pemrosesan mulai bekerja segera setelah bahan tersedia. Misalkan

$x_i(k)$: interval waktu saat unit pemrosesan ke- i mulai bekerja untuk pemrosesan ke- k ,
 $y(k)$: interval waktu saat produk ke- k yang diselesaikan meninggalkan sistem.

Waktu saat P_1 mulai bekerja untuk pemrosesan ke- $(k+1)$ dapat ditentukan sebagai berikut. Pada unit pemrosesan P_1 hanya dapat mulai bekerja pada sejumlah bahan baku baru segera setelah menyelesaikan pemrosesan sebelumnya, yaitu sejumlah bahan baku untuk pemrosesan ke- k . Karena interval waktu pemrosesan pada P_1 adalah $d_1 = [5, 7]$ satuan waktu, maka produk setengah-jadi ke- k akan meninggalkan P_1 pada saat interval $t = x_1(k) \bar{\otimes} [5, 7]$. Dengan menggunakan operasi aljabar max-plus interval diperoleh:

$$x_1(k+1) = [5, 7] \bar{\otimes} x_1(k) \bar{\oplus} [2, 3] \bar{\otimes} u(k+1) \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots$$

Dengan alasan yang sama untuk P_2, P_3 dan waktu saat produk ke- k yang diselesaikan meninggalkan sistem, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= [6, 8] \bar{\otimes} x_2(k) \\ x_3(k+1) &= [11, 16] \bar{\otimes} x_1(k) \bar{\oplus} [12, 16] \bar{\otimes} x_2(k) \bar{\oplus} [3, 4] \bar{\otimes} x_3(k) \\ y(k) &= [3, 4] \bar{\otimes} x_3(k), \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam persamaan matriks dalam aljabar max-plus, persamaan-persamaan di atas

menjadi
$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} [5, 7] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [6, 8] & \varepsilon \\ [11, 16] & [12, 16] & [3, 4] \end{bmatrix} \bar{\otimes} \mathbf{x}(k)$$

$$y(k) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad [3, 4]] \bar{\otimes} \mathbf{x}(k), \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots \text{ dan } \mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T.$$

Hasil di atas dapat juga dituliskan dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{x}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C} \bar{\otimes} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

untuk $k = 1, 2, 3, \dots$, dengan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^3$, keadaan awal $\mathbf{x}(0) \neq \varepsilon$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [5, 7] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [6, 8] & \varepsilon \\ [11, 16] & [12, 16] & [3, 4] \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{3 \times 3}, \text{ dan } \mathbf{C} = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad [3, 4]] \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{1 \times 3}.$$

SISTEM LINEAR MAX-PLUS INTERVAL WAKTU INVARIANT AUTONOMOUS

Matriks dalam persamaan pada sistem produksi di atas merupakan matriks konstan, yaitu tidak tergantung pada parameter k , sehingga sistemnya merupakan sistem waktu-invariant. Dalam sistem produksi di atas keadaan sistem tidak dipengaruhi kedatangan input, sehingga disebut autonomus. Sistem seperti dalam contoh di atas merupakan suatu contoh sistem linear max-plus interval waktu-invariant autonomus (SLMIIA) seperti yang diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 1 (SLMIIA)

Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu-Invariant Autonomus adalah Sistem Kejadian Diskrit yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A \otimes \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C \otimes \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \dots$, dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$, $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ dan $C \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{1 \times n}$. Vektor interval $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^n$ menyatakan interval keadaan (state) dan $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^1$ adalah vektor interval output sistem saat waktu ke- k .

SLMIIA dalam definisi di atas merupakan sistem dengan satu input dan satu output (SISO). SLMIIA seperti dalam definisi di atas secara singkat akan dituliskan dengan SLMIIA(A, C, $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$). Jika kondisi awal diberikan pada sistem, maka secara rekursif juga dapat ditentukan barisan keadaan sistem dan barisan output sistem yang bersesuaian dengan kondisi awal tersebut. Secara umum sifat input-output SLMIIA(A, C, $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1 (Input-Output SLMIIA(A, C, $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$))

Diberikan suatu bilangan bulat positif p . Jika vektor output $\mathbf{y} = [y(1), y(2), \dots, y(p)]^T$ pada

SLMIIA(A, C, $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$), maka $\mathbf{y} = \mathbf{K} \otimes \mathbf{x}(0)$, dengan $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p} \end{bmatrix}$.

Bukti: Pembuktian analog dengan pembuktian pada kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real, dengan mengingat bahwa operasi penjumlahan dan perkalian matriks interval konsisten terhadap urutan yang telah didefinisikan di atas. Bukti untuk kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real dapat dilihat dalam Rudhito(2003: hal 56 -58). ■

Contoh 1

Diperhatikan sistem produksi sederhana pada pembahasan di atas, dengan mengambil keadaan awal $\mathbf{x}(0) = [0, 0, 0]^T = [[0, 0], [0, 0], [0, 0]]^T$ dan $p = 10$, diperoleh waktu keadaan dan output sistem seperti dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Perhitungan Interval Waktu Keadaan dan Output Sistem Contoh 1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	[0, 0]	[5,7]	[10,14]	[15,21]	[20,28]	[25,35]	[30,42]	[35,49]	[40,56]	[45,63]	[50,70]
x_2	[0, 0]	[6,8]	[12,16]	[18,24]	[24,32]	[30,40]	[36,48]	[42,56]	[48,64]	[54,72]	[60,80]
x_3	[0, 0]	[12,16]	[18,24]	[24,32]	[30,40]	[36,48]	[42,56]	[48,64]	[54,72]	[60,80]	[66,88]
y	[0, 0]	[15,20]	[21,28]	[27,36]	[33,44]	[39,52]	[45,60]	[51,68]	[57,76]	[63,84]	[69,92]

Selanjutnya akan diberikan teorema yang memberikan cara penentuan keadaan awal $\mathbf{x}(0)$ tercepat agar interval keadaan sistem untuk masing-masing x_i berada dalam interval yang periodik dengan besar interval periode tertentu, untuk $k = 1, 2, 3, \dots$.

Teorema 2

Diberikan SLMIIA (A, C, $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$) dengan A matriks interval irreduisibel yang mempunyai nilai eigen aljabar max-plus $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\bar{A})]$, dengan vektor eigen max-plus interval fundamental $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}]$. Jika diambil $\mathbf{x}(0) = [\underline{\mathbf{v}}^*, \bar{\mathbf{v}}^*]$, dengan $\underline{\mathbf{v}}^* = \delta \otimes \underline{\mathbf{v}}$, $\delta = -\min_i(v_i)$, maka interval keadaan sistem untuk masing-masing x_i akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik dengan besar periode berturut-turut $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\bar{A})$.

Bukti:

Perhatikan $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \bar{\mathbf{x}}(k) \approx [\underline{A} \otimes \underline{\mathbf{x}}(k-1), \bar{A} \otimes \bar{\mathbf{x}}(k-1)] = [\underline{A}^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{x}}(0), \bar{A}^{\otimes k} \otimes \bar{\mathbf{x}}(0)] \approx A^{\otimes k} \otimes \bar{\mathbf{x}}(0)$. Mengingat keadaan awal sistem dapat ditentukan dengan pasti, maka berupa waktu tegas atau interval titik, yaitu $\mathbf{x}(0) \approx [\underline{\mathbf{x}}(0), \bar{\mathbf{x}}(0)]$ di mana $\underline{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(0)$. Karena A irreduisibel,

maka A mempunyai nilai eigen max-plus interval tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$, dengan vektor eigen max-plus interval fundamental $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$ di mana komponen $v_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Selanjutnya dibentuk vektor interval $\mathbf{v}^* \approx [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*]$

di mana
$$\underline{\mathbf{v}}^* = \delta \otimes \underline{\mathbf{v}} \text{ dan } \overline{\mathbf{v}}^* = \theta \otimes \overline{\mathbf{v}}', \text{ dengan } \overline{\mathbf{v}}' = \delta \otimes \overline{\mathbf{v}},$$

$$\delta = -\min_i(v_i) \text{ dan } \theta = -\min_i(\overline{v}'_i - \underline{v}_i^*), \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n,$$

yang juga merupakan vektor eigen max-plus interval yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$. Dari konstruksi vektor-vektor di atas diperoleh bahwa komponen-komponen vektor $\underline{\mathbf{v}}^*$, yaitu \underline{v}_i^* , semuanya tak negatif dan paling sedikit satu komponennya bernilai nol. Sementara vektor interval $\mathbf{v}^* \approx [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*]$ paling sedikit satu komponennya berupa interval titik, sehingga \mathbf{v}^* merupakan vektor interval terkecil, dalam arti bahwa $\min_i(\overline{v}_i^* - \underline{v}_i^*) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan

demikian \mathbf{v}^* merupakan vektor eigen max-plus interval terkecil, di antara semua kemungkinan vektor eigen max-plus interval hasil modifikasi vektor eigen max-plus interval fundamental $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$ di atas, yang semua batas bawah komponennya tak negatif dan paling sedikit satu bernilai nol. Mengingat vektor $\mathbf{v}^* \approx [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*]$ merupakan vektor eigen max-plus interval yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$, maka berlaku $[\underline{A}, \overline{A}] \otimes [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*] = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})] \otimes [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*]$ atau $\underline{A} \otimes \underline{\mathbf{v}}^* = \lambda_{\max}(\underline{A}) \otimes \underline{\mathbf{v}}^*$ dan $\overline{A} \otimes \overline{\mathbf{v}}^* = \lambda_{\max}(\overline{A}) \otimes \overline{\mathbf{v}}^*$. Selanjutnya diambil saat keadaan awal sistem $\mathbf{x}(0) = [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*]$ yang merupakan saat keadaan awal tercepat. Mengingat operasi \oplus dan \otimes pada matriks konsisten terhadap urutan " \preceq_m ", maka berlaku $\underline{A}^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{v}}^* \preceq_m \overline{A}^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{v}}^* \preceq_m \overline{A}^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{v}}^*$. Hal ini berakibat bahwa $\mathbf{x}(k) \approx [\underline{A}^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{v}}^*, \overline{A}^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{v}}^*] \subseteq [\underline{A}^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{v}}^*, \overline{A}^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{v}}^*] = [(\lambda_{\max}(\underline{A}))^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{v}}^*, (\lambda_{\max}(\overline{A}))^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{v}}^*] = [(\lambda_{\max}(\underline{A}))^{\otimes k}, (\lambda_{\max}(\overline{A}))^{\otimes k}] \otimes [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*] = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]^{\otimes k} \otimes [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*]$ untuk setiap $k = 1, 2, 3, \dots$. Dengan demikian vektor $\underline{\mathbf{v}}^*$ merupakan keadaan awal tercepat sistem, yang diperoleh dari vektor eigen max-plus interval fundamental $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, sehingga interval keadaan sistem untuk masing-masing x_i akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik dengan besar periode berturut-turut $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A})$. ■

Contoh 2

Diberikan SLMIIA $(A, C, \mathbf{x}(0) \neq \varepsilon)$, dengan $A = \begin{bmatrix} [5, 7] & \varepsilon & [9, 11] \\ [3, 4] & [6, 8] & \varepsilon \\ [11, 13] & [12, 15] & [3, 4] \end{bmatrix}$. Dapat ditentukan

bahwa $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})] = [10, 12]$, dengan vektor eigen max-plus interval fundamental $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$ dengan $\underline{\mathbf{v}} = [0, -7, 1]^T$ dan $\overline{\mathbf{v}} = [1, -7, 2]^T$ berturut-turut merupakan vektor eigen max-plus interval fundamental yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A})$. Selanjutnya dapat ditentukan bahwa $\underline{\mathbf{v}}^* = [7, 0, 8]^T$ dan $\overline{\mathbf{v}}^* = [8, 0, 9]^T$, sehingga di ambil $\mathbf{x}(0) = [\underline{\mathbf{v}}^*, \overline{\mathbf{v}}^*]$. Misalkan $\mathbf{b}(k) = [(\lambda_{\max}(\underline{A}))^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{v}}^*, (\lambda_{\max}(\overline{A}))^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{v}}^*]$. Perhitungan $\mathbf{x}(k)$ hingga $k = 10$, seperti dalam Tabel 2 berikut.

Tabel 2 Perhitungan Interval Waktu Keadaan dan Output Sistem Contoh 2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	[7,7]	[17,19]	[27,31]	[37,43]	[47,55]	[57,67]	[67,79]	[77,91]	[87,103]	[97,115]	[107,127]
b_1	[7,8]	[17,20]	[27,32]	[37,44]	[47,56]	[57,68]	[67,80]	[77,92]	[87,104]	[97,116]	[107,128]
x_2	[0,0]	[10,11]	[20,23]	[30,35]	[40,47]	[50,59]	[60,71]	[70,83]	[80,95]	[90,107]	[100,119]
b_2	[0,0]	[10,12]	[20,24]	[30,36]	[40,48]	[50,60]	[60,72]	[70,84]	[80,96]	[90,108]	[100,120]
x_3	[8,8]	[18,20]	[28,32]	[38,44]	[48,56]	[58,68]	[68,80]	[78,92]	[88,104]	[98,116]	[108,128]
b_3	[8,9]	[18,21]	[28,33]	[38,45]	[48,57]	[58,69]	[68,81]	[78,93]	[88,105]	[98,117]	[108,129]

DAFTAR PUSTAKA

- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.
- Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.
- Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2008. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur. *Berkala Ilmiah MIPA Majalah Ilmiah Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam*. Vol. 18 (2): pp. 153-164
- Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2011a. Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval. *Jurnal Natur Indonesia*. Vol. 13 No. 2. pp. 94-99.
- Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2011b. Systems of Fuzzy Number Max-Plus Linear Equations. *Journal of the Indonesian Mathematical Society* Vol. 17 No. 1.
- Rudhito, Andy. 2011c. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur*, Disertasi: Program S3 Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- Rudhito, Andy. 2012. Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invariant. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, Yogyakarta, 3 Desember 2011. pp. MA-104-113.
- Schutter, B. De., 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Engineering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

