JURNAL MATEMATIKA

ISSN: 1410-8518

Vol. 14 No. 2, Agustus 2011

Jurusan Matematika FMIPA

Universitas Diponegoro Semarang

Jurnal Matematika	Vol. 14	No. 2	Halaman 51-104	Semarang Agustus 2011	ISSN 1410-8518

ISSN: 1410-8518

JURNAL MATEMATIKA

Vol. 14 No. 2, Agustus 2011

DAFTAR ISI

SIFAT PERIODIK JARINGAN ANTRIAN SERI TERTUTUP DENGAN PENDEKATAN ALJABAR MAX-PLUS

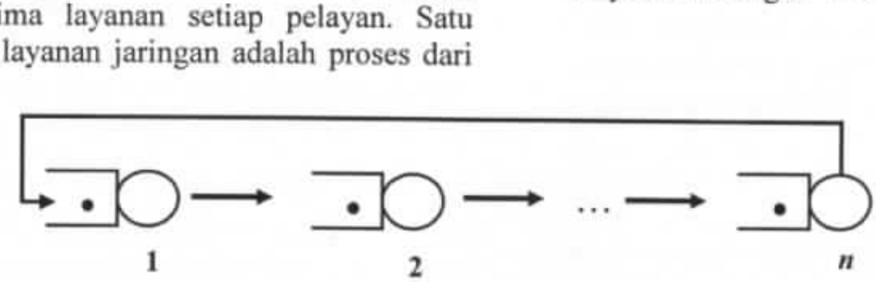
M. Andy Rudhito[1], Sri Wahyuni[2], Ari Suparwanto[3] dan Frans Susilo[4]
[1] Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM, Staff Prodi. Pend. Matematika FKIP USD, Paingan Maguwoharjo Yogyakarta, email: arudhito@yahoo.co.id
[2,3] Jurusan Matematika FMIPA UGM , Sekip Utara, Yogyakarta
[4] Jurusan Matematika FST USD, Paingan Maguwoharjo Yogyakarta

Abstract. This article discussed about the properties of closed periodic queuing network series susing max-plus algebra. The result showed that the properties of closed periodic dinamic queuing network series can be determined by using the concept of eigen values and eigen vectors of max-plus matrix in the network model. Through the max-plus eigen vector fundamental, can be determined faster early time departure of customers of departure to the next customer periodically, with a large period of max-plus eigenvalue.

Keywords :, eigen value, eigen vector, max-plus algebra, queuing network jaringan antrian, period.

1. PENDAHULUAN

Pemodelan jaringan antrian pendekatan max-plus, yaitu himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$dilengkapi dengan operasi max dan plus, dapat memberikan suatu cara yang lebih padu dan menyatu serta persamaan yang dihasilkan analog dengan hasil-hasil pada teori sistem yang konvensional, [5]. Diperhatikan suatu jaringan antrian seri tertutup dengan n pelayan-tunggal dengan kapasitas penyangga takhingga dan n pelanggan [3]. Jaringan bekerja dengan prinsip *First-In First-Out* (*FIFO*). Dalam jaringan ini, pelanggan harus melewati antrian dari awal sampai akhir secara berturutan untuk menerima layanan setiap pelayan. Satu siklus layanan jaringan adalah proses dari masuknya pelanggan ke penyangga pelayan ke-1 hingga meninggalkan pelayan ke-n. Setelah penyelesaian layanan pada pelayan ke-n, pelanggan kembali ke antrian pertama untuk suatu siklus baru layanan jaringan. Misalkan pada saat awal pengamatan, semua pelayan tidak memberi layanan, di mana penyangga pada pelayan ke-i memuat sebanyak 1 pelanggan untuk setiap i = 1, 2, ..., n. Perpindahan pelanggan dari suatu antrian ke antrian berikutnya diasumsikan tidak memerlukan waktu. Gambar 1 [4] memberikan keadaan awal jaringan antrian serial tertutup yang dimaksud, dengan pelanggan yang dinyatakan dengan "•".



Gambar 1 Jaringan Antrian Seri Tertutup

Jaringan antrian seri tertutup seperti di atas dapat dijumpai dalam sistem pabrik perakitan, seperti perakitan mobil maupun barang-barang elektronik. Pelanggan dalam sistem ini adalah *palet* sedangkan pelayanan adalah mesin perakit. Palet yang dimaksud adalah semacam meja atau tempat di mana komponen-komponen atau barang setengah-jadi ditempatkan dan bergerak mengunjungi mesin-mesin perakit. Mula-mula sebuah palet ke-1 masuk ke penyangga mesin ke-1, kemudian masuk mesin ke-1 dan palet ke-2 masuk ke penyangga mesin ke-1. Di mesin ke-1 ini komponen-komponen diletakkan dan dipersiapkan untuk dirakit di mesin berikutnya. Selanjutnya palet ke-1 masuk ke penyangga mesin ke-2 dan palet ke-2 masuk ke mesin ke-1. Demikian seterusnya untuk n palet yang tersedia, sehingga tercapai keadaan seperti pada Gambar 1 di atas, di mana tercapai keadaan awal pengamatan. Setelah perakitan selesai dikerjakan di mesin ke-n, barang hasil rakitan akan meninggalkan jaringan, sementara palet yang membawa akan menuju kembali ke penyangga mesin ke-1, untuk memulai suatu siklus baru layanan jaringan, demikian seterusnya.

2. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan penulisan artikel ini adalah membahas sifat periodik dinamika jaringan antrian serial tertutup dengan menggunakan aljabar max-plus.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis dan perhitungan-perhitungan matematis. Pemodelan dinamika jaringan antrian akan menggunakan seperti yang telah dibahas dalam [3]. Sifat periodik dinamika jaringan akan dibahas dengan menggunakan hasil-hasil pada konsep nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus ([1], [2])

4. PEMBAHASAN

Terlebih dahulu dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan kaitannya dengan teori graf, serta eksistensi dan ketunggalan nilai eigen dan vektor eigen max-plus. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada [1] dan [2]. Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield, yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-plus*, selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$. Pangkat k elemen $x \in \mathbf{R}$ dilambangkan dengan $x^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai berikut $x^{\otimes 0} := 0$ dan $x^{\otimes k} := x \otimes x^{\otimes k-1}$ dan didefinisikan pula $\varepsilon^{\otimes 0} := 0$ dan $\varepsilon^{\otimes k} := \varepsilon$ untuk $k = 1, 2, \ldots$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p \times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$.

Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \ , \text{ jika } i = j \\ \varepsilon \ , \text{ jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j. Pangkat k dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan: $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n \times 1}$, sehingga $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur *vektor* atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Suatu *graf berarah* G didefinisikan sebagai suatu pasangan G = (V, A) dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut *titik* dan A adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota A disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah G adalah suatu barisan berhingga busur (i_1, i_2), (i_2, i_3), ... , (i_{l-1}, i_l) dengan $(i_k, i_{k+1}) \in$ A untuk suatu $l \in \mathbf{N}$ (= himpunan semua bilangan asli) dan $k = 1, 2, \ldots, l-1$. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. *Sirkuit elementer* adalah sirkuit yang titik-titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Suatu graf berarah G = (V, A) dengan V = $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$ dikatakan *terhubung kuat* jika untuk setiap $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in$ V , $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, terdapat suatu lintasan dari **i** ke **j**.

Diberikan graf berarah G = (V, A) dengan V = $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{p}\}$. Graf berarah G dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in$ A dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij}. Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i), dilambangkan dengan $w(j, i)$. *Graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah graf berarah berbobot G(A) = (V, A) dengan V = $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$, A = $\{(\mathbf{j}, \mathbf{i}) | w(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = A_{\mathbf{ij}} \neq \varepsilon\}$. *Bobot suatu lintasan* didefinisikan sebagai jumlahan bobot busur-busur yang menyusun tersebut. Suatu rumus bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam G(A), dilambangkan dengan $\lambda_{\max}(A)$), adalah $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes k})_{ii}\right)$.

Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dikatakan *irredusibel* jika graf presedennya terhubung kuat. Dapat ditunjukkan bahwa matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ irredusibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$, untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus matriks A* jika terdapat suatu vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$ dengan $\boldsymbol{v} \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sehingga $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{v}$ tersebut disebut *vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan* λ. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa skalar $\lambda_{\max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam G(A), merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A. Lebih lanjut untuk $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, jika $B_{ii}^{+} = 0$, maka kolom ke-i matriks B^{*} merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Kolom-kolom ke-i matriks B^{*} di atas, yang merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$, disebut *vektor-vektor eigen fundamental* yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Dapat ditunjukkan bahwa kombinasi linear max-plus vektor-vektor eigen fundamental matriks A juga merupakan vektor eigen yang berseuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$. Jika skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$, merupakan nilai eigen max-plus matriks A, maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam G(A), sehingga $\lambda_{\max}(A)$ merupakan nilai eigen max-plus maksimum matriks A. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks irredusibel $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ mempunyai nilai eigen max-plus tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A)$, dengan $\boldsymbol{x}$ sebagai vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan λ, maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ irredusibel, maka A mempunyai nilai eigen max-plus tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A)$.

Misalkan $a_i(k)$ = saat kedatangan pelanggan ke-k pada pelayan ke-i,
$d_i(k)$ = saat keberangkatan pelanggan ke-k dari pelayan ke-i,
t_i = waktu layanan pada pelayan ke-i.
untuk $k = 1, 2, \ldots$ dan $i = 1, 2, \ldots, n$. Selanjutnya dinamika antrian pada pelayan ke- i , seperti yang telah dibahas dalam (Krivulin, 1995), dapat dinyatakan dengan

$$d_i(k) = \max(t_i + a_i(k), t_i + d_i(k-1)) \quad (1)$$

$$a_i(k) = \begin{cases} d_n(k-1) & \text{jika } i = 1 \\ d_{i-1}(k-1) & \text{jika } i = 2,\ldots,n \end{cases} \quad (2)$$

Dengan notasi aljabar max-plus persamaan (1) dapat dituliskan sebagai berikut

$$d_i(k) = t_i \otimes a_i(k) \oplus t_i \otimes d_i(k-1) \quad (3)$$

Misalkan $\boldsymbol{d}(k) = [d_1(k), d_2(k), \ldots, d_n(k)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}(k) = [a_1(k), a_2(k), \ldots, a_n(k)]^{\mathrm{T}}$ dan

$T = \begin{bmatrix} t_1 & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & t_n \end{bmatrix}$. Persamaan (3) dan (2) di atas dapat dituliskan menjadi

$$\boldsymbol{d}(k) = T \otimes \boldsymbol{a}(k) \oplus T \otimes \boldsymbol{d}(k-1). \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{a}(k) = G \otimes \boldsymbol{d}(k-1), \qquad (5)$$

dengan matriks $G = \begin{bmatrix} \varepsilon & \cdots & \varepsilon & 0 \\ 0 & \ddots & \varepsilon & \varepsilon \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Dengan mensubstitusikan persamaan (5) ke persamaan (4) dapat diperoleh persamaan $\boldsymbol{d}(k) = T \otimes G \otimes \boldsymbol{d}(k-1) \oplus T \otimes \boldsymbol{d}(k-1) = T \otimes (G \oplus E) \otimes \boldsymbol{d}(k-1)$ atau

$$\boldsymbol{d}(k) = A \otimes \boldsymbol{d}(k-1) \qquad (6)$$

dengan matriks

$$A = T \otimes (G \oplus E) = \begin{bmatrix} t_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_1 \\ t_2 & t_2 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & t_{n-1} & t_{n-1} & \varepsilon \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & t_n & t_n \end{bmatrix},$$

yang merupakan model dinamika jaringan antrian tersebut.

Contoh 4.1 Diperhatikan jaringan antrian serial tertutup dengan banyak pelayan dan banyak pelanggan masing-masing adalah $n = 5$. Misalkan waktu layanan pada pelayan ke-i = 1, 2, 3, 4, 5 berturut-turut $t_1 = 3$, $t_2 = 4$, $t_3 = 6$, $t_4 = 7$ dan $t_5 = 5$, maka diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Misalkan diambil saat keberangkatan awal pelanggan $\boldsymbol{d}(0) = [0, 0, ..., 0]^T$, maka saat keberangkatan pelanggan untuk k = 1, 2, 3, ... , 10 diberikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Perhitungan Saat Keberangkatan Pelanggan Contoh 4.1

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
d_1	0	3	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99
d_2	0	4	8	12	19	26	33	40	47	54	61	68	75	82	89	96
d_3	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	67	74	81	88	95
d_4	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
d_5	0	5	12	19	26	33	40	47	54	61	68	75	82	89	96	103

Dari Tabel 1 pada Contoh di atas, dengan saat keberangkatan awal pelanggan $\boldsymbol{d}(0) = [0, 0, ..., 0]^T$, nampak bahwa antar saat keberangkatan pelanggan pada setiap pelayanan tidak seluruhnya periodik. Selanjutnya akan dibahas suatu upaya penjadwalan saat keberangkatan awal pelanggan $\boldsymbol{d}(0)$ agar saat keberangkatan selanjutnya periodik dengan periode tertentu.

Sebelumnya akan dibahas cara lain untuk menyatakan persamaan rekursif model dinamika jaringan antrian (6) melalui vektor saat keberangkatan awal pelanggan $\boldsymbol{d}(0)$. Dengan menggunakan induksi matematis dapat ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{d}(k)$

$$= A \otimes \boldsymbol{d}(k-1) = A^{\otimes k} \otimes \boldsymbol{d}(0), \; k = 1, 2, ... \qquad (7)$$

Untuk $k = 1$ berlaku $\boldsymbol{d}(1) = A \otimes \boldsymbol{d}(0) = A^{\otimes 1} \otimes \boldsymbol{d}(0)$.

Andaikan benar untuk $k = n - 1$, yaitu $\boldsymbol{d}(n-1) = A^{\otimes(n-1)} \otimes \boldsymbol{d}(0)$.

Untuk $k = n$, $\boldsymbol{d}(n) = A \otimes \boldsymbol{d}(n-1) = A \otimes (A^{\otimes(n-1)} \otimes \boldsymbol{d}(0)) = A^{\otimes n} \otimes \boldsymbol{d}(0)$. Jadi benar untuk $k = n$.

Saat keberangkatan pelanggan $\boldsymbol{d}(k)$ dikatakan perodik dengan periode sebesar λ jika $\boldsymbol{d}(k) = \lambda \otimes \boldsymbol{d}(k-1)$ untuk setiap k = 1, 2, ... Dengan demikan agar $\boldsymbol{d}(k)$ dikatakan perodik dengan periode sebesar λ haruslah dipenuhi

$\boldsymbol{d}(k) = A \otimes \boldsymbol{d}(k-1) = \lambda \otimes \boldsymbol{d}(k-1)$ untuk setiap k = 1, 2, ...

Hal ini berarti λ merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A dan $\boldsymbol{d}(k-1)$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Mengingat berlaku untuk setiap k = 1, 2, ... , maka juga berlaku untuk k = 1. Jadi agar saat keberangkatan pelanggan perodik dengan periode sebesar λ, maka $\boldsymbol{d}(0)$, yaitu saat keberangkatan awal pelanggan, haruslah merupakan suatu vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Mengingat graf preseden matriks A pada model jaringan antrian di atas terhubung kuat maka matriks A irredusibel. Dengan demikianm matriks A mempunyai nilai eigen max-plus tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A)$, dengan vektor eigen fundamental $\boldsymbol{v}$ di mana $v_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Situasi ini sesuai dengan keadaan nyata, di mana saat keberangkatan awal berhingga. Selanjutnya agar realistis, saat keberangkatan awal pelanggan haruslah tak negatif. Untuk itu perlu dilakukan modifikasi terhadap vektor eigen fundamental $\boldsymbol{v}$ sedemikian hingga semua komponennya tak negatif . Dibentuk vektor $\boldsymbol{v}^* = \beta \otimes \boldsymbol{v}$, dengan $\beta = -\min_i(v_i)$, untuk i = 1, 2, ..., n. Dengan kombinasi linear max-plus di atas akan diperoleh bahwa komponen-komponen v_i^* semuanya tak negatif dan paling sedikit satu komponennya bernilai nol. Sementara vektor $\boldsymbol{v}^*$ juga merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$.

Jika diambil saat keberangkatan awal pelanggan $\boldsymbol{d}(0) = \boldsymbol{v}^*$, maka $\boldsymbol{v}^*$ merupakan saat keberangkatan awal tercepat pelanggan, agar saat keberangkatan pelanggan periodik sejak saat keberangkatan awal pelanggan. Mengingat vektor $\boldsymbol{v}^*$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$, maka $A \otimes \boldsymbol{v}^* = \lambda_{\max}(A) \otimes \boldsymbol{v}^*$. Dari persamaan (7) dengan menggunakan induksi matematis dapat ditunjukkan bahwa

$$\boldsymbol{d}(k) = (\lambda_{\max}(A))^{\otimes k} \otimes \boldsymbol{v}^*, \quad \text{untuk } k = 1, 2, \ldots . \qquad (8)$$

Untuk k = 1 berlaku $\boldsymbol{d}(1) = A \otimes \boldsymbol{v}^* = \lambda_{\max}(A) \otimes \boldsymbol{v}^* = (\lambda_{\max}(A))^{\otimes 1} \otimes \boldsymbol{v}^*$.

Andaikan benar untuk $k = n-1$, yaitu $\boldsymbol{d}(n-1) = (\lambda_{\max}(A))^{\otimes(n-1)} \otimes \boldsymbol{v}^*$.

Untuk $k = n$, $\boldsymbol{d}(n) = A \otimes \boldsymbol{d}(n-1) = A \otimes ((\lambda_{\max}(A))^{\otimes(n-1)} \otimes \boldsymbol{v}^* = ((\lambda_{\max}(A))^{\otimes(n-1)} \otimes A \otimes \boldsymbol{v}^* = ((\lambda_{\max}(A))^{\otimes(n-1)} \otimes \lambda_{\max}(A) \otimes \boldsymbol{v}^* = ((\lambda_{\max}(A))^{\otimes n-1} \otimes \boldsymbol{v}^*$.

Jadi benar untuk $k = n$.

Dari Persamaan (8) di atas nampak bahwa $\boldsymbol{v}^*$ adalah saat keberangkatan awal tercepat pelanggan, sehingga saat keberangkatan pelanggan pada jaringan periodik dengan periode sebesar $\lambda_{\max}(A)$.

Contoh 4.2 Diperhatikan kembali jaringan antrian serial tertutup seperti pada Contoh 4.1 di atas beserta hasil yang telah diperoleh. Dapat ditentukan bahwa nilai eigen max-plus tunggal matriks A adalah $\lambda_{\max}(A) = 7$ dengan vektor eigen max-plus fundamental yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$ adalah $\boldsymbol{v} = [-6, -9, -10, 0, -2]^{\mathrm{T}}$. Selanjutnya diperoleh $\beta = -\min_i(v_i) = 10$, untuk i = 1, 2, ..., n, sehingga saat keberangkatan awal tercepat pelanggan adalah $\boldsymbol{d}(0) = \boldsymbol{v}^* = 10 \otimes \boldsymbol{v} = [4, 1, 0, 10, 8]^{\mathrm{T}}$. Selanjutnya dengan saat keberangkatan awal tersebut, saat keberangkatan pelanggan untuk k = 1, 2, 3, ... adalah

$$\begin{bmatrix} d_1(1) \\ d_2(1) \\ d_3(1) \\ d_4(1) \\ d_5(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 7 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix} = 7$$

$$\otimes\begin{bmatrix}4\\1\\0\\10\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}d_1(2)\\d_2(2)\\d_3(2)\\d_4(2)\\d_5(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\15\\14\\24\\22\end{bmatrix}=7^{\otimes^2}\otimes\begin{bmatrix}4\\1\\0\\10\\8\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}d_1(3)\\d_2(3)\\d_3(3)\\d_4(3)\\d_5(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\22\\21\\31\\29\end{bmatrix}=7^{\otimes^3}\otimes\begin{bmatrix}4\\1\\0\\10\\8\end{bmatrix} \text{ dan seterusnya.}$$

Saat keberangkatan pelanggan $\boldsymbol{d}(k)$ sampai $k = 15$, seperti dalam tabel berikut

Tabel 2 Perhitungan Saat Keberangkatan Pelanggan Contoh 4.2

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
d_1	4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74	81	88	95	102	109
d_2	1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106
d_3	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
d_4	10	17	24	31	38	45	52	59	66	73	80	87	94	101	108	115
d_5	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113

Nampak bahwa saat awal keberangkatan tercepat pelanggan adalah vektor $\boldsymbol{d}(0) = [4, 1, 0, 10, 8]^T$, sehingga saat keberangkatan pelanggan pada setiap pelayanan dalam jaringan antrian tersebut periodik dengan periode sebesar 7.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa bahwa sifat dinamika jaringan antrian seri tertutup dapat ditentukan dengan menggunakan konsep nilai eigen dan vektor eigen max-plus matriks pada model jaringan. Melalui vektor eigen max-plus fundamentalnya, dapat ditentukan saat keberangkatan awal tercepat pelanggan agar saat keberangkatan pelanggan selanjutnya periodik, dengan besar periode sebesar nilai eigen max-plus tersebut.

Model antrian yang dibahas di atas masih merupakan model antrian yang sederhana. Pembahasan selanjutnya dapat dilakukan untuk model-model antrian yang lebih rumit ataupun untuk kasus dengan penyangga berhingga.

6. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimasih kepada Yayasan Sanata Dharma Yogyakarta yang telah membiayai studi dan penelitian ini di Program S3 Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bacelli, F., (2005), *et al*, *Synchronization and Linearity*, New York, John Wiley & Sons, 2001.

[2] Heidergott, B. B, *et. al.*, *Max Plus at Work*, Princeton, Princeton University Press.

[3] Krivulin, N.K., (1995), A Max-Algebra Approach to Modeling and Simulation of Tandem Queueing Systems. *Mathematical and Computer Modelling*, **22** , N.3, 25-31.

[4] Krivulin, N.K., (1996), The Max-Plus Algebra Approach in Modelling of Queueing Networks, *Proc. 1996 Summer Computer Simulation Conf.*, Portland, OR, July 21-25, 1996, SCS, 1996, 485-490.

[5] Krivulin, N.K., (2000), Algebraic Modelling and Performance Evaluation of Acyclic Fork-Join Queueing Networks. *Advances in Stochastic Simulation Methods, Statistics for Industry and Technology*. Birkhauser, Boston, 63-81.