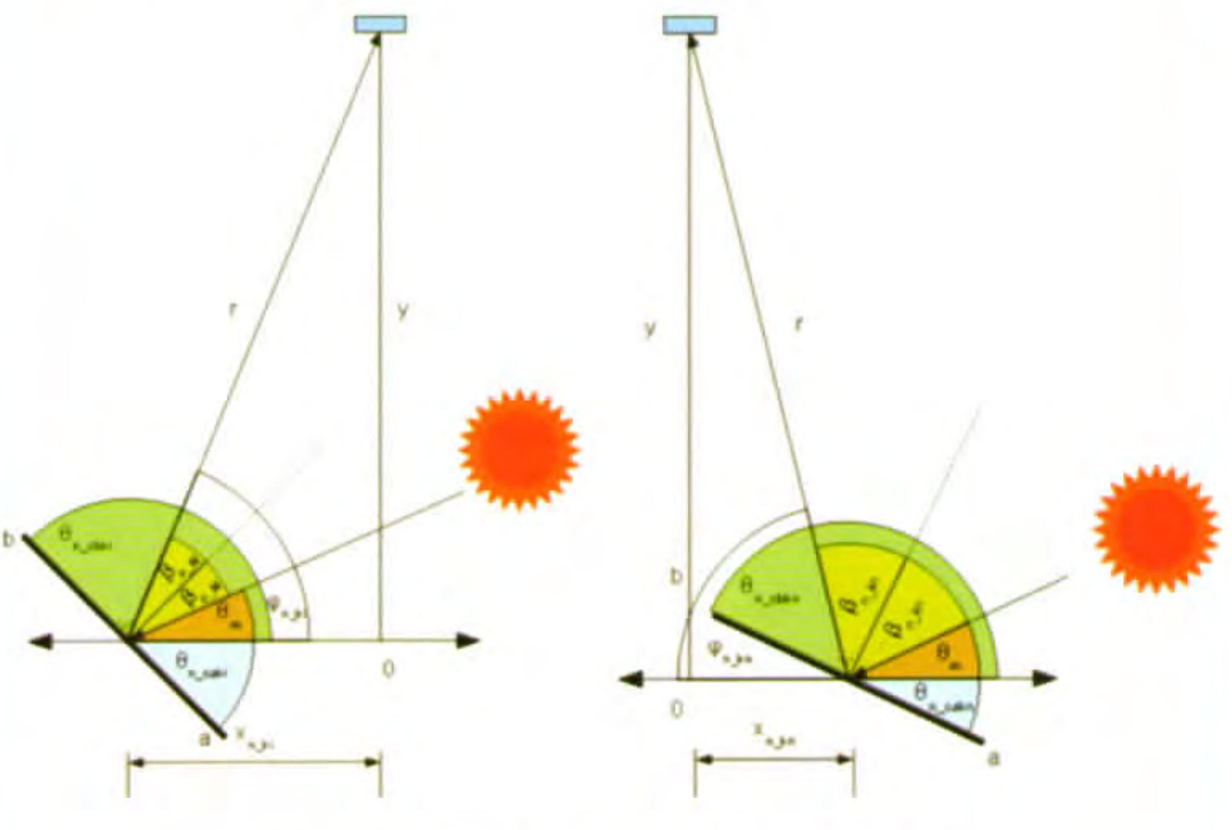
ISSN 0215-939

BERKALA ILMIAH MIPA

JOURNAL OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

MAJALAH ILMIAH MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM



Geometri penurunan persamaan penjejak surya

VOLUME 21 (1) JANUARI 2011

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
YOGYAKARTA

Daftar Isi

Volume 21 (1) Januari 2011

Nilai Eigen Max-Plus Bilangan Kabur

Fuzzy Number Max-Plus Eigenvalue

M. Andy Rudhito[1], Sri Wahyuni[2], Ari Suparwanto[2] dan F. Susilo[3]
[1]Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
rudhito@staff.usd.ac.id
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
[3]Jurusan Matematika FST , Universitas Sanata Dharma,Yogyakarta

Intisari

Artikel ini bertujuan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur. Artikel ini merupakan hasil kajian teoritis dan komputasi dengan menggunakan program MATLAB. Operasi maksimum dan penjumlahan pada bilangan kabur didefinisikan melalui potongan-α yang berupa interval bilangan real. Nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus diperluas menjadi nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur, melalui nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval. Dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur dapat ditentukan dengan terlebih dahulu menentukan nilai eigen dan vektor eigen setiap matriks potongan-α-nya. Dengan berdasarkan Teorema Dekomposisi pada himpunan kabur, dapat ditentukan fungsi keanggotaan nilai eigen dan fungsi keanggotaan elemen-elemen vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut. Dalam penentuan fungsi keangotaan komponen-komponen vektor eigen tersebut, jika diperlukan secara rekursif dapat dibentuk kombinasi linear batas-batas vektor eigen interval fundamental matriks potongan-α-nya.

Kata kunci: ***aljabar max-plus, nilai eigen, vektor eigen, bilangan kabur.***

Abstract

This paper aims to determine the eigenvalues and eigenvectors of matrices over fuzzy number max-plus algebra. This paper is a theoretical investigation based on literature and computation using MATLAB program. The maximum and addition operations of the fuzzy number is defined through its α-cuts which are the closed intervals. The eigenvalues and eigenvectors of matrices over max-plus algebra is extended into eigenvalues and eigenvectors of matrices over fuzzy number max-plus algebra, through eigenvalues and eigenvectors of matrices over interval max-plus algebra. The finding shows that eigenvalues and eigenvectors of matrices over fuzzy number max-plus algebra could be determined the eigenvalues and eigenvector of every its α-cuts matrices firstly. Based on the Decomposition Theorem on fuzzy set, we can determine the membership function of the eigenvalues and membership functions of the elements of eigenvectors corresponding to the eigenvalues. In determining the membership functions eigenvectors elements, if necessary can be done by forming linear combinations of the bounds of the its fundamental interval eigenvectors of its α-cuts matrix.

Keywords: ***max-plus algebra, eigenvalues, eigenvectors, fuzzy number.***

1. Pendahuluan

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya belum diketahui. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Waktu aktifitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Untuk itu waktu aktifitas jaringan dimodelkan dalam suatu bilangan kabur (*fuzzy number*). Akhir-akhir ini telah berkembang pemodelan jaringan yang melibatkan bilangan kabur. Untuk masalah penjadwalan yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Chanas. dan Zielinski (2001). Sedangkan untuk masalah model jaringan antrian yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Lüthi dan Haring (1997).

Dalam pemodelan suatu sistem jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus, graf untuk jaringan tersebut dinyatakan dengan menggunakan matriks, dengan unsur-unsurnya menyatakan waktu aktifitas antar titik pada jaringan tersebut. Selanjutnya sifat periodik sistem dapat dianalisis melalui nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus, seperti dalam Baccelli *et.al* (2001), Rudhito (2003). Pemodelan waktu aktifitas jaringan dengan menggunakan bilangan kabur dengan pendekatan aljabar max-plus akan terkait dengan matriks yang unsur-unsurnya berupa bilangan kabur. Dengan mengikuti pola pemodelan dan analisa jaringan dengan menggunakan aljabar max-plus, konsep dasar yang akan terkait dengan analisa sifat periodik sistem adalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur dari matriks dalam model tersebut.

Operasi-operasi aritmatika seperti $+$, $-$, $\times$, $/$, max dan min pada bilangan kabur pada umumnya didefinisikan dengan menggunakan Prinsip Perluasan (*Extension Principle*) dan dengan menggunakan potongan-α (α-*cut*) yang didasarkan pada Teorema Dekomposisi. Hal ini dapat dilihat dalam Zimmerman (1991) Lee. (2005) dan Susilo (2006). Dalam Susilo (2006) ditegaskan bahwa setiap bilangan kabur dapat dinyatakan secara tunggal dengan menggunakan potongan-α-nya. Karena potongan-α suatu bilangan kabur berupa interval tertutup maka operasi-operasi aritmatika pada bilangan kabur dapat dinyatakan menggunakan operasi-operasi aritmatika interval tertutup. Ditegaskan juga dalam Susilo (2006) bahwa operasi bilangan kabur dengan menggunakan Prinsip Perluasan dan dengan menggunakan potongan-α adalah ekivalen. Pembahasan terkait struktur aljabar interval-interval telah dibahas dalam Analisis Interval Idempoten oleh Litvinov dan Sobolevskii (2001). Theodorou dan Alevizos (2006) telah membahas nilai eigen kabur dengan operasi penjumlahan dan perkalian kabur melalui potongan-α untuk menyelesaikan masalah analisis korespondensi kabur yang terkait dengan masalah dalam statistik. Cechlarova (2005) telah membahas konsep nilai eigen eksistensial dan universal untuk matriks interval dengan operasi max dan plus.

Dalam artikel ini konsep nilai eigen dalam aljabar max-plus akan diperluas ke dalam konsep nilai eigen interval dalam aljabar max-plus interval. Selanjutnya nilai eigen kabur dalam aljabar max-plus bilangan kabur akan dikonstruksi berdasarkan nilai eigen matriks potongan-α-nya yang berupa nilai eigen interval.

2. Tinjauan Teori

2.1 Aljabar Max-Plus dan Nilai Eigen Max-Plus

Berikut ditinjau konsep dasar aljabar max-plus dan kaitannya dengan teori graf, serta eksistensi nilai eigen max-plus. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Baccelli *et.al* (2001), Rudhito, A (2003). Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon$,

$$a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := a + b.$$

Dapat ditunjukkan bahwa ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semifield, yaitu bahwa ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) disebut dengan *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$.

Aljabar max-pus $\mathbf{R}_{\max}$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall\, x,\ y \in \mathbf{R}_\varepsilon$ berlaku: jika $x \otimes y = \varepsilon$ maka $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$. Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ dengan $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Dalam $\mathbf{R}_{\max}$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq_m$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_{\max}$, jika $a \preceq_m b$, maka $a \oplus c \preceq_m b \oplus c$ dan $a \otimes c \preceq_m b \otimes c$. Pangkat k dari elemen $x \in \mathbf{R}$ dilambangkan dengan $x^{\otimes^k}$ didefinisikan sebagai berikut $x^{\otimes^0} := 0$ dan $x^{\otimes^k} := x \otimes x^{\otimes^{k-1}}$, dan didefinisikan pula $\varepsilon^{\otimes^0} := 0$ dan $\varepsilon^{\otimes^k} := \varepsilon$, untuk $k = 1, 2, \ldots$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p\times n}$ didefinisikan operasi $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0\ , & \text{jika } i = j \\ \varepsilon\ , & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j. Dapat ditunjukkan bahwa ($\mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dan elemen satuan matriks E. Sedangkan $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Pangkat k dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan $A^{\otimes^0} = E_n$ dan $A^{\otimes^k} = A \otimes A^{\otimes^{k-1}}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan $A \preceq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$. Perhatikan bahwa $A \preceq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_m B_{ij}$ untuk setiap i dan j. Dalam ($\mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $\oplus$, $\otimes$), operasi $\oplus$ dan $\otimes$ konsisten terhadap urutan $\preceq_m$, yaitu $\forall A, B, C \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, jika $A \preceq_m B$, maka $A \oplus C \preceq_m B \oplus C$, dan $A \otimes C \preceq_m B \otimes C$.

Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{\, \mathbf{x} = [\, x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n\times 1}$, sehingga $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur *vektor* atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Diberikan graf berarah $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V}$ himpunan titik-titik, yaitu $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, p\}$ dan $\mathcal{A}$ himpunan pasangan terurut titik-titik tersebut. Anggota $\mathcal{A}$ disebut *busur*. Graf berarah $\mathcal{G}$ dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in \mathcal{A}$ dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij}. Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i), dilambangkan dengan $w(j, i)$. *Graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah graf berarah berbobot $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan

$$\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathcal{A} = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}.$$

Bobot suatu lintasan didefinisikan sebagai jumlahan bobot busur-busur yang menyusun lintasan tersebut. Suatu rumus bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, dilambangkan dengan $\lambda_{\max}(A)$), adalah

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes^k})_{ii}\right).$$

Diberikan matriks semi-definit $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Didefinisikan $A^* := E \oplus A \oplus ... \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus$ ... dan $A^+ := A \otimes A^*$. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus matriks A* jika terdapat vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$ dengan $\mathbf{v} \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ tersebut disebut *vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ*. Diberikan matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa skalar $\lambda_{\max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A. Lebih lanjut untuk $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, jika $B^+_{ii} = 0$, maka kolom ke-i matriks B^* merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Kolom-kolom ke-i matriks B^* di atas, yang merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$, disebut *vektor-vektor eigen fundamental* yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Dapat ditunjukkan bahwa kombinasi linear max-plus vektor-vektor eigen fundamental matriks A juga merupakan vektor eigen yang berseuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$.

2.2 Aljabar Max-Plus Interval dan Matriks

Berikut ditinjau aljabar max-plus interval yang merupakan perluasan aljabar max-plus dan akan digunakan sebagai dasar pembahasan aljabar max-plus bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi. Pembahasan selengkap-nya dapat dilihat pada Rudhito, dkk., (2008a, 2008b). Didefinisikan

$\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] / \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x}\} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}$. *Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon$ didefinisi-kan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan:*

$x \,\overline{\oplus}\, y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$ dan

$x \,\overline{\otimes}\, y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$, $\forall$ x, y $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon$.

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $0 = [0, 0]$. Lebih lanjut karena $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif, maka $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang cukup dituliskan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n} := \{\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij}) \mid \mathrm{A}_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max})$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, A, B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$, didefinisi-kan $\alpha \,\overline{\otimes}\,$ A, dengan $(\alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A})_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}_{ij}$ dan $\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}$, dengan $(\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B})_{ij} = \mathrm{A}_{ij} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times p}$, B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{p \times n}$, didefinisikan A $\overline{\otimes}$ B dengan $(\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B})_{ij} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{p}} A_{ik} \,\overline{\otimes}\, B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$.

Untuk $A \in I(R)^{m\times n}_{\max}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in R^{m\times n}_{\max}$ dan $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in R^{m\times n}_{\max}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Didefinisikan *interval matriks dari* A, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{ A \in R^{m\times n}_{\max} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A} \}$ dan $I(R^{m\times n}_{\max})_b = \{ [\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in I(R)^{m\times n}_{\max} \}$. Untuk $\alpha \in I(R)_{\max}$, $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in I(R^{m\times n}_{\max})_b$, didefinisikan $\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$. Untuk $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(R^{m\times p}_{\max})_b$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in I(R^{p\times n}_{\max})^{*}$, didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(R^{n\times n}_{\max})_b$, maka $\underline{A}, \overline{A} \in R^{m\times n}_{\max}$, sehingga dapat ditentukan $A \in I(R)^{m\times n}_{\max}$, di mana $[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] \in I(R)_{\max}$, $\forall i$ dan j. Dengan demikian matriks interval $A \in I(R)^{m\times n}_{\max}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(R^{m\times n}_{\max})_b$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(R^{n\times n}_{\max})_b$ disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan* $A \in I(R)^{n\times n}_{\max}$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Akibat isomorfisma di atas, maka berlaku $\alpha \,\overline{\otimes}\, A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$, $A \,\overline{\oplus}\, B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \,\overline{\otimes}\, B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Didefinisikan $I(R)^{n}_{\max} := \{ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \mid x_i \in I(R)_{\max},\ i = 1, 2, \dots, n \}$. Himpunan $I(R)^{n}_{\max}$ dapat dipandang sebagai $I(R)^{n\times 1}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $I(R)^{n}_{\max}$ disebut *vektor interval atas* $I(R)_{\max}$. Vektor interval $\mathbf{x}$ bersesuaian dengan *interval vektor* $[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$, yaitu $\mathbf{x} \approx [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$.

2.3 Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Matriks

Beberapa pengertian dan konsep dasar himpunan dan bilangan kabur, dianggap telah dipahami pembaca, seperti dapat dibaca dalam Zimmermann (1991), Lee (2005) dan Susilo (2006).

Himpunan kabur $\widetilde{K}$ dalam semesta X dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut $\widetilde{K} = \{(x, \mu_{\widetilde{K}}(x)) \mid x \in X\}$, di mana $\mu_{\widetilde{K}}$ adalah fungsi keanggotaan himpunan kabur $\widetilde{K}$, yang merupakan suatu pemetaan dari semesta X ke interval tertutup [0, 1]. *Pendukung* (*support*) suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, dilambangkan dengan $pend(\widetilde{K})$ didefinisikan sebagai $pend(\widetilde{K}) = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{K}}(x) > 0\}$. Untuk suatu $\alpha \in [0, 1]$, *potongan-α* suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, yang dilambangkan dengan $\mathrm{pot}^{\alpha}(\widetilde{K}) = K^{\alpha}$, didefinisikan sebagai $K^{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{K}}(x) \geq \alpha\}$.

Teorema Dekomposisi: Jika A^{α} adalah potongan-α himpunan kabur $\widetilde{A}$ dalam semesta X dan $\widetilde{A}^{\alpha}$ adalah himpunan kabur dalam X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\widetilde{A}^{\alpha}}(x) = \alpha\chi_{A^{\alpha}}(x)$, di mana $\chi_{A^{\alpha}}$ adalah fungsi karakteristik himpunan A^{α}, maka $\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \widetilde{A}^{\alpha}$.

Bukti dapat dilihat pada Susilo (2006).

<u>Teorema Representasi</u>: Jika $\{K^\alpha\}$, $\forall\alpha \in [0, 1]$ adalah keluarga himpunan dalam semesta X yang memenuhi sifat tersarang (nested), yaitu jika $\alpha \le \beta$ maka berlaku $K^\alpha \supseteq K^\beta$, $\forall\alpha, \beta \in [0, 1]$, maka terdapat dengan tunggal himpunan kabur $\widetilde{L}$ dalam semesta X sedemikian hingga $L^\alpha = K^\alpha$, $\forall\alpha \in [0, 1]$.

Bukti dapat dilihat pada Pedrycz, W. dan Gomide, F. (2007).

Bilangan kabur $\widetilde{a}$ didefinisikan sebagai himpunan kabur dalam semesta **R** yang memenuhi sifat berikut:

i) normal, yaitu $a^1 \neq \varnothing$

ii) $\forall\alpha \in (0, 1]$, a^α adalah interval tertutup dalam **R**, yaitu $\exists\, \underline{a^\alpha}, \overline{a^\alpha} \in \mathbf{R}$ dengan $\underline{a^\alpha} \le \overline{a^\alpha}$ sedemikian sehingga $a^\alpha = [\underline{a^\alpha}, \overline{a^\alpha}] = \{x \in \mathbf{R} \mid \underline{a^\alpha} \le x \le \overline{a^\alpha}\}$.

iii) $pend(\widetilde{a})$ terbatas.

Untuk $\alpha = 0$, didefinisikan bahwa $a^0 = [inf(pend(\widetilde{a})), sup(pend(\widetilde{a}))]$.

Bilangan kabur segitiga $\widetilde{a}$, dilambangkan dengan (a_1, a, a_2), adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a - a_1}, & a_1 \le x \le a \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a}, & a < x \le a_2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

di mana $a_1 \neq a$ atau $a \neq a_2$.

Nampak bahwa potongan-α $\widetilde{a}$ di atas adalah

$a^\alpha = [(a - a_1)\alpha + a_1, -(a_2 - a)\alpha + a_2]$ dan $pend(\widetilde{a}) = (a_1, a_2)$.

Diberikan $\mathbf{F(R)}_{\widetilde{\varepsilon}} := \mathbf{F(R)} \cup \{\widetilde{\varepsilon}\}$ dengan $\mathbf{F(R)}$ adalah himpunan semua bilangan kabur dan $\widetilde{\varepsilon} := \{-\infty\}$, dengan potongan-$\alpha$-nya adalah $\varepsilon^\alpha = [-\infty, -\infty]$, $\forall\alpha \in [0, 1]$. Pada $(\mathbf{F(R)})_{\widetilde{\varepsilon}}$ didefinisikan operasi sebagai berikut. Untuk setiap $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathbf{F(R)}_{\widetilde{\varepsilon}}$ dengan $a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] \in \mathbf{I(R)}_{\max}$ dan $b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha] \in \mathbf{I(R)}_{\max}$,

i) $\widetilde{a} \mathbin{\widetilde{\oplus}} \widetilde{b} = \max(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ adalah bilangan kabur dengan potongan-α-nya
$(a \oplus b)^\alpha := [\underline{a}^\alpha \oplus \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \oplus \overline{b}^\alpha]$,

ii) $\widetilde{a} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{b} = \widetilde{a} + \widetilde{b}$ adalah bilangan kabur dengan potongan-α-nya
$(a \otimes b)^\alpha := [\underline{a}^\alpha \otimes \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \otimes \overline{b}^\alpha]$, untuk setiap $\alpha \in (0, 1]$.

Selanjutnya karena $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon), \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif, dari definisi operasi pada $(\mathbf{F(R)})_{\widetilde{\varepsilon}}$ di atas nampak bahwa $(\mathbf{F(R)}_\varepsilon, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif, dengan elemen netral $\widetilde{\varepsilon} = \{-\infty\}$ dan elemen satuan $\widetilde{e} = \{0\}$, dengan $e^\alpha = [0, 0]$, $\forall\alpha \in (0, 1]$). Semiring idempoten komutatif $\mathbf{F(R)}_{\max} := (\mathbf{F(R)}_\varepsilon, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes})$ disebut dengan *aljabar max-plus bilangan kabur*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{F(R)}_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{F(R)}_{\max}^{m\times n} := \{ \widetilde{A} = (\widetilde{A}_{ij}) \mid \widetilde{A}_{ij} \in \mathbf{F(R)}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n \}$. Matriks anggota $\mathbf{F(R)}_{\max}^{m\times n}$ disebut *matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur*. Selanjutnya matriks di atas cukup disebut dengan *matriks bilangan kabur*. Operasi $\widetilde{\oplus}$ dan $\widetilde{\otimes}$ pada $\mathbf{F(R)}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks bilangan kabur pada $(\mathbf{F(R)}_{\max}^{m\times n}$. Khususnya untuk matriks $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n\times n}$ didefinisikan $(\widetilde{A} \widetilde{\oplus} \widetilde{B})_{ij} = \widetilde{A}_{ij} \widetilde{\oplus} \widetilde{B}_{ij}$ dan $(\widetilde{A} \widetilde{\otimes} \widetilde{B})_{ij} = \widetilde{\bigoplus_{k=1}^{n}} \widetilde{A}_{ik} \widetilde{\otimes} \widetilde{B}_{kj}$.

Untuk setiap $\widetilde{A} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{m\times n}$, untuk suatu bilangan $\alpha \in [0, 1]$ didefinisikan *matriks potongan-α dari* $\widetilde{A}$, yaitu matriks interval $A^{\alpha} = (A_{ij}^{\alpha})$, dengan A_{ij}^{α} adalah potongan-α dari $\widetilde{A}_{ij}$ untuk setiap i dan j. Perhatikan bahwa $A^{\alpha} \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$, sehingga menurut hasil pada bagian 2.2 di atas diperoleh $A^{\alpha} \approx [\underline{A}^{\alpha}, \overline{A}^{\alpha}]$. Lebih lanjut untuk matriks $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in (\mathbf{F(R)}_{\max}^{n\times n}$ di mana $A^{\alpha} \approx [\underline{A}^{\alpha}, \overline{A}^{\alpha}]$ dan $B^{\alpha} \approx [\underline{B}^{\alpha}, \overline{B}^{\alpha}]$, diperoleh bahwa $\widetilde{A} \widetilde{\oplus} \widetilde{B}$ dan $\widetilde{A} \widetilde{\otimes} \widetilde{B}$ berturut-turut adalah matriks bilangan kabur dengan matriks potongan-α-nya adalah $(A \oplus B)^{\alpha} \approx [\underline{A}^{\alpha} \oplus \underline{B}^{\alpha}, \overline{A}^{\alpha} \oplus \overline{B}^{\alpha}]$ dan $(A \otimes B)^{\alpha} \approx [\underline{A}^{\alpha} \otimes \underline{B}^{\alpha}, \overline{A}^{\alpha} \otimes \overline{B}^{\alpha}]$.

Didefinisikan $\mathbf{F(R)}_{\max}^{n} := \{ \widetilde{x} = [\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n]^T \mid \widetilde{x}_i \in \mathbf{F(R)}_{\max}, i = 1, 2, ..., n \}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{F(R)}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{F(R)}_{\max}^{n\times 1}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{F(R)}_{\max}^{n}$ disebut *vektor bilangan kabur*.

3. Cara Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis. Diperhatikan dan diselidiki proses konstruksi nilai eigen max-plus bilangan kabur melalui potongan-α-nya yang didasarkan pada Teorema Dekomposisi. Perhitungan-perhitungan akan dilakukan dengan bantuan program *MATLAB*.

4. Hasil dan Pembahasan

Terlebih dahulu akan dibahas mengenai nilai eigen interval

Definisi 1 *Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$. Skalar interval $\lambda \in \mathbf{I(R)}_{\max}$ disebut nilai eigen max-plus interval matriks interval A jika terdapat suatu vektor interval $\mathbf{v} \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n}$ dengan $\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}$ sehingga $A \overline{\otimes} \mathbf{v} = \lambda \overline{\otimes} \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ tersebut disebut vektor eigen max-plus interval matriks interval A yang bersesuaian dengan λ.*

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen max-plus interval suatu matriks interval.

Teorema 1 *Diberikan $A \in I(R)_{\max}^{n\times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Skalar interval $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A, di mana $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A})$ berturut-turut adalah bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(\underline{A})$ dan $\mathcal{G}(\overline{A})$.*

Bukti: Untuk setiap matriks $A \in [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, berlaku $\underline{\mathrm{A}} \preceq_{\mathrm{m}} A_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{A}}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan "$\preceq_{\mathrm{m}}$", maka berlaku $\underline{\mathrm{A}}^{\otimes k} \preceq_{\mathrm{m}} A^{\otimes k} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{A}}^{\otimes k}$, untuk k = 1, 2, ... , sehingga berlaku $\bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}(\underline{\mathrm{A}}^{\otimes k})_{ii}) \preceq_{\mathrm{m}} \bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}(A^{\otimes k})_{ii}) \preceq_{\mathrm{m}} \bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}(\overline{\mathrm{A}}^{\otimes k})_{ii})$. Jadi $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}) \preceq_{\mathrm{m}} \lambda_{\max}(A) \preceq_{\mathrm{m}} \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})$. Ambil skalar interval $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$. Untuk matriks $\underline{\mathrm{B}} = -\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}) \otimes \underline{\mathrm{A}}$, jika $\underline{\mathrm{B}}^{+}_{ii} = 0$, maka kolom-kolom ke-$i$ matriks $\underline{\mathrm{B}}^{*}$ merupakan vektor-vektor eigen max-plus fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen max-plus $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$, demikian juga analog untuk $\overline{\mathrm{B}}$. Misalkan $\underline{\mathbf{v}}_b$ dan $\overline{\mathbf{v}}_c$, di mana $b, c = 1, 2, ..., p$, dengan $p \leq n$, berturut-turut adalah vektor-vektor eigen max-plus fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})$.

1. Jika terdapat pasangan $\underline{\mathbf{v}}_b$ dan $\overline{\mathbf{v}}_c$ sedemikian hingga $\underline{\mathbf{v}}_b \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathbf{v}}_c$, maka diperoleh vektor interval $\mathrm{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}_b, \overline{\mathbf{v}}_c]$ di mana berlaku $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{v}}_b, \overline{\mathbf{v}}_c] = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{v}}_b, \overline{\mathbf{v}}_c]$ atau $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{v} = \lambda \,\overline{\otimes}\, \mathrm{v}$. Jadi skalar interval $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A.
2. Jika untuk setiap pasang $\underline{\mathbf{v}}_b$ dan $\overline{\mathbf{v}}_c$ berlaku $\underline{\mathbf{v}}_b \not\preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathbf{v}}_c$ maka dapat dibentuk kombinasi linear vektor-vektor eigen fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$, sehingga diperoleh $\underline{\mathbf{v}}^{*}_b$ di mana $\underline{\mathbf{v}}^{*}_b \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathbf{v}}_c$. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan membentuk $\underline{\mathbf{v}}^{*}_b = \delta \otimes \underline{\mathbf{v}}_b$, dengan $\delta = \min_i(\overline{\mathbf{v}}_{bi} - \underline{\mathbf{v}}_{bi})$, untuk $i = 1, 2, ..., n$. Selanjutnya ambil vektor interval $\mathrm{v}^{*} \approx [\underline{\mathbf{v}}^{*}_b, \overline{\mathbf{v}}_c]$, maka $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{v}}^{*}_b, \overline{\mathbf{v}}_c] = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{v}}^{*}_b, \overline{\mathbf{v}}_c]$ atau $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{v}^{*} = \lambda \,\overline{\otimes}\, \mathrm{v}^{*}$. Jadi $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A. ∎

Definisi 2 *Diberikan $\tilde{A} \in \mathbf{F(R)}^{n\times n}_{\max}$. Skalar bilangan kabur $\tilde{\lambda} \in \mathbf{F(R)}_{\max}$ disebut nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks $\tilde{A}$ jika terdapat suatu vektor bilangan kabur $\tilde{v} \in \mathbf{F(R)}^{n}_{\max}$ dengan $\tilde{v} \neq \tilde{\varepsilon}_{n\times 1}$ sehingga $\tilde{A} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{v} = \tilde{\lambda} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{v}$. Vektor $\tilde{v}$ tersebut disebut vektor eigen max-plus bilangan kabur matriks $\tilde{A}$ yang bersesuaian dengan $\tilde{\lambda}$.*

Misalkan A^{α} adalah matriks potongan-α matriks $\tilde{A} \in \mathbf{F(R)}^{n\times n}_{\max}$, di mana $A^{\alpha} \approx [\underline{A^{\alpha}}, \overline{A^{\alpha}}]$. Misalkan pula $\lambda^{\alpha} = \lambda_{\max}(A^{\alpha}) = [\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$ di mana $\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})$ berturut-turut adalah bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(\underline{A^{\alpha}})$ dan $\mathcal{G}(\overline{A^{\alpha}})$. Akan ditunjukkan bahwa keluarga interval $[\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$, dengan $\alpha \in [0, 1]$, merupakan keluarga potongan-α suatu bilangan kabur.

i) Karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, maka $\underline{A^{\alpha}} \preceq_m \overline{A^{\alpha}}$. Karena operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka $(\underline{A^{\alpha}})^{\otimes k} \preceq_m (\overline{A^{\alpha}})^{\otimes k}$, untuk $k = 1, 2, \ldots$, sehingga berlaku $\bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}((\underline{A^{\alpha}})^{\otimes k})_{ii}) \preceq_m \bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}((\overline{A^{\alpha}})^{\otimes k})_{ii})$ atau $\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}) \preceq_m \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})$. Jadi $\lambda_{\max}(A^{\alpha}) = [\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$ merupakan interval, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$.

ii) Karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, maka $A_{ij}^{1} \neq \varnothing$, sehingga $\lambda_{\max}(A^{1}) = [\lambda_{\max}(\underline{A^{1}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{1}})] \neq \varnothing$.

iii) Karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, maka unsur-unsur $\widetilde{A}$ berupa bilangan-bilangan kabur, di mana keluarga potongan-α-nya tersarang, sehingga untuk $\alpha \leq \beta$ berlaku $\underline{A^{\alpha}} \preceq_m \underline{A^{\beta}} \preceq_m \overline{A^{\beta}} \preceq_m \overline{A^{\alpha}}$. Karena operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka $(\underline{A^{\alpha}})^{\otimes k} \preceq_m (\underline{A^{\beta}})^{\otimes k} \preceq_m (\overline{A^{\beta}})^{\otimes k} \preceq_m (\overline{A^{\alpha}})^{\otimes k}$, untuk $k = 1, 2, \ldots$, sehingga $\bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}((\underline{A^{\alpha}})^{\otimes k})_{ii}) \preceq_m \bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}((\underline{A^{\beta}})^{\otimes k})_{ii}) \preceq_m \bigoplus_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\bigoplus_{i=1}^{n}((\overline{A^{\beta}})^{\otimes k})_{ii}) \preceq_m \bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}((\overline{A^{\alpha}})^{\otimes k})_{ii})$ atau $\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}) \preceq_m \lambda_{\max}(\underline{A^{\beta}}) \preceq_m \lambda_{\max}(\overline{A^{\beta}}) \preceq_m \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$. Jadi $\lambda_{\max}(A^{\alpha}) = [\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$, dengan $\alpha \in [0, 1]$, merupakan keluarga interval tersarang.

iv) Karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, maka A_{ij}^{0} terbatas, sehingga $\lambda_{\max}(A^{0}) = [\lambda_{\max}(\underline{A^{0}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{0}})]$ juga terbatas.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa untuk setiap interval $\lambda^{\alpha} = \lambda_{\max}(A^{\alpha}) = [\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$, dengan $\alpha \in [0, 1]$, terdapat vektor interval $\mathbf{v}^{\alpha} \approx [\underline{\mathbf{v}^{\alpha}}, \overline{\mathbf{v}^{\alpha}}]$, sedemikian hingga setiap komponennya, yaitu $v_i^{\alpha} = [\underline{v_i^{\alpha}}, \overline{v_i^{\alpha}}]$ merupakan keluarga potongan-α suatu bilangan kabur. Ambil $\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha}$ dan $\overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}$, di mana $b, c = 1, 2, \ldots, p$, dengan $p \leq n$, berturut-turut adalah vektor-vektor eigen max-plus fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})$. Kemungkinan yang dapat terjadi adalah sebagai berikut.

1. Jika terdapat pasangan $\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha}$ dan $\overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}$ sedemikian hingga berlaku $\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha} \preceq_m \overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}$, maka komponen-komponen vektor interval yang bersesuaian dengan $[\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha}, \overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}]$, yaitu $[\underline{v_{bi}^{\alpha}}, \overline{v_{ci}^{\alpha}}]$ merupakan interval, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$ dan $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Lebih lanjut ada dua kemungkinan berikut.
   a) Jika $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ di mana $\alpha \leq \beta$ dan berlaku $\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha} \preceq_m \underline{\mathbf{v}}_b^{\beta} \preceq_m \overline{\mathbf{v}}_c^{\beta} \preceq_m \overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}$, maka komponen-komponen vektor interval yang bersesuaian dengan $[\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha}, \overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}]$, yaitu $[\underline{v_{bi}^{\alpha}}, \overline{v_{ci}^{\alpha}}]$, merupakan keluarga interval tersarang, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Dengan demikian untuk kasus ini diperoleh bahwa $\mathbf{v}^{\alpha} \approx [\underline{\mathbf{v}^{\alpha}}, \overline{\mathbf{v}^{\alpha}}] = [\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha}, \overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}]$.
   b) Jika $\exists\ \alpha, \beta \in [0, 1]$ di mana $\alpha \leq \beta$ dan berlaku $\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha} \not\preceq_m \underline{\mathbf{v}}_b^{\beta}$ atau $\overline{\mathbf{v}}_c^{\beta} \not\preceq_m \overline{\mathbf{v}}_c^{\alpha}$.
      i) Jika $\underline{\mathbf{v}}_b^{\alpha} \not\preceq_m \underline{\mathbf{v}}_b^{\beta}$ maka $\exists\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sehingga $\underline{v_{bi}^{\alpha}} \succ_m \underline{v_{bi}^{\beta}}$. Misalkan

$\underline{v}'^{\alpha}_{bi} = \begin{cases} \overline{v}^{\alpha}_{bi}, \text{jika } \overline{v}^{\beta}_{bi} \succeq_m \overline{v}^{\alpha}_{bi} \\ \overline{v}^{\beta}_{bi}, \text{jika } \overline{v}^{\beta}_{bi} \prec_m \overline{v}^{\alpha}_{bi} \end{cases}$,

$\underline{\delta}_i(\alpha) = \underline{v}'^{\alpha}_{bi} - v^{\alpha}_{bi}$,

$\underline{\delta}'_i(\alpha) = \begin{cases} \underline{\delta}_i(\beta), \text{jika } \underline{\delta}_i(\alpha) \geq \underline{\delta}_i(\beta) \\ \underline{\delta}_i(\alpha), \text{jika } \underline{\delta}_i(\alpha) < \underline{\delta}_i(\beta) \end{cases}$ $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha > \beta$,

$\underline{\delta}(\alpha) = \min_i\{\underline{\delta}_i(\alpha)\}$,

$\underline{\delta}'(\alpha) = \min_i\{\underline{\delta}'_i(\alpha)\}$,

$i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Selanjutnya dibentuk kombinasi linear $\hat{\underline{v}}^{\alpha}_b = (\underline{\delta}(\alpha) + \underline{\delta}'(\alpha)) \otimes \underline{v}^{\alpha}_b$. Dari pendefinisian $\underline{v}'^{\alpha}_{bi}$, $\underline{\delta}_i(\alpha)$, $\underline{\delta}'_i(\alpha)$, $\underline{\delta}(\alpha)$ dan $\underline{\delta}'(\alpha)$ di atas nampak bahwa $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ dengan $\alpha \leq \beta$ berlaku $\hat{\underline{v}}^{\alpha}_b \preceq_m \hat{\underline{v}}^{\beta}_b$, sehingga $\hat{\underline{v}}^{\alpha}_{bi} \preceq_m \hat{\underline{v}}^{\beta}_{bi}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

ii) Jika $\overline{v}^{\beta}_c \not\preceq_m \overline{v}^{\alpha}_c$ maka $\exists\ i \in \{1, 2, ..., n\}$ sedemikian hingga $\overline{v}^{\beta}_{ci} \succ_m \overline{v}^{\alpha}_{ci}$. Misalkan

$\overline{v}'^{\alpha}_{ci} = \begin{cases} \overline{v}^{\alpha}_{ci}, \text{jika } \overline{v}^{\beta}_{ci} \preceq_m \overline{v}^{\alpha}_{ci} \\ \overline{v}^{\beta}_{ci}, \text{jika } \overline{v}^{\beta}_{ci} \succ_m \overline{v}^{\alpha}_{ci} \end{cases}$,

$\overline{\delta}_i(\alpha) = \overline{v}'^{\alpha}_{ci} - \overline{v}^{\alpha}_{ci}$,

$\overline{\delta}'_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{\delta}_i(\beta), \text{jika } \overline{\delta}_i(\alpha) \leq \overline{\delta}_i(\beta) \\ \overline{\delta}_i(\alpha), \text{jika } \overline{\delta}_i(\alpha) > \overline{\delta}_i(\beta) \end{cases}$,

$\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha > \beta$,

$\overline{\delta}(\alpha) = \max_i\{\overline{\delta}_i(\alpha)\}$,

$\overline{\delta}'(\alpha) = \max_i\{\overline{\delta}'_i(\alpha)\}$,

$i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Selanjutnya dibentuk kombinasi linear $\hat{\overline{v}}^{\alpha}_c = (\overline{\delta}(\alpha) + \overline{\delta}'(\alpha)) \otimes \overline{v}^{\alpha}_c$. Dari pendefinisian $\overline{v}'^{\alpha}_{ci}$, $\overline{\delta}_i(\alpha)$, $\overline{\delta}'_i(\alpha)$, $\overline{\delta}(\alpha)$ dan $\overline{\delta}'(\alpha)$ di atas nampak bahwa $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ dengan $\alpha \leq \beta$ berlaku $\hat{\overline{v}}^{\beta}_c \preceq_m \hat{\overline{v}}^{\alpha}_c$, sehingga $\hat{\overline{v}}^{\beta}_{ci} \preceq_m \hat{\overline{v}}^{\alpha}_{ci}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Selanjutnya karena $\underline{v}^{\beta}_{bi} \preceq_m \overline{v}^{\beta}_{bi}$ dan dari pendefinisian $\underline{\delta}(\alpha)$, $\underline{\delta}'(\alpha)$, $\overline{\delta}(\alpha)$ dan $\overline{\delta}'(\alpha)$ di atas jelas bahwa $\underline{v}^{\beta}_{bi} \preceq_m \hat{\overline{v}}^{\beta}_{ci}$. Dengan demikian diperoleh bahwa $\hat{\underline{v}}^{\alpha}_{bi} \preceq_m \hat{\underline{v}}^{\beta}_{bi} \preceq_m \hat{\overline{v}}^{\beta}_{ci} \preceq_m \hat{\overline{v}}^{\alpha}_{ci}$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ di mana $\alpha \leq \beta$ dan $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Jadi dapat diperoleh suatu keluarga interval tersarang $[\hat{\underline{v}}^{\alpha}_{bi}, \hat{\overline{v}}^{\alpha}_{ci}]$, dengan $\alpha \in [0, 1]$ dan $\forall i = 1, 2, ..., n$. Dengan demikian dalam kasus ini $v^{\alpha} \approx [\underline{v}^{\alpha}, \overline{v^{\alpha}}] = [\hat{\underline{v}}^{\alpha}_b, \hat{\overline{v}}^{\alpha}_c]$.

2. Jika untuk setiap pasang $\underline{v}^{\alpha}_b$ dan $\overline{v}^{\alpha}_c$ berlaku $\underline{v}^{\alpha}_b \not\preceq_m \overline{v}^{\alpha}_c$ maka dapat dibentuk kombinasi linear vektor-vektor eigen fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{A}^{\alpha})$, sehingga diperoleh $\underline{v}^{*\alpha}_b$ di mana $\underline{v}^{*\alpha}_b \preceq_m \overline{v}^{\alpha}_c$. Salah satu cara yang dapat

dilakukan adalah dengan membentuk $\underline{v}^{*\alpha}_{b} = \delta \otimes \underline{v}^{\alpha}_{b}$, dengan $\delta = \min_i\{\min_\alpha\{\overline{v}^{\alpha}_{ci}\} - \underline{v}_{bi}\}$, untuk $\alpha \in [0, 1]$ dan $i = 1, 2, ..., n$. Dengan demikian komponen-komponen vektor interval $v^{\alpha} \approx [\underline{v}^{*\alpha}_{b}, \overline{v}^{\alpha}_{c}]$, yaitu $[\underline{v}^{*\alpha}_{bi}, \overline{v}^{\alpha}_{ci}]$ merupakan interval, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$ dan $\forall i = 1, 2, ..., n$. Lebih lanjut ada dua kemungkinan berikut.

a) Jika $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ di mana $\alpha \leq \beta$ berlaku $\underline{v}^{*\alpha}_{b} \preceq_m \underline{v}^{*\beta}_{b} \preceq_m \overline{v}^{\beta}_{c} \preceq_m \overline{v}^{\alpha}_{c}$, maka komponen-komponen vektor interval yang bersesuaian dengan $[\underline{v}^{*\alpha}_{b}, \overline{v}^{\alpha}_{c}]$, yaitu $[\underline{v}^{*\alpha}_{bi}, \overline{v}^{\alpha}_{ci}]$ merupakan keluarga interval tersarang, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Dengan demikian untuk kasus ini diperoleh bahwa $v^{\alpha} \approx [\underline{v}^{\alpha}, \overline{v^{\alpha}}] = [\underline{v}^{*\alpha}_{b}, \overline{v}^{\alpha}_{c}]$.

b) Jika $\exists\ \alpha, \beta \in [0, 1]$ di mana $\alpha \leq \beta$ dan berlaku $\underline{v}^{*\alpha}_{b} \not\preceq_m \underline{v}^{*\beta}_{b}$ atau $\overline{v}^{\beta}_{c} \not\preceq_m \overline{v}^{\alpha}_{c}$, analog dengan cara 1. *b)* di atas dapat diperoleh suatu keluarga interval tersarang.

Selanjutnya karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$, maka $A^{1}_{ij} \neq \emptyset$, sehingga $\lambda_{\max}(A^{1}) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^{1}), \lambda_{\max}(\overline{A^{1}})] \neq \emptyset$ dan $v^{1} = [\underline{v}^{1}_{i}, \overline{v}^{1}_{i}] \neq \emptyset$. Demikian pula karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$, maka A^{0}_{ij} masing-masing terbatas, sehingga $\lambda_{\max}(A^{0}) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^{0}), \lambda_{\max}(\overline{A^{0}})]$ dan $v^{0} = [\underline{v}^{0}_{i}, \overline{v^{0}_{i}}]$ juga terbatas.

Jadi terdapat vektor interval $v^{\alpha} \approx [\underline{v}^{\alpha}, \overline{v^{\alpha}}]$, sedemikian hingga setiap komponennya, yaitu $v^{\alpha}_{i} = [\underline{v}^{\alpha}_{i}, \overline{v^{\alpha}_{i}}]$ merupakan keluarga potongan-α suatu bilangan kabur.

Teorema 2 Diberikan $\widetilde{A} \in F(R)^{n\times n}_{\max}$. Skalar bilangan kabur $\widetilde{\lambda}_{\max}(\widetilde{A}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \widetilde{\lambda}^{\alpha}_{\max}$, dengan $\widetilde{\lambda}^{\alpha}_{\max}$ adalah himpunan kabur dalam R dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\widetilde{\lambda}^{\alpha}_{\max}}(x) = \alpha\, \chi_{\widetilde{\lambda}^{\alpha}_{\max}}(x)$, di mana $\chi_{\widetilde{\lambda}^{\alpha}_{\max}}$ adalah fungsi karakteristik himpunan $[\lambda_{\max}(\underline{A}^{\alpha}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$, merupakan nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks $\widetilde{A}$.

Bukti: Menurut penjelasan di atas (di bawah Definisi 2 sampai di atas Teorema 2) skalar interval $\lambda^{\alpha} = [\lambda_{\max}(\underline{A}^{\alpha}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$ merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A^{α}, $\forall \alpha \in [0,1]$, yaitu terdapat vektor interval $v^{\alpha} \approx [\underline{v}^{\alpha}, \overline{v}^{\alpha}]$ sehingga memenuhi persamaan $A^{\alpha} \overline{\otimes}\ v^{\alpha} = \lambda^{\alpha} \overline{\otimes}\ v^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Lebih lanjut $[\lambda_{\max}(\underline{A}^{\alpha}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$ dan $[\underline{v}^{\alpha}_{i}, \overline{v^{\alpha}_{i}}]$ masing-masing merupakan potongan-α suatu bilangan kabur. Kemudian dengan menggunakan Teorema Dekomposisi, skalar bilangan kabur $\widetilde{\lambda}_{\max}(\widetilde{A}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \widetilde{\lambda}^{\alpha}_{\max}$ merupakan nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks $\widetilde{A}$. Selanjutnya dengan menggunakan Teorema Dekomposisi dapat diperoleh juga vektor bilangan kabur $\widetilde{v}$ dengan $\widetilde{v}_{i} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \widetilde{v}^{\alpha}_{i}$ di mana $\widetilde{v}^{\alpha}_{i}$ adalah himpunan kabur dalam **R** dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\widetilde{v}^{\alpha}_{i}}(x) = \alpha\, \chi_{v^{\alpha}_{i}}(x)$, dengan $\chi_{v^{\alpha}_{i}}$ adalah fungsi karakteristik himpunan $v^{\alpha}_{i} = [\underline{v}^{\alpha}_{i}, \overline{v^{\alpha}_{i}}]$, untuk setiap

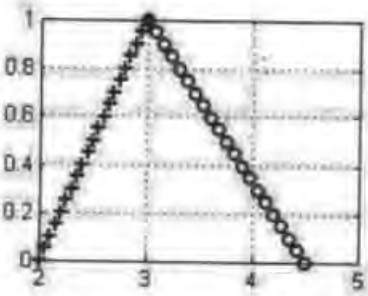
i = 1, 2, ..., n, yang merupakan vektor eigen max-plus bilangan kabur matriks $\widetilde{A}$ yang bersesuaian dengan $\widetilde{\lambda}_{\max}(\widetilde{A})$. ∎

Vektor eigen max-plus bilangan kabur seperti yang diperoleh dalam bukti Teorema 2 di atas disebut *vektor eigen max-plus bilangan kabur fundamental.*

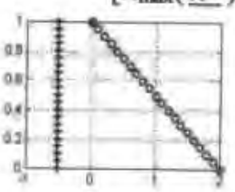
Contoh 1 Unsur-unsur dalam matriks bilangan kabur berikut adalah bilangan kabur segitiga (a_1, a, a_2). Diberikan matriks bilangan kabur

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} (-2,-1,0) & (3,4,6) & (1,2,3) \\ (1,2,3) & (-1,0,1) & (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) \\ (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) & (2,4,5) & (-1,0,1) \end{bmatrix}.$$

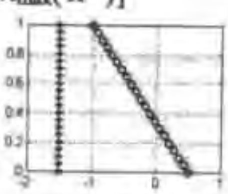
Dengan bantuan program *MATLAB* diperoleh grafik titik-titik batas potongan-α $\widetilde{\lambda}_{\max}(\widetilde{A})$ dan $\widetilde{v}$, $\alpha = 0, 0.05, \ldots, 1$ dalam Gambar 1 berikut.



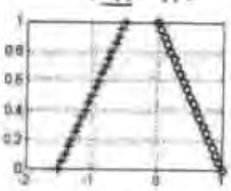
$[\lambda_{\max}(\underline{A^{\alpha}}), \lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})]$



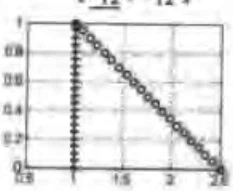
$[\underline{v_{11}^{\alpha}}, \overline{v_{11}^{\alpha}}]$



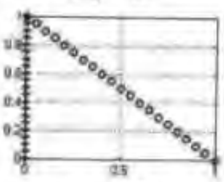
$[\underline{v_{12}^{\alpha}}, \overline{v_{12}^{\alpha}}]$



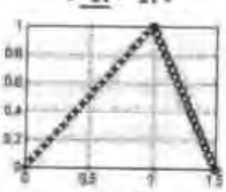
$[\underline{v_{13}^{\alpha}}, \overline{v_{13}^{\alpha}}]$



$[\underline{v_{21}^{\alpha}}, \overline{v_{21}^{\alpha}}]$



$[\underline{v_{22}^{\alpha}}, \overline{v_{22}^{\alpha}}]$



$[\underline{v_{23}^{\alpha}}, \overline{v_{23}^{\alpha}}]$

Gambar 1 Grafik titik-titik batas potongan-α

Dari Gambar 1 di atas nampak $\widetilde{\lambda}_{\max}(\widetilde{A}) =$ (2, 3, 4.5), dengan vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian adalah $\widetilde{v}_1$ dan $\widetilde{v}_2$ dengan komponen-komponennya berturut-turut adalah $\widetilde{v}_{11}$, $\widetilde{v}_{12}$, $\widetilde{v}_{13}$ dan $\widetilde{v}_{21}$, $\widetilde{v}_{22}$, $\widetilde{v}_{23}$ di mana fungsi keanggotaanya adalah sebagai berikut

$$\mu_{\widetilde{v}_{11}}(x) = \begin{cases} 1 & , 0.5 \le x \le 0 \\ \dfrac{2-x}{2} & , 0 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases},$$

$$\mu_{\widetilde{v}_{12}}(x) = \begin{cases} 1 & , -1.5 \le x \le -1 \\ \dfrac{-1-x}{1.5} & , -1 < x \le 0.5 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{v}_{13}}(x) = \begin{cases} x+1.5 & , -1.5 \le x \le -0.5 \\ 1 & , -0.5 < x \le 0.5 \\ 1-x & , 0.5 < x \le 1 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{v}_{21}}(x) = \begin{cases} \dfrac{2.5-x}{1.5} & , 1 \le x \le 2.5 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases},$$

$$\mu_{\widetilde{v}_{22}}(x) = \begin{cases} 1-x & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases},$$

$$\mu_{\widetilde{v}_{23}}(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1.5-x}{0.5} & , 1 < x \le 1.5 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}.$$

5. Kesimpulan dan Saran

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur dapat ditentukan dengan terlebih dahulu menentukan nilai eigen dan vektor eigen setiap matriks potongan-α-nya. Dengan berdasarkan Teorema Dekomposisi pada himpunan kabur, dapat ditentukan fungsi keanggotaan nilai eigen dan fungsi keanggotaan elemen-elemen vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut. Dalam penentuan fungsi keanggotaan komponen-komponen vektor eigen tersebut, jika diperlukan secara rekursif dapat dibentuk kombinasi linear batas-batas vektor eigen interval fundamental matriks potongan-α-nya.

Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan pembahasan penerapan nilai eigen max-plus bilangan kabur untuk membahas sifat-sifat periodik jaringan dengan waktu aktifitas yang dimodelkan dengan bilangan kabur.

Daftar Pustaka

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. Synchronization and Linearity. New York: John Wiley & Sons.

Cechlarova, K. 2005. Eigenvectors of interval matrices over max-plus algebra. *Journal Discrete Applied Mathematics.* Vol 150 Issues 1. pp. 2-15,

Chanas, S. and Zielinski, P. 2001. Critical path analysis in the network with fuzzy activity times. *Fuzzy Sets and Systems.* 122 (2001) pp. 195–204.

Lee, K.H. 2005. First Course on Fuzzy Theory and Applications. Berlin: Spinger-Verlag.

Litvinov, G.L. and Sobolevskii, A.N. 2001. Idempotent Interval Analysis and Optimization Problems. *Reliab. Comput.*, 7, 353 – 377.

Lüthi, J. and Haring, G. 1997. Fuzzy Queueing Network Models of Computing Systems. Proceedings of the 13th UK Performance Engineering Workshop, Ilkley, UK, Edinburgh University Press, July 1997. pp. 11/1 – 11/15.

Pedrycz, W. and Gomide, F. 2007. Fuzzy Systems Engineering Toward Human-Centric Computing. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc

Rudhito, A. 2003. Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, A. , Wahyuni, S., Suparwanto, A. dan Susilo, F. 2008a. "Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008. pp. 14-22.

Rudhito, A. , Wahyuni, S., Suparwanto, A. dan Susilo, F. 2008b. "Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008. pp. 23-32.

Susilo, F. 2006. Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya. Edisi kedua. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Theodorou, Y. and Alevizos, P. 2006. The fuzzy eigenvalue problem of fuzzy correspondence analysis. *Journal of Interdisciplinary Mathematics.* Vol. 9, No. 1, pp. 115-137.

Zimmermann, H.J., 1991. Fuzzy Set Theory and Its Applications. Boston: Kluwer Academic Publishers.