

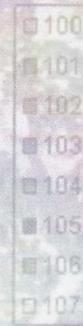
ISSN: 1412-1220

JURNAL ILMIAH

# Mat Stat

Vol. 11 No. 1 Januari 2011

MATEMATIKA, STATISTIKA



Jurnal Mat Stat	Vol. 11	No. 1	Hlm. 1-74	Jakarta Januari 2011	ISSN: 1412 - 1220
--------------------	---------	-------	-----------	-------------------------	----------------------

JURNAL ILMIAH  
**Mat Stat**

Vol. 11 No. 1 Januari 2011

Jurnal Ilmiah MATEMATIKA, STATISTIKA ( **Mat Stat** ) diterbitkan oleh Direktorat Riset dan HKI BINUS University memfokuskan pada artikel ilmiah berupa hasil penelitian, pengembangan ilmu dalam bidang matematika, statistika, dan aplikasinya. Tujuan publikasi jurnal ini adalah penyebarluasan hasil kajian dan penelitian untuk meningkatkan penguasaan, pengembangan, penerapan matematika dan statistika dalam bidang teknik, komputer dan industri, serta aplikasi lainnya.

**Pelindung**

Direktorat Riset dan HKI

**Penanggung Jawab**

Dekan FST Binus University

**Ketua Penyunting**

Drs. Ngarap Im Manik, M.Kom.

**Dewan Penyunting**

Prof. Dr. Gerardus Polla, M.App.Sc  
 Prof. Dr. Edi Abdurachman, MS, M.Sc  
 Prof. Bahtiar S. Abbas, Ph.D  
 Dr. Haryono Soeparano, M.Sc  
 Dr. Ashadi Salim  
 Drs. Iwa Sungkawa, MS  
 Rojali, S.Si, M.Si

**Editor & Setter**

Dra. Endang Ernawati, M.Lib.  
 Prastari Asri Wiweko, S.S.  
 Holil  
 Angga Ferdiansyah

**Sekretariat**

Anindito, S.Kom., M.TI

**Alamat Sekretariat**

Direktorat Riset dan HKI  
 BINUS University  
 Kampus Anggrek, Jl.Kebon Jeruk Raya 27  
 Kebon Jeruk, Jakarta Barat 11530  
 Telp. 021-5360660 ext. 1190  
 Fax. 021-5300244  
<http://www.binus.edu>  
 e-mail: manik@binus.edu; anindito@binus.edu

**Terbit & ISSN**

Terbit 2 (dua) kali dalam setahun (Januari & Juli)  
 ISSN: 1412-1220

# JURNAL ILMIAH $M\alpha\tau$ Stat

Vol. 11 No. 1 Januari 2011

Jurnal Ilmiah MATEMATIKA, STATISTIKA ( $M\alpha\tau$  Stat) diterbitkan oleh Direktorat Riset dan HKI BINUS University memfokuskan pada artikel ilmiah berupa hasil penelitian, pengembangan ilmu dalam bidang matematika, statistika, dan aplikasinya. Tujuan publikasi jurnal ini adalah penyebarluasan hasil kajian dan penelitian untuk meningkatkan penguasaan, pengembangan, penerapan matematika dan statistika dalam bidang teknik, komputer dan industri, serta aplikasi lainnya.

## DAFTAR ISI

<b>Sabungan H.Hutapea; Alryadi; Ngarap Im Manik</b> Rancangan Model Simulasi Optimalisasi Antrian Penumpang Busway-Transjakarta dengan Metoda Multichannel Queue ( <i>Simulation Planning Model of Busway-Transjakarta Queuing Optimization with Multichannel Queue Method</i> ).....	1-9
<b>Herry Pribawanto Suryawan</b> Generalized Mixed Fractional Brownian Motion as a Generalized White Noise Functional.....	10-19
<b>Alexander A S Gunawan</b> Hubungan Deret Bertingkat Berdasar Bilangan Eulerian dengan Operator Beda ( <i>Cascade Series relations based on Eulerian Number with Different Operator</i> ).....	20-26
<b>Margaretha Ohyver</b> Penerapan Metode Transformasi Wavelet Kontinu dan Partial Least Squares pada Data Gingerol ( <i>Continue Wavelet Transform and Partial Least Squares Method Approach in Gingerol Data</i> )	27-33
<b>Ro'fah Nur Rachmawati</b> Pendugaan Fungsi Intensitas Proses Poisson Periodik dengan Tren Fungsi Pangkat Menggunakan Metode Tipe Kernel ( <i>Estimating Intensity Function of a Periodic Poisson Process with Cubic Function Trend using Kernel Type Method</i> ).....	34-42
<b>Sangadji</b> Pecahan Berlanjut Berhingga ( <i>Finite Continuous Fraction</i> ).....	43-51
<b>Sudi Mungkasi</b> Metode Volume Hingga untuk Menyelesaikan Masalah Bendungan-Bobol ( <i>Finite Volume Method to Conclude Collapse Dam</i> ).....	52-62
<b>Nusar Hajarisman</b> Algoritma Pendugaan Model Regresi Kekar melalui Penduga-M ( <i>Estimated Algorithm of Robust Regression Model through Estimator-M</i> ).....	63-74

# METODE VOLUME HINGGA UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH BENDUNGAN-BOBOL\*

**Sudi Mungkasi**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma  
Mrican, Tromol Pos 29, Yogyakarta 55002  
[sudi@usd.ac.id](mailto:sudi@usd.ac.id)

## ABSTRACT

*A lot of dams can be found in Indonesia, which is an agricultural country. Dam-break may result in a catastrophic collapse around the dam. Understanding the behaviour of water if dam-break happens is then important. In this paper, we solve dam-break problems using finite volume methods in the one-dimensional case. The mathematical equations called the shallow water equations governing the water flows and the analytical solution to dam-break problem are presented. Central-upwind method, one of finite volume methods, is tested to solve dam-break problem.*

**Keywords:** *finite volume methods, dam-break problem, shallow water equations*

## ABSTRAK

*Terdapat banyak bendungan yang dapat dijumpai di Indonesia, yang merupakan suatu negara agraris. Bendungan-bobol dapat menyebabkan kehancuran yang hebat di daerah sekitar bendungan. Oleh karena itu, pemahaman sifat gerakan air jika bendungan-bobol terjadi merupakan hal yang penting. Dalam makalah ini, masalah bendungan-bobol diselesaikan menggunakan metode volume hingga untuk kasus satu dimensi. Persamaan matematis yang disebut persamaan air dangkal yang dapat menjelaskan aliran air dan penyelesaian analitis untuk masalah bendungan-bobol disajikan. Metode central-upwind, yang merupakan salah satu jenis metode volume hingga, diuji untuk menyelesaikan masalah bendungan-bobol.*

**Kata kunci:** *metode volume hingga, masalah bendungan-bobol, persamaan air dangkal*

---

\* Isi dari makalah ini pernah diikutsertakan dan menjadi finalis dalam Olimpiade Karya Tulis Inovatif 2009 yang diselenggarakan oleh Perhimpunan Pelajar Indonesia di Perancis.

## PENDAHULUAN

Sebagai suatu negara agraris, Indonesia memiliki banyak bendungan untuk membantu pengairan. Dalam keadaan yang tidak menguntungkan, misalnya gempa bumi, tanggul bendungan bisa saja bobol dan menyebabkan kerusakan wilayah di sekitarnya. Oleh sebab itu, pemahaman aliran air apabila bendungan bobol sangatlah penting. Hal ini dapat membantu menjawab bagaimana sebaiknya pembangunan bendungan ditempatkan, sehingga kerugian dapat dibuat sekecil mungkin apabila terjadi kebobolan bendungan. Masalah bendungan-bobol dengan topografi rata sudah ditemukan penyelesaian analitisnya. Penyelesaian masalah tersebut dengan topografi rata datar telah ditemukan sejak 1892 oleh Ritter untuk kasus yang sederhana (Ritter, 1892), sedangkan penyelesaian untuk rata miring telah dipaparkan oleh Chanson (2006). Dalam praktek yang sebenarnya hampir tidak ada suatu masalah bendungan-bobol dengan topografi yang rata sempurna. Dengan demikian, suatu metode yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah ini dengan topografi sembarang sangatlah diperlukan.

Makalah ini memaparkan persamaan gelombang air dangkal atau cukup disebut *Persamaan Air Dangkal (PAD)* serta suatu metode numeris yang disebut *Metode Volume Hingga (MVH)*. PAD adalah suatu persamaan matematis yang menjelaskan masalah aliran air termasuk masalah bendungan-bobol. MVH adalah suatu metode numeris yang dapat digunakan untuk menyelesaikan PAD dengan sembarang topografi. Agar sederhana, pembahasan dalam makalah ini terbatas pada masalah-masalah satu dimensi, yang artinya hanya vektor dengan arah ke kanan/kiri yang dimodelkan, sedang arah ke depan/belakang dan ke atas/bawah tidak ikut dimodelkan. PAD merupakan suatu model yang diperoleh berdasarkan perpindahan massa, momentum, dan energi, yang ketiganya merupakan kuantitas-kuantitas kekal. Persamaan ini membentuk suatu sistem hiperbolik nonlinier dan mampu memberikan penyelesaian diskontinu meskipun keadaan awalnya halus. Terapan PAD cukup banyak, meliputi: bendungan-bobol, perambatan tsunami, aliran air sungai, dan lain-lain. Untuk mendapatkan penyelesaian eksak secara analitis sering kali sangatlah sulit. Oleh karena itu, metode-metode numeris termasuk MVH telah dikembangkan.

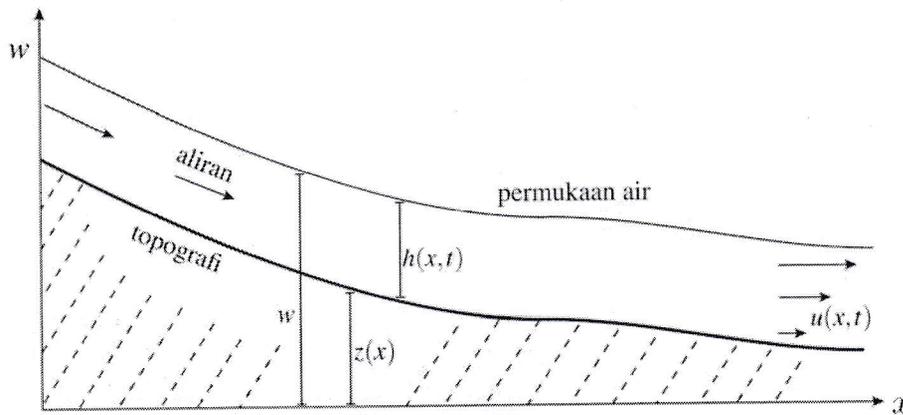
MVH didasarkan pada bentuk integral hukum kekekalan. Metode ini memecah-mecah domain menjadi banyak sel dan mengambil nilai pendekatan rata-rata kuantitas dalam setiap sel. Di setiap waktu, nilai-nilai tersebut diperbarui oleh pendekatan *flux* pada setiap ujung sel. Keakuratan metode ini sangat bergantung pada fungsi flux numeris yang memberikan pendekatan flux yang sesungguhnya sebaik mungkin. Tujuan makalah ini adalah untuk menerapkan MVH pada penyelesaian bendungan-bobol. Hukum kekekalan massa dan kekekalan momentum digunakan pada PAD dalam makalah ini untuk memodelkan profil air dangkal. Selain itu, metode *central-upwind* yang merupakan salah satu jenis MVH akan diuji untuk menyelesaikan masalah bendungan-bobol. Selanjutnya, penampilan metode numeris ini dianalisis secara kuantitatif dari kesalahan yang dihasilkan. Analisis kualitatif juga dilakukan dengan membandingkan grafik penyelesaian numeris dengan grafik penyelesaian analitis.

### **Persamaan Air Dangkal dan Masalah Bendungan-Bobol**

Bab ini terdiri atas dua seksi. Seksi pertama menjelaskan notasi-notasi yang digunakan dalam persamaan-persamaan matematis serta menyatakan bentuk PAD. Seksi kedua membahas masalah bendungan-bobol.

#### **Persamaan Air Dangkal**

Aliran air dangkal dapat digambarkan seperti tampak pada Gambar 1. Notasi yang digunakan adalah sebagai berikut:  $x$  mewakili jarak yang ditempuh aliran,  $t$  mewakili variabel waktu,  $z(x)$  adalah topografi di titik  $x$ ,  $h(x,t)$  adalah ketinggian air di titik  $x$  pada waktu  $t$ ,  $w = z + h$  disebut dengan *stage*, dan  $u(x,t)$  mewakili kecepatan aliran di titik  $x$  pada waktu  $t$ .



Gambar 1 Aliran air satu dimensi

PAD yang juga terkenal dengan nama sistem Saint-Venant merupakan sistem dua persamaan simultan yang terdiri atas hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum, secara berturut-turut diberikan sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x &= -ghz_x. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Di sini,  $g$  adalah konstanta gravitasi dengan nilai  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Dalam bentuk vektor, PAD (1) dapat ditulis sebagai  $q_t + f(q)_x = S$  dengan kuantitas  $q$ , flux  $f(q)$ , dan sumber  $S$  diberikan oleh

$$q = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, f(q) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghz_x \end{pmatrix}. \quad (2)$$

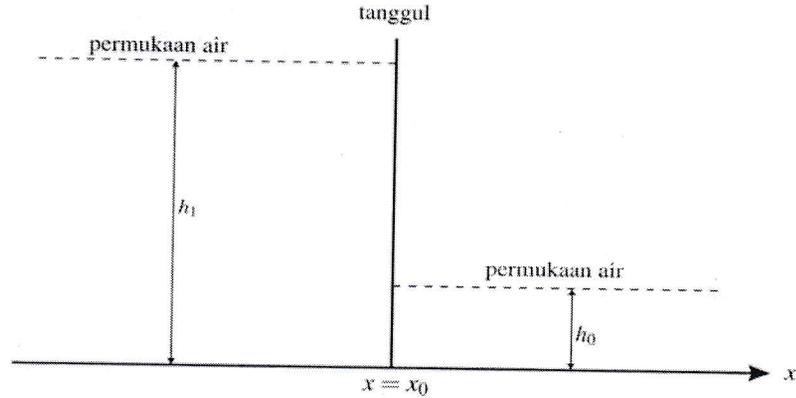
### Masalah Bendungan-Bobol

Menyelesaikan masalah bendungan-bobol artinya adalah menentukan aliran yang disebabkan oleh bobolnya bendungan secara tiba-tiba. Penyebab bobolnya bendungan ini bisa karena usia bendungan yang sudah tua disertai tidak kuatnya tanggul bendungan menahan air dengan volume yang terlalu besar, atau bisa saja karena disertai gempa bumi.

Diasumsikan bahwa suatu bendungan terdiri atas dua bagian dengan ketinggian air yang lebih rendah pada bagian kanan seperti tampak pada Gambar 2, dan diasumsikan pula bahwa air pada kedua sisi dalam keadaan diam pada saat awal ( $t = 0$ ). Secara matematis, kondisi awal ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$u(x,0) = 0, h(x,0) = \begin{cases} h_1 & \text{jika } x < x_0 \\ h_0 & \text{jika } x > x_0 \end{cases} \quad (3)$$

dengan catatan bahwa  $h_1 > h_0 \geq 0$ . Pada saat  $t = 0$ , dinding bendungan (tanggul) secara spontan bobol dan menyebabkan mengalirnya air yang lebih tinggi ke sisi yang lebih rendah pada waktu berikutnya. Profil aliran dalam makalah ini terdiri atas ketinggian air, momentum dan kecepatan di titik  $x$  sembarang dan pada waktu  $t$  sembarang.



Gambar 2 Keadaan Awal suatu Bendungan dengan Dua Bagian yang Berbeda.

Penyelesaian analitis masalah tersebut dengan  $x_0 = 0$ ,  $h_0 = 0$ , dan  $h_1 > 0$  pertama kali ditemukan oleh Ritter (1892). Beberapa penulis misalnya Jakeman (2006), Mungkasi (2008) dan Stoker (1957) juga membahas penyelesaian masalah analitis bendungan-bobol, yang mana penyelesaiannya dapat dituliskan sebagai

$$h(x) = \begin{cases} h_1 & , x \leq -t\sqrt{gh_1} \\ h_3 = \frac{4}{9g} \left( \sqrt{gh_1} - \frac{x}{2t} \right)^2 & , -t\sqrt{gh_1} < x \leq 2t\sqrt{gh_1} \\ 0 & , x > 2t\sqrt{gh_1} \end{cases} \quad (4)$$

dan

$$u(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -t\sqrt{gh_1} \\ u_3 = \frac{2}{3} \left( \sqrt{gh_1} + \frac{x}{t} \right) & , -t\sqrt{gh_1} < x \leq 2t\sqrt{gh_1} \\ 0 & , x > 2t\sqrt{gh_1} \end{cases} \quad (5)$$

untuk setiap waktu  $t > 0$ . Lebih lanjut, penyelesaian analitis masalah di muka dengan  $x_0 = 0$  dan  $h_1 > h_0 > 0$  dapat dinyatakan sebagai

$$h(x) = \begin{cases} h_1 & , x \leq -t\sqrt{gh_1} \\ h_3 = \frac{4}{9g} \left( \sqrt{gh_1} - \frac{x}{2t} \right)^2 & , -t\sqrt{gh_1} < x \leq t(u_2 - \sqrt{gh_2}) \\ h_2 = \frac{h_0}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{8S_2^2}{gh_0}} - 1 \right) & , t(u_2 - \sqrt{gh_2}) < x \leq tS_2 \\ h_0 & , x > tS_2 \end{cases} \quad (6)$$

dan

$$u(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -t\sqrt{gh_1} \\ u_3 = \frac{2}{3} \left( \sqrt{gh_1} + \frac{x}{t} \right) & , -t\sqrt{gh_1} < x \leq t(u_2 - \sqrt{gh_2}) \\ u_2 = S_2 - \frac{gh_0}{4S_2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8S_2^2}{gh_0}} \right) & , t(u_2 - \sqrt{gh_2}) < x \leq tS_2 \\ 0 & , x > tS_2 \end{cases} \quad (7)$$

untuk setiap waktu  $t > 0$ . Di sini kecepatan gelombang *shock*  $S_2$  bernilai konstan dan diberikan oleh persamaan

$$S_2 = 2\sqrt{gh_1} + \frac{gh_0}{4S_2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8S_2^2}{gh_0}} \right) - \left( 2gh_0 \sqrt{1 + \frac{8S_2^2}{gh_0}} - 2gh_0 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

## METODE

Metode Volumen Hingga (MVH) digunakan untuk menyelesaikan PAD secara numeris. Rumusan pendekatan hukum kekekalan dipergunakan untuk menurunkan skema umum MVH. Perlu diketahui bahwa MVH dapat dipergunakan untuk menyelesaikan hukum kekekalan dan sistem hiperbolik secara umum. Dipandang PAD (1) dengan  $z_x = 0$ . Suatu MVH didasarkan pada pemecah-mecahan domain ruang menjadi banyak sel, dan terus menerus memantau pendekatan integral kuantitas  $q$  pada setiap sel tersebut (LeVeque, 2002: 64-65). Sel ke- $i$  dinotasikan dengan

$$C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \quad (9)$$

yang merupakan suatu interval dari  $x_{i-1/2}$  hingga  $x_{i+1/2}$ . Nilai  $Q_i^n$  mewakili pendekatan nilai rata-rata kuantitas  $q$  pada interval ke- $i$  pada waktu  $t_n$ , yaitu

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx \quad (10)$$

dengan  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  adalah panjang sel. Notasi  $F_{i\pm 1/2}^n$  digunakan sebagai pendekatan untuk rata-rata flux di titik  $x = x_{i\pm 1/2}$ , yaitu

$$F_{i\pm 1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i\pm 1/2}, t)) dt \quad (11)$$

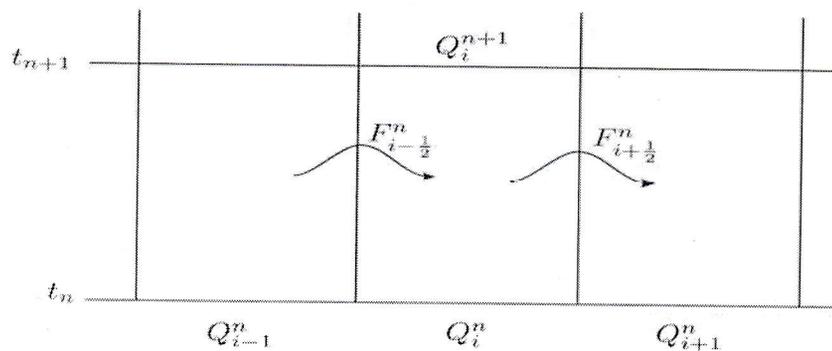
dengan  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  merupakan satu langkah waktu.

Karena massa total dalam sel ini berubah hanya bergantung pada flux di ujung-ujung sel seperti tampak pada Gambar 3, kita dapatkan persamaan

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} q(x, t) dx = f(q(x_{i-1/2}, t)) - f(q(x_{i+1/2}, t)). \quad (12)$$

Pengintegralan persamaan (11) terhadap variabel waktu dari  $t_n$  hingga  $t_{n+1}$  menghasilkan

$$\int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} q(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt. \quad (13)$$



Gambar 3 Pembaharuan nilai  $Q_i^n$  disebabkan oleh flux di ujung-ujung sel yang digambarkan dalam ruang  $x-t$ .

Dengan sedikit operasi aljabar dan pembagian oleh  $\Delta x$  diperoleh bentuk

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx - \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_n^{n+1} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_n^{n+1} f(q(x_{i+1/2}, t)) dt \right], \quad (14)$$

yang juga dapat ditulis

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n] \quad (15)$$

menurut notasi yang diberikan oleh (9) dan (10). Bentuk (14) merupakan bentuk *diskrit-penuh*; bentuk *setengah-diskrit* yang berkaitan dengan bentuk ini adalah

$$\Delta x_i \frac{d}{dt} Q_i^n + F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n = 0. \quad (16)$$

Persamaan (16) memuat asumsi bahwa masalah yang diselesaikan mempunyai topografi yang rata datar ( $z_x = 0$ ). Apabila masalah yang diselesaikan mempunyai topografi yang tidak rata ( $z_x \neq 0$ ), maka bentuk setengah-diskrit (16) menjadi

$$\Delta x_i \frac{d}{dt} Q_i^n + F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n = \Delta x_i S_i, \quad (17)$$

dengan  $S_i$  adalah diskritisasi sumber.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Terdapat dua seksi yang akan disajikan, yaitu: hasil simulasi bendungan-bobol dengan topografi rata datar dan hasil simulasi dengan topografi tidak rata. Secara garis besar, flux-flux dalam semua simulasi dihitung menggunakan rumusan *central-upwind* menurut Kurganov, dkk. (2001). Sebagai tambahan, apabila ditemukan suatu topografi yang tidak rata, yaitu  $z_x \neq 0$ , MVH yang

terimbang dengan baik atau biasa disebut *well-balanced finite volume methods* menurut Audusse, dkk. (2004) dan Noelle, dkk. (2006) diterapkan. Semua simulasi dilakukan menggunakan metode berorde dua dengan pembatas lereng minmod; air dengan ketinggian lebih rendah dari  $10^{-6}$  m tidak dimasukkan dalam perhitungan flux; bilangan  $CFL = 1.0$ . Selain itu, stage  $w = z + h$  dan momentum  $p = hu$  dianggap kekal. Error dalam perhitungan dikuantifikasi dengan rumus

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |q_i - Q_i| \quad (18)$$

dengan  $N$  adalah banyaknya sel, serta  $q_i$  dan  $Q_i$  secara berturut-turut adalah nilai eksak kuantitas dan nilai pendekatannya untuk sel ke- $i$ . Satuan besaran yang digunakan adalah Sistem Internasional (SI).

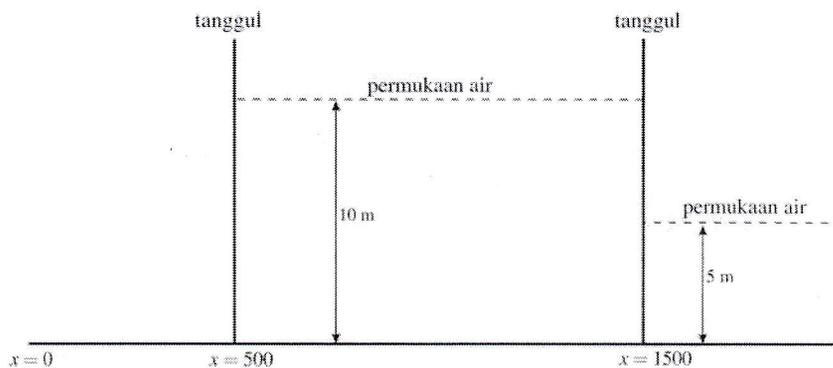
### Simulasi Bendungan-Bobol dengan Topografi Rata Datar

Dipandang suatu masalah bendungan-bobol dengan keadaan awal

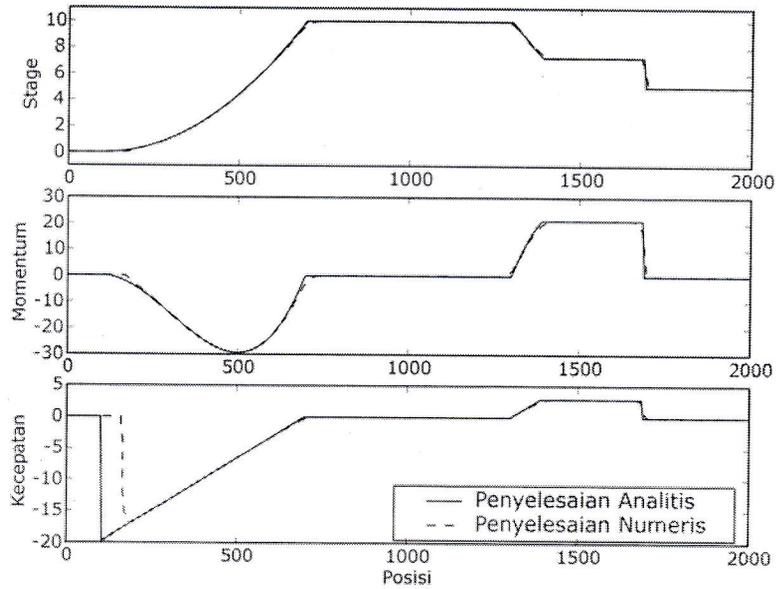
$$u(x,0) = 0 \text{ dan } w(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{jika } 0 < x < 500 \\ 10, & \text{jika } 500 < x < 1500 \\ 5, & \text{jika } 1500 < x < 2000 \end{cases} \quad (19)$$

dengan topografi rata datar seperti tampak pada Gambar 4. Dalam hal ini,  $z = 0$  dan  $h = w$ . Keadaan awal tersebut menyatakan bahwa terdapat dua tanggul bendungan, yang satu terdapat pada posisi 500 m dan yang satunya pada posisi 1500 m dari acuan. Ada tiga bagian dalam gambar dengan tinggi air berbeda: sisi kiri adalah sisi kering, bagian tengah mempunyai ketinggian air 10 m dan sisi kanan mempunyai ketinggian air 5 m. Pada saat  $t = 0$ , kedua tanggul bobol. Selanjutnya simulasi dikerjakan untuk memperoleh gambaran gerak air di sembarang titik  $x$  dan sembarang waktu  $t$ .

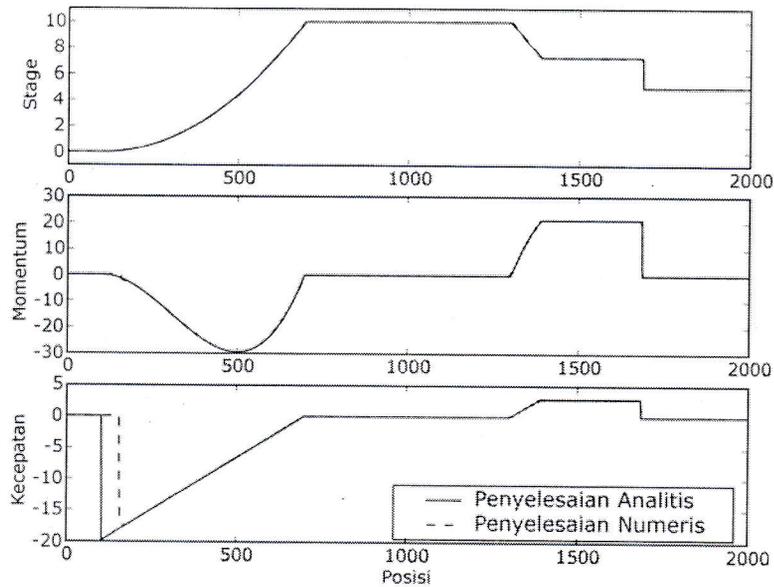
Gambar 5 menunjukkan hasil simulasi 20 detik setelah bendungan bobol dengan panjang sel seragam  $\Delta x = 5$ . Dalam simulasi ini didapatkan error untuk stage, momentum dan kecepatan secara berturut-turut sebesar 0,028; 0,260; dan 0,606. Nampak pada gambar bahwa ada gelombang yang bergerak ke kiri dan bergerak ke kanan menuju ke arah air yang lebih rendah. Hasil tersebut juga menunjukkan bahwa penyelesaian numeris terjadi penyebaran (*difusi*) pada batas antara wilayah kering dan wilayah basah. Selain itu, terjadi pula ketidak-akuratan penyelesaian numeris di sekitar sudut-sudut seperti nampak pada gambar. Hal-hal tersebut merupakan kekurangan metode numeris dalam menyelesaikan masalah.



Gambar 4 Keadaan awal bendungan topografi rata datar dengan tiga bagian yang berbeda. Tanggul dan topografi digambar dengan garis tebal, permukaan air dengan garis putus-putus.



Gambar 5 Hasil simulasi setelah 20 detik bendungan bobol topografi rata datar. Metode menggunakan  $\Delta x = 5$ .



Gambar 6 Hasil simulasi setelah 20 detik bendungan bobol topografi rata datar. Metode menggunakan  $\Delta x = 1$ .

Namun demikian, kekurangan-kekurangan tersebut dapat diatasi dengan menetapkan panjang sel  $\Delta x$  yang lebih kecil dengan catatan perhitungan matematis menjadi lebih banyak sehingga simulasi menjadi lebih lama. Sebagai contoh adalah Gambar 6, yang menunjukkan hasil simulasi dengan panjang sel seragam  $\Delta x = 1$ . Error untuk stage, momentum dan kecepatan dalam simulasi ini secara berturut-turut adalah sebesar 0,006; 0,057; dan 0,497. Jelas bahwa error yang dihasilkan dalam simulasi ini jauh lebih kecil dibandingkan hasil simulasi sebelumnya. Tampak pula dalam gambar

bahwa gelombang yang bergerak ke kanan dapat dikonstruksi oleh penyelesaian numeris yang dihasilkan oleh MVH dengan tepat. Hal ini adalah kelebihan MVH yang dapat menghasilkan penyelesaian akurat untuk gelombang *shock*. Keakuratan ini disebabkan oleh penurunan MVH yang didasarkan pada bentuk integral hukum-hukum kekekalan sebagaimana dijelaskan dalam persamaan (8)-(15). Pada gambar ini juga tampak bahwa penyebaran penyelesaian numeris masih terjadi di sekitar perbatasan kering dan basah. Hal ini bisa terjadi karena flux yang diperhitungkan dalam simulasi adalah hanya flux dari sel-sel yang mempunyai ketinggian air minimum  $10^{-6}$  m.

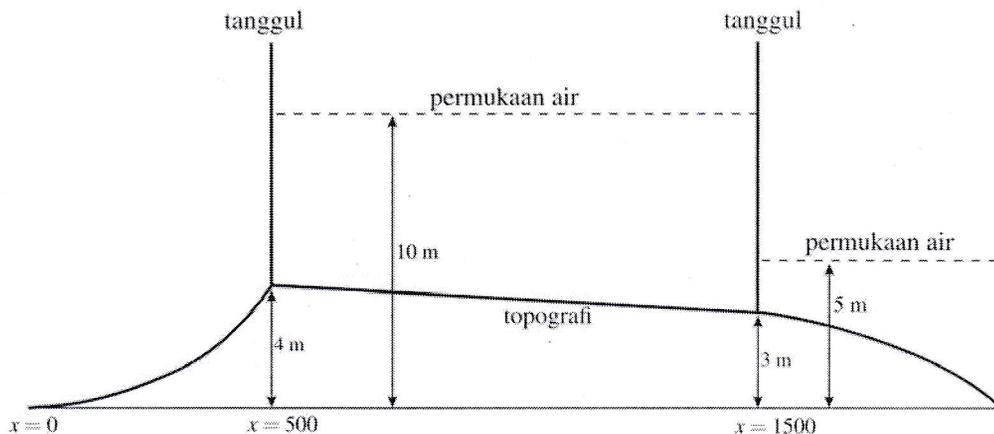
### Simulasi Bendungan-Bobol dengan Topografi Tidak Rata

Sebagaimana telah dikemukakan dalam Bab PENDAHULUAN, masalah bendungan-bobol dengan topografi rata, sudah ditemukan penyelesaian analitisnya. Akan tetapi, jika topografinya tidak rata, berlekuk-lekuk, atau bahkan diskontinu, masalah bendungan-bobol hanya mungkin dicari penyelesaiannya menggunakan metode numeris.

Sebagai contoh masalah bendungan-bobol dengan topografi tidak rata adalah sebagai berikut. Dipandang suatu keadaan awal (19) dengan topografi diberikan oleh

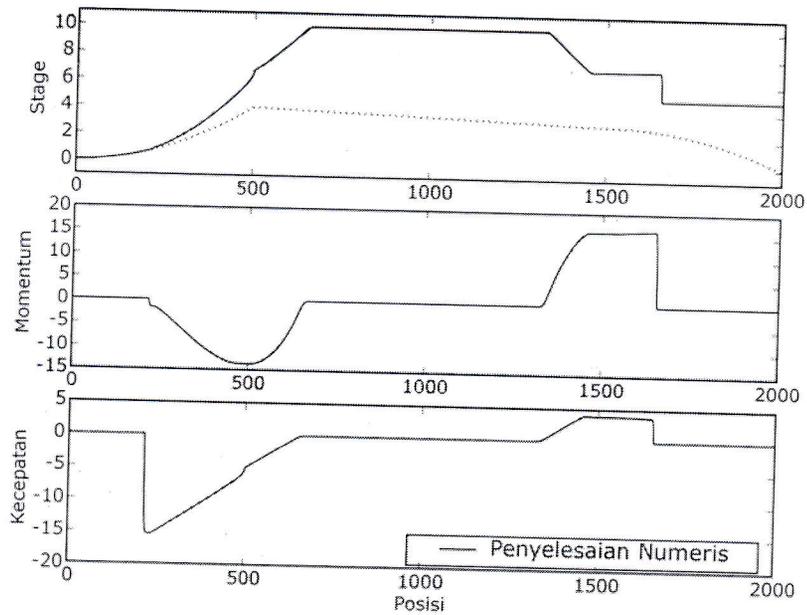
$$z(x) = \begin{cases} 1,6 \cdot 10^{-5} x^2 & , \text{ jika } 0 < x < 500 \\ 4,5 - 10^{-3} x & , \text{ jika } 500 < x < 1500 \\ -1,2 \cdot 10^{-5} x^2 + 3,6 \cdot 10^{-2} x - 24 & , \text{ jika } 1500 < x < 2000. \end{cases} \quad (20)$$

Masalah ini diilustrasikan seperti tampak pada Gambar 7.



Gambar 7 Keadaan awal bendungan topografi tidak rata dengan tiga bagian yang berbeda. Tanggul dan topografi digambar dengan garis tebal, permukaan air dengan garis putus-putus.

Setelah 20 detik bendungan bobol, hasil simulasi gerakan air menggunakan MVH dapat dilihat pada Gambar 8. Hasil ini tentu saja berbeda dengan hasil pada Gambar 5 dan Gambar 6. Perbedaan mencolok adalah profil air di sekitar titik  $x = 500$ . Setelah air melalui titik  $x = 500$ , air bergerak lebih cepat dari pada gerakan pada topografi rata datar.



Gambar 8 Hasil simulasi setelah 20 detik bendungan bobol topografi tidak rata. Metode menggunakan  $\Delta x = 1$ . Topografi digambarkan dengan titik-titik.

## PENUTUP

Makalah ini telah memaparkan Metode Volume Hingga (MVH) dan terapannya pada masalah bendungan-bobol. MVH didasarkan pada bentuk integral hukum-hukum kekekalan sehingga cukup akurat dalam menyelesaikan Persamaan gelombang Air Dangkal (PAD) yang sering kali melibatkan gelombang *shock*. Keakuratan ini merupakan alasan utama mengapa MVH adalah metode yang cocok untuk menyelesaikan masalah bendungan-bobol. Dengan ditemukannya penyelesaian masalah tersebut, gerakan air dapat diprediksi sehingga dapat membantu perencanaan pembangunan bendungan dengan baik. Dengan demikian, apabila benar-benar terjadi bendungan-bobol, kerugian yang diakibatkan dapat diminimalkan.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Associate Professor Stephen Roberts (Australian National University) atas bimbingan yang diberikan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M. O., Klein, R., and Perthame, B. (2004) A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM Journal of Scientific Computing*, 25 (6): 2050–2065.
- Chanson, H. (2006) Analytical solutions of laminar and turbulent dam break wave, *River Flow*, hal. 465–474. London: Taylor & Francis Group.
- Jakeman, J. (2006) *Honours Thesis: On Numerical Solutions of the Shallow Water Wave Equations*, tidak diterbitkan. Canberra: The Australian National University.
- Kurganov, A., Noelle, S., and Petrova, G. (2001) Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and hamilton-jacobi equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23 (3): 707–740.
- LeVeque, R. J. (2002) *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mungkasi, S. (2008) *Masters Thesis: Finite Volume Methods for the One-Dimensional Shallow Water Equations*, tidak diterbitkan. Canberra: The Australian National University.
- Noelle, S., Pankratz, N., Puppo, G., and Natvig, J. R. (2006) Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows, *Journal of Computational Physics*, 213 (2): 474–499.
- Ritter, A. (1892) Die fortpflanzung der wasserwellen, *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 36 (33): 947–954.
- Stoker, J. J. (1957) *Water Waves: The Mathematical Theory with Application*. New York: Interscience Publishers.