Aplikasi Prinsip Simetri pada Transformasi Invariansi Gauge Abelian dan Non-Abelian serta Implikasinya terhadap Hukum-hukum Fisika

Research · August 2015

DOI: 10.13140/RG.2.1.3709.9360

1 author:

Asan Damanik

Universitas Sanata Dharma

ISSN 1410 - 5888

B-6

SIGMA

JURNAL SAINS DAN TEKNOLOGI

Vol. 13, No. 1, Januari 2010

SIGMA
JURNAL SAINS DAN TEKNOLOGI

Vol. 13, No. 1, Januari 2010 ISSN: 1410-5888

DAFTAR ISI

EDITORIAL

Tahun 2009 Indonesia telah berhasil melaksanakan dua pesta demokrasi yakni Pemilihan Umum Anggota Legislatif (mulai dari tingkat Pusat hingga tingkat Daerah) dan Pemilihan Umum Presiden dan Wakil Presiden Republik Indonesia untuk periode 2009-2014. Sebagai hasil dari kedua pesta demokrasi itu, anggota legislatif terpilih telah dilantik dan sudah mulai bekerja sesuai dengan fungsi, tugas, dan tanggungjawabnya menurut undang-undang. Demikian juga Presiden dan Wakil Presiden terpilih telah dilantik dan diambil sumpahnya di hadapan Anggota Majelis Permusyawaratan Rakyat Republik Indonesia (MPR RI). Sebagai konsekuensi pelantikan dan pengucapan sumpah tersebut, langkah pertama yang dilakukan Presiden dan Wakil Presiden terpilih ialah menyusun anggota kabinet yang akan membantu Presiden dan Wakil Presiden merealisasikan program-program kerja yang mensesejahterakan rakyat Indonesia. Kabinet yang dibentuk oleh Presiden dan Wakil Presiden periode 2009-2014 diberi nama Kabinet Indonesia Bersatu (KIB).

Presiden dan Wakil Presiden beserta pembantu-pembantunya (anggota KIB) menghadapi berbagai masalah besar bangsa seperti penyediaan lapangan kerja, pemerataan pembangunan yang dikaitkan dengan pemekaran wilayah Daerah Tingkat I dan II, masalah kesehatan, benang kusut dunia pendidikan, ketersediaan pangan dan energi, masalah lingkungan hidup dan bencana alam, kolusi, korupsi, dan nepotisme, ancaman terorisme, masalah kedaulatan negara serta berbagai masalah sosial dan kemasyarakatan. Begitu rumit dan kompleksnya persoalan bangsa seolah tidak ada lagi cara pemecahan masalah yang bertumpuk di depan mata. Satu masalah belum selesai dipecahkan sudah muncul masalah lain.

Kita seringkali mendengar ungkapan yang mengatakan bahwa pembangunan sebuah bangsa memerlukan waktu yang lama dan sumber daya manusia yang memiliki karakter baik dan visi yang jauh ke depan. Waktu yang lama (relatif) untuk membangun sebuah budaya sebenarnya dapat juga dipertanyakan. Dengan memanfaatkan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi yang ada sekarang ini, sebuah budaya dapat dibangun dalam waktu yang relatif singkat. Ironisnya, budaya yang terbangun akibat kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi yang ada sekarang ini lebih cenderung ke arah budaya negatif karena kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi itu tidak diimbangi oleh pembangunan karakter bangsa.

Pembangunan karakter bangsa dapat dilakukan secara sistematis dan terstruktur lewat pendidikan formal dan non-formal. Pemerintah harus menyadari bahwa pendidikan formal sebaiknya memperhatikan unsur pembentukan karakter sehingga manusia-manusia terdidik dan terpelajar memiliki karakter yang baik dan visi yang jauh ke depan. Karakter yang baik dan visi yang jauh ke depan setidaknya dapat diharapkan mengurangi persoalan yang seharusnya tidak terjadi seperti korupsi, kolusi, nepotisme, dan praktek-praktek sejenisnya yang justru dilakukan oleh manusia terdidik dan terpelajar di negara ini. Anggaran pendidikan yang sudah relatif besar sebaiknya dapat digunakan untuk meningkatkan perhatian dunia pendidikan terhadap pentingnya pembangunan karakter bangsa dalam dunia pendidikan. Pemerintah dalam hal ini Kementerian Pendidikan Nasional harus merespon porsi anggaran pendidikan yang relatif besar sekarang ini dengan menyusun rencana strategis pembangunan karakter bangsa lewat dunia pendidikan formal. Perlu diingat bahwa pembangunan karakter bangsa sangat terkait erat dengan cita-cita luhur Proklamasi Kemerdekaan Indonesia, etika, moral, psikologi, dan ilmu-ilmu dasar. Pengetahuan dan pemahaman tentang cita-cita proklamasi kemerdekaan, etika, moral, dan psikologi bukanlah barang baru dalam pendidikan yang membangun karakter bangsa (mengandung aspek afektif dan psikomotorik), tetapi ilmu-ilmu dasar barangkali mengundang pertanyaan banyak pihak. Ilmu-ilmu dasar seperti biologi, kimia, fisika dan matematika sarat dengan aspek kognitif dan ilmu-ilmu dasar adalah fondasi dari segala kemajuan teknologi sekarang ini dan masa depan. Oleh karena itu, dana publik seperti APBN pantas untuk digunakan dalam pendidikan yang membangun karakter bangsa sebab hasilnya juga untuk kebaikan dan kesejahteraan bangsa dan negara di masa depan.

Selamat Tahun Baru 1 Januari 2010.

Yogyakarta, 4 Januari 2010
Asan Damanik

SIGMA, Vol. 13, No. 1, Januari 2010: 17-28
ISSN: 1410-5888

APLIKASI PRINSIP SIMETRI PADA TRANSFORMASI INVARIAN *GAUGE* ABELIAN DAN NON-ABELIAN SERTA IMPLIKASINYA TERHADAP HUKUM-HUKUM FISIKA

Asan Damanik
Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Teknologi , Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
Kampus III USD Paingan, Maguwoharjo, Sleman, Yogyakarta
E-mail: d.asan@lycos.com

Abstract

We impose the symmetry principles to elaborate and evaluate the invariance of the Abelian and non-Abelian gauges and evaluate its implications to the laws of physics. The application of the symmetry principle into the field which undergoes a rotation in a phase space implies the exixtence of an Abelian gauge field Meanwhile, the application of symmetry principle to the Dirac field as a doublet of SU(2) group implies the existence of a non-Abelian gauge field with structure constant satisfies the Lie group algebra.

Keywords: *Prinsip simetri, gauge Abelian, gauge non-Abelian, turunan kovarian*

1. Pendahuluan

Dalam fisika teoretis aplikasi prinsip simetri (*gauge*, warna (*color*), translasi, rotasi, muatan, paritas, waktu, dan sebagainya) pada berbagai transformasi menghasilkan berbagai konsekuensi. Konsekuensi-konsekuensi tersebut memperluas pemahaman terhadap konsep-konsep fisika yang sudah ada sebelumnya dan bahkan sering mengharuskan adanya besaran fisis dan hukum-hukum fisika baru jika prinsip simetri itu diberlakunan secara konsisten. Dengan pemahaman yang lebih dalam dan fundamental dengan bantuan matematika dan logika dapat memperluas dan bahkan merombak hukum-hukum fisika yang sudah ada sehingga membuka cakrawala baru dalam penelitian dan penerapan fisika.

Aplikasi prinsip simetri terhadap invariansi *gauge* non-Abelian banyak dijumpai dalam buku-buku teks dan monograf tentang teori medan kuantum dan fisika partikel misalnya buku yang ditulis oleh Bailin and Love (....), Huang (1988), Mandl and Shaw (1984), Peskin and Schroeder (1995), Ryder (1988), dan Yang and Mills (1954). Dalam buku-buku teks dan monograf tersebut tidak memberikan elaborasi terhadap rumus-rumus matematisnya yang sangat rumit dan panjang sehingga sering menjadi hambatan dalam mempelajari dan memahami fisika partikel yang banyak mengaplikasikan prinsip simetri tersebut.

Dalam makalah ini akan ditinjau aplikasi prinsip simetri terhadap invariansi medan gauge non-Abelian (*gauge* lokal) dengan menggunakan konsep geometri berikut bukti-bukti matematisnya. Pembahasan kemudian dilanjutkan dengan meninjau kasus invariansi medan gauge non-Abelian untuk simetri yang lebih tinggi (simetri internal) yaitu simetri isospin yang diwakili oleh dublet dari grup SU(2). Pada bagian terakhir dirumuskan suatu ringkasan dari elaborasi terhadap kasus-kasus yang ditinjau.

2. Geometri Invariansi *Gauge*

Ditinjau medan Dirac bernilai kompleks $\psi(x)$ yang invarian tehadap transformasi:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{1}$$

dengan $\alpha(x)$ suatu sudut fase rotasi bergantung x. Salah satu cara untuk mengetahui apakah transformasi persamaan (1) invarian atau tidak adalah dengan melihat efek transformasi tersebut pada Lagrangian:

$$L = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = \overline{\psi}\, i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{2}$$

Substitusi persamaan (1) ke persamaan (2) menghasilkan:

$$\begin{aligned} L &= e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)e^{i\alpha(x)}\psi \\ &= e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\right)e^{i\alpha(x)}\psi - me^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}e^{i\alpha(x)}\psi \\ &= e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}\left(-\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\alpha(x)\right)e^{i\alpha(x)}\psi + i\gamma^{\mu}e^{i\alpha(x)}\partial_{\mu}\psi\right) - m\overline{\psi}\psi \\ &= \overline{\psi}\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + i\partial_{\mu}\alpha(x)\right)\right]\psi - m\overline{\psi}\psi \end{aligned} \tag{3}$$

Terlihat bahwa persamaan (3) tidak sama dengan persamaan (2) dengan adanya faktor: $i\partial_{\mu}\alpha(x)$ pada persamaan (3). Oleh sebab itu diperlukan suatu faktor yang dapat mengkompensasi suku $i\partial_{\mu}\alpha(x)$ sehingga L invarian.

Dengan mendefinisikan suatu turunan kovarian:

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + ieA_{\mu} \tag{4}$$

dengan e konstanta, dan A_{μ} medan *gauge* (medan vektor), persamaan (2) menjadi:

$$\begin{aligned} L &= \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\psi = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}\right) - m\right)\psi \\ &= \overline{\psi}\, i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - e\overline{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \end{aligned} \tag{5}$$

Jika persamaan (1) disubstitusikan ke persamaan (5) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} L &= e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)e^{i\alpha(x)}\psi = e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}\right) - m\right)e^{i\alpha(x)}\psi \\ &= \overline{\psi}\, i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \overline{\psi}\, i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\alpha(x)\psi - e\overline{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\left[\partial_{\mu} + i\left\{\partial_{\mu}\alpha(x) + eA_{\mu}\right\}\right]\right)\psi - m\overline{\psi}\psi \end{aligned} \tag{6}$$

Terlihat dari persamaan (6) bahwa:

$$A_{\mu} \to A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{7}$$

Jadi pada transformasi *gauge* lokal $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, invariansi Lagrangian dapat dipertahankan dengan menggunakan turunan kovarian: $D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$ dengan $A_{\mu} \to A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x)$.

Secara geometri, turunan $\psi(x)$ ke arah vektor satuan $n^{\mu}(\mu = 0,1,2,3)$ dinyatakan oleh relasi

$$n^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) = \lim_{\epsilon \to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)\right\}. \tag{8}$$

Terlihat bahwa $\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)$ mempunyai transformasi simetri yang berbeda dengan persamaan (1) sehingga harus diperkenalkan suatu faktor yang dapat mengkompensasi perbedaan sudut fase dari suatu titik ke titik di dekatnya. Oleh karena itu diperkenalkan suatu besaran skalar $U(y,x)$ yang memenuhi transformasi

$$U(y,x) \to e^{i\alpha(y)}U(y,x)e^{-i\alpha(x)}. \tag{9}$$

Jika jarak pisah antara dua titik sama dengan nol, maka $U(y,x) = U(y,y) = U(x,x) = 1$. Transformasi *gauge* lokal pada pers. (1) hanya merupakan transformasi gauge lokal akibat suatu sudut fase yang bergantung pada koordinat, sehingga $U(y,x)$ dapat dituliskan menjadi

$$U(y,x) = e^{i\phi(y,x)}. \tag{10}$$

Dengan demikian $\psi(y)$ dan $U(y,x)\psi(x)$ mengikuti hukum transformasi yang sama sehingga persamaan (8) dapat dituliskan menjadi

$$n^{\mu}D_{\mu}\psi(x) = \lim_{\epsilon \to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\psi(x)\right\}. \tag{11}$$

Ekspansi $U(y,x) = e^{i\phi(y,x)}$ di antara titik y dan x menghasilkan

$$U(y,x) = U(y,x)\big|_{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{x}(y-x) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\bigg|_{x}(y-x)^2 + \dots,$$

dengan

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_x = e^{i\phi(y,x)}\left.\left(i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right|_x = U(x,x)i\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

sehingga

$$\begin{aligned}U(y,x) &= U(y,x)|_x + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_x (y-x) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_x (y-x)^2 + \ldots \\ &= \underbrace{U(x,x)}_{1} + i\underbrace{U(x,x)}_{1}\frac{\partial\phi}{\partial x}(y-x) + \frac{1}{2!}i\underbrace{U(x,x)}_{1}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right](y-x)^2 + \ldots \\ &= 1 + i\frac{\partial\phi}{\partial x}(y-x) + \frac{1}{2!}i\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right](y-x)^2 + \ldots\end{aligned}$$

Jika digunakan $y = x + \in n$, maka:

$$\begin{aligned}U(x+\in n, x) &= 1 + i\frac{\partial\phi}{\partial x}(\in n) + \frac{1}{2!}i\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right](\in n)^2 + \ldots \\ &= 1 - ie \in n^\mu A_\mu(x) + O(\in^2)\end{aligned} \qquad (12)$$

dengan e suatu konstanta, dan $n\frac{\partial\phi}{\partial x}$ diganti oleh: $-en^\mu A_\mu(x)$. Koefisien pergeseran $\in n^\mu$ merupakan suatu medan vektor baru $A_\mu(x)$. Medan vektor yang muncul sebagai limit infinitesimal dari suatu komparator transformasi simetri lokal tersebut dikenal sebagai koneksi (*connection*).

Substitusi persamaan (12) ke dalam persamaan (11) menghasilkan:

$$\begin{aligned}n^\mu D_\mu\psi(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\in}\{\psi(x+\in n) - U(x+\in n, x)\psi(x)\} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\in}\{\psi(x+\in n) - (1 - ie \in n^\mu A_\mu(x))\psi(x)\} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\in}\{\psi(x+\in n) - \psi(x) + ie \in n^\mu A_\mu(x)\psi(x)\} \\ &= \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\in}\{\psi(x+\in n) - \psi(x)\}}_{n^\mu\partial_\mu\psi(x)} + ien^\mu A_\mu(x)\psi(x)\end{aligned} \qquad (13)$$

Mengingat persamaan (8), dari persamaan (13) akhirnya diperoleh relasi

$$D_\mu\psi(x) = \{\partial_\mu + ieA_\mu(x)\}\psi(x) \qquad (14)$$

Dari persamaan (14) terlihat jelas bahwa turunan kovarian: $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ yang identik dengan persamaan (4). Substitusi persamaan (1) ke persamaan (13) menghasilkan:

$$D_\mu\psi(x) = \{\partial_\mu + ieA_\mu(x)\}\psi(x) = e^{i\alpha(x)}\{\partial_\mu + i(\partial_\mu\alpha(x) + eA_\mu(x))\}\psi(x) \qquad (15)$$

Jika invarian *gauge*, maka suku yang mengandung: $\partial_\mu\alpha(x) + eA_\mu(x)$ pada persamaan (15) haruslah sama dengan $eA_\mu(x)$ sehingga transformasi medan gauge $A_\mu(x)$ haruslah:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \qquad (16)$$

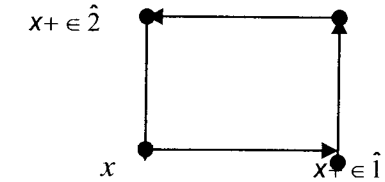
yang identik dengan persamaan (7).

Definisi turunan kovarian dan hukum transformasi untuk koneksi $A_\mu(x)$ didasarkan pada postulat simetri rotasi fase lokal. Eksistensi medan vektor $A_\mu(x)$ adalah sebagai konsekuensi dari simetri fase lokal. Tanpa postulat simetri fase lokal dan hukum transformasi $A_\mu(x)$, maka Lagrangian yang memuat turunan terhadap $\psi(x)$ tidak invarian *gauge*.

Selanjutnya ditinjau Lagrangian dengan tenaga kinetik memuat medan vektor $A_\mu(x)$. Untuk merealisasikannya, persamaan (12) diekspansikan ke dalam $\in$. Dengan menggunakan asumsi bahwa $U(y,x)$ suatu fase murni dan kondisi: $(U(x,y))^{+} = U(y,x)$, maka:

$$\begin{aligned} U(x+\in n, x) &= 1 - ie \in n^{\mu} A_{\mu}(x) + O(\in^2) \\ &= 1 - ie \in n^{\mu} A_{\mu}(x + \tfrac{\in}{2} n) + O(\in^3) \\ &= \exp\left(-ie \in n^{\mu} A_{\mu}(x + \tfrac{\in}{2} n) + O(\in^3)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Agar lebih jelas, ekspansi $U(y,x)$ dikaitkan dengan arah fase sepanjang suatu daerah persegi yang kecil dalam ruang-waktu, misalnya dengan meninjau suatu bidang/daerah di bidang (1,2) sebagaimana dinyatakan oleh vektor satuan $\hat{1}$ dan $\hat{2}$ (Gambar 1).



Gambar 1. Konstruksi kuat medan di bidang (1,2)

Didefinisikan *U(x)* sebagai hasilkali empat buah komparator (pembanding) di setiap titik empat persegi *(loop)* pada Gambar 1 sebagai berikut:

$$U(x) \equiv U(x, x+\in\hat{2})U(x+\in\hat{2}, x+\in\hat{1}+\in\hat{2})U(x+\in\hat{1}+\in\hat{2}, x+\in\hat{1})U(x+\in\hat{1}, x) \tag{18}$$

Dengan menggunakan persamaan (17):

$$\begin{aligned} U(x, x+\in\hat{2}) &= \exp\left(-ie \in \{-A_2(x + \tfrac{\in}{2}\hat{2})\} + O(\in^3)\right) \\ U(x+\in\hat{2}, x+\in\hat{1}+\in\hat{2}) &= \exp\left(-ie \in \{-A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1} + \in\hat{2})\} + O(\in^3)\right) \\ U(x+\in\hat{1}+\in\hat{2}, x+\in\hat{1}) &= \exp\left(-ie \in \{A_2(x+\in\hat{1} + \tfrac{\in}{2}\hat{2})\} + O(\in^3)\right) \\ U(x+\in\hat{1}, x) &= \exp\left(-ie \in \{A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1})\} + O(\in^3)\right) \end{aligned}$$

sehingga persamaan (18) menjadi:

$$\begin{aligned} U(x) = \exp\{-ie \in (&-A_2(x + \tfrac{\in}{2}\hat{2}) - A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1} + \in\hat{2}) \\ &+ A_2(x+\in\hat{1} + \tfrac{\in}{2}\hat{2}) + A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1})) + O(\in^3)\} \end{aligned} \tag{19}$$

Jika persamaan (18) diekspansikan ke dalam $\in$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 - ie \in \{-A_2(x + \tfrac{\in}{2}\hat{2}) - A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1} + \in\hat{2}) \\ &\qquad A_2(x+\in\hat{1} + \tfrac{\in}{2}\hat{2}) + A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1}) + O(\in^3)\} + \ldots.. \\ &= 1 - ie \in \left\{ \underbrace{\left[A_2(x+\in\hat{1} + \tfrac{\in}{2}\hat{2}) - A_2(x + \tfrac{\in}{2}\hat{2})\right]}_{\in\partial_1 A_2(x)} - \underbrace{\left[A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1} + \in\hat{2}) - A_1(x + \tfrac{\in}{2}\hat{1})\right]}_{\in\partial_2 A_1(x)} \right\} + O(\in^3) \\ &= 1 - ie \in^2 \{\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)\} + O(\in^3) \end{aligned}$$

Jadi:

$$U(x) = 1 - ie \in^2 \{\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)\} + O(\in^3) \tag{20}$$

Dari persamaan (19) dapat didefinisan suatu besaran fisis baru dengan struktur:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \mu,\nu = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{21}$$

yang bersifat invarian terhadap transformasi fase lokal. Besaran $F_{\mu\nu}$ dikenal sebagai *tensor medan elektromagnetik*. Jadi dengan meninjau geometri ruang-waktu dapat diperoleh tensor medan elektromagnetik $F_{\mu\nu}$. Besaran $F_{\mu\nu}$ tentu saja invarian terhadap transformasi

$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha$ (persamaan (15)). Sebagai bukti invariansi $F_{\mu\nu}$ walaupun medan *gauge* $A_\mu(x)$ mengalami perubahan menjadi $A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu\left(A_\nu - \tfrac{1}{e}\partial_\nu\alpha\right) - \partial_\nu\left(A_\mu - \tfrac{1}{e}\partial_\mu\alpha\right) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \tfrac{1}{e}\left\{\underbrace{\partial_\mu(\partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(\partial_\mu\alpha)}_{0}\right\} \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

Sembarang fungsi yang bergantung pada A_μ(dalam fisika dinyatakan oleh fungsi Lagrangian yang merupakan representasi suatu sistem fisis yang ditinjau), hanyalah melalui tensor medan tensor elektromagnetik $F_{\mu\nu}$ dan turunannya yang memenuhi invariansi *gauge* lokal. Fungsi-fungsi yang lebih umum seperti $A_\mu A^\mu$ (yang dikenal sebagai suku massa) jika medan gauge bertransformasi seperti pada persamaan (16), maka dihasilkan sebuah suku yang tidak dapat dikompensasi. Dengan demikian bentuk $A_\mu A^\mu$ tidak dibolehkan ada dalam Lagrangian karena melanggar prinsip invariansi gauge lokal.

Bukti:

Jika A_μ diganti menjadi $A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$, maka:

$$\begin{aligned} A_\mu A^\mu &= \left(A_\mu - \tfrac{1}{e}\partial_\mu\alpha\right)\left(A^\mu - \tfrac{1}{e}\partial^\mu\alpha\right) \\ &= A_\mu A^\mu - \left(\tfrac{1}{e}\partial_\mu\alpha\right)A^\mu - A_\mu\left(\tfrac{1}{e}\partial^\mu\alpha\right) + \tfrac{1}{e^2}\left(\partial_\mu\alpha\right)\left(\partial^\mu\alpha\right) \\ &= A_\mu A^\mu - \tfrac{1}{e}\left\{\left(\partial_\mu\alpha\right)A^\mu + A_\mu\left(\partial^\mu\alpha\right)\right\} + \tfrac{1}{e^2}\left(\partial_\mu\alpha\right)\left(\partial^\mu\alpha\right) \end{aligned}$$

Jadi terbukti $A_\mu A^\mu$ tidak invarian terhadap transformasi gauge lokal pada persamaan (16).

Argumentasi lain yang terkait dengan invariansi $F_{\mu\nu}$ dapat dibuat dengan menggunakan turunan kovarian. Telah diketahui, jika suatu medan mempunyai hukum transformasi lokal seperti pada persamaan (1), maka turunan kovariannya juga mempunyai hukum transformasi yang sama. Jadi turunan kovarian kedua ψ juga bertransformasi seperti persamaan (1). Berdasarkan argumen tersebut dapat dibentuk komutator untuk turunan kovarian:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi(x) . \qquad (22)$$

Komutator: $\left[D_\mu, D_\nu\right]$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left[D_\mu, D_\nu\right]\psi(x) &= \left(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu\right)\psi(x) \\ &= \left\{\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\left(\partial_\nu + ieA_\nu\right) - \left(\partial_\nu + ieA_\nu\right)\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\right\}\psi(x) \\ &= \left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)\psi(x) + ie\left(\partial_\mu A_\nu + A_\nu\partial_\mu - \partial_\nu A_\mu - A_\mu\partial_\mu\right)\psi(x) \\ &\qquad - e^2\left(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu\right)\psi(x) \\ &= \left[\partial_\mu, \partial_\nu\right]\psi(x) + ie\left(\left[\partial_\mu, A_\nu\right] - \left[\partial_\nu, A_\mu\right]\right)\psi(x) - e^2\left[A_\mu, A_\nu\right]\psi(x) \\ &= ie\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\psi(x) \end{aligned}$$

sehingga komutator $\left[D_\mu, D_\nu\right]$ dapat dituliskan menjadi:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = ieF_{\mu\nu} \qquad (23)$$

Sebagai kesimpulan dapat dinyatakan bahwa dengan mempostulatkan medan elektron mengikuti hukum transformasi simetri lokal persamaan (1), eksistensi potensial vektor elektromagnetik $\vec{A}$ menjadi suatu keharusan. Potensial vektor elektromagnetik yang merupakan komponen ruang dari medan $A_\mu = (A_0, -\vec{A}) = (\phi, -A_x, -A_y, -A_z)$, dan konstanta e pada persamaan (4) dikenal sebagai muatan elementer (muatan elektron).

3. Lagrangian Yang-Mills

Ditinjau medan fermion, yang sering disebut juga medan Dirac yang merupakan dublet dari grup SU(2), yaitu:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \tag{24}$$

yang bertransformasi melalui rotasi dalam ruang tiga dimensi abstrak sebagai spinor berkomponen dua:

$$\psi \to \exp\left(i\alpha^a \sigma^a/2\right)\psi \tag{25}$$

dengan σ^a $(a = 1,2,3)$ adalah matriks sigma Pauli dan α^a $(a = 1,2,3)$ suatu parameter. Persamaan (24) dibuat menjadi simetri lokal yang Lagrangiannya invarian terhadap transformasi persamaan (1), tetapi dengan membuat $\alpha^a \equiv \alpha^a(x)$. Kita tuliskan transformasi tersebut sebagai:

$$\psi \to V(x)\psi, \quad \text{dengan } V(x) = \exp\left(i\alpha^a(x)\sigma^a/2\right) \tag{26}$$

Dari persamaan (25) terlihat ada 3 gerak simetri ortogonal yang satu dengan yang lain tidak saling berkomutasi, yakni cukup ditinjau sifat matriks sigma Pauli: $\left[\sigma^a, \sigma^b\right] = 2i\varepsilon^{abc}\sigma^c$ yang tidak komutatif. Teori medan yang terkait dengan simetri lokal yang tidak komutatif disebut *teori gauge non-Abelian.*

Untuk membentuk Lagrangian yang invarian terhadap transformasi grup gauge non-Abelian, kita harus mendefinisikan kembali turunan kovarian. Digunakan definisi pada persamaan (8), tetapi karena ψ mempunyai dua komponen (seperti pada persamaan (24)), maka komparator $U(y,x)$ haruslah matriks 2×2. Hukum transformasi untuk $U(y,x)$ menjadi:

$$U(y,x) \to V(y)U(y,x)V^+(x) \tag{27}$$

dengan $V(x)$ seperti pada persamaan (26). Pada titik $x \neq y$ kita dapat membuat $U(y,x)$ menjadi matriks uniter. Di sekitar $U = 1$, matriks tersebut dapat diekspansikan dalam bentuk generator Hermitian SU(2). Jadi, jarak pisah infinitesimal (seperti yang dilakukan pada perumusan sebelumnya, persamaan (12)) dapat dituliskan:

$$U(x+\in n, x) = 1 + ig \in n^\mu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + O(\in^2) \tag{28}$$

dengan g adalah suatu konstanta. Dengan memasukkan persamaan (28) ke dalam persamaan (11) diperoleh:

$$\begin{aligned}
n^\mu D_\mu \psi(x) &= \lim_{\in\to 0}\frac{1}{\in}\{\psi(x+\in n) - U(x+\in n, x)\psi(x)\} \\
&= \lim_{\in\to 0}\frac{1}{\in}\left\{\psi(x+\in n) - \left(1 + ig \in n^\mu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + O(\in^2)\right)\psi(x)\right\} \\
&= \underbrace{\lim_{\in\to 0}\frac{1}{\in}\{\psi(x+\in n) - \psi(x)\}}_{n^\mu \partial_\mu \psi} - ign^\mu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\psi(x) \\
&= n^\mu \partial_\mu \psi(x0 - ign^\mu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\psi(x) \\
&= n^\mu\left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\psi(x).
\end{aligned}$$

Dengan demikian dihasilkan turunan kovarian:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \tag{29}$$

Untuk memperoleh hukum transformasi koneksi A_μ^a, persamaan (29) dimasukkan ke persamaan (28), yakni:

$$\begin{aligned} U(x+\in n,x) &\to V(x+\in n)U(x+\in n,x)V^+(x) \\ &= V(x+\in n,x)\left(1+ig\in n^\mu A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}\right)V^+(x) \end{aligned} \tag{30}$$

Untuk menyederhanakan persamaan (30), ekspansi $V(x+\in n)$ dilakukan dengan menggunakan identitas berikut:

$$\begin{aligned} V(x+\in n)V^+(x) &= \left[\left(1+\in n^\mu\partial_\mu + O(\in^2)\right)V(x)\right]V^+(x) \\ &= 1+\in n^\mu\left(\partial_\mu V(x)\right)V^+(x)+O(\in^2) \end{aligned}$$

dengan menggunakan:

$$\partial_\mu\left(\underbrace{V(x)V^+(x)}_{1}\right)=\left(\partial_\mu V(x)\right)V^+(x)+V(x)\partial_\mu V^+(x)$$

$$0=\left(\partial_\mu V(x)\right)V^+(x)+V(x)\partial_\mu V^+(x)$$

$$\Rightarrow\left(\partial_\mu V(x)\right)V^+(x)=-V(x)\partial_\mu V^+(x)$$

maka:

$$\begin{aligned} V(x+\in n)V^+(x) &= \left[\left(1+\in n^\mu\partial_\mu + O(\in^2)\right)V(x)\right]V^+(x) \\ &= 1+\in n^\mu V(x)\left(-\partial_\mu V^+(x)\right)+O(\in^2) \end{aligned} \tag{31}$$

Jadi dengan substitusi persamaan (31) ke persamaan (30) diperoleh:

$$\begin{aligned} &U(x+\in n,x)\to V(x+\in n)U(x+\in n,x)V^+(x) \\ &1+ig\in n^\mu A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2} \to V(x+\in n,x)\underbrace{V^+(x)V(x)}_{1}\left(1+ig\in n^\mu A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}\right)V^+(x) \\ &\qquad = V(x+\in n,x)V^+(x)\left(V(x)+ig\in V(x)n^\mu A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}\right)V^+(x) \\ &\qquad = \left(1+\in n^\mu V(x)\left(-\partial_\mu V^+(x)\right)\right)\left(1+ig\in V(x)n^\mu A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}V^+(x)\right) \\ &\qquad = 1+ig\in n^\mu V(x)\left\{A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}+\frac{i}{g}\partial_\mu\right\}V^+(x) \end{aligned}$$

Jadi diperoleh hukum transformasi:

$$A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2} \to V(x)\left(A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}+\frac{i}{g}\partial_\mu\right)V^+(x) \tag{32}$$

Untuk transformasi infinitesimal, bentuk $V(x)=\exp\left(i\alpha^a(x)\sigma^a/2\right)$ dapat diekspansikan, yaitu: $V(x)=\exp\left(i\alpha^a(x)\sigma^a/2\right)=1+i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}+\ldots$, dan jika diambil sampai orde pertama saja, maka persamaan (32) dapat dituliskan menjadi:

$$
\begin{aligned}
A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} &\rightarrow \left(1 + i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)\left(1 - i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \\
&= \left\{A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu + \left(i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\right\}\left(1 - i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \\
&= A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu + i\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \\
&\quad - i\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) - \frac{i^2}{g}\partial_\mu\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) - i^2\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \\
&= A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^a)\frac{\sigma^a}{2} + i\left(\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right) - \left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\right) + \frac{i}{g}\partial_\mu \\
&\quad + \left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \\
&= A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^a)\frac{\sigma^a}{2} + i\left[\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}, A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2}\right] + \frac{i}{g}\partial_\mu + \left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right)
\end{aligned}
$$

sehingga hukum transformasi untuk $A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$ dapat dituliskan:

$$
A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \rightarrow A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^a)\frac{\sigma^a}{2} + i\left[\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}, A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2}\right] + \dots \tag{33}
$$

Suku ke tiga ruas kanan persamaan (33) merupakan suku yang baru berkaitan dengan sifat transformasi lokal yang tidak komutatif. Kombinasi relasi pada persamaan (33) dengan transformasi medan fermion: $\psi \rightarrow \left(1 + i\alpha^a \sigma^a/2\right)\psi$ menghasilkan:

$$
\begin{aligned}
D_\mu\psi &\rightarrow \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - i(\partial_\mu \alpha^a)\frac{\sigma^a}{2} + g\left[\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}, A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2}\right]\right)\left(1 + i\alpha^c \frac{\sigma^c}{2}\right)\psi \\
&= \left(1 + i\alpha^c \frac{\sigma^c}{2}\right)D_\mu\psi
\end{aligned} \tag{34}
$$

Jadi, dengan menggunakan turunan kovarian, kita dapat membentuk Lagrangian invarian *gauge* yang lebih umum untuk medan fermion ψ. Untuk menuliskan Lagrangian yang lengkap harus juga ditemukan suku invarian *gauge* yang bergantung pada A_μ^a. Untuk maksud itu, kita bentuk tensor yang analog dengan tensor medan elektromagnetik.

Analog dengan persamaan (21), kita dapat menuliskan hukum transformasi turunan kovarian sebagai berikut:

$$
[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \rightarrow V(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x). \tag{35}
$$

Bentuk $[D_\mu, D_\nu]$ pada persamaan (35) bukanlah operator diferensial tetapi merupakan suatu faktor perkalian (bentuk matriks) yang bekerja pada ψ. Bentuk dari $[D_\mu, D_\nu]$ secara eksplisit dapat diturunkan sebagai berikut:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)$$

$$= \left\{\left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\left(\partial_\nu - igA_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right) - \left(\partial_\nu - igA_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right)\left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\right\}\psi(x)$$

$$= \left\{\left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\partial_\nu - \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)igA_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right.$$

$$\left. - \left(\partial_\nu - igA_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right)\partial_\mu + \left(\partial_\nu - igA_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right)igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right\}\psi(x)$$

$$= \left\{\partial_\mu \partial_\nu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\partial_\nu - ig\partial_\mu A_\nu^b \frac{\sigma^b}{2} - g^2 A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} A_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right.$$

$$\left. - \partial_\nu \partial_\mu + igA_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\partial_\mu + ig\partial_\nu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + g^2 A_\nu^b \frac{\sigma^b}{2} A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right\}\psi(x)$$

$$= -ig\left\{\left(\partial_\mu A_\nu^a \frac{\sigma^a}{2} - \partial_\nu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right) - ig\left(A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} A_\nu^b \frac{\sigma^b}{2} - A_\nu^b \frac{\sigma^b}{2} A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\right\}\psi(x)$$

$$= -ig\underbrace{\left\{\partial_\mu A_\nu^a \frac{\sigma^a}{2} - \partial_\nu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig\left[A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, A_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right]\right\}}_{F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}}\psi(x)$$

$$= -igF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}\psi(x)$$

yang mengimplikasikan:

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} \tag{36}$$

dengan:

$$F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} = \partial_\mu A_\nu^a \frac{\sigma^a}{2} - \partial_\nu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig\left[A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, A_\nu^b \frac{\sigma^b}{2}\right]. \tag{37}$$

Jika dituliskan:

$$\left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2}\right] = i\varepsilon^{abc}\frac{\sigma^c}{2}, \tag{38}$$

maka diperoleh:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\mu^c \tag{39}$$

Hukum transformasi untuk kuat medan sesuai dengan persamaan (26) dan (35) adalah:

$$\begin{gathered}[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \to V(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \\ -igF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}\psi(x) \to V(x)\left(-igF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\psi(x)\end{gathered} \tag{40}$$

dengan menyisipkan $V^+(x)V(x)$ (sebab $V^+(x)V(x) = 1$) diantara suku $\left(-igF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}\right)$ dan $\psi(x)$ pada persamaan (40) diperoleh:

$$-igF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}\psi(x) \to V(x)\left(-igF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}\right)V^+(x)\underbrace{V(x)\psi(x)}_{\psi(x)}.$$

Jadi:

$$F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} \to V(x)\left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)V^+(x). \tag{41}$$

Bentuk infinitesimal persamaan (41) dapat diperoleh dengan mengekspansikan $V(x)$ dan $V^+(x)$ dalam σ^a, dengan mengambil sampai orde pertama saja diperoleh:

$$\begin{aligned}
F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} &\to \left(1+i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}\right)\left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)\left(1-i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}\right)\\
&= \left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} + i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)\left(1-i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}\right)\\
&= F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} + i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} - iF^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a\frac{\sigma^a}{2} + \alpha^a\frac{\sigma^a}{2}F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}\\
&= F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} + \left[i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}, F^b_{\mu\nu}\frac{\sigma^b}{2}\right]
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh transformasi:

$$F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} \to F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} + \left[i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2}, F^b_{\mu\nu}\frac{\sigma^b}{2}\right] \tag{42}$$

Dari persamaan (42) terlihat bahwa kuat medan tidak lagi merupakan suatu besaran yang invarian *gauge*, karena setiap medan mempunyai tiga jenis kuat medan yang berkaitan dengan suatu arah rotasi dalam ruang abstrak, yaitu kombinasi yang dihasilkan suku terakhir ruas kanan persamaan (42). Tetapi, kombinasi kuat medan yang invarian *gauge* dapat dibentuk, misalnya dengan menuliskan:

$$L = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 \tag{43}$$

sebagai suku tenaga kinetik yang invarian gauge untuk A^a_μ. Sebagai bukti dijabarkan berikut ini:

$$\begin{aligned}
F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2} &= \frac{1}{2}\left(F^1_{\mu\nu}\sigma^1 + F^2_{\mu\nu}\sigma^2 + F^3_{\mu\nu}\sigma^3\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(F^1_{\mu\nu}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F^2_{\mu\nu}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + F^3_{\mu\nu}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}F^3_{\mu\nu} & F^1_{\mu\nu} - iF^2_{\mu\nu}\\ F^1_{\mu\nu} + iF^2_{\mu\nu} & -F^3_{\mu\nu}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{43a}$$

$$\begin{aligned}
\left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)^2 &= \left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)^+\left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}F^3_{\mu\nu} & F^1_{\mu\nu} - iF^2_{\mu\nu}\\ F^1_{\mu\nu} + iF^2_{\mu\nu} & -F^3_{\mu\nu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F^3_{\mu\nu} & F^1_{\mu\nu} - iF^2_{\mu\nu}\\ F^1_{\mu\nu} + iF^2_{\mu\nu} & -F^3_{\mu\nu}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\left(F^1_{\mu\nu}\right)^2 + \left(F^2_{\mu\nu}\right)^2 + \left(F^3_{\mu\nu}\right)^2 & 0\\ 0 & \left(F^1_{\mu\nu}\right)^2 + \left(F^2_{\mu\nu}\right)^2 + \left(F^3_{\mu\nu}\right)^2\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{43b}$$

sehingga suku tenaga kinetik adalah: trace $\left(F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma^a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2$. Jadi persamaan (43) terbukti. Kuadrat dari kuat medan non-Abelian tersebut (misalnya digunakan persamaan (39)) akan dihasilkan:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu a}F^a_{\mu\nu} &= \left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + g\varepsilon_{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}\right)\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\mu\right) \\ &= \left(\partial^\mu A^{\nu a}\right)\left(\partial_\mu A^a_\nu\right) - \left(\partial^\nu A^{\mu a}\right)\left(\partial_\mu A^a_\nu\right) + g\varepsilon_{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}\left(\partial_\mu A^a_\nu\right) \\ &\quad - \left(\partial^\mu A^{\nu a}\right)\left(\partial_\nu A^a_\mu\right) + \left(\partial^\nu A^{\mu a}\right)\left(\partial_\nu A^a_\mu\right) - \left(g\varepsilon_{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}\right)\left(\partial_\nu A^a_\mu\right) \\ &\quad + \left(\partial^\mu A^{\nu a}\right)\left(g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\mu\right) - \left(\partial^\nu A^{\mu a}\right)\left(g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\mu\right) + \left(g\varepsilon_{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}\right)\left(g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\mu\right) \end{aligned} \tag{43c}$$

Jadi Lagrangian pada persamaan (42) mengandung suku-suku A^a_μ berpangkat tiga dan empat. Lagrangian tersebut sebagai suatu teori medan interaksi dikenal sebagai *teori Yang-Mills*. Teori Yang-Mills tersebut merupakan contoh sederhana teori *gauge* non-Abelian.

Untuk membentuk teori medan vektor Yang-Mills yang berinteraksi dengan medan fermion, kita hanya menambahkan suku Lagrangian Dirac, sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu\right)\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu - igA^a_\mu\frac{\sigma^a}{2}\right\}\right)\psi - m\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \tag{44}$$

yang dikenal sebagai *Lagrangian Yang-Mills*, dengan *m* adalah massa fermion. Persamaan gerak teori gauge tersebut dapat diperoleh dengan memvariasi Lagrangian tersebut (persamaan (44)) sebagai berikut:

$$\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)} = \frac{\partial L}{\partial A^a_\mu}. \tag{45}$$

Nilai dari $\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)}$ dan $\frac{\partial L}{\partial A^a_\mu}$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)}\left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu - igA^a_\mu\frac{\sigma^a}{2}\right\}\right)\right\}\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{1}{4}\frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)}F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)} \\ &= -F^{\mu\nu a} \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)} = -\partial^\mu F^{\mu\nu a} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A^a_\mu} = -g\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\sigma^a}{2}\psi - g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu,$$

sehingga:

$$\partial^\mu\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)} = \frac{\partial L}{\partial A^a_\mu},$$

yang akhirnya menghasilkan:

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g\varepsilon^{abc}A^{b\mu}F^c_{\mu\nu} = -g\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\sigma^a}{2}\psi, \tag{46}$$

dengan *g* suatu konstanta (konstanta kopling yang menunjukkan kuat interaksi) serta

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\sigma^a}{2}\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi = j^{\mu a}, \tag{47}$$

dengan $t^a = \sigma^a/2$ dan $j^{\mu a}$ didefisikan sebagai arus simetri global medan fermion.

4. Penutup

Telah dilakukan elaborasi terhadap medan fermion (medan Dirac) bernilai kompleks yang harus memenuhi invariansi *gauge* pada transformasi *gauge* lokal. Sebagai konsekuensinya turunan ∂_μ harus diganti dengan turunan kovarian $D_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$. Keharusan adanya medan *gauge* A_μ sebagai konsekuensi logis dari postulat berlakunya simetri rotasi fase. Juga telah dijabarkan tensor kuat medan elektromagnetik $F_{\mu\nu}$ dengan menggunakan konsep geometri dan invariansi Lagrangian.

Dengan memberlakukan invariansi Lagrangian untuk medan Dirac yang merupakan dublet dari grup SU(2) dihasilkan suatu tensor medan yang mirip dengan tensor medan elektromagnetik, yaitu $F^a_{\mu\nu}$ bersifat tidak komutatif (non-Abelian) yang ditandai oleh keberadaan faktor f^{abc} yang merupakan tetapan struktur aljabar Lie untuk komutasi generator (basis) grup Lie. Bentuk interaksi dalam teori non-Abelian ditentukan oleh adanya keharusan bahwa sebuah teori harus didasarkan pada prinsip simetri dan *gauge* lokal harus invarian terhadap transformasi-transformasi yang dilakukan.

Kepustakaan

Bailin, D., and Love, A., ..., *Introduction to Gauge Field Theory*, Graduate Student Series in Physics

Huang, K., 1988, *Quarks, Leptons & Gauge Fields*, Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd,

Mandl, F., and Shaw, G., 1984, *Quantum Field Theory*, New York: John Wiley & Sons.

Peskin, M.E., and Schroeder, D.V., 1995, *Introduction to Quantum Field Theory*, New York: Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Ryder, L.H., 1988, *Quantum Field Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

Yang, C.N., and Mills, R.L., 1954, "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance", *Phys. Rev.* **96**.

ASAN DAMANIK

Lahir di Simalungun pada tanggal 11 Nopember 1963. Lulus Sarjana Ilmu Kedokteran Hewan IPB Bogor tahun 1987, Sarjana Fisika FMIPA UGM tahun 1992, Magister Sains dalam bidang Fisika Teoretis dari Pascasarjana UGM tahun 1997, dan Doktor Fisika Teoretis dalam bidang Fisika Parrtikel Fundamental dari FMIPA UGM tahun 2009. Tahun 1992-1993 menjadi dosen di FPMIPA IKIP Sanata Dharma, tahun 1993-2007 dosen Jurusan Fisika FMIPA Universitas Sanata Dharma, dan tahun 2007 sampai sekarang menjadi dosen pada Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Teknologi (FST) Universitas Sanata Dharma. Bidang penlitian yang diminati adalah Fisika Partikel Fundamental khusunya Perluasan Model Standar Interaksi Elektro-lemah, Massa dan Matriks massa Neutrino.