ISSN: 1412-1220

JURNAL ILMIAH

Mat Stat

Vol. 10 No. 1 Januari 2010

MATEMATIKA, STATISTIKA

Jurnal Mat Stat	Vol. 10	No. 1	Hlm. 1-86	Jakarta Januari 2010	ISSN: 1412 - 1220

ISSN 1412-1220

JURNAL ILMIAH Mατ Stατ

Vol. 10 No. 1 Januari 2010

Jurnal Ilmiah MATEMATIKA, STATISTIKA (Mατ Stατ) diterbitkan oleh Direktorat Riset dan HKI BINUS University memfokuskan pada artikel ilmiah berupa hasil penelitian, pengembangan ilmu dalam bidang matematika, statistika, dan aplikasinya. Tujuan publikasi jurnal ini adalah penyebarluasan hasil kajian dan penelitian untuk meningkatkan penguasaan, pengembangan, penerapan matematika dan statistika dalam bidang teknik, komputer dan industri, serta aplikasi lainnya.

DAFTAR ISI

SISTEM PERSAMAAN LINEAR ITERATIF MAX-PLUS BILANGAN KABUR

M. Andy Rudhito[1]; Sri Wahyuni[2]; Ari Suparwanto[3]; F.Susilo, S.J[4]

[1] Jurusan PMIPA FKIP USD, Paingan Maguwoharjo, Yogyakarta
rudhito@staff.usd.ac.id
[2, 3] Jurusan Matematika FMIPA, UGM, Sekip Utara, Yogyakarta
[4] Jurusan Matematika FST USD, Paingan Maguwoharjo, Yogyakarta

ABSTRACT

The activity times in a network are seldom precisely known, and then could be represented into the fuzzy numbers. With max-plus algebra approach, the network dynamic could be modeled and analyzed through a related iterative system of max-plus linear equations. This paper aims to determine the existence and uniqueness of the solution of the iterative system of fuzzy number max-plus linear equations. The finding shows that if the fuzzy number square matrix of the systems is semi-definite, then the solution of system is exists. The solution of the system could be determined the solution of the alpha-cuts of the system firstly, which form the iterative system of interval max-plus linear equations. Based on the Decomposition Theorem on fuzzy set, we can determine the membership function of the elements of the solution vectors. Moreover, the solution is unique if the fuzzy number square matrix of the systems is definite.

Keywords: *max-plus algebra, system of linear equations, fuzzy number*

ABSTRAK

Waktu aktivitas dalam suatu jaringan kadang tidak dapat diketahui dengan pasti, dan dapat dinyatatakan ke dalam suatu bilangan kabur (fuzzy number). Dengan pendekatan aljabar max-plus, dinamika jaringan dapat dimodelkan dan dianalisis melalui sistem persamaan linear iteratif max-plus yang terkait. Artikel ini bertujuan untuk menentukan eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus bilangan kabur. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks persegi bilangan kabur dari sistem adalah semi-definite, maka sistem mempunyai penyelesaian. Penyelesaian sistem dapat ditentukan dengan terlebih dahulu menentukan penyelesaian sistem potongan-alfa-nya, yang berupa sistem persamaan linear iteratif max-plus interval. Dengan didasarkan pada Teorema Dekomposisi pada himpunan kabur, dapat ditentukan fungsi keanggotaan elemen-elemen vektor penyelesaiannya. Lebih lanjut, penyelesaian sistem tunggal jika matriks persegi bilangan kaburnya adalah definit.

Kata kunci: *aljabar max-plus, sistem persamaan linear, bilangan kabur*

PENDAHULUAN

Aljabar max-plus (himpunan R $\cup\{-\infty\}$, dengan R adalah himpunan semua bilangan real, yang dilengkapi dengan operasi maksimum dan penjumlahan) telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis jaringan seperti penjadwalan proyek, sistem produksi, jaringan antrian, dan sebagainya. Pemodelan dan analisis suatu jaringan dengan pendekatan ini dapat memberikan hasil analitis dan lebih mudah pada komputasinya seperti dalam Bacelli, *et al*. (2001), Rudhito, A. (2004), dan Krivulin, N.K. (2001). Pemodelan tersebut kebanyakan masih berupa model deterministik, di mana waktu aktivitas pada jaringan berupa bilangan real. Pada kenyataannya, oleh karena beberapa faktor, misalkan operator mesin, kadang waktu aktivitas pada jaringan tidak pasti. Dalam masalah ini, aljabar max-plus telah dikembangkan untuk model stokastik, di mana waktu aktivitasnya berupa peubah acak seperti dalam Bacelli, *et al*. (2001) dan B. Heidergott, B., *et. al*. (2005). Peubah acak dalam model stokastik diasumsikan mengikuti suatu distribusi peluang tertentu. Distribusi ini biasanya disusun berdasarkan data-data yang diperoleh setelah jaringan dioperasikan untuk jangka waktu tertentu.

Dalam masalah pemodelan dan analisis suatu jaringan, di mana waktu aktivitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktivitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Waktu aktivitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Untuk itu, waktu aktivitas jaringan dimodelkan dalam suatu bilangan kabur (*fuzzy number*). Akhir-akhir ini telah berkembang pemodelan jaringan yang melibatkan bilangan kabur. Untuk masalah penjadwalan yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Chanas, S., Zielinski, P. (2001). Sedangkan untuk masalah model jaringan antrian yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Lüthi, J., Haring, G. (1997).

Pemodelan dan analisis pada masalah-masalah jaringan yang melibatkan bilangan kabur, sejauh penulis ketahui, belum ada yang menggunakan pendekatan aljabar max-plus. Dalam pemodelan dinamika suatu jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus, graf untuk jaringan tersebut dinyatakan dengan menggunakan matriks, dengan unsur-unsurnya menyatakan waktu aktivitas antar titik pada jaringan tersebut. Selanjutnya, pemodelan terkait dengan sistem persamaan linear iteratif max-plus $\boldsymbol{x} = A \otimes \boldsymbol{x} \oplus b$. Pemodelan waktu aktivitas jaringan dengan menggunakan bilangan kabur dengan pendekatan aljabar max-plus akan terkait dengan sistem persamaan linear iteratif max-plus bilangan kabur. Untuk itu, artikel ini akan membahas eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus bilangan kabur.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis dan perhitungan-perhitungan dengan bantuan program MATLAB. Dari hasil-hasil dalam sistem persamaan linear max-plus dan sistem persamaan linear max-plus interval yang sudah ada, akan digeneralisasi ke dalam sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur. Operasi-operasi dalam bilangan kabur akan dilakukan melalui potongan-α-nya yang berupa interval. Hasil-hasil peneltian akan disajikan dalam definisi, teorema, dan contoh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan akan dilakukan dengan sistematika berikut. Terlebih dahulu akan ditinjau konsep-konsep dasar dalam aljabar max-plus dan sistem persamaan linear iteratif max-plus. Selanjutnya akan ditinjau hasil-hasil generalisasi dari sistem persamaan linear iteratif max-plus ke dalam sistem persamaan linear iteratif max-plus interval. Pada bagian inti akan dibahas hasil-hasil dalam sistem persamaan linear iteratif max-plus bilangan kabur.

Aljabar Max-Plus dan Sistem Persamaan Linear Iteratif Max-Plus

Berikut ini ditinjau konsep-konsep dasar aljabar max-plus dan kaitannya dengan teori graf serta eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Baccelli *et.al* (1992).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon : = -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b : = a + b$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield, yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian, $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$.

Aljabar max-pus $\mathbf{R}_{\max}$ *tidak memuat pembagi nol*, yaitu $\forall$ x, $y \in \mathbf{R}_\varepsilon$ berlaku jika $x \otimes y = \varepsilon$, maka $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$. Relasi "$\preceq_{\mathrm{m}}$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ dengan $x \preceq_{\mathrm{m}} y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut, relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Dalam $\mathbf{R}_{\max}$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_{\max}$, jika $a \preceq_{\mathrm{m}} b$, maka $a \oplus c \preceq_{\mathrm{m}} b \oplus c$, dan $a \otimes c \preceq_{\mathrm{m}} b \otimes c$. Pangkat k dari elemen $x \in \mathbf{R}$ dilambangkan dengan $x^{\otimes^k}$ didefinisikan sebagai berikut: $x^{\otimes^0} := 0$ dan $x^{\otimes^k} := x \otimes x^{\otimes^{k-1}}$, dan didefinisikan pula $\varepsilon^{\otimes^0} : = 0$ dan $\varepsilon^{\otimes^k} : = \varepsilon$, untuk $k = 1, 2, \ldots$

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n} : = \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan A, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p \times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \ , \ \text{jika } i = j \\ \varepsilon \ , \ \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_{\max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dan elemen satuan matriks E. Sedangkan $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Pangkat k dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n n}$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan $A^{\otimes^0} = E_n$ dan $A^{\otimes^k} = A \otimes A^{\otimes^{k-1}}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Relasi "$\preceq_{\mathrm{m}}$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$. Perhatikan bahwa $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} B_{ij}$ untuk setiap i dan j. Dalam $(\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}, \oplus, \otimes)$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall A, B, C \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, jika $A \preceq_{\mathrm{m}} B$, maka $A \oplus C \preceq_{\mathrm{m}} B \oplus C$ dan $A \otimes C \preceq_{\mathrm{m}} B \otimes C$.

Suatu *graf berarah* $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan $\mathcal{G} = (V, \mathcal{A})$ dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong, yang anggotanya disebut *titik* dan $\mathcal{A}$ adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota $\mathcal{A}$ disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah $\mathcal{G}$ adalah suatu barisan berhingga busur $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dengan $(i_k, i_{k+1}) \in \mathcal{A}$ untuk suatu $l \in \mathbf{N}$ (= himpunan semua bilangan asli), dan $k = 1, 2, \dots, l-1$. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. *Sirkuit elementer* adalah sirkuit yang titik-titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Suatu graf berarah $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ dikatakan *terhubung kuat* jika untuk setiap $i, j \in \mathcal{V}$, $i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j.

Diberikan graf berarah $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, p\}$. Graf berarah $\mathcal{G}$ dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in$ A dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij}. Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i), dilambangkan dengan $w(j, i)$. *Graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ adalah graf berarah berbobot $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = \{(j, i) | w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dikatakan *semi-definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot takpositif dan dikatakan *definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot negatif. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa jika A semi-definit, maka $\forall p \geq n$, $A^{\otimes^p} \preceq_m E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes^{n-1}}$. Diberikan matriks semi-definit $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Didefinisikan $A^* := E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus \dots$.

Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^n := \{ \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \dots, n\}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^n$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n \times 1}$ sehingga $\mathbf{R}_{\max}^n$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^n$ disebur *vektor* atas $\mathbf{R}_{\max}$. Berikut adalah teorema eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus.

Teorema 1 adalah sebagai berikut. Jika A semi-definit, maka $\boldsymbol{x}^* = A^* \otimes \boldsymbol{b}$ merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus $\boldsymbol{x} = A \otimes \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}$. Lebih lanjut, jika A definit, maka sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian tunggal. Buktinya dapat dilihat pada Bacelli, *et.al.* (2001: 109).

Aljabar Max-Plus Interval dan Sistem Persamaan Linear Iteratif Max-Plus Interval

Selanjutnya, ditinjau konsep-konsep dasar dalam aljabar max-plus interval dan matriks atas aljabar max-plus interval dan eksistensi serta ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus interval. Pembahasan lebih lengkapnya dapat dilihat pada Rudhito, A. dkk (2008a, 2008b, 2008c).

Interval (tertutup) x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}_{\max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \overline{x}\}$. Interval x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ di atas disebut *interval max-plus*, yang selanjutnya akan cukup disebut interval. Suatu bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon := \{ \mathrm{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x}\} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan: $\mathrm{x} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$ dan $\mathrm{x} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$, $\forall$ x, y $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon)$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $0 = [0, 0]$. Semiring idempoten komutatif $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ selanjutnya disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang dilambangkan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max} = \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max})$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya, matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$, didefinisikan $\alpha \,\overline{\otimes}\, A$, dengan $(\alpha \,\overline{\otimes}\, A)_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, A_{ij}$ dan $A \,\overline{\oplus}\, B$, dengan $(A \,\overline{\oplus}\, B)_{ij} = A_{ij} \,\overline{\oplus}\, B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times p}_{\max}$, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{p\times n}_{\max}$, didefinisikan $A \,\overline{\otimes}\, B$ dengan $(A \,\overline{\otimes}\, B)_{ij} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{p}} A_{ik} \,\overline{\otimes}\, B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. $(\mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i, j dan elemen satuan adalah matriks E, dengan $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \ , \ \text{jika } i = j \\ \varepsilon \ , \ \text{jika } i \neq j \end{cases}$. Sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Untuk $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}^{m\times n}_{\max}$ dan $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}^{m\times n}_{\max}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Diberikan matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$, dengan $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks dari* A, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{ A \in \mathbf{R}^{m\times n}_{\max} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A} \}$ dan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{m\times n}_{\max})_b = \{ [\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max} \}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{m\times n}_{\max})_b$, didefinisikan $\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\oplus}\, [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$. Untuk $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{m\times p}_{\max})_b$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{p\times n}_{\max})^*$, didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^{n\times n}_{\max})_b, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah interval matriks $[\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan adalah interval matriks [E, E]. Sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{m\times n}_{\max})_b$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ isomorfis dengan semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^{n\times n}_{\max})_b, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$, dengan pemetaan $f : \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max} \to \mathbf{I}(\mathbf{R}^{n\times n}_{\max})_b, f(A) = [\underline{A}, \overline{A}], \forall A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max}$. Sedangkan semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$ atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{m\times n}_{\max})_b$ atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$. Dengan demikan, untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{n\times n}_{\max})_b$, maka $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\max}$, sehingga dapat ditentukan matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max}$, di mana $[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $\forall i$ dan j. Dengan demikian, matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{m\times n}_{\max}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{m\times n}_{\max})_b$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{n\times n}_{\max})_b$ disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval* $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max}$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Akibat isomorfisma di atas, maka berlaku $\alpha \,\overline{\otimes}\, A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$, $A \,\overline{\oplus}\, B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \,\overline{\otimes}\, B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Berikut ini diberikan definisi semi-definit dan definit untuk dalam versi matriks interval. Definisi 1, suatu matriks $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max}$ dengan, $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, dikatakan *semi-definit* jika $A \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\max}$ semi-definit $\forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ dan dikatakan *definit* jika $A \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\max}$ definit $\forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]$. Berikut ini diberikan teorema mengenai syarat perlu dan cukup suatu matriks $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n\times n}_{\max}$ semi-definit.

Teorema 2 adalah sebagai berikut. Diberikan A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan A $\approx$ [$\underline{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{A}}$]. Matriks interval A semi-definit jika dan hanya jika $\overline{\mathrm{A}}$ semi-definit. Buktinya adalah sebagai berikut.
($\Rightarrow$): jelas menurut definisi semi-definit pada matriks atas aljabar max-plus.
($\Leftarrow$): Andaikan $\overline{\mathrm{A}} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ semi-definit, maka semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(\overline{\mathrm{A}})$ mempunyai bobot takpositif. Ambil sembarang matriks $A \in [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, maka $\underline{\mathrm{A}} \preceq_{\mathrm{m}} A \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{A}}$ sehingga berlaku $(\underline{\mathrm{A}})_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} (A)_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} (\overline{\mathrm{A}})_{ij}$ untuk setiap i dan j. Karena semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(\overline{\mathrm{A}})$ mempunyai bobot takpositif, maka semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ juga mempunyai bobot takpositif, yang berarti matriks A semi-definit.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n} = \{\mathbf{x} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n]^{\mathrm{T}} | \ \mathrm{x}_i \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}, i = 1, 2, ..., n\}$. Himpunan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times 1}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ disebut *vektor interval atas* $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$. Vektor interval $\mathbf{x}$ bersesuaian dengan *interval vektor* [$\underline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{x}}$], yaitu $\mathbf{x} \approx [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$. Berikut adalah teorema eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus interval.

Teorema 3 adalah sebagai berikut. Diberikan A $\in \mathrm{I}(\mathrm{R})_{\max}^{n\times n}$ dan b $\in \mathrm{I}(\mathrm{R})_{\max}^{n}$. Jika A semi-definit, maka vektor interval $\mathrm{x}^{*} \approx [\underline{\mathrm{A}}^{*} \otimes \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathrm{A}}^{*} \otimes \overline{\mathbf{b}}]$ merupakan penyelesaian interval sistem x = A $\overline{\otimes}$ x $\overline{\oplus}$ b. Lebih lanjut, jika A definit, maka penyelesaian interval tersebut adalah tunggal. Buktinya dapat dilihat pada Rudhito, dkk. (2008c: 207).

Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Matriks atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur

Terlebih dahulu ditinjau konsep-konsep dasar himpunan dan bilangan kabur. Uraian lebih lengkap dan bukti teorema dapat dilihat dalam Zimmermann, H.J. (1991), Lee, K.H. (2005), dan Susilo, F. (2006). Suatu himpunan A dalam semesta X dapat dinyatakan dengan *fungsi karakteristik* $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$, yang didefinisikan dengan aturan $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{jika } x \in A \\ 0, \text{jika } x \notin A \end{cases}$

untuk setiap $x \in X$. Himpunan kabur $\widetilde{K}$ dalam semesta X dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut $\widetilde{K} = \{(x, \mu_{\widetilde{K}}(x)) | \ x \in X\}$, di mana $\mu_{\widetilde{K}}$ adalah fungsi keanggotaan himpunan kabur $\widetilde{K}$, yang merupakan suatu pemetaan dari semesta X ke interval tertutup [0, 1]. *Pendukung* (*support*) suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, dilambangkan dengan *pend*($\widetilde{K}$) adalah himpunan tegas (*crisp*) yang memuat semua anggota semesta yang mempunyai derajat keanggotaan taknol dalam $\widetilde{K}$, yaitu: *pend*($\widetilde{K}$) = $\{x \in X \mid \mu_{\widetilde{K}}(x) > 0\}$. *Tinggi (height)* suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, dilambangkan dengan *tinggi*($\widetilde{K}$), didefinisikan sebagai *tinggi*($\widetilde{K}$) = $\sup_{x\in X}\{\mu_{\widetilde{K}}(x)\}$. Suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$ dikatakan *normal* jika *tinggi*($\widetilde{K}$) = 1.

Untuk suatu bilangan $\alpha \in [0, 1]$, *potongan-*α suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, yang dilambangkan dengan pot$^{\alpha}$($\widetilde{K}$) = K^{α} adalah himpunan crisp (tegas) yang memuat semua elemen semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\widetilde{K}$ lebih besar atau sama dengan α, yang didefinisikan sebagai $K^{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{K}}(x) \geq \alpha\}$. Salah satu sifat potongan-α suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$ adalah jika $\alpha_1 \leq \alpha_2$ maka $K^{\alpha_2} \subseteq K^{\alpha_1}$, yang disebut dengan sifat tersarang (*nested*). Suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$ dikatakan *konveks* jika K^{α} konveks $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Teorema 4 *(Teorema Dekomposisi)* adalah sebagai berikut. Jika A^α adalah potongan-α himpunan kabur $\widetilde{A}$ dalam semesta X dan $\widetilde{A}^\alpha$ adalah himpunan kabur dalam X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\widetilde{A}^\alpha}(x) = \alpha\ \chi_{A^\alpha}(x)$, di mana χ_{A^α} adalah fungsi karakteristik himpunan A^α, maka $\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \widetilde{A}^\alpha$.

Teorema 5 *(Teorema Representasi)* adalah sebagai berikut. Jika $\{ K^\alpha \}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$ adalah keluarga himpunan dalam semesta X yang memenuhi sifat tersarang (*nested*), yaitu jika $\alpha \le \beta$ maka berlaku $K^\alpha \supseteq K^\beta$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, maka terdapat dengan tunggal himpunan kabur $\widetilde{L}$ dalam semesta X sedemikian hingga $L^\alpha = K^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Bilangan kabur $\widetilde{a}$ didefinisikan sebagai himpunan kabur dalam semesta **R** yang memenuhi sifat berikut: *i*) normal, yaitu $a^1 \ne \emptyset$, *ii*) $\forall \alpha \in (0, 1]$, a^α adalah interval tertutup dalam **R**, yaitu $\exists\, \underline{a^\alpha}$, $\overline{a^\alpha} \in$ **R** dengan $\underline{a^\alpha} \le \overline{a^\alpha}$ sedemikian sehingga $a^\alpha = [\,\underline{a^\alpha}, \overline{a^\alpha}\,] = \{x \in \mathbf{R} \mid \underline{a^\alpha} \le x \le \overline{a^\alpha}\,\}$, *iii*) *pend*($\widetilde{a}$) terbatas. Untuk $\alpha = 0$, didefinisikan bahwa a^0 = [inf(*pend*($\widetilde{a}$)), sup(*pend*($\widetilde{a}$))]. Karena setiap interval tertutup dalam **R** adalah konveks, maka a^α konveks $\forall \alpha \in [0, 1]$ sehingga $\widetilde{a}$ konveks. Salah satu tipe bilangan kabur yang sederhana adalah *bilangan kabur segitiga*. Bilangan kabur segitiga $\widetilde{a}$, yang dilambangkan dengan BKS(a_1, a, a_2) adalah suatu bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a-a_1}, & a_1 \le x \le a \\ \dfrac{a_2-x}{a_2-a}, & a < x \le a_2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

di mana $a_1 \ne a$ atau $a \ne a_2$. Nampak bahwa potongan-α $\widetilde{a}$ di atas adalah $a^\alpha = [(a - a_1)\alpha + a_1, -(a_2 - a)\alpha + a_2]$ dan *pend*($\widetilde{a}$) = (a_1, a_2). Dua bilangan kabur $\widetilde{a}$ dan $\widetilde{b}$ dikatakan *sama* jika $\mu_{\widetilde{a}} = \mu_{\widetilde{b}}$. Karena $\mu_{\widetilde{a}} = \mu_{\widetilde{b}}$, maka berlaku $a^\alpha = b^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Sebaliknya, menurut Teorema Dekomposisi jika $a^\alpha = b^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, maka $\mu_{\widetilde{a}} = \mu_{\widetilde{b}}$. Dengan demikan, dapat dikatakan bahwa $\widetilde{a} = \widetilde{b}$ jika dan hanya jika $a^\alpha = b^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Operasi-operasi aritmatika bilangan kabur dapat didefinisikan dengan menggunakan prinsip perluasan atau dengan menggunakan potongan-α. Dalam pembahasan artikel ini, digunakan pendefinisian operasi bilangan kabur dengan menggunakan potongan-α.

Definisi 2, diberikan $\mathbf{F(R)}_{\widetilde{\varepsilon}} = \mathbf{F(R)} \cup \{ \widetilde{\varepsilon}\, \}$ dengan **F(R)** adalah himpunan semua bilangan kabur dan $\widetilde{\varepsilon} = \{-\infty\}$, dengan potongan-$\alpha$-nya adalah $\varepsilon^\alpha = [-\infty, -\infty]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Pada $(\mathbf{F(R)})_{\widetilde{\varepsilon}}$ didefinisikan operasi sebagai berikut. Untuk setiap $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathbf{F(R)}_{\widetilde{\varepsilon}}$ dengan $a^\alpha = [\,\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha\,] \in \mathbf{I(R)}_{\max}$ dan $b^\alpha = [\,\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha\,] \in \mathbf{I(R)}_{\max}$.

$\widetilde{a} \mathbin{\widetilde{\oplus}} \widetilde{b} = \max(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ adalah bilangan kabur dengan potongan-α-nya

$(a \oplus b)^\alpha := [\,\underline{a}^\alpha \oplus \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \oplus \overline{b}^\alpha\,]$, untuk setiap $\alpha \in (0, 1]$,

$\widetilde{a} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{b} = \widetilde{a} + \widetilde{b}$ adalah bilangan kabur dengan potongan-α-nya

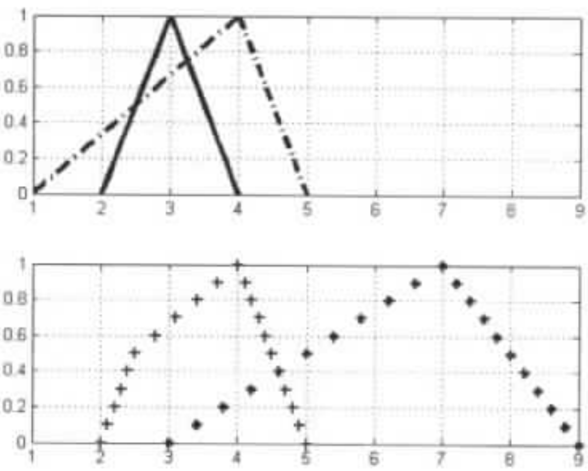
$(a \otimes b)^\alpha := [\,\underline{a}^\alpha \otimes \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \otimes \overline{b}^\alpha\,]$, untuk setiap $\alpha \in (0, 1]$.

Suatu keluarga interval $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ dikatakan *tersarang (nested)* jika untuk $\alpha \le \beta$, maka berlaku $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \supseteq [a_1(\beta), a_2(\beta)]$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$. Berikut diberikan syarat bahwa suatu keluarga interval merupakan potongan-α suatu bilangan kabur.

Akibat 6, jika keluarga interval $\{[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\} \forall \alpha \in [0, 1]$ memenuhi sifat sebagai berikut
$[a_1(1), a_2(1)] \neq \varnothing$,
$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ tersarang dan
$[a_1(0), a_2(0)]$ *terbatas*,
maka terdapat dengan tunggal bilangan kabur $\widetilde{a}$ sedemikian hingga $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = a^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Pembahasan

Contoh 1, misalkan $\widetilde{a}$ = BKS(2, 3, 4) dan $\widetilde{b}$ = BKS(1, 4, 5), maka $a^\alpha = [(3-2)\alpha + 2\,, -(4-3)\alpha + 4] = [\alpha + 2\,, -\alpha + 4]$ dan $b^\alpha = [(4-1)\alpha + 1, -(5-4)\alpha + 5] = [3\alpha + 1, -\alpha + 5]$. Dengan menggunakan program MATLAB, berikut diberikan grafik fungsi keanggotaan dari $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ (Gambar 1 bagian atas) dan batas-batas potongan-α dari $\widetilde{a} \,\widetilde{\oplus}\, \widetilde{b}$ dan $\widetilde{a} \,\widetilde{\otimes}\, \widetilde{b}$ untuk α = 0, 0.1, 0.2, ..., 1 (Gambar 1 bagian bawah).



Gambar 1 Grafik Fungsi Keanggotaan Hasil Operasi BKS (2, 3, 4) dan BKS (1, 4, 5).

Keterangan Gambar 1 : — : $\widetilde{a}$, —.— : $\widetilde{b}$, +: $\widetilde{a} \,\widetilde{\oplus}\, \widetilde{b}$, $*$: $\widetilde{a} \,\widetilde{\otimes}\, \widetilde{b}$.

Dengan memperhatikan gambar di atas dan bahwa titik potong dari $\mu_{\widetilde{a}}(x) = x - 2$ dan $\mu_{\widetilde{b}}(x) = \dfrac{x-1}{3}$ adalah (2.5, 0.5), maka diperoleh $\mu_{\widetilde{a}\widetilde{\oplus}\widetilde{b}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ x-2 & , 2 \le x \le 2{,}5 \\ \dfrac{x-1}{3} & , 2{,}5 < x \le 4 \\ 5-x & , 4 < x \le 5 \\ 0 & , x > 5 \end{cases}$.

Sementara itu, $\widetilde{a} \,\widetilde{\otimes}\, \widetilde{b}$ = BKS(3, 7, 9).

Dapat ditunjukkan bahwa potongan-α yang didefinisikan untuk operasi di atas, pada definisi 2, memenuhi syarat sebagai potongan-α dari suatu bilangan kabur. Selanjutnya, karena $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon), \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif, dari definisi operasi pada $(\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\widetilde{\varepsilon}}$ di atas nampak bahwa $(\mathbf{F}(\mathbf{R})_\varepsilon, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif, dengan elemen netral $\widetilde{\varepsilon} = \{-\infty\}$ dan elemen satuan $\widetilde{e} = \{0\}$, dengan $e^\alpha = [0, 0]$, $\forall \alpha \in (0, 1])$. Semiring idempoten komutatif $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max} := (\mathbf{F}(\mathbf{R})_\varepsilon, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes})$ disebut dengan *aljabar max-plus bilangan kabur*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}$.

Definisi 3, selanjutnya matriks di atas cukup disebut dengan *matriks bilangan kabur*. Operasi $\widetilde{\oplus}$ dan $\widetilde{\otimes}$ pada $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks bilangan kabur pada $(\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$. Khususnya untuk matriks $\widetilde{A}$, $\widetilde{B} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ didefinisikan

$$(\widetilde{A} \mathbin{\widetilde{\oplus}} \widetilde{B})_{ij} = \widetilde{A}_{ij} \mathbin{\widetilde{\oplus}} \widetilde{B}_{ij} \text{ dan } (\widetilde{A} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{B})_{ij} = \widetilde{\bigoplus_{k=1}^{n}} \widetilde{A}_{ik} \otimes \widetilde{B}_{kj} .$$

Untuk setiap $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, untuk suatu bilangan $\alpha \in [0, 1]$ didefinisikan *matriks potongan-α dari* $\widetilde{A}$, yaitu matriks interval $A^\alpha = (A_{ij}^\alpha)$, dengan A_{ij}^α adalah potongan-α dari $\widetilde{A}_{ij}$ untuk setiap i dan j. Perhatikan bahwa $A^\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ sehingga menurut hasil pada bagian pembahasan matriks interval di atas, diperoleh bahwa $A^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$. Lebih lanjut, untuk matriks $\widetilde{A}$, $\widetilde{B} \in (\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ di mana $A^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$ dan $B^\alpha \approx [\underline{B}^\alpha, \overline{B}^\alpha]$, diperoleh bahwa $\widetilde{A} \mathbin{\widetilde{\oplus}} \widetilde{B}$ dan $\widetilde{A} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{B}$ berturut-turut adalah matriks bilangan kabur dengan matriks potongan-α-nya adalah $(A \oplus B)^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha \oplus \underline{B}^\alpha, \overline{A}^\alpha \oplus \overline{B}^\alpha]$ dan $(A \otimes B)^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha \otimes \underline{B}^\alpha, \overline{A}^\alpha \otimes \overline{B}^\alpha]$.

Berikut diberikan definisi semi-definit dan definit untuk suatu matriks bilangan kabur. Definisi 4, suatu matriks $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ dikatakan *semi-definit* jika $A^\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ semi-definit $\forall \alpha \in [0,1]$ dan dikatakan *definit* jika A^α definit $\forall \alpha \in [0,1]$.

Berikut diberikan Teorema mengenai syarat perlu dan cukup suatu matriks $\widetilde{A}$ semi-definit. Teorema 7 adalah sebagai berikut. Diberikan $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$. Matriks $\widetilde{A}$ semi-definit jika dan hanya jika $\overline{A^0} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ semi-definit. Buktinya adalah ($\Rightarrow$): jelas menurut Definisi 4 dan Definisi 1.
($\Leftarrow$): Andaikan $\overline{A^0} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ semi-definit, maka menurut Teorema 2, A^0 semi-definit. Hal ini berarti $\forall A \in [\underline{A^0}, \overline{A^0}]$ semi-definit. Kemudian, $\forall \alpha \geq 0$, berlaku $A_{ij}^\alpha \subseteq A_{ij}^0$ untuk setiap i dan j. Hal ini berakibat $[\underline{A^\alpha}, \overline{A^\alpha}] \subseteq [\underline{A^0}, \overline{A^0}]$ sehingga $\forall A \in [\underline{A^\alpha}, \overline{A^\alpha}]$ semi-definit. Akibatnya, A^α semi-definit $\forall \alpha \in [0,1]$. Jadi, terbukti $\widetilde{A}$ semi-definit.

Didefinisikan $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n = \{ \widetilde{x} = [\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n]^T \mid \widetilde{x}_i \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}, i = 1, 2, \ldots, n \}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times 1}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$ disebut *vektor bilangan kabur*.

Sistem Persamaan Linear Iteratif Max-Plus Bilangan Kabur

Terlebih dahulu diberikan definisi penyelesaian bilangan kabur sistem persamaan linear iteratif max-plus bilangan kabur. Definisi 5, diberikan $\widetilde{A} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n\times n}$ dan $\widetilde{b} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n}$. Vektor bilangan kabur $\widetilde{x}^* \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n}$ disebut *penyelesaian bilangan kabur* sistem $\widetilde{x} = \widetilde{A} \widetilde{\otimes} \widetilde{x} \widetilde{\oplus} \widetilde{b}$ jika $\widetilde{x}^*$ memenuhi sistem tersebut, yaitu berlaku $\widetilde{x}^* = \widetilde{A} \widetilde{\otimes} \widetilde{x}^* \widetilde{\oplus} \widetilde{b}$.

Dari Definisi 5 di atas, dengan menggunakan konsep kesamaan dua buah bilangan kabur dapat dinyatakan bahwa $\widetilde{x}^* = \widetilde{A} \widetilde{\otimes} \widetilde{x}^* \widetilde{\oplus} \widetilde{b}$ jika dan hanya jika $x^{*\alpha} = A^{\alpha} \overline{\otimes}\ x^{*\alpha} \overline{\oplus}\ b^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Berikut diberikan Teorema mengenai eksistensi dan ketunggalan penyelesaian bilangan kabur sistem $\widetilde{x} = \widetilde{A} \widetilde{\otimes} \widetilde{x} \widetilde{\oplus} \widetilde{b}$.

Teorema 8 adalah sebagai berikut. Diberikan $\widetilde{A} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n\times n}$ dan $\widetilde{b} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n}$. Jika $\widetilde{A}$ semi-definit maka vektor bilangan kabur $\widetilde{x}^* = \widetilde{A}^* \widetilde{\otimes} \widetilde{b}$ dengan $\widetilde{A}^* = \widetilde{E} \widetilde{\oplus} \widetilde{A} \widetilde{\oplus} ... \widetilde{\oplus} \widetilde{A}^{\otimes n} \widetilde{\oplus} \widetilde{A}^{\otimes n+1} \widetilde{\oplus}$ ... merupakan penyelesaian bilangan kabur sistem $\widetilde{x} = \widetilde{A} \widetilde{\otimes} \widetilde{x} \widetilde{\oplus} \widetilde{b}$. Lebih lanjut jika $\widetilde{A}$ definit, maka penyelesaian tersebut tunggal. Buktinya adalah andaikan $\widetilde{A}$ semi-definit, maka $A^{\alpha} \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$ semi-definit $\forall \alpha \in [0,1]$ sehingga menurut Teorema 3, vektor interval $\mathbf{x}(\alpha) \approx [(\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}}, (\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}}]$ merupakan penyelesaian interval sistem interval $x^{\alpha} = A^{\alpha} \overline{\otimes}\ x^{\alpha} \overline{\oplus}\ b^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa keluarga interval $[((\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}})_i, ((\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}})_i]$, $\forall \alpha \in [0,1]$ dan $\forall i = 1, 2, ..., n$, merupakan keluarga potongan-α suatu bilangan kabur.

Perhatikan bahwa $\underline{A^{\alpha}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{A^{\alpha}}$ dan $\underline{b^{\alpha}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{b^{\alpha}}$. Karena operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks konsisten terhadap urutan "$\preceq_{\mathrm{m}}$", maka $((\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}}) \preceq_{\mathrm{m}} ((\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}})$ sehingga $((\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}})_i \preceq_{\mathrm{m}} ((\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}})_i$. Jadi, $[((\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}})_i, ((\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}})_i]$ adalah suatu interval, $\forall \alpha \in [0,1]$.

Karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{m\times n}$ dan $\widetilde{b} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{m}$, maka $A_{ij}^{1} \neq \varnothing$ dan $b_i^{1} \neq \varnothing$ sehingga $[((\underline{A^{1}})^* \otimes \underline{b^{1}})_i, ((\overline{A^{1}})^* \otimes \overline{b^{1}})_i] \neq \varnothing$. Karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n\times n}$ dan $\widetilde{b} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{n}$, maka untuk $\alpha \leq \beta$ berlaku $\underline{A^{\alpha}} \preceq_{\mathrm{m}} \underline{A^{\beta}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{A^{\beta}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{A^{\alpha}}$ dan $\underline{b^{\alpha}} \preceq_{\mathrm{m}} \underline{b^{\beta}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{b^{\beta}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{b^{\alpha}}$. Karena operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks konsisten terhadap urutan "$\preceq_{\mathrm{m}}$", maka $((\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}}) \preceq_{\mathrm{m}} ((\underline{A^{\beta}})^* \otimes \underline{b^{\beta}}) \preceq_{\mathrm{m}} ((\overline{A^{\beta}})^* \otimes \overline{b^{\beta}}) \preceq_{\mathrm{m}} ((\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}})$. Jadi, diperoleh $((\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}})_i \preceq_{\mathrm{m}} ((\underline{A^{\beta}})^* \otimes \underline{b^{\beta}})_i \preceq_{\mathrm{m}} ((\overline{A^{\beta}})^* \otimes \overline{b^{\beta}})_i \preceq_{\mathrm{m}} ((\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}})_i$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$. Dengan demikian, keluarga interval $[((\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}})_i, ((\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}})_i]$ merupakan keluarga interval tersarang. Karena $\widetilde{A} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{m\times n}$ dan $\widetilde{b} \in \mathbf{F(R)}_{\max}^{m}$, maka A_{ij}^{0} dan b_i^{0} masing-masing terbatas sehingga $[((\underline{A^{0}})^* \otimes \underline{b^{01}})_i, ((\overline{A^{0}})^* \otimes \overline{b^{0}})_i]$ terbatas.

Jadi, keluarga vektor interval $\mathbf{x}(\alpha) \approx [(\underline{A^{\alpha}})^* \otimes \underline{b^{\alpha}}, (\overline{A^{\alpha}})^* \otimes \overline{b^{\alpha}}]$ merupakan potongan-potongan-α vektor bilangan kabur $\widetilde{x}^*$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Sementara itu, potongan-α vektor bilangan kabur $\widetilde{A}^* \widetilde{\otimes} \widetilde{b}$, untuk $\forall \alpha \in [0,1]$ adalah $(A^* \otimes b)^{\alpha} \approx [\underline{A^{*\alpha}} \otimes \underline{b^{\alpha}}, \overline{A^{*\alpha}} \otimes \overline{b^{\alpha}}] = [(\underline{E^{\alpha}} \oplus \underline{A^{\alpha}} \oplus ... \oplus (\underline{A^{\alpha}})^{\otimes n}$

$\oplus (\underline{A^\alpha})^{\otimes^{n+1}} \oplus \ldots) \otimes \underline{\boldsymbol{b}^\alpha}$, $[(\overline{E^\alpha} \oplus \overline{A^\alpha} \oplus \ldots \oplus (\overline{A^\alpha})^{\otimes^n} \oplus (\overline{A^\alpha})^{\otimes^{n+1}} \oplus \ldots) \otimes \underline{\boldsymbol{b}^\alpha} = [(\underline{A^\alpha})^* \otimes \underline{\boldsymbol{b}^\alpha}, (\overline{A^\alpha})^* \otimes \overline{\boldsymbol{b}^\alpha}]$. Dengan demikian, $\boldsymbol{x}^{*\alpha} = (A^* \otimes \boldsymbol{b})^\alpha$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\tilde{\boldsymbol{x}}^* = \tilde{A}^* \tilde{\otimes} \tilde{\boldsymbol{b}}$.

Lebih lanjut, jika $\tilde{A}$ definit, maka $A^\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ definit $\forall \alpha \in [0,1]$. Misalkan bahwa $\tilde{\boldsymbol{x}}'$ merupakan penyelesaian sistem $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{A} \tilde{\otimes} \tilde{\boldsymbol{x}} \tilde{\oplus} \tilde{\boldsymbol{b}}$, maka $\tilde{\boldsymbol{x}}' = \tilde{A} \tilde{\otimes} \tilde{\boldsymbol{x}}' \tilde{\oplus} \tilde{\boldsymbol{b}}$ atau $\boldsymbol{x}'^\alpha = A^\alpha \overline{\otimes} \boldsymbol{x}'^\alpha \overline{\oplus} \boldsymbol{b}^\alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$; yang berarti, untuk $\boldsymbol{x}'^\alpha \approx [\underline{\boldsymbol{x}'^\alpha}, \overline{\boldsymbol{x}'^\alpha}]$, dipenuhi $\underline{\boldsymbol{x}'^\alpha} = \underline{A^\alpha} \otimes \underline{\boldsymbol{x}'^\alpha} \oplus \underline{\boldsymbol{b}^\alpha}$ dan $\overline{\boldsymbol{x}'^\alpha} = \overline{A^\alpha} \otimes \overline{\boldsymbol{x}'^\alpha} \oplus \overline{\boldsymbol{b}^\alpha}$. Karena A^α definit $\forall \alpha \in [0,1]$, maka haruslah $\underline{\boldsymbol{x}'^\alpha} = (\underline{A^\alpha})^* \otimes \underline{\boldsymbol{b}^\alpha}$ dan $\overline{\boldsymbol{x}'^\alpha} = (\overline{A^\alpha})^* \otimes \overline{\boldsymbol{b}^\alpha}$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa penyelesaian tersebut tunggal.

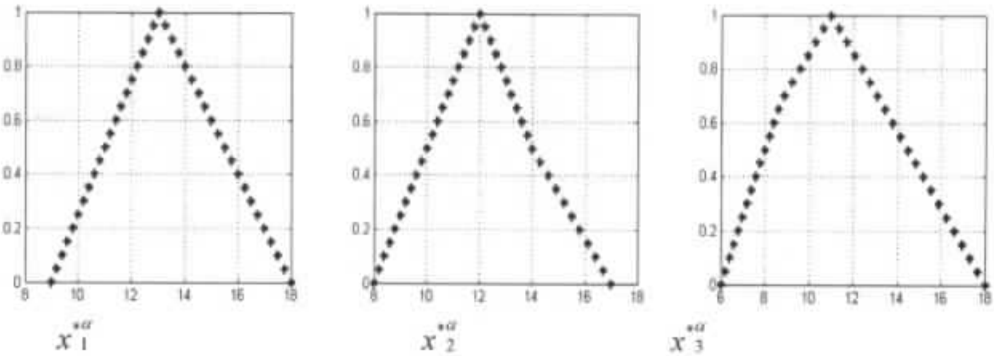
Contoh 2, dalam matriks berikut, BKS(a_1, a, a_2) cukup dituliskan dengan (a_1, a, a_2).

Misalkan $\tilde{A} = \begin{bmatrix} (0,1,3) & (3,4,5) & (1,2,4) \\ (3,4,5) & (-2,-1,0) & (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) \\ (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) & (0,1,2) & (1,3,5) \end{bmatrix}$ dan $\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} (-1,0,1) \\ (0,1,3) \\ (1,2,3) \end{bmatrix}$, akan ditentukan vektor penyelesaian bilangan kabur $\tilde{\boldsymbol{x}}^*$ untuk sistem $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{A} \tilde{\otimes} \tilde{\boldsymbol{x}} \tilde{\oplus} \tilde{\boldsymbol{b}}$. Dengan bantuan program yang disusun dengan *MATLAB*, diperoleh hasil dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Hasil Perhitungan Batas-batas $x_i^{*\alpha}$ pada Contoh 2

α	$\underline{x_1^{*\alpha}}$	$\overline{x_1^{*\alpha}}$	$\underline{x_2^{*\alpha}}$	$\overline{x_2^{*\alpha}}$	$\underline{x_3^{*\alpha}}$	$\overline{x_3^{*\alpha}}$
0,00	9,00	18,00	8,00	17,00	6,00	18,00
0,01	9,04	17,95	8,04	16,94	6,04	17,93
0,02	9,08	17,90	8,08	16,88	6,08	17,86
0,03	9,12	17,85	8,12	16,82	6,12	17,79
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,48	10,92	15,60	9,92	14,12	7,92	14,64
0,49	10,96	15,55	9,96	14,06	7,96	14,57
0,50	11,00	15,50	10,00	14,00	8,00	14,50
0,51	11,04	15,45	10,04	13,96	8,04	14,43
0,52	11,08	15,40	10,08	13,92	8,08	14,36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,64	11,56	14,80	10,56	13,44	8,56	13,52
0,65	11,60	14,75	10,60	13,40	8,60	13,45
0,66	11,64	14,70	10,64	13,36	8,64	13,38
0,67	11,68	14,65	10,68	13,32	8,69	13,31
0,68	11,72	14,60	10,72	13,28	8,76	13,24
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,97	12,88	13,15	11,880	12,12	10,79	11,21
0,98	12,92	13,10	11,920	12,08	10,86	11,14
0,99	12,96	13,05	11,96	12,04	10,93	11,07
1,00	13,00	13,00	12,00	12,00	11,00	11,00

Dengan bantuan program yang disusun dengan *MATLAB*, diperoleh grafik batas-batas $x_i^{*\alpha}$ seperti dalam Gambar 2 berikut.



Gambar 2 Grafik Titik-titik Batas $x^{*\alpha}_{i}$ pada Contoh 2

Berikut diberikan tabel perubahan gradien grafik batas-batas $x^{*\alpha}_{i}$ di atas. Untuk $k = 0, 1, 2, ..., N-1$, dengan $N \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ = himpunan semua bilangan asli), $\alpha_k = \frac{k}{N}$, $\underline{\Delta_k m_i} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\underline{x^{*\alpha_{k+1}}_{i}} - \underline{x^{*\alpha}_{i}}}$ dan $\overline{\Delta_k m_i} =$

$$\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\overline{x^{*\alpha_{k+1}}_{i}} - \overline{x^{*\alpha_k}_{i}}}.$$

Tabel 2 Perubahan Gradien Grafik Batas-batas $x^{*\alpha}_{i}$ pada Contoh 2.

α_k	$\underline{\Delta_k m_1}$	$\overline{\Delta_k m_1}$	$\underline{\Delta_k m_2}$	$\overline{\Delta_k m_2}$	$\underline{\Delta_k m_3}$	$\overline{\Delta_k m_3}$
0,00	0,250	−0,200	0,250	−0,167	0,250	−0,143
0,01	0,250	−0,200	0,250	−0,167	0,250	−0,143
0,02	0,250	−0,200	0,250	−0,167	0,250	−0,143
0,03	0,250	−0,200	0,250	−0,167	0,250	−0,143
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,48	0,250	−0,200	0,250	−0,167	0,250	−0,143
0,49	0,250	−0,200	0,250	−0,167	0,250	−0,143
0,50	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,250	−0,143
0,51	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,250	−0,143
0,52	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,250	−0,143
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,64	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,250	−0,143
0,65	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,250	−0,143
0,66	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,250	−0,143
0,67	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,143	−0,143
0,68	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,143	−0,143
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,97	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,143	−0,143
0,98	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,143	−0,143
0,99	0,250	−0,200	0,250	−0,250	0,143	−0,143

Dari grafik pada Gambar 2 dan Tabel 2 di atas, diperoleh bahwa $\widetilde{x}_1^* =$ BKS(9, 13, 18); sedangkan untuk $\widetilde{x}_2^*$ dan $\widetilde{x}_3^*$ pendekatan fungsi keanggotaannya, dengan selisih nilai $\alpha = 0.01$, berturut-turut sebagai berikut.

$$\mu_{\tilde{x}_2}(x) \cong \begin{cases} \dfrac{x-8}{4}, & 8 \le x \le 12 \\ \dfrac{12-x}{2}, & 12 \le x \le 14 \\ \dfrac{14-x}{3}, & 14 \le x \le 17 \\ 0 & \text{, lainnya} \end{cases} \quad \text{dan} \quad \mu_{\tilde{x}_3}(x) \cong \begin{cases} \dfrac{x-6}{2{,}64}, & 6 \le x \le 8{,}64 \\ \dfrac{x-8{,}64}{2{,}36}, & 8{,}64 < x \le 11 \\ \dfrac{11-x}{7}, & 11 < x \le 8 \\ 0 & \text{, lainnya} \end{cases}.$$

PENUTUP

Dari hasil dan pembahasan di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa jika matriks persegi bilangan kabur dari sistem adalah semi-definite, maka sistem mempunyai penyelesaian. Penyelesaian sistem dapat ditentukan dengan terlebih dahulu menentukan penyelesaian sistem potongan-alfa-nya, yang berupa sistem persamaan linear iteratif max-plus interval. Dengan didasarkan pada Teorema Dekomposisi pada himpunan kabur, dapat ditentukan fungsi keanggotaan elemen-elemen vektor penyelesaiannya. Lebih lanjut, penyelesaian suatu sistem tunggal jika matriks persegi bilangan kaburnya adalah definit.

DAFTAR PUSTAKA

Bacelli, F., *et al*. (2001). *Synchronization and linearity*, New York: John Wiley & Sons.

Boom, T.J.J., *et al.* (2003). Identification of stochastic max-plus-linear systems. *Proceedings of the 2003 European Control Conference (ECC'03)*, Cambridge, UK, 6 pp., Sept. 2003. Paper 104.

B. Heidergott, B., *et. al.* (2005). *Max plus at work.* Princeton: Princeton University Press.

Chanas, S., and Zielinski, P. (2001). Critical path analysis in the network with fuzzy activity times. *Fuzzy Sets and Systems*, 122, 195–204.

Lüthi, J., and Haring, G. (1997). Fuzzy queueing network models of computing systems. *Proceedings of the 13th UK Performance Engineering Workshop*, Ilkley, UK: Edinburgh University Press, July 1997.

Rudhito, A. (2003). *Sistem linear max-plus waktu-invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Rudhito, A., Wahyuni, S., Suparwanto, A., dan Susilo, F. (2008a). Aljabar max-plus interval. *Prosiding Seminar Nasional Matematika S3*, 14-22, UGM, Yogyakarta.

Rudhito, A., Wahyuni, S., Suparwanto, A., dan Susilo, F. (2008b). Matriks atas aljabar max-plus interval. *Prosiding Seminar Nasional Matematika* S3, 23-32, UGM, Yogyakarta.

Rudhito, A., Wahyuni, S., Suparwanto, A., dan Susilo, F. (2008c). Sistem persamaan linear iteratif max-plus interval. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan and Penerapan MIPA*, 263-272, UNY, Yogyakarta.

Susilo, F. (2006). *Himpunan dan logika kabur serta aplikasinya*, edisi kedua. Yogyakarta: Graha Ilmu.

RIWAYAT PENULIS

M. Andy Rudhito lahir di kota Purworejo pada 2 Juni 1971. Penulis menamatkan pendidikan S1 di Universitas Sanata Dharma dalam bidang Pendidikan Matematika pada tahun 1995. Menamatkan pendidikan S2 di Universitas Gadjah Mada dalam bidang Matematika pada tahun 2003. Saat ini penulis sedang menempuh studi S3 di Universitas Gadjah Mada dalam bidang Matematika sejak tahun 2007. Saat ini bekerja sebagai dosen di JPMIPA FKIP Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Sri Wahyuni lahir di Banyumas, 19 Juni 1959. Penulis menamatkan pendidikan S1 di Universitas Gadjah Mada dalam bidang Matematika pada tahun 1982. Menamatkan pendidikan S2 di Insitut Teknologi Bandung dalam bidang Matematika pada tahun 1989. Menamatkan pendidikan S3 di University of Graz, Austria dalam bidang Matematika pada tahun 1996. Saat ini bekerja sebagai dosen di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Ari Suparwanto lahir di kota Yogyakarta 27 September 1967. Penulis menamatkan pendidikan S1 di Universitas Gadjah Mada dalam bidang Matematika pada tahun 1991. Menamatkan pendidikan S2 di Universitas Gadjah Mada dalam bidang Matematika pada tahun 1999. Menamatkan pendidikan S3 di Graz University, Austria dalam bidang Matematika pada tahun 2001. Saat ini bekerja sebagai dosen di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Frans Susilo lahir di kota Semarang pada 12 Desember 1946. Penulis menamatkan pendidikan S1 di Universitas Gadjah Mada dalam bidang Matematika pada tahun 1973. Menamatkan pendidikan S3 Catholic University of America, Washington DC, USA, dalam bidang Matematika pada tahun 1990. Saat ini bekerja sebagai dosen di Jurusan Matematika FST Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.