Volume 3, Nomor 1, Januari 2010

ISSN : 1978 - 8568

Jurnal Matematika

LOG!K@

Diterbitkan
Pusat Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri
Syarif Hidayatullah Jakarta

Log!k@	Jilid 3	Nomor 1	Halaman 1-78	Jakarta Januari 2010	ISSN 1978-8568

Jurnal Matematika "L O G ! K @" ISSN 1978 – 8568
Jilid 3, Nomor 1, Januari 2010

DAFTAR ISI

SISTEM PERSAMAAN LINEAR INPUT-OUTPUT MAX-PLUS INTERVAL

M. Andy Rudhito[1] , Sri Wahyuni[2], Ari Suparwanto[3] dan F. Susilo[4]

Abstract. This paper aims to determine the existence and computation of the solution of the system of interval max-plus input-output linear equations, through the greatest sub solution of the system. The finding shows that for the interval max-plus systems with entries of each columns of its coefficient matrix are not all is equal to interval ε, always have an interval greatest sub solution. The interval greatest sub solution of the system could be determined by computation of the greatest sub solution of lower-bound and upper-bound of the system firstly. If the interval greatest sub solution satisfies the system, then it is an interval solution of the system.

Keywords : *Interval, Max-Plus Algebra, System of linear equations.*

PENDAHULUAN

Aljabar max-plus (himpunan $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, dengan **R** adalah himpunan semua bilangan real, yang dilengkapi dengan operasi maximum dan penjumlahan) telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis jaringan, seperti penjadwalan proyek, sistem produksi, jaringan antrian, dan sebagainya. Pemodelan dan analisa suatu jaringan dengan pendekatan ini dapat memberikan hasil analitis dan lebih mudah pada komputasinya, seperti dalam [1], [2], [3]. Pemodelan tersebut kebanyakan masih berupa model deterministik, di mana waktu aktifitas pada jaringan berupa bilangan real. Pada kenyataannya, oleh karena beberapa faktor, misalkan operator mesin, kadang waktu aktifitas pada jaringan tidak pasti. Dalam masalah ini, aljabar max-plus telah dikembangkan untuk model stokastik, di mana waktu aktifitasnya berupa peubah acak, seperti dalam [1], [3], [4]. Peubah acak dalam model stokastik diasumsikan mengikuti suatu distribusi peluang tertentu. Distribusi ini biasanya disusun berdasarkan data-data yang diperoleh setelah jaringan dioperasikan untuk jangka waktu tertentu.

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan di mana waktu aktifitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Waktu aktifitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Untuk itu waktu aktifitas jaringan dimodelkan dalam suatu bilangan kabur (*fuzzy number*). Akhir-akhir ini telah berkembang pemodelan jaringan yang melibatkan bilangan kabur. Untuk

---

[1] Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM, Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma (USD), E-mail: rudhito@staff.usd.ac.id , arudhito@yahoo.co.id
[2] Dosen Program Studi Matematika FMIPA UGM, E-mail: swahyuni@ugm.ac.id
[3] Dosen Program Studi Matematika FMIPA UGM, E-mail: ari_suparwanto@yahoo.co.id
[4] Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, FST USD, E-Mail: fsusilo@staff.usd.ac.id

masalah penjadwalan yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada [5]. Sedangkan untuk masalah model jaringan antrian yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada [6].

Pemodelan dan analisa pada masalah-masalah jaringan yang melibatkan bilangan kabur, sejauh penulis ketahui, belum ada yang menggunakan pendekatan aljabar max-plus. Dalam pemodelan input-output suatu jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus, graf untuk jaringan tersebut dinyatakan dengan menggunakan matriks, dengan unsur-unsurnya menyatakan waktu aktifitas antar titik pada jaringan tersebut. Selanjutnya pemodelan terkait dengan sistem persamaan linear input-output max-plus $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{b}$ berturut-turut sebagai vektor input dan vektor output. Pemodelan waktu aktifitas jaringan dengan menggunakan bilangan kabur dengan pendekatan aljabar max-plus akan terkait dengan sistem persamaan linear input-output max-plus bilangan kabur.

Operasi-operasi pada bilangan kabur dapat dilakukan menggunakan Teorema Dekomposisi, yaitu melalui potongan-potongan-α-nya yang berupa interval-interval [7]. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi pasti akan memerlukan hasil-hasil penyelesaian sistem persamaan linear input-output max-plus interval. Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas tentang suatu vektor interval yang merupakan penyelesaian sistem persamaan linear max-plus interval. Artikel ini merupakan penyempurnaan makalah [8]. Formulasi Teorema 1 dalam [8] untuk batas-batas penyelesaian interval masih kurang tepat, karena hasil yang diperoleh masih dimungkinkan bukan berupa interval. Agar makalah ini dapat diikuti dengan baik maka pada bagian awal pembahasan akan disajikan beberapa konsep-konsep dasar yang diperlukan dalam pembahasan utama.

KONSEP-KONSEP DASAR

Aljabar Max-Plus dan Sistem Persamaan Linear Input-Output Max-Plus

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan sistem persamaan linear input-output max-plus $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada [1], [2].

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall\, a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b :=$ max(a, b) dan $a \otimes b := a + b$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield, yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$.

Aljabar max-pus $\mathbf{R}_{\max}$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall\, x, y \in \mathbf{R}_\varepsilon$ berlaku: jika $x \otimes y = \varepsilon$ maka $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$. Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ dengan $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Dalam $\mathbf{R}_{\max}$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq_m$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_{\max}$, jika $a \preceq_m b$, maka $a \oplus c \preceq_m b \oplus c$, dan $a \otimes c \preceq_m b \otimes c$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan A, B

$\in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p\times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ , jika } i = j \\ \varepsilon \text{ , jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dan elemen satuan matriks E. Sedangkan $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Relasi "$\preceq_{\mathrm{m}}$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$. Perhatikan bahwa $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_{\mathrm{m}} B_{ij}$ untuk setiap i dan j. Dalam $(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}, \oplus, \otimes)$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall A, B, C \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, jika $A \preceq_{\mathrm{m}} B$, maka $A \oplus C \preceq_{\mathrm{m}} B \oplus C$, dan $A \otimes C \preceq_{\mathrm{m}} B \otimes C$.

Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{\, \boldsymbol{x} = [\, x_1, x_2, \dots , x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \dots , n\}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n\times 1}$, sehingga $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur *vektor* atas $\mathbf{R}_{\max}$. Karena $\mathbf{R}_{\max}$ merupakan semifield maka untuk setiap $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat didefinisikan $-\boldsymbol{x} = [-x_1, -x_2, \dots , -x_n\,]^{\mathrm{T}}$.

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dan $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}_{\max}^{m}$. Vektor $\boldsymbol{x}' \in \mathbf{R}_{\max}^{m}$ disebut *subpenyelesaian* sistem persamaan linear $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jika memenuhi $A \otimes \boldsymbol{x}' \preceq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{b}$. Suatu subpenyelesaian $\hat{\boldsymbol{x}}$ dari sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ disebut *subpenyelesaian terbesar* sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jika $\boldsymbol{x}' \preceq_{\mathrm{m}} \hat{\boldsymbol{x}}$ untuk setiap subpenyelesaian $\boldsymbol{x}'$ dari sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{n}$. Subpenyelesaian terbesar $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ada dan diberikan oleh $\hat{\boldsymbol{x}} = -(A^{\mathrm{T}} \otimes (-\boldsymbol{b}))$.

Aljabar Max-Plus Interval dan Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval

Bagian ini membahas konsep dasar aljabar max-plus interval dan teknik pengoperasian matriks atas aljabar max-plus interval. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada [9], [10].

Interval (tertutup) x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}_{\max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\,\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}\,] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} x \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}}\}$. Interval x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ di atas disebut *interval max-plus*, yang selanjutnya akan cukup disebut interval. Suatu bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon} := \{\, \mathrm{x} = [\,\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}\,] \mid \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbf{R}, \varepsilon \prec_{\mathrm{m}} \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}}\,\} \cup \{\upvarepsilon\}$, dengan $\upvarepsilon := [\varepsilon, \varepsilon\,]$. Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan: $\mathrm{x} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{y} = [\,\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{y}}\,]$ dan $\mathrm{x} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{y} = [\,\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{\mathrm{y}}\,]$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon})$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\upvarepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $0 = [0, 0]$. Semiring idempoten komutatif $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ selanjutnya disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang dilambangkan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I(R_{\max})}$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I(R)}_{\max}$, $A, B \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$, didefinisikan $\alpha \,\overline{\otimes}\, A$, dengan $(\alpha \,\overline{\otimes}\, A)_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, A_{ij}$ dan $A \,\overline{\oplus}\, B$, dengan $(A \,\overline{\oplus}\, B)_{ij} = A_{ij} \,\overline{\oplus}\, B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{p\times n}$, didefinisikan $A \,\overline{\otimes}\, B$ dengan $(A \,\overline{\otimes}\, B)_{ij} = \overline{\bigoplus\limits_{k=1}^{p}} A_{ik} \,\overline{\otimes}\, B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Dapat ditunjukkan $(\mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i, j dan elemen satuan adalah matriks E, dengan $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ , jika } i = j \\ \varepsilon \text{ , jika } i \neq j \end{cases}$. Sedangkan $\mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$.

Untuk $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dan $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Diberikan matriks interval $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$, dengan $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks dari* A, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}\}$ dan $\mathbf{I(R_{\max}^{m\times n})_b} = \{[\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{I(R)}_{\max}$, $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I(R_{\max}^{m\times n})_b}$, didefinisikan $\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\oplus}\, [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$. Untuk $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I(R_{\max}^{m\times p})^{*}}$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I(R_{\max}^{p\times n})_b}$, didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. Dapat ditunjukkan pula bahwa $(\mathbf{I(R_{\max}^{n\times n})_b}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah interval matriks $[\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan adalah interval matriks [E, E]. Sedangkan $\mathbf{I(R_{\max}^{m\times n})_b}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$.

Semiring $(\mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ isomorfis dengan semiring $(\mathbf{I(R_{\max}^{n\times n})_b}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$, dengan pemetaan $f : \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n} \rightarrow \mathbf{I(R_{\max}^{n\times n})_b}$, $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$, $\forall A \in \mathbf{I(P)}_{\max}^{n\times n}$. Sedangkan semimodul $\mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $\mathbf{I(R_{\max}^{m\times n})_b}$ atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$ Dengan demikan untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I(R_{\max}^{n\times n})_b}$, maka $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, sehingga dapat ditentukan matriks interval $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$, di mana $[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] \in \mathbf{I(R)}_{\max}$, $\forall i$ dan j. Dengan demikian matriks interval $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I(R_{\max}^{m\times n})_b}$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I(R_{\max}^{n\times n})_b}$ disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval* $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Akibat isomorfisma di atas, maka berlaku $\alpha \,\overline{\otimes}\, A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$, $A \,\overline{\oplus}\, B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \,\overline{\otimes}\, B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Didefinisikan $\mathbf{I(R)}^{n}_{\max} := \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{T} \mid x_i \in \mathbf{I(R)}_{\max}, i = 1, 2, \dots, n\}$. Himpunan $\mathbf{I(R)}^{n}_{\max}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{I(R)}^{n\times 1}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{I(R)}^{n}_{\max}$ disebut *vektor interval atas* $\mathbf{I(R)}_{\max}$. Vektor interval $\mathbf{x}$ bersesuaian dengan *interval vektor* $[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$, yaitu $\mathbf{x} \approx [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$.

SISTEM PERSAMAAN LINEAR INPUT-OUTPUT MAX-PLUS INTERVAL

Bagian ini merupakan hasil utama artikel ini, yaitu masalah penyelesaian sistem persamaan linear input-output max-plus interval melalui subpenyelesaian terbesar sistem interval tersebut.

Definisi 1
Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}^{m\times n}_{\max}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I(R)}^{m}_{\max}$. Suatu vektor interval $\mathbf{x}^{*} \in \mathbf{I(R)}^{m}_{\max}$ disebut *penyelesaian interval* sistem interval $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika berlaku $A \overline{\otimes} \mathbf{x}^{*} = \mathbf{b}$.

Definisi 2
Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}^{m\times n}_{\max}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I(R)}^{m}_{\max}$. Suatu vektor interval $\mathbf{x}' \in \mathbf{I(R)}^{m}_{\max}$ disebut *subpenyelesaian interval* sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika berlaku $A \overline{\otimes} x' \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{b}$.

Definisi 3
Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}^{m\times n}_{\max}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I(R)}^{m}_{\max}$. Suatu vektor interval $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{I(R)}^{m}_{\max}$ disebut *subpenyelesaian terbesar interval* sistem interval $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika $\mathbf{x}' \preceq_{\mathrm{Im}} \hat{\mathbf{x}}$ untuk setiap subpenyelesaian interval $\mathbf{x}'$ dari sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Teorema berikut memberikan eksistensi subpenyelesaian terbesar interval sistem interval $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Teorema 1
Jika $A \in \mathbf{I(R)}^{m\times n}_{\max}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan $\mathbf{b} \in \mathbf{I(R)}^{m}_{\max}$, di mana $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ dan $\mathbf{b} \approx [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$, maka vektor interval $\hat{\mathbf{x}} \approx [\hat{\underline{\mathbf{x}}}, \hat{\overline{\mathbf{x}}}]$, dengan $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_i = \min\{-(\underline{A}^{T} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))_i, -(\overline{A}^{T} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))_i\}$ dan $\hat{\overline{\mathbf{x}}} = -(\overline{A}^{T} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Bukti:
Karena matriks A unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε, maka $\forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε. Selanjutnya menurut hasil pada sistem persamaan linear input-output max-plus pada konsep dasar di atas, $\forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ dan $\forall b \in [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$, vektor $\hat{x} = -(A^{T} \otimes (-b))$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem $A \otimes x = b$. Khususnya untuk sistem $\underline{A} \overline{\otimes} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ subpenyelesaian terbesarnya adalah $\hat{\underline{\mathbf{x}}} = -(\underline{A}^{T} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))$, sedangkan subpenyelesaian terbesar untuk sistem $\overline{A} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ adalah $\hat{\overline{\mathbf{x}}}$

$= -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))$. Ambil vektor interval $\hat{\mathbf{x}} \approx [\,\underline{\hat{\mathbf{x}}}, \overline{\mathbf{x}}'\,]$, dengan $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_i = \min\{-(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))_i$, $-(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))_i\}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{x}}} = -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))$.

i) Jika $-(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}})) \preceq_m -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))$, maka $\underline{\hat{\mathbf{x}}} = -(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))$, Karena $\underline{\hat{\mathbf{x}}}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{x}}}$ berturut-turut adalah subpenyelesaian sistem $\underline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$, maka $\underline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\hat{\mathbf{x}}}$ $\preceq_m$ $\underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \overline{\hat{\mathbf{x}}} \preceq_m \overline{\mathbf{b}}$. Hal ini berakibat bahwa $[\underline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\hat{\mathbf{x}}}, \overline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \overline{\hat{\mathbf{x}}}] \preceq_{\mathrm{Im}} [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ atau $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \hat{\mathbf{x}} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{b}$. Jadi $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan subpenyelesaian sistem $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Misalkan vektor interval $\mathbf{x}' \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{m}_{\max}$ adalah subpenyelesaian interval sistem $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$ maka berlaku $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}' \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{b}$ atau $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{x}}', \overline{\mathbf{x}}'] \preceq_{\mathrm{Im}} [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ atau $[\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}}', \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}}']$ $\preceq_{\mathrm{Im}} [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ yang berarti $\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}}' \preceq_m \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}}' \preceq_m \overline{\mathbf{b}}$. Jadi $\underline{\mathbf{x}}'$ dan $\overline{\mathbf{x}}'$ berturut-turut merupakan subpenyelesaian sistem $\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$. Karena $\underline{\hat{\mathbf{x}}}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{x}}}$ berturut-turut adalah subpenyelesaian terbesar sistem $\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$, maka $\underline{\mathbf{x}}' \preceq_m \underline{\hat{\mathbf{x}}}$ dan $\overline{\mathbf{x}}' \preceq_m \overline{\hat{\mathbf{x}}}$. Hal ini berakibat bahwa $[\underline{\mathbf{x}}', \overline{\mathbf{x}}'] \preceq_{\mathrm{Im}} [\underline{\hat{\mathbf{x}}}, \overline{\hat{\mathbf{x}}}]$. Dengan demikian terbukti $\hat{\mathbf{x}} \approx [-(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}})), -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))]$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem interval $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ii) Jika $-(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}})) \not\preceq_m -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))$, maka untuk $\underline{\hat{\mathbf{x}}} \approx [\,\underline{\hat{\mathbf{x}}}, -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))]$, dengan $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_i =$ $\min\{-(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))_i, -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))_i\}$, berlaku $\underline{\hat{\mathbf{x}}} \preceq_m -(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))$ dan $\underline{\hat{\mathbf{x}}} \preceq_m -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes$ $(-\overline{\mathbf{b}}))$. Karena operasi $\otimes$ pada matriks konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka $\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\hat{\mathbf{x}}}$ $\preceq_m \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \overline{\hat{\mathbf{x}}} \preceq_m \overline{\mathbf{b}}$. Hal ini berakibat bahwa $[\underline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\hat{\mathbf{x}}}, \overline{\mathrm{A}} \,\overline{\otimes}\, \overline{\hat{\mathbf{x}}}] \preceq_{\mathrm{Im}} [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ atau $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \hat{\mathbf{x}} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{b}$. Jadi $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan subpenyelesaian sistem $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Misalkan vektor interval $\mathbf{x}' \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n}_{\max}$ adalah subpenyelesaian interval sistem $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x} = \mathbf{b}$ maka berlaku $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}' \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{b}$ atau $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathbf{x}}', \overline{\mathbf{x}}'] \preceq_{\mathrm{Im}} [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ atau $[\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}}', \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}}']$ $\preceq_{\mathrm{Im}} [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ yang berarti $\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}}' \preceq_m \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}}' \preceq_m \overline{\mathbf{b}}$. Jadi $\underline{\mathbf{x}}'$ dan $\overline{\mathbf{x}}'$ berturut-turut merupakan subpenyelesaian sistem $\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ dan $\overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$. Karena $\overline{\hat{\mathbf{x}}}$ adalah subpenyelesaian terbesar sistem $\overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$, maka $\overline{\mathbf{x}}' \preceq_m \overline{\hat{\mathbf{x}}}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\underline{\mathbf{x}}' \preceq_m \underline{\hat{\mathbf{x}}}$. Andaikan $\overline{\mathbf{x}}' \not\preceq_m \overline{\hat{\mathbf{x}}}$, karena urutan "$\preceq_m$" dalam $\mathbf{R}_{\max}$ merupakan urutan total, maka terdapat indeks i sedemikian hingga berlaku $\underline{\mathbf{x}}'_i \succ_m \underline{\hat{\mathbf{x}}}_i =$ $\min\{-(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))_i, -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))_i\}$. Hal ini berarti

a) $\underline{\mathbf{x}}'_i \succ_m -(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))_i$ yang bertentangan dengan fakta bahwa $-(\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\underline{\mathbf{b}})$ adalah subpenyelesaian terbesar sistem $\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$, atau

b) $\underline{\mathbf{x}}'_i \succ_m -(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))_i$ yang bertentangan dengan fakta bahwa $\underline{\mathbf{x}}' \preceq_m \overline{\mathbf{x}}' \preceq_m \overline{\hat{\mathbf{x}}} =$ $-(\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))$.

Jadi terbukti bahwa $\underline{\mathbf{x}}' \preceq_m \hat{\underline{\mathbf{x}}}$. Karena $\underline{\mathbf{x}}' \preceq_m \hat{\underline{\mathbf{x}}}$ dan $\overline{\mathbf{x}}' \preceq_m \hat{\overline{\mathbf{x}}}$, maka $[\underline{\mathbf{x}}', \overline{\mathbf{x}}'] \preceq_{Im} [\hat{\underline{\mathbf{x}}}, \hat{\overline{\mathbf{x}}}]$. Dengan demikian terbukti $\hat{\mathbf{x}} \approx [\hat{\underline{\mathbf{x}}}, \hat{\overline{\mathbf{x}}}]$. merupakan subpenyelesaian terbesar sistem interval $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$. ■

Contoh 1

Diberikan sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan $A = \begin{bmatrix} [1,3] & [-2,-1] \\ [-3,-2] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [0,0] & [5,10] \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} \begin{bmatrix} [6,10] \\ [2,5] \\ [5,10] \end{bmatrix}$, maka

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & \varepsilon \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \varepsilon \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $\overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$. Dapat ditentukan bahwa

$-(\underline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}})) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \preceq_m \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = -(\overline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))$, sehingga subpenyelesaian terbesar sistem interval di atas adalah $\hat{\mathbf{x}} \approx \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$. Perhatikan bahwa $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan penyelesaian interval sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, karena berlaku: $\begin{bmatrix} [1,3] & [-2,-1] \\ [-3,-2] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [0,0] & [5,10] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [5,7] \\ [0,0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [6,10] \\ [2,5] \\ [5,10] \end{bmatrix}$.

Contoh 2

Diberikan sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan $A = \begin{bmatrix} [2,3] & [3,4] \\ [4,5] & [5,6] \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} [6,7] \\ [7,10] \end{bmatrix}$. Dapat ditentukan bahwa $-(\underline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}})) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \preceq_m \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} -(\overline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))$, sehingga subpenyelesaian terbesar sistem interval di atas adalah $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} [3,4] \\ [2,3] \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa $\hat{\mathbf{x}}$ ini bukan penyelesaian interval sistem tersebut, karena $\begin{bmatrix} [2,3] & [3,4] \\ [4,5] & [5,6] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [3,4] \\ [2,3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [5,7] \\ [7,9] \end{bmatrix}$.

Secara umum kondisi $\overline{A}^T \otimes (-\overline{\mathbf{b}}) \preceq_m \underline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}})$ seperti di atas tidak selalu dipenuhi, seperti nampak dalam contoh berikut.

Contoh 3

Diberikan sistem $A \overline{\otimes} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan $A = \begin{bmatrix} [2,5] & [3,7] \\ [3,6] & [5,8] \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} [5,8] \\ [7,10] \end{bmatrix}$. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa $-(\underline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}})) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $-(\overline{A}^T \otimes (-\overline{\mathbf{b}})) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nampak bahwa $\overline{A}^{T} \otimes (-\overline{b}) \not\preceq_{m} \underline{A}^{T} \otimes (-\underline{b})$, sehingga berakibat bahwa $[-(\underline{A}^{T} \otimes (-\underline{b})), -(\overline{A}^{T} \otimes (-\overline{b}))] \approx \begin{bmatrix} {[3,3]} \\ {[2,1]} \end{bmatrix}$, memuat komponen yang bukan merupakan interval, yaitu [2, 1]. Menurut Teorema 1 di atas dapat ditentukan bahwa subpenyelesaian terbesar sistem interval di atas adalah $\hat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} {[3,3]} \\ {[1,1]} \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa $\hat{\mathbf{x}}$ ini bukan penyelesaian interval sistem tersebut, karena $\begin{bmatrix} {[2,5]} & {[3,7]} \\ {[3,6]} & {[5,8]} \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} {[3,3]} \\ {[1,1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {[5,8]} \\ {[6,9]} \end{bmatrix}$.

KESIMPULAN

Sistem persamaan linear max-plus interval dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε selalu mempunyai subpenyelesaian terbesar interval. Jika subpenyelesaian terbesar interval tersebut memenuhi sistem, maka subpenyelesaian terbesar tersebut merupakan penyelesaian sistem tersebut.

SARAN

Permasalahan selanjutnya yang dapat dibahas adalah bagaimana menggunakan hasil-hasil di atas untuk menyelesaikan sistem persamaan linear input-output max-plus bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi, di mana potongan-potongan-α sistem tersebut merupakan sistem persamaan linear input-output max-plus interval.

REFERENSI

[1] F. Bacelli, G. Cohen, G.J. Olsder and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons, 2001.

[2] A. Rudhito, "Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant,". Tesis Program Pascasarjana, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta. 2003.

[3] N.K. Krivulin, "Evaluation of Bounds on Service Cycle Times in Acyclic Fork-Join Queueing Networks", *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, vol.9 pp. 94-109, 2001.

[4] B. Heidergott, G.J. Olsder and J. Woude, *Max Plus at Work*, Princeton: Princeton University Press, 2005.

[5] S.Chanas and P. Zielinski, "Critical path analysis in the network with fuzzy activity times". *Fuzzy Sets and Systems*. vol.122 pp. 195–204, 2001.

[6] J. Lüthi, and G. Haring, "Fuzzy Queueing Network Models of Computing Systems". *Proceedings of the 13th UK Performance Engineering Workshop*, Ilkley, UK, Edinburgh University Press, July 1997, pp. 11/1 – 11/15.

[7] F. Susilo, *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya. Edisi kedua*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006.

[8] A. Rudhito, S. Wahyuni, A. Suparwanto, F. Susilo, "Sistem Persamaan Linear Max-Plus Interval". *Proseding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA*, 2008, pp. 255-262.

[9] A. Rudhito, S. Wahyuni, A. Suparwanto, F. Susilo. "Aljabar Max-Plus Interval", *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, 2008, pp. 14-22

[10] A. Rudhito, S. Wahyuni, A. Suparwanto, F. Susilo. "Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval", *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, 2008, pp. 23-32.