

JURNAL MIPA

PENELITIAN DAN PENGEMBANGAN

**ANALISA METODE BRANCH AND BOUND
UNTUK PROBLEMA PROGRAM INTEGER TAK LINIER (1 – 5)**

Marlina Setia Sinaga
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

ANALISIS SIFAT-SIFAT OPERATOR SELF-ADJOINT PADA RUANG HILBERT (6 – 13)

Ariyanto
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

BARISAN FIBONACCI, GOLDEN RATIO, DAN PENERAPANNYA (14 - 30)

Sudi Mungkasi
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma

**EFEK EKSTRAK KULIT BUAH JAMBU MENTE (*ANACARDIUM OCCIDENTALE L.*)
TERHADAP KINETIKA PROLIFERASI DAN APOPTOSIS SEL MIELOMA (31 – 45)**

Ermelinda Dheta Meye
Jurusan Biologi, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

ELEKTROHIDRODEOKSIGENASI ASAP CAIR HASIL PIROLISIS TEMPURUNG KELAPA (46 – 57)

Sherlly M. F. Ledoh
Jurusan Kimia, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

EVALUASI KINERJA MOMENT INVARIANT UNTUK IDENTIFIKASI / PENGENALAN OBYEK (58 – 70)

Yulianto Triwahyuadi Polly
Jurusan Ilmu Komputer, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

**IDENTIFIKASI ASAM LEMAK SEBAGAI METIL ESTER MINYAK BIJI TAMBERING (*TAMARINDUS INDICA*)
MENGUNAKAN KROMATOGRAFI GAS-SPEKTROSKOPI MASSA (71 – 77)**

Febri Odel Nitbani, Reiner Ishaq Lerrick, Nurlaila Salim
Jurusan Kimia, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

IDENTIFIKASI ZOOPLANKTON DI ZONA SUBTIDAL PERAIRAN PANTAI OESAPA KUPANG (78 – 91)

Maria T.L. Ruma, Asnat T. Raga Rivu
Jurusan Biologi, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

**KAJIAN INDEKS BIAS DAN KONSNTANTA DIELEKTRIK SENYAWA KARDANOL HASIL ISOLASI
DARI CNSL ASAL ALOR BERDASARKAN SPEKTRUM SERAPANNYA (92 – 98)**

Zakarias seba Ngara
Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

**KARAKTERISASI MONTMORILONIT TERAKTIVASI ASAM DAN APLIKASINYA
DALAM SINTESIS BIODIESEL DARI *JATROPHA CURCAS L.* DAN METANOL (99 – 109)**

Bibiana Dho Tawa
Jurusan Kimia, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

**MODEL PRAKIRAAN KEJADIAN HUJAN JANGKA PENDEK PADA
STASIUN BADAN METEOROLOGI DAN GEOFISIKA (BMG) KUPANG (110 – 118)**

Astri Atti¹⁾ dan Gusnawati²⁾
¹⁾ *Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana*
²⁾ *Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana*

**PEMANFAATAN WINSOCK DALAM APLIKASI MENGGAMBAR DAN MEWARNAI
DENGAN MENGGUNAKAN 2 (DUA) BUAH KOMPUTER (119 – 127)**

Adriana Fanggidae, Yulianto Triwahyuadi Polly
Jurusan Ilmu Komputer, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

**PENERAPAN ANALISIS DISKRIMINAN UNTUK MENGETAHUI PENGARUH KOMPETENSI MANAJER
PROYEK TERHADAP EFEKTIFITAS KINERJA JASA KONSTRUKSI DI KOTA KUPANG (128 – 136)**

Kristina Br. Ginting, Marthinus J. Pella, Matson M. Yollah
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

**SINTESIS TURUNAN ASAM OLEAT MELALUI REAKSI OKSIDASI
DENGAN MENGGUNAKAN KALIUUM PERMANGANAT (137 – 143)**

Theodore Y. K. Lulan
Jurusan Kimia, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

DITERBITKAN OLEH
FAKULTAS SAINS DAN TEKNIK
UNIVERSITAS NUSA CENDANA

JURNAL MIPA

PENELITIAN DAN PENGEMBANGAN

Susunan Redaksi

PELINDUNG / PENASIHAT : REKTOR UNIVERSITAS NUSA CENDANA

PENANGGUNG JAWAB : DEKAN FAKULTAS SAINS DAN TEKNIK

DEWAN REDAKSI JURNAL

KETUA

ANGGOTA

: Drs. H. L. Sianturi, M.Si

: 1. Drs. Jimmy J. Benu

2. Syamsuddin, SE

PENGELOLA / PENYUNTING

: 1. Keristina Br. Ginting, S.Si, M.Si

2. Prof. Drs. M. L. GAOL, M.Si, Ph.D

3. Drs. Theo da Cunha, M.Si

4. Philipi de Rozari, S.Si, M.Si, M.Sc

5. Dr. Drs. B. Pasangka, M.Si

6. Ariyanto, S.Si, M.Si

7. Chatarina G. K. H. Behar, S.Si, M.Biotech

8. Dr. Paul Bhujja, SU

LAY OUT

: 1. Adriana Faggidae, ST, M.Cs

2. Rogesto Djahimo, ST

PENERBIT

: FAKULTAS SAINS DAN TEKNIK

UNIVERSITAS NUSA CENDANA

ALAMAT PENERBIT

: FST UNDANA KAMPUS BARU PENFUI

TELP. 0380-881597 ; FAX. 0380-8815557

KUPANG-NTT

REKENING BANK

: REKENING BNI

TERBIT

: APRIL DAN SEPTEMBER

BARISAN FIBONACCI, GOLDEN RATIO, DAN PENERAPANNYA

Sudi Mungkasi

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma

ABSTRACT

Rows of Fibonacci and golden ratio and its application in the optimization presented in this paper. Given the Fibonacci sequence and golden ratio has the properties which are very numerous and widespread, this paper can be used as a reference introduction. The exposure starts from the representation of the golden ratio in one-dimensional space, then given two-dimensional representation in space. Presented next Fibonacci sequence and its expansion. Relations Fibonacci sequence and golden ratio can be obtained through a recursive formula or can also be obtained through continuous fractions. Application of Fibonacci sequence and golden ratio be given to minimizing the function optimization problem.

Keywords : Rows of Fibonacci, golden ratio.

Barisan bilangan

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (1)$$

yang pada mulanya dibahas oleh Fibonacci dari Pisa pada tahun 1202 dalam kaitannya dengan pertumbuhan kelinci, ternyata mempunyai berbagai sifat dan penerapan yang menarik (Adam, 2003). Kecuali dua elemen pertama dalam barisan, masing-masing elemen adalah jumlahan dari dua elemen sebelumnya yang berturutan, yaitu jika F_n menyatakan elemen ke- n dalam barisan, maka

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3. \quad (2)$$

Menggunakan *pecahan berkelanjutan* diperoleh bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots \quad (3)$$

yang disebut *golden ratio*, dinotasikan τ . Barisan Fibonacci dan *golden ratio* inilah yang menjadi pokok bahasan makalah ini.

Telah diketahui bahwa barisan bilangan Fibonacci dan *golden ratio* mempunyai banyak penerapan, misalnya penerapan dalam bidang teori kendali (Bystrom, dkk, 2010), *signal processing* (Benavoli, dkk, 2009; Capponi, dkk, 2010), sistem dinamika (Falcon dan Plaza, 2007; 2008; 2009), komputasi (Cureg dan Mukherjea, 2010; Daubechies, 2010), probabilitas (Heyde, 1980), fisika-kimia (Srinivasan, 1992; Zhu, dkk, 1997), geometri (Lucca, 2010), optimisasi (Mathews, 2003; Mital, 1976), dan lain-lain. Dari berbagai penerapan tersebut, dalam makalah ini disarikan penerapan barisan Fibonacci dan *golden*

ratio dalam bidang optimisasi. Perlu ditekankan bahwa makalah ini adalah hasil studi pustaka dari sumber-sumber yang tersurat (dalam daftar pustaka) di akhir makalah. Makalah ini dapat dipakai sebagai acuan pengenalan dan perlu diingat bahwa masih banyak sifat-sifat dan penerapan barisan Fibonacci dan *golden ratio* yang tidak tercakup di sini.

Untuk selanjutnya, makalah ini tersisa Bagian II hingga Bagian VII. Bagian II menyajikan representasi *golden ratio*. Bagian III membahas pengertian barisan Fibonacci. Perluasan barisan Fibonacci disajikan pada Bagian IV. Selanjutnya, Bagian V mensarikan hubungan barisan Fibonacci dan *golden ratio*. Contoh penerapan kedua pokok bahasan tersebut diberikan pada Bagian VI. Pada akhirnya, penutup diberikan pada Bagian VII.

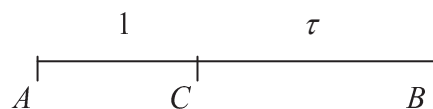
MATERI DAN METODE

REPRESENTASI GOLDEN RATIO

Bagian ini membahas ruas emas sebagai contoh representasi *golden ratio* dalam ruang berdimensi satu, serta segitiga dan persegi panjang emas sebagai contoh representasi *golden ratio* dalam ruang berdimensi dua.

Ruas Emas (*Golden Section*)

Dipandang ruas garis AB berikut seperti tampak pada Gb.1, yang terbagi dengan adanya titik C sehingga perbandingan untuk bagian yang lebih panjang (CB) terhadap bagian yang lebih pendek (AC) sama dengan perbandingan seluruh bagian (AB) terhadap bagian yang lebih panjang (CB).



Gambar 1. Ruas emas

Jika $AC = 1$ satuan panjang,

$$\frac{\tau}{1} = \frac{\tau + 1}{\tau} \quad (4)$$

diperoleh $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Jika dikaitkan dengan masalah elektrostatis, misalkan titik B bermuatan positif $+e$ sedangkan titik A dan C masing-masing bermuatan negatif $-e$ dan misalkan $AC = y$ dan $BC = x$ satuan panjang, *golden ratio* dimaksudkan perbandingan x / y sehingga energi potensial seluruh sistem adalah nol. Dengan kata lain, *golden ratio* menjawab pertanyaan

“berapa jarak (tak nol) yang harus diberikan di antara ketiga muatan tersebut sehingga energi potensial seluruh sistem adalah nol?”

Masalah tersebut dijabarkan sebagai berikut:

- energi potensial yang dihasilkan oleh muatan A dan B adalah

$$\frac{(+e)(-e)}{x+y} = -\frac{e^2}{x+y}, \quad (5)$$

- energi potensial yang dihasilkan oleh muatan B dan C adalah

$$\frac{(+e)(-e)}{x} = -\frac{e^2}{x}, \quad (6)$$

- energi potensial yang dihasilkan oleh muatan A dan C adalah

$$\frac{(-e)(-e)}{y} = \frac{e^2}{y}. \quad (7)$$

Energi potensial seluruh sistem adalah nol, berarti

$$-\frac{e^2}{x+y} - \frac{e^2}{x} + \frac{e^2}{y} = 0, \quad (8)$$

ekuivalen dengan

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0. \quad (9)$$

Diperoleh perbandingan jarak yang harus diberikan adalah $\frac{x}{y} = \tau$. Jadi, $\frac{x}{y}$ haruslah *golden ratio* agar energi potensial seluruh sistem nol.

Segitiga Emas (*Golden Triangle*)

Diperhatikan definisi berikut, yang merupakan definisi segitiga emas.

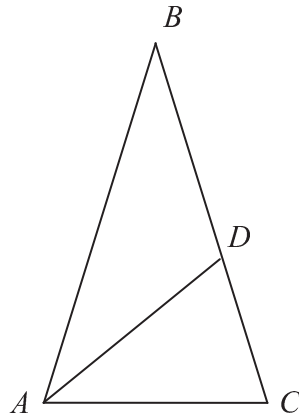
Definisi 1

Segitiga samakaki disebut *segitiga emas* jika perbandingan panjang suatu kaki dengan alasnya adalah τ .

Berikut ini dibahas beberapa sifat segitiga emas.

Teorema 2

Jika $\triangle ABC$ adalah segitiga emas dengan alas \overline{AC} dan D membagi \overline{BC} secara golden ratio dengan $BD > DC$ seperti tampak pada Gb.2, maka \overline{AD} adalah garis bagi untuk $\angle A$.



Gambar 2. Segitiga emas

Bukti:

Misalkan D membagi \overline{BC} secara *golden ratio* sehingga $BD = \tau CD$, $BD + CD = \tau CD + CD = (\tau + 1)CD = \tau^2 CD$; artinya, $BC = \tau^2 CD$. Diperoleh, $BC = \tau^2 CD = \tau AC$ sehingga $\tau CD = AC$.

Karena $\angle BCA = \angle ACD$ dan $(AB/AC) = (AC/CD)$, maka $\triangle BAC \approx \triangle ACD$. Akibatnya, $\angle ACD = \angle ADC$ dan $\angle ABC = \angle CAD$. Dengan demikian, $\triangle ACD$ adalah segitiga samakaki dengan $AD = AC = \tau CD$. Karena $BD = AD$, maka $\triangle ABD$ juga segitiga samakaki dengan $\angle BAD = \angle ABD$. Diperoleh, $\angle BAD = \angle CAD$; dengan demikian, \overline{AD} adalah garis bagi untuk $\angle A$. ■

Akibat 3

Jika $\triangle ABC$ adalah segitiga emas dengan alas \overline{AC} dan D membagi \overline{BC} secara *golden ratio* dengan $BD > DC$, maka $\triangle CAD$ adalah juga segitiga emas.

Bukti:

Menurut penjabaran dalam bukti Teorema 2, $AD = AC = \tau CD$. Jadi, $\triangle CAD$ adalah segitiga emas. ■

Dengan demikian, \overline{AD} membagi segitiga emas ABC menjadi dua segitiga samakaki, $\triangle ABD$ dan $\triangle CAD$ dengan $\triangle CAD \approx \triangle ABC$.

Teorema 4

Sudut yang diapit oleh dua sisi yang sama panjang dalam segitiga emas adalah 36° .

Bukti:

Misalkan $\triangle ABC$ adalah segitiga emas dengan $AB = BC = \tau AC$ dan misalkan D membagi \overline{BC} secara golden ratio, maka menurut Akibat 3, $\triangle CAD$ adalah segitiga emas sebangun dengan $\triangle ABC$.

Misalkan $\angle ACD = 2x$, maka dalam $\triangle ACD$ berlaku $2x + 2x + x = 180$, diperoleh $x = 36$. Jadi, $\angle A = \angle C = 72$ dan $\angle B = 36$.

■

Konvers Teorema 4 juga berlaku seperti dinyatakan dalam Teorema 5 berikut.

Teorema 5

Jika sudut yang diapit oleh dua sisi yang sama panjang dalam segitiga samakaki adalah 36° , maka segitiga tersebut adalah segitiga emas.

Bukti:

Misalkan $\triangle ABC$ adalah segitiga samakaki dengan $AB = BC$ dan $\angle B = 36^\circ$, maka $\angle A = \angle C = 72^\circ$. Misalkan \overline{AD} adalah garis bagi untuk $\angle A$, maka $\angle ADC = 72^\circ$ sehingga $AC = AD = BD = y$ dan $\triangle ABC \approx \triangle ACD$. Diperoleh $(AB / AC) = (AC / CD)$ atau $x / y = y / (x - y)$ atau

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0. \tag{10}$$

Akibatnya, $\frac{x}{y} = \tau$. Jadi, $AB : AC = \tau : 1$ sehingga $\triangle ABC$ adalah segitiga emas.

■

Akibat 6

Segitiga samakaki adalah segitiga emas jika dan hanya jika sudut-sudutnya adalah 36° , 72° , dan 72° .

Selanjutnya dipandang bangun segisepuluh beraturan dengan pusat O . Karena sudut satu lingkaran penuh adalah 360° , maka setiap sisi segisepuluh tersebut menghadap ke pusat bangun dengan membentuk sudut sebesar 36° . Oleh karena itu, jika sebarang sisi bangun diberi nama sisi AB , maka $\triangle AOB$ adalah segitiga emas.

Sedangkan pada bangun segilima beraturan $ABCDE$, sudut setiap titiknya sebesar 108° sehingga $\angle CAD = 36^\circ$. Jadi, $\triangle ACD$ adalah segitiga emas. Dengan demikian, segilima beraturan memuat lima segitiga emas, dengan setiap titik sudut segitiga emas adalah titik sudut segilima.

Persegipanjang Emas (*Golden Rectangle*)

Diperhatikan definisi berikut, yang merupakan definisi persegipanjang emas.

Definisi 7

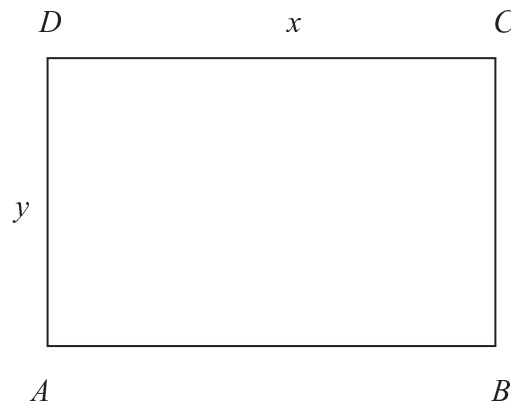
Persegipanjang yang mempunyai sifat bahwa perbandingan panjang dengan lebar sama dengan perbandingan jumlahan panjang dan lebar dengan panjang persegipanjang disebut *persegipanjang emas*.

Dengan kata lain, persegipanjang dengan panjang x satuan dan lebar y satuan, seperti tampak pada Gb.3a, dengan sifat

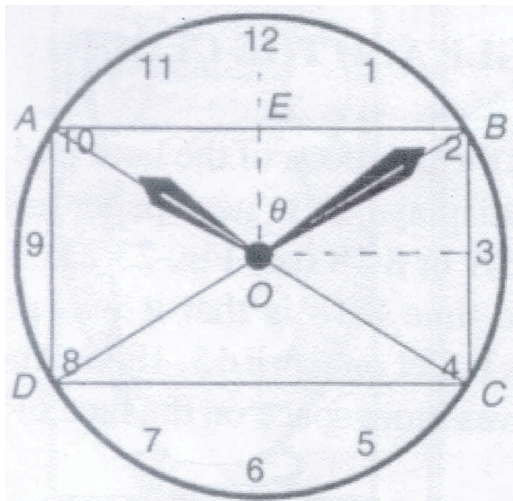
$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \tag{11}$$

disebut persegipanjang emas. Jelas bahwa persamaan perbandingan tersebut menghasilkan

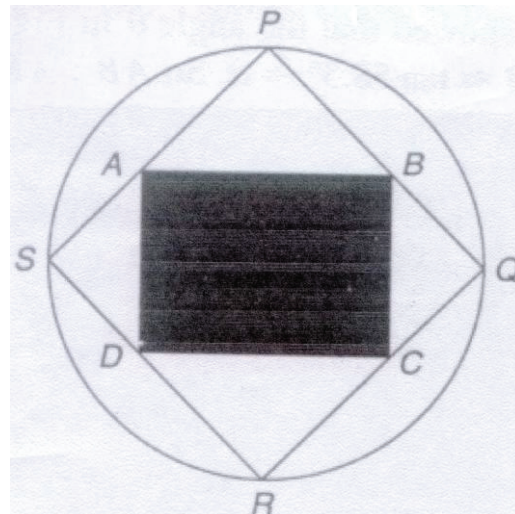
$$\frac{x}{y} = \tau .$$



(a) Persegipanjang emas



(b) Persegipanjang emas dalam arloji



(c) Bayangan persegipanjang emas

Gambar 3. Persegipanjang emas dan terapannya dalam pemasaran arloji [(Gambar (b) dan (c) diambil dari referensi. Lihat Adam (2003) dan Koshy (2001).]

Persegipanjang Emas dan Jam

Sering kali posisi waktu yang ditunjukkan oleh jarum jam dalam arloji yang dijual di toko-toko maupun iklan dalam koran dan majalah adalah pukul 10:09. Pada tahun 1983, M.G. Monzingo dari Southern Methodist University menunjukkan bahwa sudut θ (Gambar 3b) adalah kira-kira $58,3^\circ$. Misalkan $OE = 1$, maka $EB \approx \tan 58,3^\circ \approx \tau$ sehingga $AB : AD \approx 2\tau : 2 = \tau : 1$. Dengan kata lain, terdapat persegipanjang emas (bayangan) $OEBF$ pada muka jam. Hal tersebut berkaitan dengan kenyamanan mata memandang jam. Namun demikian, sebagian matematikawan (misalnya Knott, 2010) kurang setuju dengan alasan ini.

Penjabaran yang lain sebagai berikut. Misalkan titik-titik A, B, C , dan D seperti pada Gambar 3c membagi sisi-sisi persegipanjang $PQRS$ secara golden ratio, maka $PA = PB$, $QB = QC$ dan $PB / BQ = \tau$ sehingga

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{PA^2 + PB^2}{QB^2 + QC^2} = \frac{2PB^2}{2QB^2} = \tau^2. \quad (12)$$

Jadi, $AB / BC = \tau$ sehingga $ABCD$ adalah persegipanjang emas.

Selain beberapa bangun yang telah dibahas di muka, masih ada bangun ataupun kurva emas yang tidak dibahas dalam makalah ini seperti ellips emas, hiperbola emas, balok emas, dll.

BARISAN FIBONACCI

Dipandang masalah pertumbuhan kelinci (ideal) berikut. Misalkan terdapat dua bayi kelinci pada awal bulan, satu jantan dan satu betina. Akan ditentukan banyaknya kelinci yang ada pada akhir tahun jika:

- setiap pasangan kelinci siap kawin setelah berumur satu bulan,
- setelah berumur dua bulan, setiap pasangan kelinci menghasilkan sepasang kelinci yang baru (jantan dan betina) setiap bulan,
- tidak ada kelinci yang mati selama satu tahun tersebut.

Dengan ketiga ketentuan tersebut, diperoleh bahwa pada bulan pertama terdapat 1 pasang kelinci, pada bulan ketiga terdapat 1 pasang kelinci, pada bulan ketiga terdapat 2 pasang kelinci, pada bulan keempat terdapat 3 pasang kelinci, dan seterusnya sehingga pada akhir tahun diperoleh 144 pasang kelinci.

Banyaknya pasangan kelinci tiap bulan adalah menurut barisan 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, Barisan tersebut disebut *barisan Fibonacci* dan setiap elemen

barisan disebut *bilangan Fibonacci*. Secara rekursif, jika F_n menyatakan bilangan Fibonacci ke- n , maka

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ (nilai awal),} \tag{13}$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3 \text{ (relasi rekurensi).} \tag{14}$$

Relasi rekurensi tersebut mempunyai persamaan karakteristik $x^2 - x - 1 = 0$ dengan penyelesaian persamaan karakteristik $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ dan $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ sehingga penyelesaian umum relasi rekurensi adalah $F_n = k_1\tau^n + k_2\beta^n$, dengan k_1, k_2 konstanta.

Untuk menentukan k_1 dan k_2 digunakan syarat (nilai) awal, yaitu

$$F_1 = k_1 \tau + k_2 \beta = 1 \tag{15}$$

$$F_2 = k_1 \tau^2 + k_2 \beta^2 = 1 \tag{16}$$

sehingga diperoleh

$$k_1 = \frac{\tau}{1 + \tau^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ dan } k_2 = \frac{\beta}{1 + \beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{17}$$

Jadi, bilangan Fibonacci ke- n adalah

$$F_n = \frac{\tau^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\tau^n - \beta^n}{\tau - \beta}, \tag{18}$$

dengan $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ dan $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$.

Teorema 8

Setiap bilangan bulat positif n dapat dinyatakan sebagai jumlahan sebanyak berhingga bilangan Fibonacci yang berbeda.

Bukti:

Misalkan F_m adalah bilangan Fibonacci terbesar yang lebih kecil atau sama dengan n , maka $n = F_m + n_1$ dengan $n_1 \leq F_m$. Misalkan F_{m_1} adalah bilangan Fibonacci terbesar yang lebih kecil atau sama dengan n_1 , maka $n = F_m + F_{m_1} + n_2$ dengan $n \geq F_m > F_{m_1}$. Langkah seperti ini dilanjutkan terus, diperoleh $n = F_m + F_{m_1} + F_{m_2} + \dots$ dengan $n \geq F_m > F_{m_1} > F_{m_2} > \dots$. Karena $F_m, F_{m_1}, F_{m_2}, \dots$ adalah barisan bilangan bulat positif yang turun, maka pasti berakhir pada suatu bilangan bulat positif tertentu sehingga elemen-elemen barisannya sebanyak berhingga. ■

Bilangan bulat positif n dapat dinyatakan sebagai jumlahan sebanyak berhingga bilangan Fibonacci yang berbeda, tetapi pernyataan tersebut tidak dijamin ketunggalannya.

Contoh: $25 = 21 + 3 + 1 = 13 + 8 + 3 + 1$. Teorema 8 di muka melengkapi algoritma perkalian Mesir (*Egyptian Method*) untuk mengitung hasil kali dua bilangan bulat.

Contoh: Dengan bantuan bilangan-bilangan Fibonacci, akan dihitung hasil kali $47 \cdot 73$. Bilangan 47 dapat dinyatakan sebagai jumlahan bilangan-bilangan Fibonacci, yaitu $47 = 2 + 3 + 8 + 13 + 21$. Selanjutnya dibuat daftar

1	2	3	5	8	13	21
73	146*	219*	365	584*	949*	1533*

Jadi, $47 \cdot 73 = 2 \cdot 73 + 3 \cdot 73 + 8 \cdot 73 + 13 \cdot 73 + 21 \cdot 73 = 146 + 219 + 584 + 949 + 1533 = 3431$.

PERLUASAN BILANGAN FIBONACCI

Berikut ini disajikan beberapa perluasan barisan Fibonacci. Empat macam perluasan telah dikenal. Perlu diingat bahwa masih terdapat beberapa perluasan (seperti diberikan oleh Koshy, 2001; 2009) yang lain yang tidak tercakup di sini.

Barisan Fibonacci Tergeneralisasi

Barisan $\{G_n\}$, dengan $G_1 = a \geq 1$, $G_2 = b \geq 1$ dan

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \quad n \geq 3 \tag{19}$$

barisan disebut *barisan Fibonacci tergeneralisasi*. Barisan tersebut dapat ditulis

$$a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots \tag{20}$$

Jika $a = b = 1$, barisan $\{G_n\}$ adalah barisan Fibonacci; jika $a = 1$, $b = 3$, barisan $\{G_n\}$ disebut *barisan Lucas*.

Teorema 10

Jika G_n menyatakan elemen ke- n barisan Fibonacci tergeneralisasi, maka

$$G_n = a F_{n-2} + b F_{n-1}, \quad n \geq 3. \tag{21}$$

Bukti:

(Dengan Induksi) Karena $G_3 = a + b = a F_1 + b F_2$, berarti pernyataan benar untuk $n = 3$. Misalkan k adalah sebarang bilangan bulat ≥ 3 dan disumsikan pernyataan benar untuk semua bilangan bulat i dengan $3 \leq i \leq k$, yaitu $G_i = a F_{i-2} + b F_{i-1}$, maka

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &= (a F_{k-2} + b F_{k-1}) + (a F_{k-3} + b F_{k-2}) \\ &= a (F_{k-2} + F_{k-3}) + b (F_{k-1} + F_{k-2}) \\ &= a F_{k-1} + b F_k. \end{aligned} \tag{22}$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Teorema 11

Elemen ke- n barisan Fibonacci tergeneralisasi adalah

$$G_n = \frac{c\tau^n - d\beta^n}{\tau - \beta} \tag{23}$$

dengan $c = a + (a - b)\beta$, $d = a + (a - b)\tau$ dan $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$.

Bukti:

Menggunakan Teorema 10,

$$G_n = a F_{n-2} + b F_{n-1}, \tag{24}$$

atau

$$\begin{aligned} \sqrt{5} G_n &= a(\tau^{n-2} - \beta^{n-2}) + b(\tau^{n-1} - \beta^{n-1}) \\ &= \tau^n \left(\frac{a}{\tau^2} + \frac{b}{\tau} \right) - \beta^n \left(\frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta} \right) \\ &= \tau^n (a\beta^2 - b\beta) - \beta^n (a\tau^2 - b\tau) \\ &= \tau^n [a + (a - b)\beta] - \beta^n [a + (a - b)\tau], \end{aligned} \tag{25}$$

sehingga $G_n = \frac{c\tau^n - d\beta^n}{\tau - \beta}$.



Barisan Fibonacci Gauss

Barisan bilangan kompleks $\{f_n\}$ yang didefinisikan oleh

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{26}$$

dengan $f_0 = i$, $f_1 = 1$ disebut *barisan Fibonacci Gauss*. Dengan demikian, bilangan-

bilangan Fibonacci Gauss adalah

$$1, 1 + i, 2 + i, 3 + 2i, 5 + 3i, 8 + 5i, \dots \tag{27}$$

Secara induktif berlaku hubungan

$$f_n = F_n + i F_{n-1}. \tag{28}$$

Barisan Tribonacci

Barisan $\{T_n\}$ yang didefinisikan oleh

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \quad n \geq 4 \tag{29}$$

dengan $T_1 = T_2 = 1$, $T_3 = 2$ disebut *barisan Tribonacci*. Dengan demikian, bilangan-

bilangan Tribonacci adalah

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, \dots \tag{30}$$

Barisan Quadranacci

Pada tahun 1973, V. E. Hoggatt, Jr. dan M. Bicknell mendefinisikan *barisan Quadranacci* $\{T_n^*\}$, yaitu

$$T_n^* = T_{n-1}^* + T_{n-2}^* + T_{n-3}^* + T_{n-4}^*, \quad n \geq 5 \quad (31)$$

dengan $T_1^* = T_2^* = 1$, $T_3^* = 2$ dan $T_4^* = 4$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

HUBUNGAN BARISAN FIBONACCI DAN GOLDEN RATIO

Dipandang barisan geometri $\{a_n\}$ yang mempunyai elemen pertama $\tau/\sqrt{5}$ dengan rasio τ dan barisan $\{F_n\}$. Pendekatan barisan $\{a_n\}$ adalah

$$0.73, 1.17, 1.89, 3.07, 4.96, \dots \quad (32)$$

sedangkan barisan $\{F_n\}$ adalah 1, 1, 2, 3, 5,.... Tampak bahwa F_n adalah bilangan bulat terdekat dengan elemen ke- n dalam barisan geometri $\{a_n\}$, yang diperkuat oleh teorema berikut.

Teorema 12

Bilangan F_n adalah bilangan bulat terdekat dengan elemen ke- n dalam barisan geometri $\{a_n\}$ yang mempunyai elemen pertama $\tau/\sqrt{5}$ dan rasio τ .

Bukti:

Karena $F_n = \frac{\tau^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ maka

$$|F_n - a_n| = \frac{1}{\sqrt{5}} |(\tau^n - \beta^n) - \tau^n| = \frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}} = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < 1. \quad (33)$$

Lebih khusus, karena $\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ untuk semua $n \geq 1$, maka

$$|F_n - a_n| < \frac{1}{2}, \text{ untuk semua } n \geq 1. \quad (34)$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Akibat 13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n - a_n| = 0. \quad (35)$$

Hubungan yang lain yang akan ditunjukkan adalah $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$. Untuk

mengawalinya, diberikan definisi berikut.

Definisi 14

Bilangan

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}} \tag{36}$$

dengan a_i bilangan real disebut *pecahan berkelanjutan*.

Selanjutnya, akan dibahas pecahan berkelanjutan sederhana, yaitu a_1 bilangan bulat atau nol dan $a_i, i \geq 2$ adalah bilangan bulat positif. Pecahan berkelanjutan bisa berhingga $1 \leq i \leq N$ atau tak berhingga. Pecahan berkelanjutan berhingga biasa ditulis

$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_N]$, contoh: $\frac{67}{29} = [2, 3, 4, 2]$ sebab

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{29/9} = 2 + \frac{1}{3 + 2/9} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9/2}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} \tag{37}$$

proses terhenti karena kebalikan entri terakhir (1/2) adalah 2.

Dipandang persamaan kuadrat yang memenuhi *golden ratio* α , yaitu

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0 \text{ atau } \tau = 1 + \frac{1}{\tau}, \tag{38}$$

sehingga pecahan berkelanjutan untuk τ adalah

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = [1, 1, 1, 1, \dots] \tag{39}$$

diperoleh barisan pecahan berkelanjutan parsial

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots \tag{40}$$

yang konvergen ke τ . Tampak bahwa pembilang dan penyebut setiap elemen barisan tersebut adalah bilangan Fibonacci yang berturutan. Diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots = \tau. \tag{41}$$

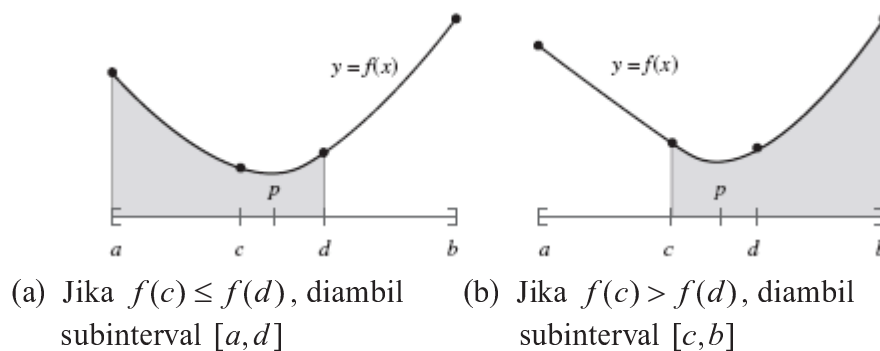
GOLDEN RATIO DAN BARISAN FIBONACCI DALAM OPTIMISASI

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, berikut ini disajikan contoh penerapan barisan Fibonacci dan *golden ratio* dalam masalah optimisasi. Pertama akan dijelaskan

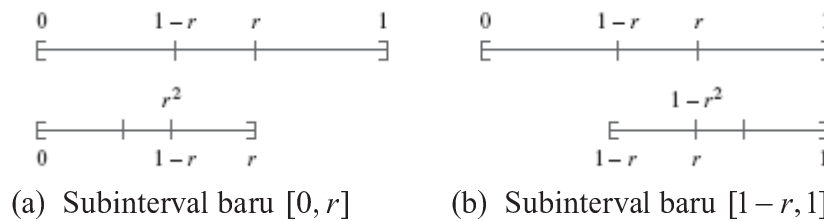
Golden Search untuk meminimumkan fungsi, dan selanjutnya akan dijelaskan *Fibonacci search* untuk meminimumkan fungsi.

Golden Search untuk meminimumkan fungsi

Jika $f(x)$ diketahui unimodal pada $[a, b]$ maka dimungkinkan untuk mengganti interval tersebut dengan subinterval di mana $f(x)$ masih mencapai minimum pada subinterval yang baru. Salah satu pendekatan yang dapat digunakan adalah memilih dua titik dalam c dan d , dengan $c < d$ sehingga $a < c < d < b$. Sifat unimodal $f(x)$ menjamin bahwa $f(c)$ dan $f(d)$ lebih kecil dari $\max\{f(a), f(b)\}$. Terdapat dua kasus yang dihadapi seperti tampak pada Gambar 4.



Gambar 4. Ilustrasi proses *golden search* suatu fungsi [Lihat Mathews (2003).]



Gambar 5. Interval-interval dalam *golden search* [Lihat Mathews (2003).]

Jika $f(c) \leq f(d)$, titik minimum berada dalam subinterval $[a, d]$ maka b diganti d untuk mendapatkan subinterval yang baru, yaitu subinterval $[a, d]$. Jika $f(c) > f(d)$, titik minimum berada dalam subinterval $[c, b]$ maka a diganti c untuk mendapatkan subinterval yang baru, yaitu subinterval $[c, b]$.

Titik dalam c dan d dipilih sehingga interval $[a, c]$ dan $[d, b]$ simetris, yaitu $b - d = c - a$, dengan

$$c = a + (1 - r)(b - a) = ra + (1 - r)b, \tag{42}$$

$$d = b - (1 - r)(b - a) = (1 - r)a + rb, \tag{43}$$

dan $1/2 < r < 1$ (untuk menjamin $c < d$).

Diambil $r = \tau^{-1}$, ternyata salah satu dari titik dalam interval lama menjadi titik dalam subinterval yang baru dan titik dalam interval lama yang lain menjadi titik ujung subinterval yang baru seperti tampak pada Gambar 5. Dengan demikian, pada setiap iterasi hanya perlu dicari satu titik baru dan hanya perlu satu penghitungan nilai fungsi baru.

Contoh: Akan ditentukan minimum fungsi unimodal $f(x) = x^2 - \sin x$ pada interval $[0, 1]$. Penyelesaian menggunakan *golden search* adalah sebagai berikut. Misalkan $a_0 = 0$ dan $b_0 = 1$, maka

$$c_0 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.38919660, \tag{44}$$

$$d_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.6180340. \tag{45}$$

Diperoleh $f(c_0) = -0.22684748$ dan $f(d_0) = -0.19746793$. Karena $f(c_0) < f(d_0)$, diambil subinterval yang baru $[a_0, d_0] = [0.0000000, 0.6180340]$. Selanjutnya, misalkan $a_1 = a_0$, $b_1 = d_0$, $d_1 = c_0$ dan

$$c_1 = a_1 + (1 - r)(b_1 - a_1) \approx 0.2360680. \tag{46}$$

Langkah berikutnya adalah dihitung dan dibandingkan nilai $f(c_1)$ dan $f(d_1)$ untuk menentukan subinterval yang baru sehingga proses iterasi terus berlangsung. Pada iterasi ke-23, interval menyusut menjadi $[a_{23}, b_{23}] = [0.450173, 0.450189]$ dengan panjang interval 0.000016. Karena nilai-nilai fungsi yang dihitung di titik-titik ujung sudah sama sampai delapan angka di belakang koma, yaitu

$$f(a_{23}) \approx -0.23246558 \approx f(b_{23}) \tag{47}$$

maka algoritma boleh dihentikan dan diperoleh nilai minimumnya -0.23246558.

Fibonacci search untuk meminimumkan fungsi

Dipandang barisan Fibonacci baru dengan menganggap 0 sebagai elemen awal dalam barisan, $F_0 = 0$ maka diperoleh barisan $\{F_n\}$ yang elemen-elemennya

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \tag{48}$$

Diberikan fungsi $f(x)$ unimodal pada interval $[a_0, b_0]$. Dengan cara analog seperti pada *golden search*, interval $[a_0, b_0]$ direduksi menjadi subinterval-subinterval, tetapi dipilih r yang dimulai dengan $r_0 = F_{n-1} / F_n$ dan $r_k = F_{n-1-k} / F_{n-k}$, $k = 1, 2, \dots, n - 3$.

Panjang $(k + 1)$ subinterval yang pertama diperoleh dengan mereduksi panjang k subinterval sebelumnya dengan faktor $r_k = F_{n-1-k} / F_{n-k}$ sehingga panjang subinterval terakhir adalah

$$\frac{F_{n-1}F_{n-2} \cdots F_2}{F_n F_{n-1} \cdots F_3} (b_0 - a_0) = \frac{F_2}{F_n} (b_0 - a_0) = \frac{b_0 - a_0}{F_n}. \quad (49)$$

Jika diberikan toleransi absis untuk mendapatkan nilai minimum adalah ε , maka ditentukan nilai n terkecil yang memenuhi

$$\frac{b_0 - a_0}{F_n} < \varepsilon \text{ atau } F_n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}. \quad (50)$$

Titik-titik dalam c_k dan d_k dari setiap subinterval ke- k , $[a_k, b_k]$ ditentukan sebagai berikut

$$c_k = a_k + \left(1 - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}\right) (b_k - a_k), \quad (51)$$

$$d_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}} (b_k - a_k). \quad (52)$$

Setiap iterasi memerlukan penentuan dua titik dalam baru dengan salah satu titik dalam tersebut telah didapatkan dari iterasi sebelumnya, sedangkan satu titik yang lain diperoleh dari rumus (51).

Pada iterasi terakhir, $r_{n-3} = F_2 / F_3 = 1/2$, kedua titik dalamnya berhimpit di tengah-tengah interval. Agar diperoleh dua titik dalam yang berbeda, digunakan pembeda e , suatu konstanta yang cukup kecil. Jadi, pada langkah ini, koefisien dari $(b_k - a_k)$ diambil $1/2 - e$ untuk mendapatkan c_k dan koefisien dari $(b_k - a_k)$ diambil $1/2 + e$ untuk mendapatkan d_k .

Contoh: Minimumkan fungsi $f(x) = x^2 - \sin x$ pada interval $[0, 1]$ menggunakan metode *Fibonacci search*, dengan $\varepsilon = 10^{-4}$ dan konstanta pembeda $e = 0.01$. Penyelesaiannya sebagai berikut. Bilangan Fibonacci terkecil yang memenuhi

$$F_n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} = \frac{1 - 0}{10^{-4}} = 10\,000 \quad (53)$$

adalah $F_{21} = 10946$. Jadi, $n = 21$, $a_0 = 0$, dan $b_0 = 1$. Oleh karena itu,

$$c_0 = 0 + \left(1 - \frac{F_{20}}{F_{21}}\right) (1 - 0) \approx 0.3819660, \quad (54)$$

$$d_0 = 0 + \frac{F_{20}}{F_{21}} (1 - 0) \approx 0.6180340. \quad (55)$$

Karena $f(0.3819660) = -0.2268475$ dan $f(0.6180340) = -0.1974679$, yaitu $f(c_0) \leq f(d_0)$ maka diambil $a_1 = a_0$, $b_1 = d_0$, dan $d_1 = c_0$ serta subinterval baru $[a_1, b_1] = [0, 0.6180340]$. Selanjutnya dihitung c_1 ,

$$c_1 = a_1 + \left(1 - \frac{F_{2^{1-1}}}{F_{2^1-1}}\right)(b_1 - a_1) \approx 0.2360680 \quad (56)$$

kemudian dihitung dan dibandingkan nilai $f(c_1)$ dan $f(d_1)$ untuk mendapatkan subinterval yang baru sehingga proses iterasi terus berlanjut sampai berakhir. Pada iterasi ke-17, interval menyusut menjadi $[a_{17}, b_{17}] = [0.4501188, 0.4503928]$ dengan

$$c_{17} = 0.4502101, \quad d_{17} = 0.4503105 \text{ dan } f(c_{17}) \leq f(d_{17}). \quad (57)$$

Jadi, $[a_{18}, b_{18}] = [0.4501188, 0.4503015]$, dengan $d_{18} = 0.4502101$. Pada langkah ini, $r_{18} = 1 - F_2 / F_3 = 1 - 1/2 = 1/2$; konstanta pembeda $e = 0.01$ digunakan untuk menghitung c_{18} ,

$$c_{18} = a_{18} + (0.5 - 0.01)(b_{18} - a_{18}) \approx 0.4502083. \quad (58)$$

Karena $f(c_{18}) \leq f(d_{18})$, subinterval terakhir

$$[a_{19}, b_{19}] = [0.4501188, 0.4502101] \quad (59)$$

mempunyai panjang interval 0.0000913. Diambil titik tengah subinterval tersebut sebagai absis untuk titik minimum. Disimpulkan bahwa nilai minimumnya adalah $f(0.4501645) = -0.2324656$.

SIMPULAN

Golden ratio dan barisan Fibonacci mempunyai sifat-sifat yang menarik. Salah satu penerapan *golden ratio* dan barisan Fibonacci adalah penerapan dalam masalah optimisasi yaitu *golden search method* dan *Fibonacci search method*. Sering kali, konvergensi kedua metode ini sangat lambat dibandingkan metode Newton-Raphson, metode *secant* maupun metode yang lain. Namun demikian, kedua metode ini mempunyai kelebihan yaitu dapat digunakan untuk mengoptimalkan fungsi yang tidak harus terdiferensial kontinu pada suatu interval tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

- Adam** J.A. 2003. *Mathematics in Nature: Modeling Patterns in the Natural World*, Princeton: Princeton University Press.
- Benavoli** A. Chisci L., Farina A. 2009. Fibonacci sequence, golden section, Kalman filter and optimal control. *Signal Processing*, 89 (8): 1483–1488.

- Bystrom** J., Lystad L.P., Nyman P.O. 2010. Using generalized Fibonacci sequences for solving the one-dimensional LQR problem and its discrete-time Riccati equation. *Modeling, Identification and Control*, 31 (1): 1–18.
- Capponi** A., Farina A., Pilotto C. 2010. Expressing stochastic filters via number sequences. *Signal Processing*, 90 (7): 2124–2132.
- Cureg** E., Mukherjea A. 2010. Numerical results on some generalized random Fibonacci sequences. *Computers and Mathematics with Applications*, 59 (1): 233–246.
- Daubechies** I. 2010. The golden ratio encoder. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56 (10): 5097–5110.
- Falcon** S., Plaza A. 2007. On the Fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 32 (5): 1615–1624.
- Falcon** S., Plaza A. 2008. On the 3-dimensional k-Fibonacci spirals. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38 (4): 993–1003.
- Falcon** S., Plaza A. 2009. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39 (3) : 1005–1019.
- Heyde** C.C. 1980. On a probabilistic analogue of the Fibonacci sequence. *Journal of Applied Probability*, 17 (4): 1079–1082.
- Knott** R. 2010. Fibonacci numbers and the golden section in art, architecture and music. www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html diakses 26 November 2010.
- Koshy** T. 2001. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, New York: John Wiley & Sons.
- Koshy** T. 2009. *Catalan Numbers with Applications*, New York: Oxford University Press.
- Lucca** G. 2010. Generalized Fibonacci circle chains. *Forum Geometricorum*, 10: 131–133.
- Mathews** J.H. 2003. Numerical optimization. math.fullerton.edu/mathews/ diakses 26 November 2010.
- Mital** K.V. 1976. *Optimization Methods: in Operations Research and Systems Analysis*, New Delhi: Wiley Eastern Ltd.
- Srinivasan** T.P. 1992. Fibonacci sequence, golden ratio, and a network of resistors. *Am. J. Phys.* 60 (5): 461–462.
- Zhu** S.-N., Zhu Y.-Y., Qin Y.Q., Wang H.F., Ge C.Z., and Ming N.B. 1997. Experimental realization of second harmonic generation in a Fibonacci optical superlattice LiTaO₃. *Physical Review Letters*, 78 (14): 2752–2755.