

# Perbandingan Metode Monte Carlo *Antithetic Variate* dan *Control Variate* dalam Penentuan Harga Opsi *Barrier Knock-Out*

C. E. Murwaningtyas, W. S. Haryono, M. A. Uge, dan T. Kristofel

Volume 12, Issue 1, Pages 37–44, June 2024

Diterima 6 Mei 2024, Direvisi 26 Mei 2024, Disetujui 28 Mei 2024, Diterbitkan 1 Juni 2024

To Cite this Article : C. E. Murwaningtyas, dkk., "Perbandingan Metode Monte Carlo *Antithetic Variate* dan *Control Variate* dalam Penentuan Harga Opsi *Barrier Knock-Out*", *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 12, no. 1, pp. 37–44, 2024, <https://doi.org/10.37905/euler.v12i1.25128>

© 2024 by author(s)



## JOURNAL INFO • EULER : JURNAL ILMIAH MATEMATIKA, SAINS DAN TEKNOLOGI

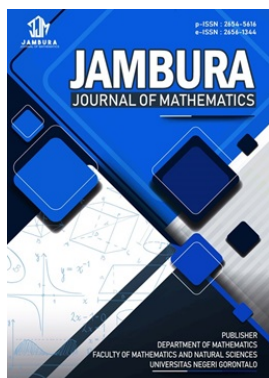


	Homepage	:	<a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/index</a>
	Journal Abbreviation	:	Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.
	Frequency	:	Biannual (June and December)
	Publication Language	:	English (preferable), Indonesia
	DOI	:	<a href="https://doi.org/10.37905/euler">https://doi.org/10.37905/euler</a>
	Online ISSN	:	2776-3706
	Editor-in-Chief	:	Resmawan
	Publisher	:	Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo
	Country	:	Indonesia
	OAI Address	:	<a href="http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/oai">http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/euler/oai</a>
	Google Scholar ID	:	QF_r_gAAAAJ
	Email	:	<a href="mailto:euler@ung.ac.id">euler@ung.ac.id</a>

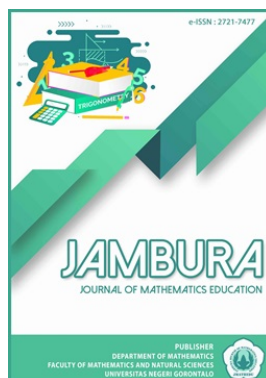
## JAMBURA JOURNAL • FIND OUR OTHER JOURNALS



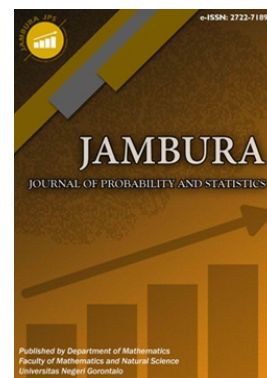
Jambura Journal of Biomathematics



Jambura Journal of Mathematics



Jambura Journal of Mathematics Education



Jambura Journal of Probability and Statistics

# Perbandingan Metode Monte Carlo Antithetic Variate dan Control Variate dalam Penentuan Harga Opsi Barrier Knock-Out

Chatarina Enny Murwaningtyas<sup>1,\*</sup>, William Saputra Haryono<sup>2</sup>, Maria Andriani Uge<sup>2</sup>, dan Tedi Kristofel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta, Indonesia

<sup>2</sup>Program Studi Matematika, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta, Indonesia

## ARTICLE HISTORY

Diterima 6 Mei 2024  
Direvisi 26 Mei 2024  
Disetujui 28 Mei 2024  
Diterbitkan 1 Juni 2024

## KATA KUNCI

Opsi Barrier Knock-Out  
Monte Carlo  
Antithetic Variate  
Control Variate

## KEYWORDS

Knock-Out Barrier Options  
Monte Carlo  
Antithetic Variate  
Control Variate

**ABSTRAK.** Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji efektivitas metode Monte Carlo antithetic variate dan control variate dalam penentuan harga opsi barrier knock-out dibandingkan dengan metode Monte Carlo standar. Masalah utama dalam penentuan harga opsi barrier adalah tingginya variansi estimasi yang dapat mengurangi akurasi dan efisiensi hasil. Metode Monte Carlo standar sering kali membutuhkan jumlah simulasi yang sangat besar untuk mencapai hasil yang stabil, yang tidak efisien secara komputasi. Untuk mengatasi masalah ini, penelitian ini menggunakan teknik reduksi variansi antithetic variate dan control variate. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua metode tersebut menawarkan akurasi yang lebih tinggi dalam estimasi harga dibandingkan metode Monte Carlo standar. Analisis lebih lanjut menunjukkan bahwa metode control variate lebih efektif untuk opsi beli barrier up and out serta opsi beli barrier down and out, sementara metode antithetic variate unggul dalam penentuan harga opsi jual barrier up and out serta opsi jual barrier down and out. Penelitian ini menegaskan pentingnya memilih metode yang sesuai dengan jenis opsi yang dihadapi untuk mencapai estimasi yang akurat dan efisien.

**ABSTRACT.** This study aims to examine the effectiveness of the Monte Carlo antithetic variate and control variate methods in pricing knock-out barrier options compared to the standard Monte Carlo method. The main problem in barrier option pricing is the high variance of estimates, which can reduce the accuracy and efficiency of results. The standard Monte Carlo method often requires a very large number of simulations to achieve stable results, which is computationally inefficient. To address this issue, this study employs variance reduction techniques, antithetic variate, and control variate. The findings indicate that both methods offer higher accuracy in price estimation compared to the standard Monte Carlo method. Further analysis reveals that the control variate method is more effective for pricing up and out barrier call options and down and out barrier call options, while the antithetic variate method excels in pricing up and out barrier put options and down and out barrier put options. This study underscores the importance of selecting the appropriate method according to the type of option involved to achieve accurate and efficient estimations.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Editorial of EULER: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Bone Bolango 96554, Indonesia.

## 1. Pendahuluan

Investasi pada instrumen derivatif seperti opsi memegang peranan penting dalam dunia keuangan modern [1]. Opsi, sebagai salah satu bentuk kontrak derivatif, menyediakan keleluasaan bagi investor untuk mengelola risiko atau spekulasi, dengan memanfaatkan hak untuk membeli atau menjual aset pada harga yang telah disepakati sebelumnya. Dalam keragaman instrumen derivatif, opsi eksotik seperti opsi *barrier* menawarkan struktur pembayaran yang lebih kompleks, di mana aktivasi *pay-off*-nya bergantung pada pencapaian aset terhadap suatu nilai ambang atau *barrier*. Opsi *barrier knock-out*, khususnya, menjadi tidak aktif atau "knocked out" jika harga aset dasar menyentuh *barrier* yang ditentukan sebelum jatuh tempo [2]. Opsi *barrier knock-out* ini sangat menarik untuk dipelajari karena karakteristiknya yang unik dan implikasinya yang signifikan bagi strategi investasi dan ma-

najemen risiko.

Opsi *barrier knock-out* dapat diklasifikasikan ke dalam empat jenis utama berdasarkan arah gerakan harga aset dan hak transaksi yang diberikan kepada pemegang opsi [2, 3]. Pertama, opsi beli *barrier up and out* memberikan hak kepada pembeli untuk membeli aset pada harga yang telah disepakati. Opsi ini menjadi tidak valid atau "knocked out" jika harga aset naik dan menyentuh atau melewati *barrier* yang ditentukan. Kedua, opsi beli *barrier down and out* juga mengizinkan pembeli untuk membeli aset, namun opsi ini menjadi tidak valid jika harga aset justru menurun dan menyentuh atau melampaui *barrier* yang telah ditetapkan. Selanjutnya, opsi jual *barrier up and out* memberikan hak kepada pembeli untuk menjual aset pada harga yang disepakati. Opsi ini akan menjadi tidak valid jika harga aset meningkat dan mencapai atau melampaui *barrier* yang ditentukan. Terakhir, opsi jual *barrier down and out* memberi hak kepada pembeli un-

\*Penulis Korespondensi.

tuk menjual aset, namun opsi ini akan menjadi tidak valid jika harga aset turun dan menyentuh atau melampaui harga *barrier* yang ditentukan. Setiap jenis opsi ini menawarkan strategi yang berbeda untuk mengelola risiko investasi berdasarkan perkiraan pergerakan harga aset di masa depan.

Membahas keempat jenis opsi ini menjadi menarik karena masing-masing menawarkan karakteristik yang unik tergantung pada kondisi pasar dan arah pergerakan harga. Hal ini memungkinkan investor untuk memilih jenis opsi yang paling sesuai dengan prediksi mereka terhadap pergerakan harga aset di masa depan, memberikan fleksibilitas dalam strategi *hedging* dan spekulasi. Penilaian akurat dari masing-masing jenis opsi ini memerlukan pemahaman yang mendalam tentang faktor-faktor yang mempengaruhi harga aset dan bagaimana *barrier* tersebut dapat mempengaruhi nilai opsi seiring waktu. Dengan demikian, keberhasilan dalam memanfaatkan opsi *barrier* ini sangat bergantung pada kemampuan untuk memprediksi perubahan pasar yang dapat memicu aktivasi atau deaktivasi *barrier* [4].

Penentuan harga opsi *barrier* telah mengalami berbagai pengembangan metodologi untuk meningkatkan akurasi dan efisiensi komputasi. Metode Black-Scholes, sebagai pendekatan analitik tradisional, telah lama diakui karena kemampuannya menghitung harga opsi dengan asumsi tertentu [3, 5]. Namun, kompleksitas dari opsi eksotik seperti *barrier knock-out* membutuhkan teknik yang lebih dinamis dan fleksibel seperti simulasi Monte Carlo.

Metode Monte Carlo adalah teknik simulasi yang fleksibel untuk mengestimasi nilai instrumen keuangan dengan mensimulasikan berbagai lintasan harga aset dasar menggunakan bilangan acak [6], memungkinkan analisis berbagai jenis opsi dan kondisi pasar yang kompleks tanpa asumsi kaku seperti model Black-Scholes [7]. Keunggulan metode ini termasuk kemampuan menangani opsi eksotik dan teknik reduksi variansi untuk meningkatkan akurasi dan efisiensi komputasi. Namun, kelemahannya adalah kebutuhan sumber daya komputasi yang besar dan sensitivitas terhadap kualitas bilangan acak yang digunakan, yang dapat mempengaruhi hasil simulasi secara signifikan.

Penelitian terbaru dalam penentuan harga opsi menggunakan machine learning menunjukkan kemajuan signifikan. Metode seperti *Support Vector Regression* [8], *Random Forest* [9], *Adaptive Boosting* [10] dan *Artificial Neural Network* [11] telah diterapkan dengan hasil yang bervariasi. Li dan Yan [12] menggunakan kombinasi metode Monte Carlo *antithetic* dan pembelajaran mesin untuk meningkatkan akurasi harga opsi *barrier*, menemukan bahwa teknik seperti *random forests* dan *neural networks* dapat memberikan estimasi yang lebih akurat dibandingkan dengan metode numerik tradisional.

Metode Monte Carlo *antithetic variate* mengurangi variansi dengan menggunakan variabel random yang berkorelasi negatif [13]. Penelitian Zubedi, dkk. [14] menunjukkan bahwa Monte Carlo *control variate* lebih efektif dalam mencapai konvergensi dengan kesalahan yang lebih kecil dibandingkan Monte Carlo *antithetic variate* dalam penentuan harga opsi Asia. Wati, dkk. [15] menemukan bahwa metode *conditional* Monte Carlo cenderung konvergen lebih cepat daripada metode *antithetic variate* dalam menentukan harga opsi *barrier*. Putri, dkk. [16] menunjukkan bahwa teknik *antithetic variate* dapat mengurangi variansi dalam penentuan harga opsi *barrier* tipe Eropa. Silalahi, dkk. [17] meng-

gunakan metode Monte Carlo standar, *antithetic variate*, dan *control variate* untuk menilai harga opsi *double barrier knock-in*. Namun, dalam penelitian ini, fokus diberikan pada opsi *barrier knock-out* dengan hanya satu *barrier*. Hal ini berbeda dari penelitian yang telah ada seperti yang dijelaskan oleh Silalahi dkk, di mana mereka memfokuskan pada opsi *knock-in* dengan *double barrier*. Opsi *barrier knock-out* memberikan dinamika yang berbeda karena opsi menjadi tidak valid atau "knocked out" saat harga aset menyentuh *barrier*, sehingga memerlukan pendekatan khusus dalam penentuannya yang tidak hanya bergantung pada mencapai *barrier* tetapi juga pada bagaimana *barrier* tersebut menghilangkan hak opsi tersebut.

Dalam artikel ini, dilakukan studi komparatif terhadap kedua metode *antithetic variate* dan *control variate* dalam konteks penentuan harga opsi *barrier knock-out*. Penelitian ini tidak hanya membahas kedalaman teknis dari setiap metode tetapi juga mengevaluasi dan membandingkan efektivitas mereka dalam berbagai skenario pasar. Telaah pustaka yang mendalam mengenai opsi *barrier*, metode penentuan harga opsi, dan teknik Monte Carlo menyediakan landasan teoretis bagi analisis dan diskusi yang mengarah pada formulasi masalah yang tepat dalam konteks penentuan harga opsi *barrier knock-out*. Tujuan akhir penelitian ini adalah untuk menentukan metode yang paling akurat dan efisien dalam penentuan harga opsi *barrier knock-out* serta memberikan rekomendasi praktis untuk aplikasinya di pasar keuangan.

## 2. Metode

Metode Monte Carlo adalah teknik simulasi yang berakar pada penggunaan bilangan acak untuk memodelkan fenomena yang kompleks dan sulit diprediksi secara analitis. Dalam konteks penentuan harga opsi, langkah pertama dalam penerapan metode Monte Carlo adalah mendefinisikan masalah dengan jelas dan memodelkannya menggunakan asumsi matematis yang sesuai. Misalnya, harga aset yang mendasari opsi sering dimodelkan menggunakan *Geometric Brownian Motion* (GBM), suatu proses stokastik yang menggambarkan pergerakan harga yang berkelanjutan dan volatilitas pasar. Model ini mengambil parameter seperti volatilitas, tingkat bunga bebas risiko, dan harga awal aset, yang merupakan dasar bagi simulasi selanjutnya.

Simulasi dijalankan dengan menghasilkan banyak skenario random dari pergerakan harga aset hingga waktu jatuh tempo opsi. Ini dilakukan dengan menghasilkan bilangan-bilangan random yang mewakili faktor-faktor seperti fluktuasi pasar dan pengaruh eksternal, yang memungkinkan penciptaan berbagai lintasan harga yang mungkin. Setiap lintasan ini kemudian dievaluasi untuk menentukan nilai dari opsi pada akhir periode berdasarkan kondisi tertentu seperti harga pelaksanaan opsi dan tipe opsi tersebut (*call* atau *put*).

Hasil dari setiap simulasi individu kemudian diintegrasikan untuk menghitung harga rata-rata opsi. Harga rata-rata ini dianggap sebagai estimasi yang adil dari harga opsi berdasarkan parameter dan model yang digunakan. Hasil ini biasanya didiskontokan kembali ke nilai saat ini menggunakan tingkat bunga bebas risiko yang sesuai, yang mencerminkan nilai waktu uang dan risiko keuangan.

Untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi dari simulasi Monte Carlo, teknik reduksi variansi seperti *antithetic variates* dan

*control variates* sering digunakan. Teknik *antithetic variates*, misalnya, melibatkan penggunaan pasangan lintasan yang berkorelasi negatif untuk menyeimbangkan fluktuasi hasil dan mengurangi varians output. Sementara itu, metode *control variates* menggunakan variabel kontrol yang nilai teoretisnya diketahui untuk mengoreksi estimasi dari simulasi, sehingga menghasilkan estimasi yang lebih stabil dan akurat dengan lebih sedikit simulasi.

Walaupun metode Monte Carlo memiliki banyak keuntungan seperti fleksibilitas dan kemampuan adaptasi untuk model kompleks, teknik ini juga memiliki keterbatasan, termasuk kebutuhan akan komputasi yang intensif dan sensitivitas terhadap kualitas bilangan random yang digunakan. Kesalahan dalam pengambilan sampel atau dalam pemilihan model dapat berdampak signifikan pada hasil, memerlukan pemilihan parameter dan teknik simulasi dengan hati-hati untuk memastikan keandalan dan keakuratan hasil yang dihasilkan.

Dalam penentuan harga opsi, metode Monte Carlo digunakan untuk mensimulasikan berbagai skenario pergerakan harga aset yang mendasarinya, berdasarkan model statistik dan matematik. Algoritma ini menghasilkan lintasan harga yang kemudian digunakan untuk menghitung nilai opsi di masa depan. Berikut adalah algoritma untuk tiga teknik yang paling umum digunakan dalam metode Monte Carlo standar, metode Monte Carlo *antithetic variates*, dan metode Monte Carlo *control variates*.

### 2.1. Algoritma Metode Monte Carlo Standar

#### 1. Langkah 1: inisialisasi parameter.

Tetapkan harga awal aset  $S_0$ , volatilitas  $\sigma$ , tingkat bunga bebas risiko  $r$ , harga pelaksanaan  $K$ , dan waktu jatuh tempo  $T$ .

#### 2. Langkah 2: pembangkitan lintasan aset.

Untuk setiap simulasi, gunakan *Geometric Brownian Motion* (GBM) untuk menghasilkan lintasan harga aset dari waktu sekarang sampai waktu jatuh tempo,

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{T}Z\right) \quad (1)$$

dengan  $Z$  merupakan bilangan random yang berdistribusi normal standar  $N(0,1)$ .

#### 3. Langkah 3: evaluasi *barrier* dan *payoff*.

- Periksa setiap lintasan harga untuk menentukan apakah harga aset mencapai atau melampaui *barrier*  $B$  sebelum waktu jatuh tempo. Jika *barrier* tercapai, opsi menjadi tidak aktif dan *payoff* sama dengan nol.
- Jika *barrier* tidak tercapai, hitung *payoff* opsi di akhir lintasan, untuk opsi beli (*call*):

$$\text{payoff\_call} = \max\{S(T) - K, 0\} \quad (2)$$

dan untuk opsi jual (*put*):

$$\text{payoff\_put} = \max\{K - S(T), 0\} \quad (3)$$

#### 4. Langkah 4: estimasi harga opsi.

- Rata-rata nilai *payoff* yang ditentukan menggunakan Persamaan (2) atau (3) dari semua simulasi yang tidak mencapai *barrier* untuk mendapatkan estimasi harga opsi.
- Diskontokan nilai ini ke nilai saat ini menggunakan  $e^{-rT}$ .

### 2.2. Algoritma Metode Monte Carlo Antithetic Variate

- Langkah 1: inisialisasi dan pembangkitan lintasan aset. Sama seperti metode standar, tetapi untuk setiap lintasan yang dihasilkan, buat juga lintasan kedua menggunakan  $-Z$  untuk menciptakan lintasan yang berkorelasi negatif, sehingga Persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma\sqrt{t}Z\right) \quad (4)$$

- Langkah 2: evaluasi *barrier* dan perhitungan *payoff*.

- Untuk kedua lintasan yang dihasilkan menggunakan Persamaan (1) dan (2), periksa apakah *barrier*  $B$  tercapai. Jika ya, *payoff* adalah nol.
- Jika tidak, rata-rata *payoff* dari kedua lintasan untuk setiap simulasi.

- Langkah 3: estimasi harga opsi.

Rata-rata hasil dari semua simulasi yang disesuaikan untuk mendapatkan estimasi yang lebih stabil dan akurat.

### 2.3. Algoritma Metode Monte Carlo Control Variate

- Langkah 1: pemilihan dan perhitungan variabel kontrol.

Pilih variabel kontrol dengan solusi analitis yang diketahui, seperti opsi *barrier* dengan menggunakan formula Black-Scholes [3, 5], dan hitung nilai teoretisnya menggunakan formula Black-Scholes. Formula Black-Scholes untuk opsi beli tipe Eropa sebagai berikut

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (5)$$

dan formula untuk opsi jual tipe Eropa sebagai berikut

$$P = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2) \quad (6)$$

dengan

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (7)$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (8)$$

- Langkah 2: simulasi dan evaluasi *barrier*.

- Lakukan simulasi lintasan harga seperti pada metode standar. Periksa apakah *barrier* tercapai dalam simulasi.
- Jika *barrier* tidak tercapai, hitung *payoff* opsi yang dinilai dan variabel kontrol.

- Langkah 3: *adjustment payoff*.

Jika *barrier* tidak tercapai, sesuaikan *payoff* opsi yang dinilai dengan mengurangi perbedaan antara *payoff* simulasi dan nilai teoretis dari variabel kontrol.

- Langkah 4: estimasi harga opsi.

Rata-rata hasil yang telah disesuaikan untuk mendapatkan estimasi yang lebih akurat.

### 2.4. Pendekatan Analitik dalam Penentuan Harga Opsi Barrier

Dalam penelitian ini, selain menggunakan simulasi Monte Carlo dalam berbagai variannya, juga dilakukan perbandingan hasil dengan pendekatan analitik yang sudah mapan dalam penentuan harga opsi. Salah satu pendekatan analitik yang paling fundamental dan luas digunakan adalah formula Black-Scholes. Formula ini, dikembangkan oleh Black dan Scholes [18], telah merevolusi bidang keuangan dengan menyediakan model matematis



yang dapat digunakan untuk mengestimasi harga pasar dari opsi tipe Eropa, yang hanya dapat dilaksanakan pada waktu jatuh tempo. Formula opsi ini, persamaan (5) dan (6), digunakan sebagai variabel kontrol dalam metode Monte Carlo *control variates*.

Selain formula asli Black-Scholes, penelitian ini juga mempertimbangkan pengembangan oleh Wilmot [3], yang telah mengadaptasi model ini untuk menangani kompleksitas tertentu dari opsi eksotik seperti opsi *barrier*. Formula Black-Scholes yang dimodifikasi oleh Wilmot memperkenalkan penyesuaian untuk faktor-faktor seperti volatilitas stokastik dan perilaku pasar yang lebih dinamis, yang lebih akurat mencerminkan kondisi pasar saat ini. Berikut formula opsi *barrier* untuk keempat jenis yang menjadi fokus dalam penelitian ini.

Opsi beli *barrier up and out* adalah opsi beli yang tidak berlaku atau dinonaktifkan ketika harga aset naik dan mencapai tingkat *barrier* yang telah ditentukan. Formula Black-Scholes untuk menentukan harga opsi beli *barrier up and out*:

$$C = S_0 (N(d_1) - N(d_3) - b(N(d_6) - N(d_8))) - Ke^{-rT} (N(d_2) - N(d_4) - a(N(d_5) - N(d_7)))$$

dengan  $N(d)$  merupakan fungsi distribusi normal kumulatif,  $d_1$  ditentukan dengan persamaan (7) dan  $d_2$  ditentukan dengan persamaan (8) dan beberapa variabel yang lain ditentukan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{B}{S_0}\right)^{-1+\frac{2r}{\sigma^2}} \\ b &= \left(\frac{B}{S_0}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}} \\ d_3 &= \frac{\log\left(\frac{S_0}{B}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_4 &= \frac{\log\left(\frac{S_0}{B}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_5 &= \frac{\log\left(\frac{S_0}{B}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_6 &= \frac{\log\left(\frac{S_0}{B}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_7 &= \frac{\log\left(\frac{S_0K}{B^2}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_8 &= \frac{\log\left(\frac{S_0K}{B^2}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Opsi beli *barrier down and out* merupakan opsi beli yang tidak berlaku atau dinonaktifkan ketika harga aset turun dan menyentuh tingkat *barrier* yang ditentukan. Formula Black-Scholes untuk menentukan harga opsi beli *barrier down and out*:

Jika  $K > B$ ,

$$C = S_0 (N(d_1) - b(1 - N(d_8))) - Ke^{-rT} (N(d_2) - a(1 - N(d_7))).$$

Jika  $K < B$ ,

$$C = S_0 (N(d_3) - b(1 - N(d_6))) - Ke^{-rT} (N(d_4) - a(1 - N(d_5))).$$

Opsi jual *barrier up and out* merupakan opsi jual yang tidak berlaku atau dinonaktifkan ketika harga aset naik dan menyentuh tingkat *barrier* yang ditentukan. Formula Black-Scholes untuk menentukan harga opsi jual *barrier up and out*:

Jika  $K > B$ ,

$$P = -S_0 (1 - N(d_3) - bN(d_6)) + Ke^{-rT} (1 - N(d_4) - aN(d_5)).$$

Jika  $K < B$ ,

$$P = -S_0 (1 - N(d_1) - bN(d_8)) + Ke^{-rT} (1 - N(d_2) - aN(d_7)).$$

Opsi jual *barrier down and out* merupakan opsi yang tidak berlaku atau dinonaktifkan ketika harga aset turun dan menyentuh *barrier* yang ditentukan. Formula Black-Scholes untuk menentukan harga opsi jual *barrier down and out*:

$$P = -S_0 (N(d_3) - N(d_1) - b(N(d_8) - N(d_6))) + Ke^{-rT} (N(d_4) - N(d_2) - a(N(d_7) - N(d_5))).$$

Pada metode Monte Carlo, pemantauan harga saham apakah sudah menyentuh nilai *barrier* secara diskrit sering kali bertentangan dengan asumsi model Black-Scholes yang beroperasi berdasarkan pendekatan kontinu. Ketidakesesuaian ini dapat mengarah pada kesalahan signifikan dalam penentuan harga opsi *barrier*. Oleh karena itu, perlu adanya koreksi yang diusulkan Broadie, dkk. [19], yang memungkinkan penyesuaian pada posisi *barrier* untuk mengakomodasi realitas pemantauan diskrit dalam metode Monte Carlo. Koreksi ini penting untuk mendekatkan hasil simulasi Monte Carlo, yang biasanya menggunakan pendekatan diskrit, ke nilai teoretis yang dihasilkan oleh model Black-Scholes, sehingga memastikan bahwa estimasi harga opsi lebih akurat dan dapat diandalkan dalam pengambilan keputusan investasi dan manajemen risiko.

### 3. Hasil dan Pembahasan

Dalam artikel ini, diselidiki dan dibandingkan metode penentuan harga untuk empat jenis opsi *barrier knock-out* yaitu opsi beli *barrier up and out*, opsi beli *barrier down and out*, opsi jual *barrier up and out*, dan opsi jual *barrier down and out*. Masing-masing opsi ini memiliki karakteristik unik yang mempengaruhi perilaku dan evaluasi harganya di bawah kondisi pasar yang berbeda. Digunakan tiga metode simulasi Monte Carlo: standar, *antithetic variate*, dan *control variate*, dan hasilnya dibandingkan dengan pendekatan analitik yang disempurnakan oleh Wilmot [3], yang telah mengadaptasi formula Black-Scholes untuk lebih akurat mencerminkan dinamika pasar saat ini.

#### 3.1. Penentuan Harga Opsi Beli Barrier Up and Out

Dalam analisis ini, dieksplorasi opsi beli *barrier up and out*, salah satu jenis opsi *barrier knock-out* yang menawarkan wawasan unik tentang dinamika pasar keuangan. Opsi ini memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli aset pada harga yang telah disepakati, namun opsi akan menjadi tidak valid atau "knocked out" jika harga aset mencapai atau melewati batas harga *barrier* yang ditentukan sebelum opsi tersebut jatuh tempo. Karakteristik ini membuat opsi *barrier up and out* menarik untuk diteliti, terutama dalam konteks volatilitas pasar yang tinggi.

**Tabel 1.** Perbandingan Harga Opsi Beli *Barrier Up and Out*

Ukuran Sampel	MC Standar	MC Antithetic Variate	MC Control Variate	Analitik
100	939,142	947,263	1063,292	1054,057
1000	1081,800	1090,553	1052,156	1054,057
10000	1027,510	1046,733	1050,863	1054,057
100000	1052,650	1058,656	1052,706	1054,057
1000000	1057,872	1053,286	1054,364	1054,057

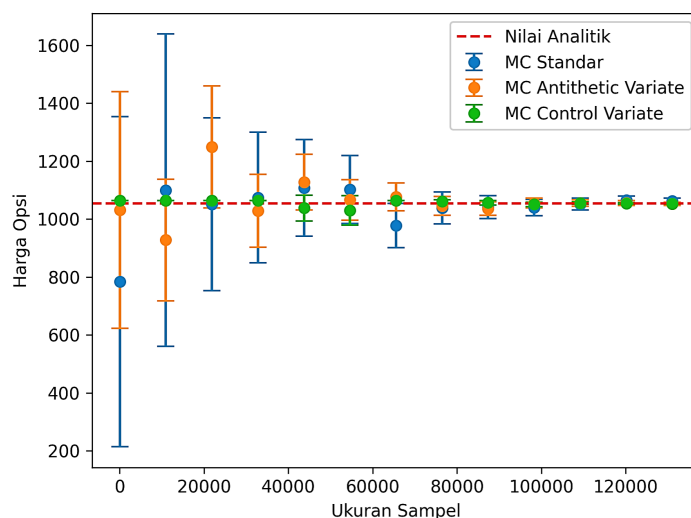
Untuk memahami dan menilai kinerja dari opsi beli *barrier up and out*, dilakukan simulasi harga menggunakan metode Monte Carlo standar, Monte Carlo *antithetic variate*, dan Monte Carlo *control variate*. Simulasi ini dilaksanakan dengan parameter spesifik: harga aset saat ini ( $S$ ) sebesar 7450, harga pelaksanaan ( $K$ ) 8000, harga *barrier* ( $B$ ) 25000, waktu kedaluwarsa ( $T$ ) satu tahun, tingkat bunga bebas risiko ( $r$ ) 0,08 atau 8%, dan volatilitas ( $\sigma$ ) 0,35 atau 35%. Parameter ini dipilih untuk mencerminkan skenario pasar dengan fluktuasi signifikan, memberikan kesempatan untuk menguji bagaimana berbagai metode simulasi Monte Carlo menangani kondisi ekstrem dan volatilitas tinggi dalam penilaian opsi.

Dari data yang disajikan dalam Tabel 1, kita dapat menganalisis bagaimana metode Monte Carlo dalam berbagai variannya digunakan untuk mengevaluasi harga opsi beli *barrier up and out*, dibandingkan dengan nilai analitik. Dalam simulasi ini, metode Monte Carlo standar memperlihatkan variasi yang signifikan pada ukuran sampel yang lebih kecil, namun ketidakstabilan hasil berkurang seiring peningkatan ukuran sampel, menunjukkan konvergensi ke nilai analitik pada sampel sebanyak 1000000. Hal ini menegaskan bahwa metode Monte Carlo Standar membutuhkan banyak sampel untuk menghasilkan estimasi yang stabil dan akurat. Sementara itu, metode Monte Carlo *antithetic variate* menunjukkan peningkatan dalam stabilitas hasil yang lebih konsisten mendekati nilai analitik bahkan pada sampel yang lebih kecil, menunjukkan keefektifannya dalam mengurangi varians estimator, terutama dalam kondisi pasar yang volatil. Terakhir, Monte Carlo *control variate* secara konsisten menghasilkan estimasi yang paling mendekati nilai analitik pada semua ukuran sampel, membuktikan efektivitasnya dalam mengoreksi bias dan memberikan hasil yang lebih stabil dan akurat, bahkan pada sampel yang lebih kecil. Keseluruhan hasil ini menunjukkan pentingnya pemilihan metode simulasi yang tepat dalam evaluasi opsi keuangan, terutama dalam menghadapi kondisi pasar yang tidak stabil.

Berdasarkan Gambar 1 semakin menegaskan bahwa terdapat efektivitas tiga metode simulasi Monte Carlo Standar, *antithetic variate*, dan *control variate* dalam menilai harga opsi *barrier up and out* di pasar yang volatil. Grafik menunjukkan bahwa metode Monte Carlo standar memerlukan sampel besar untuk stabilitas, sementara *antithetic variate* mengurangi varians estimator dengan efisien, terutama pada sampel yang lebih besar. *Control variate* secara konsisten memberikan hasil yang paling dekat dengan nilai analitik, menunjukkan efektivitasnya dalam mengurangi kesalahan estimasi.

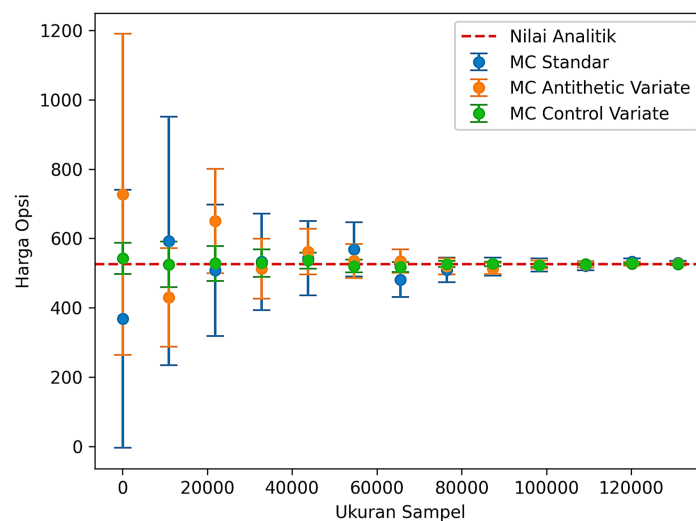
### 3.2. Penentuan Harga Opsi Beli *Barrier Down and Out*

Dalam analisis kedua ini, diteliti opsi beli *barrier down and out*, yang merupakan tipe opsi *barrier knock-out* dimana opsi menjadi tidak valid atau "knocked out" apabila harga aset yang mendasarinya turun di bawah harga *barrier* yang ditentukan sebelum



**Gambar 1.** Perbandingan Metode Monte Carlo Pada Opsi Beli *Barrier Up and Out*

opsi jatuh tempo. Simulasi ini dilakukan dengan parameter berikut: harga aset saat ini sebesar 5500, harga pelaksanaan 6500, harga *barrier* 4500, waktu jatuh tempo satu tahun, tingkat bunga bebas risiko 8%, dan volatilitas 0,35. Parameter ini mencerminkan skenario di mana aset berpotensi turun di bawah nilai *barrier*, memicu karakteristik *knock-out* dari opsi. Untuk menilai bagaimana metode Monte Carlo standar, *antithetic variate*, dan *control variate* dapat efektif dalam mengestimasi harga opsi dalam kondisi volatil.



**Gambar 2.** Perbandingan Metode Monte Carlo Pada Opsi Beli *Barrier Down and Out*

**Tabel 2.** Perbandingan Harga Opsi Beli *Barrier Down and Out*

Ukuran Sampel	MC Standar	MC Antithetic Variate	MC Control Variate	Analitik
100	453,807	451,688	527,945	525,667
1000	535,395	540,178	540,943	525,667
10000	507,036	520,155	524,764	525,667
100000	524,916	528,151	525,361	525,667
1000000	529,066	525,097	525,751	525,667

**Tabel 3.** Perbandingan Harga Opsi Jual *Barrier Up and Out*

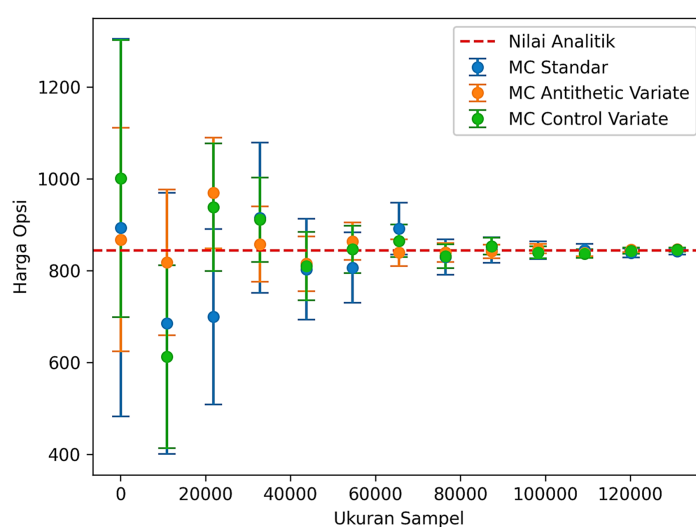
Ukuran Sampel	MC Standar	MC Antithetic Variate	MC Control Variate	Analitik
100	919,181	719,869	718,167	843,970
1000	868,694	833,438	803,721	843,970
10000	861,573	843,760	841,775	843,970
100000	842,832	842,843	841,906	843,970
1000000	844,855	845,222	842,680	843,970

Dari hasil Tabel 2 dan Gambar 2 yang diperoleh, kita dapat melihat kinerja metode simulasi Monte Carlo standar, *antithetic variate*, dan *control variate* dalam menilai harga opsi beli *barrier down and out*. Tabel 2 menunjukkan bahwa, pada sampel yang lebih kecil, hasil dari metode standar dan *antithetic variate* masih berfluktuasi jauh dari nilai analitik. Sebaliknya, metode *control variate* secara konsisten memberikan estimasi yang lebih dekat dengan nilai analitik bahkan pada ukuran sampel yang kecil, dengan stabilisasi yang lebih baik saat ukuran sampel meningkat. Hal ini terlihat dari Gambar 2, dimana plot dari *control variate* mengikuti garis nilai analitik lebih dekat dibandingkan dengan dua metode lainnya. Keseluruhan, Gambar 2 dan Tabel 2 menunjukkan bahwa meskipun ketiga metode tersebut konvergen ke nilai analitik dengan peningkatan ukuran sampel, *control variate* menunjukkan performa superior dalam stabilitas dan akurasi, membuatnya sangat efektif untuk penggunaan di pasar volatil di mana estimasi yang tepat sangat penting.

### 3.3. Penentuan Harga Opsi Jual *Barrier Up and Out*

Dalam analisis kasus ketiga ini, diteliti opsi jual *barrier up and out* dengan menggunakan parameter tertentu. Opsi ini menjadi tidak valid atau "knocked out" jika harga aset naik di atas batas *barrier* tertentu sebelum jatuh tempo. Parameter yang digunakan adalah harga aset saat ini  $S = 4400$ , harga pelaksanaan  $K = 5600$ , harga *barrier*  $B = 5300$ , waktu jatuh tempo  $T = 1$  tahun, tingkat bunga bebas risiko  $r = 0,08$  dan volatilitas tinggi  $\sigma = 0,5$ . Simulasi ini bertujuan untuk mengevaluasi bagaimana fluktuasi harga yang signifikan mempengaruhi penilaian opsi dalam kondisi pasar yang sangat volatil dan tidak terduga.

Dari analisis Tabel 3 dan Gambar 3 yang disajikan, kita dapat melihat bagaimana metode Monte Carlo standar, *antithetic variate*, dan *control variate* berperforma dalam menilai harga opsi jual *barrier up and out*. Metode *control variate* dan *antithetic variate* menunjukkan hasil yang lebih konsisten dan mendekati nilai analitik dibandingkan dengan Monte Carlo standar, khususnya pada sampel yang lebih besar. Menariknya, dari Gambar 3 terlihat bahwa meskipun *control variate* secara umum memberikan hasil yang akurat, *antithetic variate* pada beberapa kasus memiliki interval kepercayaan yang lebih kecil dan sering kali menunjukkan hasil yang lebih dekat atau serupa dengan nilai analitik. Hal ini menunjukkan bahwa *antithetic variate* mungkin lebih efektif dalam

**Gambar 3.** Perbandingan Metode Monte Carlo Pada Opsi Jual *Barrier Up and Out*

beberapa situasi, terutama dalam mengurangi varians estimator pada kondisi pasar yang sangat volatil. Konsistensi dan keakuratan dari kedua metode tersebut memberikan pilihan yang lebih andal daripada Monte Carlo standar dalam estimasi harga untuk opsi keuangan yang kompleks.

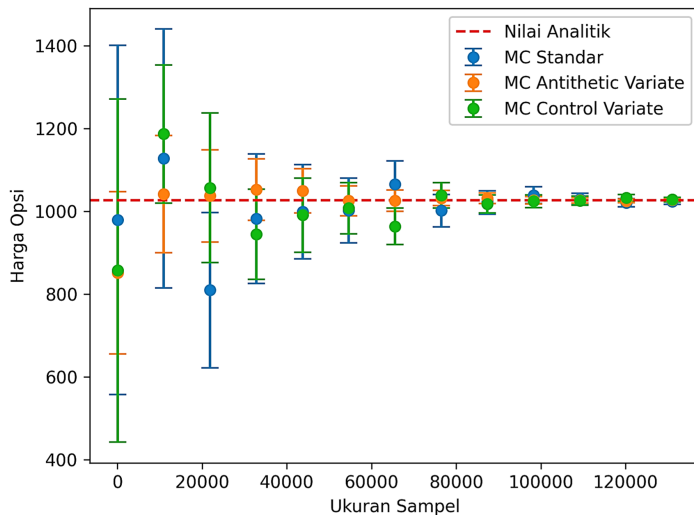
### 3.4. Penentuan Harga Opsi Jual *Barrier Down and Out*

Dalam kasus keempat simulasi ini, dianalisis opsi jual *barrier down and out*, sebuah jenis opsi yang menjadi tidak valid atau "knocked out" jika harga aset yang mendasarinya jatuh di bawah batas harga *barrier* yang ditentukan sebelum opsi tersebut jatuh tempo. Parameter yang digunakan dalam simulasi ini mencakup harga aset saat ini  $S = 9000$ , harga pelaksanaan  $K = 10000$ , harga *barrier*  $B = 5000$ , waktu jatuh tempo  $T = 1$  tahun, tingkat bunga bebas risiko  $r = 0,08$ , dan volatilitas  $\sigma = 0,35$ . Simulasi ini bertujuan untuk menguji bagaimana metode yang berbeda menanggapi kondisi ekstrem ini, memberikan wawasan berharga tentang perilaku dan risiko yang terkait dengan jenis opsi *barrier* ini.

Dari Tabel 4 dan Gambar 4, dapat dilihat hasil simulasi harga opsi jual *barrier down and out* dengan menggunakan tiga meto-

Tabel 4. Perbandingan Harga Opsi Jual *Barrier Down and Out*

Ukuran Sampel	MC Standar	MC Antithetic Variate	MC Control Variate	Analistik
100	959,370	1010,396	1140,352	1026,899
1000	985,681	1033,368	990,370	1026,899
10000	1010,036	1031,168	1016,303	1026,899
100000	1027,653	1024,630	1027,318	1026,899
1000000	1027,658	1025,564	1026,859	1026,899

Gambar 4. Perbandingan Metode Monte Carlo Pada Opsi Jual *Barrier Down and Out*

de Monte Carlo dibandingkan dengan nilai analitik. Hasil yang disajikan menunjukkan bahwa metode Monte Carlo standar menghasilkan estimasi yang cenderung lebih berfluktuasi terhadap nilai analitik dibandingkan dengan metode Monte Carlo lainnya. Sementara itu, Monte Carlo *antithetic variate* menampilkan hasil yang lebih dekat ke nilai analitik, menunjukkan peningkatan dalam akurasi dan konsistensi. Metode ini secara konsisten menghasilkan estimasi yang paling mendekati nilai analitik di semua ukuran sampel, termasuk ukuran sampel kecil, menunjukkan bahwa metode ini lebih unggul dalam mengurangi varians dan memberikan estimasi yang lebih stabil dan akurat. Sebaliknya, metode Monte Carlo *control variate*, meskipun lebih baik dibandingkan metode standar, tidak sebaik *antithetic variate* dalam hal konsistensi dan akurasi. Gambar 4 yang disertakan mendukung pengamatan ini, dengan Monte Carlo *antithetic variate* menampilkan interval kepercayaan yang lebih ketat dan lebih sering berada pada atau dekat dengan garis nilai analitik dibandingkan metode lainnya.

#### 4. Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa metode Monte Carlo *antithetic variate* dan *control variate* memberikan akurasi yang lebih tinggi dalam penentuan harga opsi *barrier knock-out* dibandingkan metode Monte Carlo standar. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode *control variate* lebih efektif untuk beli *barrier up and out* serta *down and out*, sedangkan metode *antithetic variate* lebih unggul dalam penentuan harga opsi jual *barrier up and out* serta *down and out*. Temuan ini didukung oleh data yang menunjukkan konvergensi lebih cepat dan varians estimasi yang lebih

rendah dibandingkan metode standar. Implikasi dari penelitian ini adalah pentingnya pemilihan metode yang tepat dalam penentuan harga opsi untuk meningkatkan akurasi dan efisiensi, yang dapat membantu para praktisi keuangan dalam strategi investasi dan manajemen risiko. Penelitian ini juga berkontribusi pada pengembangan teori dan metode penentuan harga opsi dengan memperkenalkan penggunaan teknik simulasi yang lebih efisien dan akurat.

**Kontribusi Penulis.** Chatarina Enny Murwaningtyas: konseptualisasi, analisis formal, metodologi, penulisan draf, penulisan pengulas dan pengedit. William Saputra Haryono: kurasi data, penyelidikan, perangkat lunak, validasi, visualisasi. Maria Andriani Uge: kurasi data, penyelidikan, validasi, visualisasi, penulisan draf. Tedi Kristofel: kurasi data, penyelidikan, validasi, visualisasi, penulisan draf. Semua penulis telah membaca dan menyetujui versi manuskrip yang diterbitkan.

**Ucapan Terima Kasih.** Para penulis menyampaikan terima kasih kepada editor dan reviewer atas pembacaan yang cermat, kritik yang mendalam, dan rekomendasi yang praktis untuk meningkatkan kualitas tulisan ini.

**Pembiayaan.** Penelitian ini tidak menerima pembiayaan eksternal

**Konflik Kepentingan.** Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

#### Referensi

- [1] D. H. Vo, S. Van Huynh, A. T. Vo, and D. T. T. Ha, "The Importance of the Financial Derivatives Markets to Economic Development in the World's Four Major Economies," *Journal of Risk and Financial Management*, vol. 12, no. 1, Mar. 2019, doi: <https://doi.org/10.3390/jrfm12010035>.
- [2] P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*. 1995. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511812545>.
- [3] P. Wilmott, *Introduces Quantitative Finance*. in The Wiley Finance Series. Wiley, 2013.
- [4] H. Brown, D. Hobson, and L. C. G. Rogers, "Robust Hedging Of Barrier Options," 2001. doi: <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00116>.
- [5] J. C. Hull and S. Basu, *Options, futures, and other derivatives*. India: Pearson Education, 2012.
- [6] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. in Stochastic Modelling and Applied Probability. New York: Springer, 2013.
- [7] D. J. Higham, *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*, no. v. 13. in An introduction to financial option valuation: mathematics, stochastics and computation. Cambridge University Press, 2004.
- [8] C. F. Ivascu, "Option pricing using Machine Learning," *Expert Syst Appl*, vol. 163, Jan. 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113799>.
- [9] W. Li, "Application of Machine Learning in Option Pricing: A Review," in *2022 7th International Conference on Social Sciences and Economic Development (ICSSSED 2022)*, Atlantis Press, 2022, pp. 209–214. doi: <https://doi.org/10.2991/aebmr.k.220405.035>.
- [10] L. Lin, M. Wang, H. Cheng, R. Liu, and F. Chen, "OptionNet: A multiscale residual deep learning model with confidence interval to predict option price," *Journal of Finance and Data Science*, vol. 9, Nov. 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jfds.2023.100105>.
- [11] A. Brini and J. Lenz, "Pricing cryptocurrency options with machine learning



- regression for handling market volatility,” *Econ Model*, vol. 136, Jul. 2024, doi: <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2024.106752>.
- [12] Y. Li and K. Yan, “Prediction of Barrier Option Price Based on Antithetic Monte Carlo and Machine Learning Methods,” *Cloud Computing and Data Science*, pp. 77–86, Jan. 2023, doi: <https://doi.org/10.37256/ccds.4120232110>.
- [13] N. P. Kurniawati, Y. Yundari, and S. W. Rizki, “Analisis Harga Opsi Beli Tipe Eropa dengan Metode Antithetic Variate dari Monte Carlo,” *Jurnal EurekaMatika*, vol. 10, no. 1, pp. 53–60, 2022, doi: <https://doi.org/10.17509/jem.v10i1.47673>.
- [14] F. Zubedi, N. Achmad, S. L. Mahmud, and R. Mowuu, “Penentuan Harga Beli Opsi Asia Menggunakan Monte Carlo-Antithetic Variate dan Monte Carlo-Control,” *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, vol. 10, no. 1, pp. 7–14, 2022, doi: <https://doi.org/10.37905/euler.v10i1.12055>.
- [15] N. Wati, K. Dharmawan, and K. Sari, “Perbandingan kekonvergenan metode Conditional Monte Carlo dan antithetic variate dalam menentukan harga opsi call tipe Barrier,” *E-Jurnal Matematika*, vol. 7, no. 3, pp. 271–277, 2018, doi: <https://doi.org/10.24843/MTK.2018.v07.i03.p214>.
- [16] L. Putri, K. Dharmawan, and I. W. Sumarjaya, “Penentuan Harga Jual Opsi Barrier Tipe Eropa Dengan Metode Antithetic Variate Pada Simulasi Monte Carlo,” *E-Jurnal Matematika*, vol. 7, no. 2, pp. 71–78, 2018, doi: <https://doi.org/10.24843/MTK.2018.v07.i02.p187>.
- [17] R. B. Silalahi, D. C. Lesmana, and R. Budiarti, “Determining The Value of Double Barrier Option Using Standard Monte Carlo, Antithetic Variate, and Control Variate Methods,” *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 2, pp. 1017–1026, 2023, doi: <https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss2pp1017-1026>.
- [18] F. Black and M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” *J Polit Econ*, pp. 637–654, 1973.
- [19] M. Broadie, P. Glasserman, and S. Kou, “A Continuity Correction for Discrete Barrier Options,” *Math Financ*, vol. 7, no. 4, pp. 325–349, 1997, doi: <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00035>.