ISSN: 1410-8518

# JURNAL MATEMATIKA

Vol. 12 No. 3, Desember 2009

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Diponegoro Semarang



| Jurnal Matematika | Vol. 12 | No. 3 | Halaman 122-176 | Semarang Desember 2009 | ISSN 1410-8518 |
|---|---|---|---|---|---|

ISSN: 1410-8518

# JURNAL MATEMATIKA

Vol. 12 No. 3, Desember 2009

## DAFTAR ISI

# ANALISIS LINTASAN KRITIS JARINGAN PROYEK DENGAN PENDEKATAN ALJABAR MAX-PLUS

M. Andy Rudhito[1], Sri Wahyuni[2], Ari Suparwanto[3] dan F. Susilo[4]
[1]Mahasiswa S3 Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta,
Staff Pengajar JPMIPA FKIP Universitas Sanata Dharma
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
E-mail: rudhito@staff.usd.ac.id
[2,3)]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah
Sekip Utara Yogyakarta
E-mail: swahyuni@ugm.ac.id, ari_suparwanto@yahoo.com
[4]Jurusan Matematika FST Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
E-mail: fsusilo@staff.usd.ac.id

**Abstract**. This paper proposes a method to critical path analysis in the project network using max-plus algebra approach. The project network would be represented as a matrix over max-plus algebra. The dynamic of the project would be modeled and analyzed using max-plus algebra approach. The critical path analysis consists of determining earliest start time, latest completion time and float time. The finding show that the dynamic of the project is could be modeled in a systems of max-plus linear equations. The earliest start times of every node in the project are the solution of the system. The latest completion times of every node in the project are the solution of the modified system. The float time of every activity in the project could be detemined by modify and do some matrices operation over earliest start time vector and latest completion time vector. An example for modeling and computing a project using MATLAB example show that the result was appropriated with the critical path method (CPM).

**Keywords**: max-plus algebra, project network, critical path.

## 1. PENDAHULUAN

Masalah penjadwalan jaringan proyek merupakan salah satu kajian dalam bidang matematika, khususnya riset operasi. Metode yang telah lama dikenal dan banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah ini adalah metode *CPM (Critical Path Method)* dan metode *PERT (Project Evaluation and Review Technique)* seperti dapat dilihat dalam Taha (1996).

Aljabar max-plus (himpunan **R** $\cup\{-\infty\}$, dengan **R** adalah himpunan semua bilangan real, yang dilengkapi dengan operasi maximum dan penjumlahan) telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis sistem produksi sederhana, dengan fokus analisa pada masalah input-output sistem, hal ini dapat dilihat pada Schutter (1996) dan Rudhito (2003). Pemodelan dan analisa suatu jaringan dengan pendekatan ini dapat memberikan hasil analitis dan diharapkan lebih mudah pada komputasinya, seperti dalam Bacelli, *et al.* (2001).

Dalam Bacelli, *et al.* (2001), telah disinggung mengenai penerapan aljabar max-plus pada masalah penjadwalan, tetapi hanya sebagai contoh yang bentuknya masih khusus. Dalam Rudhito (2004) juga telah disinggung upaya penentuan waktu paling cepat suatu titik pada jaringan harus bekerja melalui penyelesaian suatu persamaan linear max-plus, tetapi yang dibahas di sini juga masih cenderung berupa contoh dan belum diformulasikan secara umum. Untuk itu akan dibahas pemodelan dan analisis lintasan kritis pada masalah penjadwalan proyek, yang meliputi waktu awal paling cepat, waktu penyelesaian paling lambat setiap titik pada jaringan dan waktu ambang setiap aktifitas pada jaringan. Untuk memudahkan dalam perhitungan numeriknya, pembahasan akan memanfaatkan program komputer yang disusun dengan menggunakan *MATLAB*.

Dalam pembahasan di sini diasumsikan pembaca telah mengenal pengertian dan konsep dasar pada masalah penjadwalan proyek seperti yang dapat dibaca pada Taha (1996). Sebelum membahas pembahasan pokok makalah ini, sebelumnya akan ditinjau beberapa konsep-konsep dasar dan hasil-hasil dalam aljabar max-plus dan sistem persamaan linear iteratif max-plus.

## 2. ALJABAR MAX-PLUS

Dalam bagian ini dibahas konsep-konsep dasar aljabar max-plus dan eksistensi serta ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al.* (2001).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon$,

$a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$.

Dapat ditunjukkan bahwa ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semifield, yaitu bahwa ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian ($\mathbf{R}_\varepsilon$, $\oplus$, $\otimes$) disebut dengan *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$. Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ sebagai berikut $x \preceq_m y$ jika $x \oplus y = y$, merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Pangkat $k$ dari elemen $x \in \mathbf{R}$ dilambangkan dengan $x^{\otimes k}$ didefinisikan dengan $x^{\otimes 0} := 0$ , $x^{\otimes k} := x \otimes x^{\otimes k-1}$. Didefinisikan pula $\varepsilon^{\otimes 0} := 0$ , untuk $k = 1, 2, \ldots$ $\varepsilon^{\otimes k} := \varepsilon$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$, di mana $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Untuk $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan

$A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$.

Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p \times n}$ didefinisikan

$A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$.

Didefinisikan pula matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, dengan $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \ , \text{ jika } i = j \\ \varepsilon \ , \text{ jika } i \neq j \end{cases}$

dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ , $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap $i$ dan $j$.

Pangkat $k$ dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$ . Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan $A \preceq_m B$ jika $A \oplus B = B$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$.

Suatu *graf berarah* $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V}$ adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut *titik* dan $\mathcal{A}$ adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik di $\mathcal{V}$. Anggota $\mathcal{A}$ disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah $\mathcal{G}$ adalah suatu barisan berhingga busur $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{l-1}, i_l)$ dengan $(i_k, i_{k+1}) \in \mathcal{A}$ untuk suatu $l \in \mathbf{N}$ , di mana $\mathbf{N}$ = himpunan semua bilangan asli, dan $k = 1, 2, \ldots, l-1$. Lintasan di atas dapat direpresentasikan dengan $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \ldots \rightarrow i_l$. Titik $i_1$ disebut *titik awal lintasan* dan titik $i_l$ disebut *titik akhir lintasan*. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. Suatu graf berarah $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$

dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, , \ldots , n\}$ dikatakan *terhubung kuat* jika untuk setiap $i, j \in \mathcal{V}$, $i \neq j$ , terdapat suatu lintasan dari $i$ ke $j$. Suatu graf yang memuat sirkuit disebut *graf siklik*, sedangkan suatu graf yang tidak memuat sirkuit disebut *graf taksiklik*. Diberikan graf berarah $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots , p\}$. Graf berarah $\mathcal{G}$ dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in \mathcal{A}$ dikawankan dengan suatu bilangan real $A_{ij}$. Bilangan real $A_{ij}$ disebut *bobot* busur $(j, i)$, dilambangkan dengan $w(j, i)$. *Graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{max}^{n\times n}$ adalah graf berarah berbobot $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots , n\}$, $\mathcal{A} = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon, \forall\, i, j\}$. Sebaliknya untuk setiap graf berarah berbobot $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dengan $A_{ij} = \begin{cases} w(j,i), & \text{jika } (j,i)\in \mathcal{A} \\ \varepsilon, & \text{jika } (j,i)\notin \mathcal{A}. \end{cases}$, yang disebut *matriks bobot* graf $\mathcal{G}$. Dalam kaitannya dengan teori graf, untuk $A\in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $k \in$ N, unsur matriks $(A^{\otimes k})_{st}$ merupakan bobot maksimum semua lintasan dalam $\mathcal{G}(A)$ dengan panjang $k$, dengan $t$ sebagai titik awal dan $s$ sebagai titik akhirnya.

Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dikatakan *semi-definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot takpositif dan dikatakan *definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot negatif. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa jika $A$ semi-definit, maka $\forall p \geq n$, $A^{\otimes p} \preceq_m E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1}$. Selanjutnya untuk matriks semi-definit $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, dapat didefinisikan $A^* := E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n+1} \oplus \ldots$.

Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots , x_n]^T \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \ldots , n\}$. Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$ dan $\forall \alpha \in \mathbf{R}_{\max}$ berturut-turut didefinisikan operasi penjumlahan dan operasi perkalian skalar sebagai berikut : $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots , x_n \oplus y_n]^T$ dan $\alpha \bullet \mathbf{x} = \alpha \otimes \mathbf{x} = [\alpha \otimes x_1, \alpha \otimes x_2, \ldots , \alpha \otimes x_n]^T$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n\times 1}$. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ merupakan semimodul atas semified $\mathbf{R}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebut *vektor* atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Suatu hasil mengenai eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iterarif max-plus $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$, adalah sebagai berikut (Bacelli, *et al.*, 2001). Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$. Jika $A$ semi-definit, maka vektor $\mathbf{x}^* = A^* \otimes \mathbf{b}$ merupakan suatu penyelesaian sistem $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$. Lebih lanjut jika $A$ definit, maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal.

## 3. ANALISIS LINTASAN KRITIS JARINGAN PROYEK

Bagian ini merupakan pembahasan utama makalah ini. Pembahasan diawali dengan meninjau beberapa pengertian dasar, dilanjutkan dengan memberikan pemodelan dan analisa dengan pendekatan aljabar max-plus dan memberikan contoh perhitungannya.

**Definisi 1**

Suatu *jaringan proyek* $\mathcal{S}$ adalah suatu graf berarah berbobot terhubung kuat taksiklik $\mathcal{S} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, , \ldots , n\}$ yang memenuhi: jika $(i, j) \in \mathcal{A}$, maka $i < j$.

Dalam jaringan proyek ini, busur menyatakan suatu *aktifitas*, sedangkan bobot busur menyatakan *waktu aktifitas*, sehingga bobot dalam jaringan selalu positip.

Selanjutnya dilakukan pemodelan dan analisis lintasan kritis. Pembahasan diawali dengan menentukan **waktu awal paling cepat** (*earliest start time*) untuk setiap aktifitas yang berasal dari titik $i$. Pembahasan dilakukan dengan mengadopsi teknik perhitungan maju (*forward*) seperti pada PERT-CPM, dengan menggunakan pendekatan aljabar-max-plus.

Misalkan $ES_i = x_i^e$ menyatakan waktu awal paling cepat yang berasal dari titik $i$,

$$A_{ij} = \begin{cases} \text{waktu aktifitas dari titik } j \text{ ke titik } i, \text{ jika } (j,i) \in \mathcal{A} \\ \varepsilon(= -\infty), \qquad \text{jika } (j, i) \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Dalam pembahasan ini diasumsikan bahwa aktifitas jaringan dimulai pada titik 1 pada saat waktu sama dengan nol, yaitu $x_1^e = 0$, sehingga dapat dituliskan

$$x_i^e = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = 1 \\ \max\limits_{1 \le j \le n}(A_{ij} + x_j^e), & \text{jika } i > 1. \end{cases}$$

Dengan menggunakan notasi aljabar max-plus persamaan di atas dapat dituliskan menjadi

$$x_i^e = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = 1 \\ \bigoplus\limits_{1 \le j \le n} (A_{ij} \otimes x_j^e), & \text{jika } i > 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Misalkan $A$ adalah matriks yang bersesuaian dengan graf berarah berbobot jaringan tersebut, $\boldsymbol{x}^e = [x_1^e, x_2^e, \ldots, x_n^e]^{\mathrm{T}}$ dan $\boldsymbol{b}^e = [0, \varepsilon, \ldots, \varepsilon]^{\mathrm{T}}$, persamaan (1) dapat dituliskan ke dalam suatu sistem persamaan linear max-plus berikut

$$\boldsymbol{x}^e = A \otimes \boldsymbol{x}^e \oplus \boldsymbol{b}^e \qquad (2)$$

Karena jaringan proyek merupakan graf berarah taksiklik, maka tidak terdapat sirkuit, sehingga semua sirkuit dalam jaringan mempunyai bobot takpositif. Dengan demikian

$$\boldsymbol{x}^e = A^* \otimes \boldsymbol{b}^e \qquad (3)$$

merupakan penyelesaian sistem (2) di atas. Karena jumlah titik dalam jaringan proyek ini adal $n$, maka panjang lintasan terpanjangnya tidak akan melebihi $n - 1$. Dengan demikian dalam hal ini persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$\boldsymbol{x}^e = A^* \otimes \boldsymbol{b}^e = (E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}}) \otimes \boldsymbol{b}^e$$

yang merupakan vektor waktu paling awal setiap titik $i$ dapat mulai aktif.

Perhatikan bahwa $(A^*)_{n1}$ merupakan bobot maksimum lintasan dari titik awal hingga titik akhir proyek, sehingga $x_n^e$ merupakan waktu penyelesaian proyek.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan dalam Teorema 1 berikut.

**Teorema 1**

Diberikan suatu jaringan proyek dengan $n$ titik dan $A$ adalah matriks bobot graf berarah berbobot jaringan tersebut. Vektor $ES_i$ diberikan oleh

$$\boldsymbol{x}^e = (E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}}) \otimes \boldsymbol{b}^e$$

di mana $\boldsymbol{b}^e = [0, \varepsilon, \ldots, \varepsilon]^{\mathrm{T}}$.

**Bukti:** (lihat uraian di atas) . ∎

Selanjutnya dibahas penentuan **waktu penyelesaian paling akhir** (*latest completion time*) untuk semua kegiatan yang datang ke titik $i$. Pembahasan dilakukan dengan mengadopsi teknik perhitungan mundur (*backward*) seperti pada PERT-CPM, dengan menggunakan pendekatan aljabar-max-plus.

Misalkan $LC_i = x_i^l$ menyatakan waktu penyelesaian paling akhir untuk semua kegiatan yang datang ke titik $i$,

$$B_{ij} = \begin{cases} \text{waktu aktifitas dari titik } i \text{ ke titik } j, \text{ jika } (j,i) \in \mathcal{A} \\ \varepsilon(= -\infty), \qquad \text{jika } (j, i) \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Diasumsikan bahwa $x_n^l = x_n^e$, kemudian dapat dituliskan

$$x_i^l = \begin{cases} x_n^e, & \text{jika } i = n \\ \min\limits_{1 \le j \le n}(-B_{ij} + x_j^l), & \text{jika } i < 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Dengan menggunakan notasi aljabar max-plus persamaan (4) ekivalen dengan

$$-x_i^l = \begin{cases} -x_n^e, & \text{jika } i = n \\ \max\limits_{1 \le j \le n}(B_{ij} - x_j^l), & \text{jika } i < 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Perhatikan bahwa matriks $B = A^{\mathrm{T}}$, dengan $A$ adalah matriks bobot graf berarah berbobot jaringan tersebut. Misalkan $z = [z_1, z_2, \ldots, z_n]^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{x}^l = [-x_1^l, -x_2^l, \ldots, -x_n^l]^{\mathrm{T}}$ dan $\boldsymbol{b}^l = [\varepsilon, \varepsilon, \ldots, -x_n^e]^{\mathrm{T}}$, persamaan (5) dapat dituliskan menjadi

$$z = A^{\mathrm{T}} \otimes z \oplus b^l . \qquad (6)$$

yang penyelesaiannya adalah

$$z = (A^{\mathrm{T}})^* \otimes b^l .$$

Dengan demikian diperoleh vektor waktu paling lambat adalah $x^l = -z$.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan dalam Teorema 2 berikut.

**Teorema 2**

Diberikan suatu jaringan proyek dengan $n$ titik dan $A$ adalah matriks bobot graf berarah berbobot jaringan tersebut. Vektor $LC_i$ diberikan oleh

$$x^l = -((A^{\mathrm{T}})^* \otimes b^l)$$

di mana $b^l = [\varepsilon, \varepsilon, \dots, -x_n^e]^{\mathrm{T}}$.

**Bukti:** (lihat uraian di atas) . ■

Seperti halnya yang telah dikenal dalam Taha (1996) berikut dibahas mengenai mengenai waktu mengambang total (*total float*) dan waktu mengambang bebas (*free float*). Sebelumnya diberikan saat **awal paling lambat** (*latest start (LS)*) dan penyelesaian paling cepat (*earlist completion (EC)*) untuk setiap aktifitas $(i, j)$ dalam jaringan dengan

$$LS_{ij} = LC_j - A_{ij} \text{ dan } EC_{ij} = ES_i + A_{ij} .$$

**Waktu mengambang total** untuk aktifitas $(i, j) \in \mathcal{A}$ adalah

$$TF_{ij} = x_j^l - x_i^e - A_{ij}.$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks akan diperoleh matriks waktu mengambang total

$$TF = LJ - EI - A$$

dengan $LJ$ adalah matriks dengan semua kolomnya adalah vektor $x^l$ dan $EI$ adalah matriks dengan semua barisnya adalah vektor baris $(x^e)^{\mathrm{T}}$.

**Waktu mengambang bebas** untuk aktifitas $(i, j) \in \mathcal{A}$ adalah

$$FF_{ij} = x_j^e - x_i^e - A_{ij}.$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks akan diperoleh matriks waktu ambang

$$FF = EJ - EI - A$$

dengan $EJ$ adalah matriks dengan semua kolomnya adalah vektor $x^e$ dan $EI$ adalah matriks dengan semua barisnya adalah vektor baris $(x^e)^{\mathrm{T}}$

**Definisi 2**

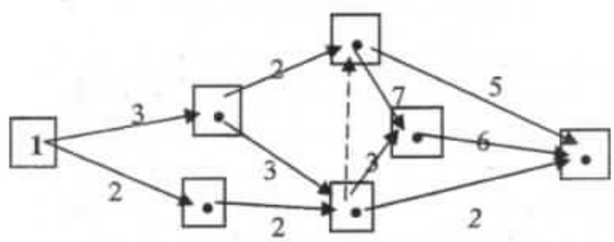
Suatu aktifitas $(i, j) \in \mathcal{A}$ dalam jaringan proyek $S$ disebut *aktifitas kritis* jika $TS_{ij} = 0$. Suatu lintasan dalam jaringan proyek $S$ disebut *lintasan kritis* jika semua aktifitas yang menyusunnya merupakan aktifitas kritis.

Dapat ditunjukkan bahwa suatu lintasan merupakan lintasan kritis jika dan hanya jika mempunyai bobot maksimum.

Berikut diberikan contoh suatu jaringan proyek dan perhitungannya.

**Contoh 1**

Perhatikan jaringan proyek seperti yang diberikan pada Gambar 1 (Taha, 1996, p. 81) :




**Gambar 1. Jaringan proyek**

Matriks bobot graf berarah berbobot pada jaringan proyek di atas adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 5 & 6 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan program yang disusun dengan menggunakan MATLAB dengan input matriks $A$ di atas, menggunakan komputer dengan spesifikasi *Centrino Duo, RAM 512MB,* dengan waktu eksekusi sekitar 1 detik, diperoleh output program sebagai berikut.

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 2 & 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 9 & 10 & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 15 & 16 & 13 & 13 & 6 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$x^{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix} \text{ dan } x^{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Hasil analisis lintasan kritis selengkapnya diberikan dalam tabel berikut.

**Table 1. Analisis lintasan kritis**

| $i$ | $j$ | $A_{ij}$ | $ES_i$ | $EC_{ij}$ | $LS_{ij}$ | $LC_j$ | $TF_{ij}$ | $FF_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 0 |
| 1 | 3 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 2 | 0 | 4 | 4 | 6 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 2 | 6 | 3 | 6 | 0 | 0 |
| 3 | 5 | 2 | 3 | 5 | 4 | 6 | 1 | 1 |
| 4 | 5 | 0 | 3 | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 |
| 4 | 6 | 3 | 6 | 9 | 10 | 13 | 4 | 4 |
| 4 | 7 | 2 | 6 | 8 | 17 | 19 | 11 | 11 |
| 5 | 6 | 7 | 6 | 13 | 6 | 13 | 0 | 0 |
| 5 | 7 | 5 | 6 | 11 | 14 | 19 | 8 | 8 |
| 6 | 7 | 6 | 13 | 19 | 13 | 19 | 0 | 0 |

Dari hasil di atas diperoleh lintasan kritis: (1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7). Hasil yang diperoleh di atas sesuai dengan hasil yang diperoleh dalam Taha (1996).

## 4. DAFTAR PUSTAKA


[1] Bacelli, F., *et al.*, 2001. *Synchronization and Linearity*, John Wiley & Sons, New York.

[2] Rudhito, Andy M, 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pasca-sarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

[3] Rudhito, Andy M., 2004. Penerapan Sistem Persamaan Linear Max-Plus $x = A \otimes x \oplus b$ pada Masalah Penjadwalan. *Math – Info Jurnal Ilmiah Bidang Matematika, Informatika dan Terapannya* 2004; **4**; 14 – 19.

[4] Schutter, B. De., 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

[5] Taha, Hamdi A., 1996. *Riset Operasi, Jilid 2 (terjemahan)*. Binarupa Aksara, Jakarta.