Vol. 20, No.1, Oktober 2009

ISSN 0853 - 0920

WIDYA DHARMA
Jurnal Kependidikan

Diterbitkan oleh Lembaga Penelitian Universitas Sanata Dharma
Jln. Affandi, Mrican, Tromol Pos 29, Yogyakarta 55002
E-mail : Widya_dharma@staff.usd.ac.id

WIDYA DHARMA
JURNAL KEPENDIDIKAN

DAFTAR ISI

Respon Kognitif Mahasiswa dalam Menerjemahkan Pernyataan Matematis Berkuantor Eksistensial

M. Andy Rudhito & Susento
Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma
Tromol Pos 29, Mrican, Yogyakarta
E-mail: arudhito@yahoo.co.id & susento@staff.usd.ac.id

ABSTRACT

This research aims to describe the cognitive levels of students' responses in translating regular quantified existential mathematical statement into formal sentences.The type of research was descriptive qualitative. The subject consisted of 46 first-semester Mathematics Education students, Class A of 2006, FTTE, Sanata Dharma University, Yogyakarta. The data was qualitative; in the form of students' answers to the given problems. The data was analyzed qualitatively using data reduction, data classification, and data synthesis. Research results indicated 7 levels of students' cognitive response: level-0: no idea; level-1= an unquantified statement or meaningless quantor statement ; level-2= a meaningful quantified statement but the quantor does not agree with the notion of formulae because the logical connectives are not relevant; level-3= a meaningful quantor statement but does not agree with the problem notion due to inappropriate variable expression or inappropriate expression of premises; level-4= a meaningful quantified statement which agrees with the problem notion but the universe is not written nor appropriate; level-5= a meaningful quantor statement which agrees with the problem notion, but does not use logical connectives explicitly or contains excessive information; level-6= a meaningful quantor statement which precisely agrees with the problem notion.

Keywords : tingkat respon kognitif, pernyataan berkuantor, logika matematis.

PENDAHULUAN

Pembuktian dalam matematika merupakan suatu kemampuan yang harus dikuasai oleh mahasiswa dalam bidang matematika. Akan tetapi sampai semester akhirpun masih banyak dijumpai mahasiswa yang mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian pernyataan matematis. Menurut Epp (2003), salah satu alasan mahasiswa mempunyai kesulitan dalam argumentasi matematis formal adalah bahwa bentuk tertentu suatu pernyataan bersifat terbuka untuk diinterpretasikan secara berbeda, baik secara informal maupun secara formal.

Untuk membantu mengatasi kesulitan tersebut, kita perlu melihat tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa. Suatu hasil penelitian mengenai tingkat-tingkat berpikir yang sudah dikenal adalah Taksonomi SOLO. Taksonomi SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*) adalah suatu taksonomi yang dapat digunakan untuk mengklasifikasikan respon kognitif seorang mahasiswa terhadap tugas-tugas. Taksonomi ini meliputi lima tingkat yaitu prastruktural, unistruktural, multistruktural, relasional, dan abstrak lanjut (Biggs & Collis, 1982).

Dalam pembuktian pernyataan matematis, agar metode pembuktian dapat dipertanggungjawabkan, pernyataan matematis harus dalam bentuk formal. Kemampuan menerjemahkan pernyataan matematis dalam bentuk kalimat biasa ke bentuk formal merupakan suatu kemampuan yang harus dikuasai dalam masalah pembuktian. Untuk membantu tercapainya kemampuan ini, sebagai langkah awal perlu dilakukan penelitian untuk mengetahui tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal.

Banyak penelitian psikologi kognitif yang telah mengkaji penalaran silogistik yang melibatkan premis-premis berkuantor (*quantified premises*). Penelitian Moneta, et al. (2006) dengan subjek 8 orang dewasa (umur rata-rata 21,6 tahun; lama pendidikan rata-rata 15,4 tahun) menghasilkan temuan antara lain bahwa: kuantor eksistensial "beberapa" lebih sulit, yaitu membutuhkan lebih banyak memori kerja (*working memory*) daripada kuantor "semua". Untuk itu penelitian ini akan memfokuskan pada tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor eksistensial dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal. Tujuan penelitian ini adalah mengidentifikasi dan mendeskripsikan tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor eksistensial yang diikuti bentuk implikasi dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal.

Berpikir adalah proses pembentukan representasi mental baru melalui transformasi informasi yang melibatkan kerja-kerja mental seperti mempertimbangkan, mengabstraksi, menalar, membayangkan, dan memecahkan masalah (Solso, 2001). Berpikir melibatkan transformasi secara aktif pengetahuan yang telah dimiliki untuk menciptakan pengetahuan baru yang dapat digunakan untuk mencapai suatu sasaran (Glass & Holyoak, 1986). Menurut Mayer (dalam Solso, 2001), ada 3 gagasan dasar mengenai berpikir, yaitu:

a. Berpikir bersifat kognitif, yakni terjadi di dalam otak tetapi nampak dalam perilaku.

b. Berpikir merupakan suatu proses yang melibatkan pengolahan pengetahuan dalam sistem kognitif.

c. Berpikir diarahkan oleh dan menghasilkan perilaku memecahkan masalah.

Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan matematis, yang sederhana sekalipun, memerlukan aktivitas kognitif yang kompleks. Dalam hal ini seseorang tidak hanya membutuhkan pengetahuan tentang prinsip-prinsip logika, tetapi juga bagaimana prinsip-prinsip itu harus digunakan agar argumentasi menjadi valid (Epp, 2003.). Menurut Epp (2003), salah satu penyebab mahasiswa mempunyai kesulitan dengan argumentasi matematis formal adalah bahwa bentuk tertentu suatu pernyataan bersifat terbuka untuk diinterpretasikan secara berbeda, baik secara informal maupun secara formal. Pernyataan yang diungkapkan dalam bahasa sehari-hari sangat memungkinkan terjadi kerancuan yang berkaitan dengan konteks dan latar belakang pengetahuan pembaca, sementara pernyataan matematis formal disusun dengan aturan tertentu yang mempunyai tepat satu makna (tidak menimbulkan kerancuan). Meskipun pemaknaan pernyataan matematis kadang-kadang dipilih melalui kesepakatan bersama, namun masih sangat dimungkinkan terjadi interpertasi yang berbeda terhadap bahasa yang digunakan.

Menurut Epp (2003), perbedaan antara bahasa sehari-hari dan bahasa matematis merupakan salah satu faktor kesulitan mahasiswa dalam mempelajari pernyataan berkuantor. Dalam matematika dibedakan antara "semua" dan 'beberapa". Pernyataan yang dimulai dengan kuantor "untuk semua" atau "terdapat" menentukan bagaimana nilai kebenarannya dan apa yang dapat disimpulkan darinya. Sedangkan dalam bahasa biasa, pernyataan "Semua A adalah B" biasanya dimengerti berakibat pada eksistensi paling sedikit satu A. Dalam situasi informal, jika seseorang mengetahui bahwa "Semua A adalah B" tetapi dia hanya mengatakan "Beberapa A adalah B" maka dia akan dianggap berbohong. Dengan perkataan lain, pernyataan "Beberapa A adalah B" dimengerti berakibat pada "Beberapa A tidak B", padahal dalam matematika implikasi ini tidak sah. Dalam matematika, kalimat "Beberapa A merupakan suatu B" dan "Beberapa A adalah B" keduanya sama-sama menyatakan "Terdapat x sedemikian hingga x adalah A dan x adalah B". Sedangkan dalam perbincangan informal, kedua pernyataan itu tidak ekivalen dari sudut logika.

Dalam Taksonomi SOLO, Biggs & Collis (1982) mengemukakan adanya lima tingkat berpikir mahasiswa sebagai respon terhadap tugas, yaitu prastruktural, unistruktural, multistruktural, relasional, dan abstrak lanjut. Mahasiswa pada tingkat prastruktural tidak dapat melakukan tugas yang diberikan atau melaksanakan tugas dengan menggunakan data yang tidak relevan. Mahasiswa pada tingkat unistruktural dapat menggunakan satu penggal informasi dalam merespons suatu tugas (membentuk suatu data tunggal). Mahasiswa pada tingkat multistruktural dapat menggunakan beberapa penggal informasi tetapi tidak dapat menghubungkannya secara bersama-sama (mempelajari data paralel). Mahasiswa pada tingkat relasional dapat memadukan penggalan-penggalan informasi yang terpisah untuk menghasilkan penyelesaian dari suatu tugas. Mahasiswa pada tingkat abstrak lanjut dapat menghasilkan prinsip umum dari data terpadu yang dapat diterapkan untuk situasi baru (mempelajari konsep tingkat tinggi).

Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi dan mendeskripsikan tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor eksistensial dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal. Pertanyaan yang ingin dijawab dalam penelitian ini adalah: bagaimanakah tingkat-tingkat berpikir mahasiswa dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor eksistensial yang diikuti bentuk implikasi dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan suatu acuan kepada pengajar saat melakukan pembelajaran di kelas yang menyangkut masalah menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor eksistensial dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal. Adapun batasan istilah-istilah yang dimaksudkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. *Tingkat-tingkat respon kognitif* adalah jenjang-jenjang kualitas respon tertulis seorang mahasiswa terhadap soal yang diberikan, yang menggambarkan gradasi kebermaknaan jawaban, kesesuaian jawaban dengan soal, dan ketepatan jawaban .

b. *Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika* meliputi semua mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma Yogyakarta angkatan tahun 2006 semester I pada kelas A yang menjadi peserta perkuliahan Logika Matematika. Perkuliahan dilaksanakan pada semester gasal 2006/2007.

c. *Menerjemahkan* dimaksudkan sebagai menuliskan kembali dalam bentuk kalimat yang berbeda tetapi dengan makna yang sama.

d. *Pernyataan matematis berkuantor eksistensial* adalah kalimat dalam konteks matematika yang memuat petunjuk (baik secara eksplisit maupun implisit) tentang keberadaan objek matematis tertentu.

e. *Kalimat biasa* dimaksudkan sebagai kalimat yang disusun dengan bahasa dan istilah sehari-hari.

f. *Kalimat formal* dimaksudkan sebagai kalimat yang disusun dengan mengunakan simbol-simbol dan istilah dalam matematika.

Dari uraian di atas dapat dikemukakan beberapa asumsi yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu:

a. Dalam menerjemahkan suatu bentuk kalimat matematis seseorang tidak bisa lepas dari masalah menentukan nilai kebenaran kalimat tersebut. Sementara menentukan nilai kebenaran suatu kalimat matematis memerlukan aktivitas kognitif yang kompleks.

b. Kalimat dalam bentuk biasa akan sangat memungkinkan penafsiran-penafsiran dalam konteks kehidupan sehari-hari yang boleh jadi tidak sesuai dengan konsep-konsep matematis.

c. Bervariasinya jawaban dan tingkat kebenaran jawaban mahasiswa mengindikasikan adanya tingkat-tingkat respon kognitif dalam masalah dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal.

d. Menentukan tingkat-tingkat respon kognitif dapat dilakukan dengan mengamati respon tertulis jawaban yang diberikan.

METODE

Penelitian ini tergolong dalam jenis penelitian kualitatif deskriptif, yang berusaha mendeskripsikan fenomena dalam keadaan yang seadanya (*natural setting*). Fenomena yang dimaksud adalah tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor eksistensial dari bentuk kalimat biasa ke bentuk kalimat formal.

Subjek penelitian ini adalah semua mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP semester I Universitas Sanata Dharma Yogyakarta angkatan tahun 2006 yang menjadi peserta perkuliahan Logika Matematika. Perkuliahan dilaksanakan pada semester gasal 2006/2007 yang diampu oleh Peneliti Utama. Mahasiswa terdiri dari 46 mahasiswa. Pengambilan data dilaksanakan saat Ujian

Sisipan II pada tanggal 20 November 2006, pukul 07.00 – 09.00.

Data bersifat kualitatif, yaitu berupa jawaban oleh mahasiswa terhadap salah satu soal yang diberikan. Data dikumpulkan melalui tes tertulis. Adapun soal tes tertulis tersebut adalah sebagai berikut:

Perhatikan pernyataan berikut:

"Garis-garis dengan persamaan $x + y = 1$ dan $2x - y = 3$ berpotongan".

Nyatakan pernyataan di atas dengan menggunakan variabel dan kuantor.

Dari soal di atas ingin diungkap sejauh mana indikator-indikator kemampuan berikut ini dapat dicapai oleh mahasiswa:

a. mengidentifikasi variabel,
b. mengidentifikasi semesta pembicaraan,
c. menentukan kuantor yang sesuai,
d. mengidentifikasi kalimat-kalimat sederhana yang menyusun kalimat majemuknya, dan
e. menentukan penghubung logika yang tepat.

Jawaban benar yang diharapkan terhadap soal tes di atas adalah:

$\exists x, y \in \mathbf{R},\ x + y = 1 \wedge 2x - y = 3$, dengan $\mathbf{R}$ = himpunan semua bilangan real.

Data dianalisis secara kualitatif dengan langkah-langkah sebagai berikut (Moleong, 2006; Susento, 2006).

a. Reduksi data: Bagian-bagian data dibandingkan dan dikontraskan satu sama lain untuk menghasilkan topik-topik data. Topik data adalah rangkuman bagian data yang mempunyai kandungan makna tertentu.

b. Kategorisasi data: Topik-topik data dibandingkan dan dikontraskan satu sama lain untuk menghasilkan kategori-kategori data. Kategori data adalah gagasan abstrak yang mewakili makna yang sama yang terkandung dalam sekelompok topik data.

c. Sintesisasi: Kategori-kategori data dibandingkan dan dikontraskan satu sama lain untuk menemukan hubungan di antara kategori-kategori, beserta sifat-sifatnya.

Dalam langkah reduksi data, data dalam dokumen hasil kerja tes diolah sehingga menghasilkan deskripsi kualitas jawaban tiap mahasiswa dalam mengerjakan soal. Dalam langkah kategorisasi data, deskripsi kualitas jawaban tersebut diolah sehingga menghasilkan pola-pola respon kognitif mahasiswa. Dalam langkah sintesisasi, pola-pola respon kognitif tersebut diolah sehingga menghasilkan klasifikasi tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa dalam mengerjakan soal beserta formulasi karakteristik masing-masing. Kriteria klasifikasi tingkat-tingkat respon kognitif didasarkan pada dua hal, yaitu:

a. Kemampuan-kemampuan yang tergambar pada jawaban yang diberikan oleh mahasiswa, yang meliputi identifikasi variabel, identifikasi semesta pembicaraan, penentuan kuantor yang sesuai, identifikasi kalimat-kalimat sederhana yang menyusun kalimat majemuknya, dan penentuan penghubung logika yang tepat.

b. Kebermaknaan rangkaian kalimat yang disusunnya. Kalimat dikatakan bermakna jika mempunyai struktur yang lengkap dan mengandung kesesuaian makna dengan pernyataan matematis semula yang akan diterjemahkan oleh mahasiswa.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Reduksi data

Dalam bagian ini data dibandingkan dan dikontraskan untuk menghasilkan topik-topik data deskripsi kualitas jawaban mahasiswa. Jawaban mahasiswa merupakan respon mereka terhadap soal menerjemahkan pernyataan berkuantor eksistensial berbentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal. Beberapa contoh topik data dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Contoh Topik Data Kualitas Jawaban Mahasiswa

Kode	Jawaban	Topik Data
001	$\exists p, q$, $x+y=1 \wedge 2x-y=3 \Rightarrow p \wedge q$ berpotongan.	Pernyataan berkuantor bermakna. Makna tidak sesuai dengan soal. Variabel yang dimunculkan meliputi dua semesta (meskipun tidak dituliskan) . Variabel p, q anggota himpunan semua garis-garis, x, $y \in \mathbf{R}$. Pemilihan kuantor betul. Penghubung logika berlebihan.

003	*--tidak ada jawaban --*	Tidak ada gagasan
009	$\forall x, y\ ,\ x \in x+y=1\ , y \in 2x-y=3 \Rightarrow x \in 2x-y=3 \wedge y \in x+y=1$	Pernyataan berkuantor bermakna. Makna tidak sesuai dengan soal. Sudah menggunakan variabel, tetapi tidak dituliskan semestanya. Pemilihan kuantor tidak betul. Persamaan garis digunakan sebagai lambang himpunan. Penghubung logika salah, menggunakan implikasi, dengan anteseden dan konsekuen yang tidak jelas.
011	$\exists x, y\ ,\ x\ , y \in \mathbf{Q} \Rightarrow x+y=1 \wedge 2x-y=3$ saling berpotongan	Pernyataan berkuantor bermakna. Makna tidak sesuai dengan soal. Sudah menggunakan variabel dan semestanya, meskipun tidak tepat (seharusnya **R**). Pemilihan kuantor sudah betul. Masih menggunakan bahasa sehari-hari. Tidak berhasil menerjemahkan "saling berpotongan".
013	$\exists x, y\ ,\ x+y=1$ $\exists x, y\ , 2x-y=3$	Pernyataan berkuantor bermakna. Makna tidak sesuai dengan soal. Kalimat diterjemahkan menjadi dua kalimat terpisah. Sudah menggunakan variabel, tetapi tidak dituliskan semestanya. Pemilihan kuantor betul. Penghubung logika tidak ada.
015	*--tidak ada jawaban --*	Tidak ada gagasan
017	$\exists x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$ sdhg $x+y-1 = 2x-y-3$	Pernyataan berkuantor bermakna. Makna tidak sesuai dengan soal. Sudah menggunakan variabel, meskipun tidak konsisten dan semestanya tidak tepat. Pemilihan kuantor betul . Penghubung logika tidak dituliskan secara eksplisit.
019	$\exists x, y ; x, y \neq 0 \Rightarrow `(x+y=1\ , 2x-y=3) \neq 0$	Pernyataan berkuantor bermakna. Makna tidak sesuai dengan soal. Sudah menggunakan variabel, tetapi tidak dituliskan semestanya, penambahan keterangan variabel terlalu membatasi. Pemilihan kuantor betul. Penghubung logika tidak tepat. Penambahan keterangan tidak tepat.
091	$\exists x, y ; x, y \in \mathbf{Z}$ sdhg $x+y=1\ ; 2x-y=3$	Pernyataan berkuantor bermakna. Makna sesuai dengan soal. Sudah menggunakan variabel, meskipun semestanya tidak tepat. Pemilihan kuantor betul. Penghubung logika tidak dituliskan secara eksplisit.

Kategorisasi Data

Topik-topik data di atas dibandingkan dan dikontraskan untuk menghasilkan kategori-kategori data respon kognitif mahasiswa, seperti disajikan dalam Tabel 2 berikut.

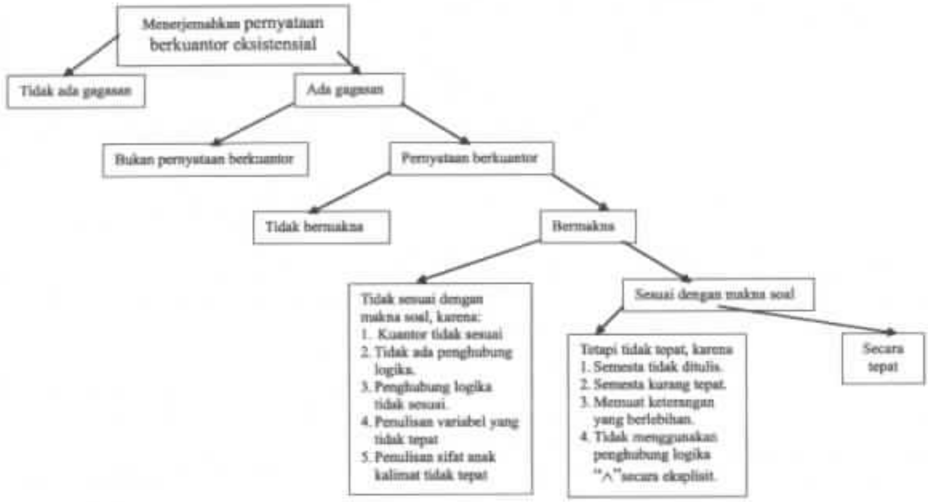
Tabel 2. Kategori dan Subkategori Data Respon Kognitif Mahasiswa

Kategori dan Subkategori Data	Topik Data
Tidak punya gagasan	(*Tidak ada jawaban sama sekali*)
Punya gagasan	
Punya gagasan yang bukan berupa pernyataan berkuantor	$x+y=1$ berpotongan dengan $2x-y=3$
Punya gagasan berupa pernyataan berkuantor tetapi tidak bermakna	$\exists x, y$ dgn
Punya gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna	
Tidak sesuai dengan makna soal, karena menggunakan kuantor universal	$\forall x, y,\ x \in x+y=1,\ y \in 2x-y=3 \Rightarrow x \in 2x-y=3 \wedge y \in x+y=1$ $\forall x, y \in \mathbf{R},\ x+y=1 \wedge 2x-y=3,\ x+y$ berpotongan $2x-y=3$ $\forall x, y,\ x+y=1$ dan $2x-y=3$ sdhg $1-x=2x-3$ $\forall$ garis persamaan $x+y=1$ dan $2x-y=3 \Rightarrow$ berpotongan $\forall x, y,\ x+y=1;\ 2x-y=3$ $\forall x, y\quad x, y \in \mathbf{Q} \Rightarrow x+y=1$ berpotongan $2x-y=3$ $\forall x, y,\ x+y=1 \wedge 2x-y=3$, berpotongan $\forall x=4/3, y=-1/3 \Rightarrow, x+y=1\ \&\ 2x-y=3$ $\forall x, y,\ (x, y \in x+y=1 \wedge x, y \in 2x-y=3) \Rightarrow$ kedua garis berpotongan $\forall x, y,\ x+y=1$ dan $2x-y=3$ $\forall x+y=1 \wedge 2x-y=3 \Rightarrow x+y=1 \wedge 2x-y=3$ berpotongan $\forall x, y,\ x+y=0 \wedge 2x-y=3 \Rightarrow \ldots 2(-y)-y=3.$
Tidak sesuai dengan makna soal, karena tidak menuliskan penghubung logika	<013> $\exists x, y,\ x+y=1, \exists x, y,\ 2x-y=3$ <045> $\forall x, y,\ x+y=1;\ 2x-y=3$
Tidak sesuai dengan makna soal, karena menggunakan penghubung "$\wedge$" dan lainnya	$\exists p, q,\ x+y=1 \wedge 2x-y=3 \Rightarrow p \wedge q$ berpotongan. $\exists a, b,\ a \in x+y=1 \wedge b \in 2x-y=3 \Rightarrow a$ berpotongan dengan b $\exists x, y\ ((x+y)=1 \wedge ((2x-y)=3) \Rightarrow$ saling berpotongan $\forall x=4/3, y=-1/3 \Rightarrow, x+y=1\ \&\ 2x-y=3$ $\exists x, y \in \mathbf{R},\ x, y \in x+y=1 \wedge 2x-y=3 \Rightarrow$ berpotongan $\forall x, y,\ (x, y \in x+y=1 \wedge x, y \in 2x-y=3) \Rightarrow$ kedua garis berpotongan $\forall x+y=1 \wedge 2x-y=3 \Rightarrow x+y=1 \wedge 2x-y=3$ berpotongan $\exists x, y \in \mathbf{R},\ x+y=1 \wedge 2x-y=3 \Rightarrow x, y$ berpotongan

Tidak sesuai dengan makna soal, karena menggunakan penghubung logika selain "∧".	$\forall x, y,\ x \in x+y=1,\ y \in 2x-y=3 \Rightarrow x \in 2x-y=3 \wedge y \in x+y=1$ $\exists x, y,\ x, y \in \mathbf{Q} \Rightarrow x+y=1 \wedge 2x-y=3$ saling berpotongan $\exists x, y;\ x, y \neq 0 \Rightarrow `(x+y=1,\ 2x-y=3) \neq 0$ $\forall x, y \in \mathbf{R},\ x+y=1 \wedge 2x-y=3,\ x+y$ berpotongan $2x-y=3$ $\exists x, y,\ x+y=1 \Rightarrow 2x-y=3$ berpotongan $\forall$ garis persamaan $x+y=1$ dan $2x-y=3 \Rightarrow$ berpotongan $\forall x, y \quad x, y \in \mathbf{Q} \Rightarrow x+y=1$ berpotongan $2x-y=3$ $\exists x_0, y_0 \in \mathbf{Z},\ x+y=1 \Leftrightarrow 2x-y=3$ $\forall x = 4/3,\ y = -1/3 \Rightarrow,\ x+y=1\ \&\ 2x-y=3$
Tidak sesuai dengan makna soal, karena penggunaan variabel tidak konsisten	$\exists x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$ sdhg $x+y-1 = 2x-y-3$ $\exists(x_0, y_0)$ garis-garis pers $x+y=1$ dan $2x-y=3$ berpotongan $x, y \in \mathbf{R}$ $\exists x_0, y_0 \in \mathbf{Z},\ x+y=1 \Leftrightarrow 2x-y=3$
Tidak sesuai dengan makna soal, karena salah menuliskan konsep keanggotaan dalam predikat	$\exists a, b,\ a \in x+y=1 \wedge b \in 2x-y=3 \Rightarrow a$ berpotongan dengan b $\exists x, y \in \mathbf{R}$ sdhg $x, y \in x+y=1$ dan $x, y \in 2x-y=3$ $\exists x, y \in \mathbf{R}$ sdhg $x, y \in x+y=1$ dan $x+y \in 2x-y=3$
Sesuai dengan makna soal, tetapi semesta pembicaraan tidak ditulis	$\exists(x, y)$, sdhg $x+y=1 \wedge 2x-y=3$ berpotongan $\exists x, y$ sdhg $x+y-1 = 2x-y-3$ $\exists x, y$ sedemikian hingga $x+y=1 \wedge 2x-y=3$ $\exists x, y,\ x+y=1 \wedge 2x-y=3$ berpotongan $\exists x, y,\ x+y=1 \wedge 2x-y=3$ $E\,x, y,\ x+y=1$ dan $2x-y=3$ berpotongan
Sesuai dengan makna soal, tetapi semesta pembicaraan tidak tepat	$\exists x, y,\ x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z},\ x+y=1 \wedge 2x-y=3$ berpotongan $\exists x, y;\ x, y \in \mathbf{Z}$ sdhg $x+y=1;\ \ 2x-y=3$
Sesuai dengan makna soal, tetapi semesta pembicaraan ditulis secara terpisah dari kuantifikasi	$\exists x, y,\ x+y=1 \wedge 2x-y=3 \in \mathbf{R}$ $\exists x, y;\ x+y=1 \wedge 2x-y=3, \quad x, y \in \mathbf{R}$
Sesuai dengan makna soal, tetapi memuat keterangan yang berlebihan	$\exists x, y,\ x+y=1 \wedge 2x-y=3$ berpotongan $\exists x, y,\ x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z},\ x+y=1 \wedge 2x-y=3$ berpotongan
Sesuai dengan makna soal, tetapi tidak menuliskan penghubung logika "∧"	$\exists x, y$ sdhg $x+y-1 = 2x-y-3$ $\exists x, y;\ x, y \in \mathbf{Z}$ sdhg $x+y=1;\ 2x-y=3$
Sesuai dengan makna soal secara tepat	$\exists \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{R},\ \mathrm{x}+\mathrm{y}=1 \wedge 2\mathrm{x}-\mathrm{y}=3$

Kategori dan subkategori data di atas dapat disampaikan dalam bentuk diagram pohon pada Diagram 1 berikut.

Diagram 1. Kategori dan Subkategori Data Respon Kognitif Mahasiswa



Sintesisasi:

Kategori-kategori data di atas selanjutnya dibandingkan dan dikontraskan untuk menemukan hubungan di antara respon-respon kognitif mahasiswa dan sifat masing-masing. Dari sini diperoleh tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor eksistensial dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal. Tingkat-tingkat tersebut disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Tingkat-tingkat Respon Kognitif Mahasiswa

No	Tingkat	Indikator
1	Tingkat-0	Tidak memiliki gagasan
2	Tingkat-1	Memiliki gagasan yang bukan berupa pernyataan berkuantor atau berupa pernyataan berkuantor yang tidak bermakna.
3	Tingkat-2	Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna tetapi tidak sesuai dengan makna soal, karena kuantor tidak sesuai, tidak ada penghubung logika, atau penghubung logika tidak sesuai.

No	Tingkat	Indikator
4	Tingkat-3	Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna tetapi tidak sesuai dengan makna soal karena penulisan variabel yang tidak tepat atau karena penulisan sifat anak kalimat yang tidak tepat
5	Tingkat-4	Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna dan sesuai dengan makna soal, tetapi semesta pembicaraan tidak ditulis atau kurang tepat
6	Tingkat-5	Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna dan sesuai dengan makna soal, tetapi tidak menggunakan penghubung logika secara eksplisit atau memuat keterangan yang berlebihan
7	Tingkat-6	Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna dan yang sesuai dengan makna soal secara tepat

Aktivitas Kognitif dalam Menerjemahkan Pernyataan Matematis

Menurut Solso (2001), berpikir adalah proses pembentukan representasi mental baru melalui transformasi informasi yang melibatkan kerja-kerja mental seperti mempertimbangkan, mengabstraksi, menalar, membayangkan, dan memecahkan masalah. Dalam hal menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal, kerja-kerja mental yang nampak adalah mempertimbangkan, mengabstraksi dan menalar. Dalam hal mempertimbangkan nampak bahwa mahasiswa harus mempertimbangkan variabel, semesta pembicaraan, kuantor dan penghubung logika yang akan digunakan. Untuk dapat menuliskan dalam kalimat formal dengan menggunakan simbol-simbol dan ungkapan matematis yang tepat diperlukan kerja mental mengabstraksi. Untuk menghasilkan bentuk kalimat formal yang sesuai dengan makna soal jelas memerlukan kerja menalar dengan betul.

Dari hasil pekerjaan mahasiswa nampak bahwa untuk dapat menerjemahkan kalimat berkuantor dengan betul, termasuk dalam hal ini memahami makna soal dan menuliskan kembali dalam bentuk formal yang sesuai, mereka menggunakan pengetahuan yang telah dimiliki. Hal ini nampak dalam topik-topik data di mana mahasiswa harus menuliskan keanggotaan, memahami makna garis yang berpotongan secara aljabar, dan sebagainya. Hal di atas sesuai dengan Glass &

Holyoak (1986), bahwa berpikir melibatkan transformasi secara aktif pengetahuan yang telah dimiliki untuk menciptakan pengetahuan baru yang dapat digunakan untuk mencapai suatu sasaran

Menurut Mayer (dalam Solso, 2001), berpikir bersifat kognitif, yakni terjadi di dalam otak tetapi nampak dalam perilaku. Dalam hal dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal, perilaku mahasiswa saat mengerjakan soal (yang peneliti amati waktu menjaga ujian) semuanya hampir sama, yaitu duduk dengan tenang, kadang diam sejenak sambil menerawang, mencoret-coret dan menuliskan sesuatu dalam kertas ujian. Akan tetapi saat diperiksa hasil ujian nampak berbagai macam variasi jawaban seperti yang terlihat dalam data dan analisis di depan.

Menurut Epp (2003) menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan matematis, yang sederhana sekalipun, memerlukan aktivitas kognitif yang komplek. Dalam hal ini seseorang tidak hanya membutuhkan pengetahuan tentang prinsip-prinsip logika, tetapi juga bagaimana prinsip-prinsip itu harus digunakan agar argumentasi menjadi valid. Dalam kuliah yang telah diikuti mahasiswa sudah dibahas mengenai prinsip-prinsip logika. Tetapi pada pengerjaan soal nampak mahasiwa harus memahami makna kalimat berkuantor yang disampaikan dalam bahasa sehari-hari, yang tidak bisa lepas dari pengetahuan bahasa, konsep, simbol-simbol yang terkait dengan konsep. Bagaimana prinsip-prinsip logika yang telah dimiliki dapat digunakan memang nampaknya sangat terkait dengan kerja-kerja mental seperti mempertimbangkan, mengabstraksi dan menalar, seperti yang telah dibahas di atas.

Kesulitan-kesulitan dalam Menerjemahkan Pernyataan Matematis

Menurut Epp (2003), pernyataan yang diungkapkan dalam bahasa sehari-hari sangat memungkinkan terjadi kerancuan yang berkaitan dengan konteks dan latar belakang pengetahuan pembaca. Di samping itu masih menurut Epp (2003), perbedaan antara bahasa sehari-hari dan bahasa matematis merupakan salah satu faktor kesulitan mahasiswa dalam mempelajari pernyataan berkuantor. Subyek dalam penelitian ini terdiri dari mahasiswa baru (semester 1) dari berbagai macam latar belakang pengetahuan dan bahasa yang berbeda. Mereka berasal dari berbagai sekolah menengah dari berbagai daerah di Indonesia. Dari data jawaban dan analisis data kesulitan yang disebabkan oleh faktor bahasa sehari-hari tidak begitu nampak. Kesulitan yang dialami diduga secara umum lebih banyak disebabkan oleh latar belakang pengetahuan mereka. Dapat dipahami bahwa mereka masih semester I, di mana pengetahuan dan pengalaman mereka mempelajari dan menuliskan kalimat matematika secara formal masih belum banyak. Sementara pelajaran matematika di sekolah menengah belum begitu menekankan kalimat matematika secara formal. Berdasarkan data jawaban dan analisis data berikut dibahas kesulitan yang nampak dan dugaan penyebab dari masing-masing respon kognitif. Kesulitan dan dugaan penyebab tersebut adalah sebagai berikut:

a. Tidak memiliki gagasan atau gagasan tidak bermakna:

   Hal ini diduga mahasiswa sama sekali tidak mempunyai gambaran bagaimana konsep matematis yang dituliskan dalam bahasa sehari-hari akan dituliskan dengan menggunakan bahasa formal matematis.

b. Pemilihan kuantor yang tidak sesuai:

   Penulisan kuantor yang sesuai diduga memerlukan pemahaman mengenai cakupan berlakunya variabel. Untuk kalimat dengan kuantor eksistensial, dari data nampak bahwa beberapa pemilihan kuantor tidak sesuai karena subyek menganggap kuantor berlaku untuk semua variabel, sementara sebenarnya hanya beberapa variabel saja dalam semesta yang memenuhi.

c. Penulisan anteseden dan konsekuen yang terbalik:

   Seperti yang sudah dibahas di depan, hal ini diduga disebabkan karena bentuk implikasi dalam arah sebaliknya dari soal lebih mudah dipahami.

d. Tidak menuliskan semesta pembicaraan:

   Dalam pelajaran matematika di sekolah menengah semesta pembicaraan tidak selalu eksplisit dituliskan, karena semesta pembicaraan biasanya adalah himpunan semua bilangan real. Hal ini yang diduga sebagai penyebabnya, yaitu belum biasa menuliskan semesta pembicaraan secara eksplisit.

e. Penulisan sifat anak kalimat yang tidak sesuai:

Kesulitan ini diduga disebabkan oleh minimnya pengetahuan dan pengalaman mahasiswa semester I dalam menuliskan pernyataan matematika secara formal. Meskipun disadari juga hal ini memerlukan kemampuan abstraksi dan berpikir secara simbolik.

Taksonomi SOLO

Penelitian ini menghasilkan deskripsi tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor. Deskripsi tersebut didasarkan pada kualitas respon mahasiswa berupa jawaban tertulis terhadap 1 soal yang diberikan. Di lain pihak, Taksonomi SOLO (Biggs & Collis, 1982) telah dikenal luas dapat mengklasifikasikan tingkat-tingkat berpikir seorang mahasiswa terhadap tugas-tugas. Jika hasil penelitian ini dibandingkan dengan Taksonomi SOLO, dapat dilihat kesetaraan tingkat seperti dalam Tabel 4.

Tabel 4. Kesetaraan Taksonomi SOLO dan Tingkat-tingkat Respon Kognitif

Taksonomi SOLO	Tingkat-tingkat Respon Kognitif
Tingkat prastruktural	Tingkat-0 dan Tingkat-1
Tingkat unistruktural	Tingkat-2
Tingkat multistruktural	Tingkat-3 dan Tingkat-4
Tingkat relasional	Tingkat-5
Tingkat abstrak lanjut	Tingkat-6

Pada tingkat prastruktural, mahasiswa belum dapat melakukan tugas yang diberikan, atau kalaupun melaksanakan tugas, mahasiswa menggunakan data yang tidak relevan (Biggs & Collis, 1982). Situasi ini mirip dengan respon kognitif mahasiswa pada tingkat-0 dan tingkat-1. Pada kedua tingkat ini, mahasiswa belum menunjukkan gagasan tertentu dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor, atau kalaupun sudah ada, gagasan mahasiswa sama sekali belum berkaitan dengan pernyataan berkuantor yang dimaksud.

Pada tingkat unistruktural, mahasiswa dapat menggunakan satu penggal informasi dalam merespon tugas (Biggs & Collis, 1982). Sedangkan respon kognitif mahasiswa pada tingkat-2 menunjukkan adanya gagasan mahasiswa berupa pernyataan berkuantor yang bermakna, namun belum menggunakan kuantor atau penghubung logika yang sesuai. Dengan demikian, mahasiswa baru menangkap hanya sebagian informasi yang ada dalam soal, seperti halnya pada tingkat unistruktural.

Pada tingkat multistruktural, mahasiswa sudah mampu menggunakan beberapa penggal informasi, tetapi belum dapat menghubungkannya secara bersama-sama (Biggs & Collis, 1982). Situasi ini tergambar dalam respon kognitif mahasiswa pada tingkat-3 dan tingkat-4. Pada kedua tingkat ini, mahasiswa sudah mempunyai gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna, namun masih bersifat parsial karena belum dilengkapi dengan penulisan variabel, sifat anak kalimat, atau semesta pembicaraan yang tepat.

Tingkat relasional dalam Taksonomi SOLO mengindikasikan kemampuan mahasiswa untuk memadukan berbagai penggalan informasi dalam menghasilkan penyelesaian suatu tugas (Biggs & Collis, 1982). Hal yang mirip juga tergambar dalam respon kognitif mahasiswa pada tingkat-5. Pada tingkat ini, mahasiswa telah mampu menghasilkan pernyataan berkuantor yang bermakna dan sudah sesuai dengan makna soal. Jadi semua informasi yang ada dalam soal telah dapat ditangkap dan diterjemahkan, meskipun penghubung logika belum dikemukakan secara eksplisit atau sebaliknya memuat keterangan yang berlebihan.

Tingkat berpikir tertinggi dalam Taksonomi SOLO, yaitu tingkat abstrak lanjut, mengindikasikasikan kemampuan mahasiswa untuk menghasilkan prinsip umum dari semua informasi secara terpadu (Biggs & Collis, 1982). Kemampuan tersebut terdapat dalam mahasiswa yang menampilkan respon kognitif pada tingkat-6. Pada tingkat ini, mahasiswa mampu menghasilkan pernyataan berkuantor yang bermakna, sesuai dengan makna soal, dan dengan tepat menyajikan semua unsur pernyataan berkuantor. Dengan demikian tergambar kemampuan mahasiswa untuk menghasilkan prinsip abstrak yang terkait dengan semua unsur tersebut.

PENUTUP

Penelitian ini menghasilkan tingkat-tingkat respon kognitif mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dalam menerjemahkan pernyataan matematis berkuantor dari bentuk kalimat biasa menjadi bentuk kalimat formal untuk kalimat dengan kuantor eksistensial yang diikuti bentuk konjungsi. Tingkat-tingkat respon kognitif tersebut terdiri dari 7 tingkat sebagai berikut: Tingkat-0: Tidak memiliki gagasan; Tingkat-1: Memiliki gagasan yang bukan berupa pernyataan berkuantor atau berupa pernyataan berkuantor yang tidak bermakna; Tingkat-2: Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna tetapi tidak sesuai dengan makna soal karena kuantor tidak sesuai, karena tidak ada penghubung logika, atau karena penghubung logika tidak sesuai; Tingkat-3: Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna tetapi tidak sesuai dengan makna soal karena penulisan variabel yang tidak tepat atau karena penulisan sifat anak kalimat tidak tepat; Tingkat-4: Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna dan sesuai dengan makna soal, tetapi semesta tidak ditulis atau semesta kurang tepat; Tingkat-5: Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna dan sesuai makna soal, tetapi tidak menggunakan penghubung logika secara eksplisit atau memuat keterangan yang berlebihan; Tingkat-6: Memiliki gagasan berupa pernyataan berkuantor yang bermakna dan sesuai dengan makna soal secara tepat.

Untuk penelitian dan implementasi lebih lanjut di masa datang, diberikan beberapa saran berikut. (i) Dalam penelitian ini analisis data hanya didasarkan pada respon tertulis. Sementara karena ini adalah penelitian mengenai proses berpikir, maka hendaknya perlu digali lebih mendalam mengenai proses berpikir dengan metode tugas atau wawancara yang lebih intensif dalam mengungkap proses berpikir dengan jumlah subyek penelitian yang lebih sedikit. (ii) Perlu disadari bahwa untuk mahasiswa tahun-tahun awal masih sedikit pengetahuan dan pengalaman dalam mengungkapkan gagasan matematik secara formal. Hal ini kiranya memerlukan perhatian dan kesabaran pengajar dalam membimbing mahasiswa dalam menerapkan prinsip-prinsip logika formal yang telah dipelajari dalam penggunaanya pada matakuliah matematika di tahun-tahun berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Biggs, J. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press.

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Montly, 110* (10) h. 886-899.

Galovich, S. (1993). *Doing mathematic an introduction to proofs and problem solving* . Philadelphia: Saunders College Publishing.

Glass, A. L., & Holyoak, K. J. (1986). *Cognition*. Second Edition. Auckland: McGraw-Hill.

Moleong, L. J. (2006). *Metodologi penelitian kualitatif*. Edisi Revisi. Bandung: 2006.

Moneta, L., Clark, R., Goldberg, A., McMillan, C., & Grossman, M. "Working memory's influence on syllogistic reasoning". Diunduh 23 Oktober 2006, dari *http://wernicke.med. upenn.edu/pubs/monetaCNS03.pdf*.

Solso, R. L. (1991). *Cognitive psychology*. Third Edition. Boston: Allyn and Bacon.

Susento. (2006). Mekanisme interaksi antara pengalaman kultural-matematis, proses kognitif dan topangan dalam proses reinvensi terbimbing. Disertasi Doktor. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.