SIGMA, Vol. 12, No. 1, Januari 2009: 79-89
ISSN: 1410-5888

INTEGRAL-C FUNGSI BERNILAI DI RUANG BANACH

Herry Pribawanto Suryawan
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Teromol Pos 29, Yogyakarta 55002. Alamat e-mail: herrypribs@staff.usd.ac.id

Abstract

It is known that C -integral is a constructive minimal integration process of Riemann type which includes the Lebesgue integral and also integrates the derivatives of differentiable function. In this paper, we define and study the C -integral of functions mapping an interval $[a,b]$ into a Banach space X. Many classical results of the C -integral can be generalized immediately into Banach-valued function version

Keywords: *C -integral, Banach space, C -partition, $AC-C$ function*

1. Pendahuluan

Jika $F:[a,b]\to R$ suatu fungsi terdiferensial dan f adalah turunannya, maka permasalahan mencari F dari f disebut permasalahan (mencari) primitif. Pada tahun 1912, permasalahan primitif diselesaikan oleh A. Denjoy dengan suatu proses integrasi yang disebut totalisasi, dan dikenal dengan integral Denjoy. Integral ini juga memuat integral Lebesgue dan integral Riemann tak wajar. Pada tahun 1914, penyelesaian lain diberikan oleh O. Perron melalui metode yang berdasarkan pada fungsi mayor dan fungsi minor, dan dikenal dengan integral Perron. Penyelesaian ketiga yang berdasarkan pada perumuman integral Riemann, diberikan secara independen oleh J. Kurzweil (1957) dan R. Henstock (1963), dan dikenal dengan integral Henstock-Kurzweil. Ketiga integral ini masing-masing memperumum aspek yang berbeda dari integral Lebesgue, tetapi satu hal yang menarik dan patut dicatat adalah bahwa ketiganya ekuivalen, dalam arti menghasilkan ruang fungsi terintegral yang sama dan memenuhi sifat-sifat yang sama (Gordon, 1994).

A. M. Bruckner, R. J. Fleisner dan J. Foran (Bruckner *et al.*, 1986) meneliti fungsi

$$F(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x^2} & \text{, jika } 0<x\le 1 \\ 0 & \text{, jika } x=0 \end{cases}.$$

Fungsi ini merupakan primitif untuk integral Riemann tak wajar, dan karenanya merupakan primitif untuk integral Henstock-Kurzweil, akan tetapi fungsi ini bukan suatu primitif untuk integral Lebesgue ataupun fungsi terdiferensial. Hal ini menuntun pada penyelidikan mengenai integral minimal yang memuat integral Lebesgue sekaligus mengintegralkan turunan dari suatu fungsi terdiferensial.

B. Bongiorno (1996) memberikan penyelesaian masalah tersebut dengan memperkenalkan proses integrasi minimal konstruktif bertipe-Riemann, yang dikenal sebagai integral-C. Sifat-sifat dari integral-C untuk fungsi bernilai-real telah banyak dibicarakan oleh B. Bongiorno (2000) dan L. Di Piazza (2002). Suryawan (2007), membahas integral-C khususnya terkait karakterisasi deskriptif integral-C melalui suatu perumuman fungsi kontinu mutlak.

Penelitian mengenai teori integral di ruang Banach berkembang pesat akhir-akhir ini seperti dapat dibaca pada Schwabik dan Ye (2005). Di dalam makalah ini, akan didefinisikan dan dipelajari integral-C dari fungsi-fungsi yang memetakan interval tertutup terbatas $[a,b]$ di R ke ruang Banach X. Hasil-hasil klasik seperti kriteria Cauchy untuk keterintegralan dan Lema Saks-Henstock dapat diperumum secara langsung. Pembahasan di dalam makalah ini terutama mengacu pada Suryawan (2007) dan Zhao and Ye (2007).

2. Definisi dan Sifat-Sifat Dasar

Di dalam makalah ini, $I=[a,b]$ menyatakan interval tertutup terbatas yang tidak *degenerate* di dalam R, sementara X adalah ruang Banach atas lapangan R dengan norma di dalam X dituliskan $\|\cdot\|$. Ruang dual dari X ditulis dengan X^*, dan $B(X^*)$ menyatakan bola satuan di dalam X^*. Partisi D adalah koleksi berhingga dari pasangan interval-titik $\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$, dengan $\{I_i\}_{i=1}^n$ adalah koleksi subinterval dari I yang tidak saling tumpang tindih (*non-overlapping*). Notasi $\delta(t)$ menyatakan fungsi positif pada I, yakni $\delta(t): I \to R^+$. Koleksi $D=\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ di atas disebut:

(1) partisi parsial dari I jika $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \subset I$,

(2) partisi dari I jika $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I$,

(3) partisi McShane δ-fine dari I jika $I_i \subset B(t_i,\delta(t_i)) = (t_i-\delta(t_i), t_i+\delta(t_i))$ dan $t_i \in I_0$, untuk setiap $i=1,\dots,n$,

(4) partisi-C δ-fine dari I jika D merupakan partisi McShane δ-fine dari I dan memenuhi
$$\sum_{i=1}^{n} d(t_i,I_i) < \frac{1}{\varepsilon},$$
dengan $d(t_i,I_i)=\inf\{\,|s_i-t_i| : s_i \in I_i\,\}$,

(5) partisi δ-fine dari I jika $t_i \in I_i \subset B(t_i,\delta(t_i))$, untuk setiap $i=1,\dots,n$.

Diberikan partisi-C δ-fine $D=\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$, maka jumlahan integral fungsi $f: I \to X$ terhadap D adalah
$$S(f,D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)m(I_i).$$
di mana $m(I_i)$ menyatakan ukuran Lebesgue I_i, yakni panjang interval I_i.

Definisi 2.1

Fungsi $f: I \to X$ terintegral-C pada I jika terdapat vektor $A \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada fungsi positif $\delta(t): I \to R^+$ sehingga
$$\|S(f,D)-A\| < \varepsilon$$
untuk setiap partisi-C δ-fine $D=\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$, dari I.

Vektor A disebut integral-C δ-fine dari f pada I dan ditulis
$$A=\int_I f.$$
Fungsi f terintegral-C pada himpunan $E \subset I$ jika fungsi $f\chi_E$ terintegral-C pada I dan ditulis $\int_E f = \int_I f\chi_E$.

Hasil yang pertama menyatakan bahwa integral-C suatu fungsi adalah tunggal.

Teorema 2.2

Apabila fungsi $f: I \to X$ terintegral-C pada I, maka $\int_I f$ tunggal.

Bukti: Misalkan ada dua nilai untuk $\int_I f$ sebut $\int_I f = A$ dan $\int_I f = B$ Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\int_I f = A$ maka ada fungsi positif $\delta_1(t): I \to R^+$ sehingga $\|S(f,D) - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi-C δ-fine D dari I. Karena $\int_I f = B$, maka ada fungsi positif $\delta_2(t): I \to R^+$ sehingga $\|S(f,D) - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi-C δ-fine D dari I. Pilih $\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ pada I, maka untuk sebarang partisi-C δ-fine D dari I berlaku

$$\|A - B\| \le \|S(f,D) - A\| + \|S(f,D) - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $A = B$. ■

Hasil berikutnya dikenal sebagai kriteria Cauchy untuk keterintegralan.

Teorema 2.3
Fungsi $f: I \to X$ terintegral-C pada I jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada fungsi positif $\delta(t): I \to R^+$ sehingga

$$\|S(f,D_1) - S(f,D_2)\| < \varepsilon \tag{1}$$

untuk setiap partisi-C δ-fine D_1 dan D_2 dari I.

Bukti: Apabila f terintegral-C pada I, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan ada fungsi positif $\delta(t): I \to R^+$ sehingga $\left\|S(f,D) - \int_I f\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap partisi-$C$ δ-fine D dari I. Oleh karena itu berlaku

$$\|S(f,D_1) - S(f,D_2)\| \le \left\|S(f,D_1) - \int_I f\right\| + \left\|S(f,D_2) - \int_I f\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

untuk setiap partisi-C δ-fine D_1 dan D_2 dari I.

Sebaliknya, diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, tulis

$$S(\varepsilon) = \{S(f,D): D \text{ partisi-}C\ \delta\text{-fine dari } I\} \subset X.$$

Karena (1) berlaku untuk setiap partisi-C δ-fine D_1 dan D_2 dari I, maka diameter $S(\varepsilon)$ di dalam X memenuhi diam $S(\varepsilon) < \varepsilon$. Apabila $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, maka $S(\varepsilon_1) \subset S(\varepsilon_2)$ karena dapat dipilih fungsi positif $\delta_1(t)$ dan $\delta_2(t)$ yang berturut-turut berkorespondensi dengan ε_1 dan ε_2 sehingga $\delta_1(t) \le \delta_2(t)$, $t \in I$. Jadi $S_f = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{S(\varepsilon)} \subset X$ terdiri dari satu titik tunggal, yakni $S(f) = \{A\}$. Untuk suatu jumlah integral $S(f,D)$ berlaku $\|S(f,D) - A\| < \varepsilon$, apabila D sebarang partisi-C δ-fine dari I. ■

Teorema 2.4
Jika fungsi $f: I \to X$ terintegral-C pada I, maka f terintegral-C pada setiap subinterval tertutup I_0 dari I.

Bukti: Ambil sebarang partisi-C δ-fine $D_1 = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{p}$ dan $D_2 = \{(J_j, s_j)\}_{j=1}^{q}$ dari I_0. Himpunan $I \setminus I_0$ dapat dinyatakan sebagai gabungan berhingga interval-interval yang termuat di dalam I. Ambil sebarang partisi-C δ-fine dari setiap interval tersebut. Maka diperoleh koleksi berhingga dari pasangan interval-titik $\{(M_k, u_k)\}_{k=1}$ yang masing-masing bersama-sama dengan D_1 dan D_2 membentuk dua partisi-C δ-fine dari I, sebut D_1' dan D_2'. Selanjutnya kriteria Cauchy memberikan

$$\left\|S(f,D_1')-S(f,D_2')\right\|=\left\|S(f,D_1)-S(f,D_2)\right\|<\varepsilon.$$

Terbukti f terintegral-C pada I_0. ■

Teorema 2.5

Jika f terintegral-C pada setiap interval tertutup I_1 dan I_2, dengan I_1 dan I_2 tidak saling tumpang tindih dan $I_1 \cup I_2 = I$, maka f terintegral-C pada I dan berlaku $\int_{I_1} f + \int_{I_2} f = \int_I f.$

Bukti: Tulis $F = I_1 \cap I_2$ merupakan sisi persekutuan dari I_1 dan I_2. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka ada fungsi positif $\delta_1(t): I_1 \to R^+$ sehingga $\left\|\sum_{i=1}^{p} f(t_i)m(J_i) - \int_{I_1} f\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi-C δ_1-fine $\{(J_i,t_i)\}_{i=1}^{p}$ dari I_1, dan ada fungsi positif $\delta_2(t): I_2 \to R^+$ sehingga $\left\|\sum_{j=1}^{q} f(s_j)m(K_j) - \int_{I_2} f\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi-C δ_2-fine $\{(K_j,s_j)\}_{j=1}^{q}$ dari I_2. Untuk $t \in I_1 \setminus F$ didefinisikan $\delta_3(t) > 0$ sehingga $\delta_3(t) < d(t,F)$, dan hal yang sama dilakukan untuk $t \in I_2 \setminus F$. Selanjutnya didefinisikan fungsi positif $\delta(t): I_1 \cup I_2 \to R^+$ dengan

$$\delta(t)=\begin{cases}\min\{\delta_1(t),\delta_3(t)\} & ,t\in I_1\setminus F\\ \min\{\delta_1(t),\delta_2(t)\} & ,t\in F\\ \min\{\delta_2(t),\delta_3(t)\} & ,t\in I_2\setminus F.\end{cases}$$

Misalkan $\{(M_k,u_k)\}_{k=1}^{r}$ adalah partisi-C δ-fine dari $I_1 \cup I_2 = I$. Diperhatikan pasangan interval-titik (M_k,u_k), $k=1,\ldots,r$ dimana $u_k \in F$, maka $(M_k \cap I_1, u_k)$ bersifat δ_1-fine, $(M_k \cap I_2, u_k)$ bersifat δ_2-fine, dan suku yang berkorespondensi di dalam jumlahan integral adalah

$$f(u_k)m(M_k)=f(u_k)m(M_k\cap I_1)+f(u_k)m(M_k\cap I_2).$$

Koleksi pasangan interval-ititik $\{(M_k,u_k): u_k \in I_1\}_{k=1}^{r}$, $\{(M_k \cap I_1,u_k): u_k \in F\}_{k=1}^{r}$ adalah partisi-C δ_1-fine dari I_1, sementara pasangan interval-titik $\{(M_k,u_k): u_k \in I_2\}_{k=1}^{r}$, $\{(M_k \cap I_2,u_k): u_k \in F\}_{k=1}^{r}$ adalah partisi-C δ_2-fine dari I_2.

Dengan demikian diperoleh

$$\left\|\sum_{k=1}^{r} f(u_k)m(M_k) - \int_{I_1} f - \int_{I_2} f\right\|$$

$$=\left\|\sum_{k=1,u_k\in I_1\setminus F}^{r} f(u_k)m(M_k)+\sum_{k=1,u_k\in F}^{r} f(u_k)m(M_k)+\sum_{k=1,u_k\in I_2\setminus F}^{r} f(u_k)m(M_k)-\int_{I_1} f-\int_{I_2} f\right\|$$

$$=\left\|\sum_{k=1,u_k\in I_1\setminus F}^{r} f(u_k)m(M_k)+\sum_{k=1,u_k\in F}^{r} f(u_k)(m(M_k\cap I_1)+m(M_k\cap I_2))+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1,u_k\in I_2\setminus F}^{r} f(u_k)m(M_k)-\int_{I_1} f-\int_{I_2} f\right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1, u_k \in I_1 \setminus F}^{r} f(u_k)m(M_k) + \sum_{k=1, u_k \in F}^{r} f(u_k)m(M_k \cap I_1) - \int_{I_1} f \right\| + \left\| \sum_{k=1, u_k \in F}^{r} f(u_k)m(M_k \cap I_2) + \sum_{k=1, u_k \in I_2 \setminus F}^{r} f(u_k)m(M_k) - \int_{I_2} f \right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti f integral-C pada $I = I_1 \cup I_2$ dan $\int_{I_1} f + \int_{I_2} f = \int_I f.$ ■

Hasil di bawah ini menyatakan bahwa koleksi semua fungsi $f : I \to X$ yang terintegral-C pada I merupakan ruang linear.

Teorema 2.6

Jika fungsi-fungsi $f, g : I \to X$ terintegral-C pada I dan jika $\alpha, \beta \in R$, maka $\alpha f + \beta g$ terintegral-C pada I dengan $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

Bukti: Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, dan $\alpha, \beta \in R$. Karena f dan g terintegral-C maka ada fungsi positif $\delta_1(t) : I \to R^+$ sehingga $\left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$, untuk setiap partisi-$C$ δ_1-fine D dari I, dan ada fungsi positif $\delta_2(t) : I \to R^+$ sehingga $\left\| S(g,D) - \int_I g \right\| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$, untuk setiap partisi-$C$ δ_2-fine D dari I. Pilih fungsi positif $\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ pada I, maka untuk setiap partisi-C δ-fine D dari I berlaku

$$\begin{aligned}\left\| S(\alpha f + \beta g, D) - \alpha \int_I f - \beta \int_I g \right\| &\leq \left\| S(\alpha f, D) - \alpha \int_I f \right\| + \left\| S(\beta g, D) - \beta \int_I g \right\| \\ &= |\alpha| \left\| S(f,D) - \int_I f \right\| + |\beta| \left\| S(g,D) - \int_I g \right\| \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Terbuktilah $\alpha f + \beta g$ terintegral-C pada I dengan $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$. ■

Berikutnya adalah Lema Saks-Henstock versi integral-C.

Lema 2.7 (Saks-Henstock)

Diketahui $f : I \to X$ terintegral-C pada I, yakni untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan ada fungsi positif $\delta(t) : I \to R^+$ sehingga

$$\left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi-C δ-fine $D = \{(I,t)\}$ dari I.

Jika $D' = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{m}$ sebarang partisi-C parsial δ-fine dari I, maka berlaku

$$\left\| S(f,D') - \sum_{i=1}^{m} \int_{I_i} f(t_i) \right\| \leq \varepsilon.$$

Bukti: Ambil sebarang $D' = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{m}$ partisi-C parsial δ-fine dari I, maka $I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ dapat dinyatakan sebagai koleksi subinterval tertutup di dalam I. Tulis $I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} I_i = \bigcup_{j=1}^{k} I_j'$. Ambil sebarang $\eta > 0$, menurut Teorema 2.4, $\int_{I_j'} f$ ada, yang berarti ada fungsi positif δ_j pada I_j' sehingga apabila D_j adalah partisi-C δ_j-fine dari I_j', maka berlaku

$$\left\| S(f, D_j) - \int_{I_j'} f \right\| < \frac{\eta}{k}.$$

Asumsikan bahwa $\delta_j(t) \le \delta(t)$ untuk setiap $t \in I$. Tulis $D_0 = D' \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} D_j \right)$, maka D_0 adalah partisi-C δ-fine dari I, dan berlaku

$$\left\| S(f, D_0) - \int_I f \right\| = \left\| S(f, D') + \sum_{j=1}^{k} S(f, D_j) - \int_I f \right\| < \varepsilon.$$

Hal ini berakibat

$$\begin{aligned}
\left\| S(f, D') - \sum_{i=1}^{m} \int_{I_i} f(t_i) \right\| &= \left\| S(f, D_0) - \sum_{k=1}^{j} S(f, D_j) - \left(\int_I f - \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j'} f \right) \right\| \\
&\le \left\| S(f, D_0) - \int_I f \right\| + \sum_{k=1}^{j} \left\| S(f, D_j) - \int_{I_j'} f \right\| \\
&\le \varepsilon + \frac{k\eta}{k} = \varepsilon + \eta.
\end{aligned}$$

Karena pengambilan $\eta > 0$ sebarang, maka terbuktilah yang diinginkan. ■

Teorema 2.8

Diberikan fungsi $f : I \to X$. Jika $f = 0$ hampir di mana-mana pada I, maka f terintegral-C pada I dan $\int_I f = 0$.

Bukti: Tulis $E = \{t \in I : f(t) \neq 0\}$, dan $E = \bigcup E_n \subset I$, dengan $E_n = \{t \in I : n - 1 \le \| f(t) \| < n\}$. Karena $m(E) = 0$, maka $m(E_n) = 0$, yang berarti ada himpunan terbuka $G_n \subset I$ sehingga $E_n \subset G_n$ dan $m(G_n) < \dfrac{\varepsilon}{n \cdot 2^n}$.

Kemudian didefinisikan fungsi positif $\delta(t) : I \to R^+$ sehingga $\delta(t) = 1$ untuk $t \in I \setminus E$ dan $B(t, \delta(t)) \subset G_n$ untuk $t \in E_n$. Ambil $D = \{(I', t')\}$ sebarang partisi-C δ-fine dari I, maka

$$\begin{aligned}
\left\| \sum f(t') m(I') \right\| &= \left\| \sum_{t' \in E} f(t') m(I') + \sum_{t' \in I \setminus E} f(t') m(I') \right\| \\
&\le \left\| \sum_{t' \in E} f(t') m(I') \right\| + \left\| \sum_{t' \in I \setminus E} f(t') m(I') \right\| \\
&\le \sum n \cdot m(G_n) \\
&\le \sum n \cdot \frac{\varepsilon}{n \cdot 2^n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi f terintegral-C pada I dan $\int_I f = 0$. ■

Akibat 2.9

Diketahui fungsi $f, g : I \to X$ dengan f terintegral-C pada I. Jika $f = g$ hampir di mana-mana pada I, maka g terintegral-C pada I dan $\int_I f = \int_I g$ hampir di mana-mana pada I.

Bukti: Karena $g - f = 0$ hampir di mana-mana pada I, maka Teorema 2.8 memberikan $g - f$ terintegral-C pada I dan $\int_I (g-f) = 0$. Karena f dan $g - f$ terintegral-C pada I, maka $g = (g-f) + f$ terintegral-C pada I, dan berlaku

$$\int_I g = \int_I (g-f) + f = \int_I (g-f) + \int_I f = \int_I f$$

hampir di mana-mana pada I. ■

3. Teorema Kekonvergenan dan Karakterisasi Deskriptif

Pada bagian ini akan dibicarakan sifat-sifat lebih lanjut dari integral-C fungsi bernilai di ruang Banach. Akan dibuktikan sebuah teorema kekonvergenan, dan juga karakterisasi deskriptif dari integral-C.

Teorema 3.1

Diketahui terintegral-C pada I.

(1) Untuk setiap $x^* \in X^*$, fungsi $x^* f$ terintegral-C pada I dan $\int_I x^* f = x^*\left(\int_I f\right)$.

(2) Jika $T : X \to Y$ suatu operator linear kontinu dari ruang Banach X ke ruang Banach Y, maka Tf terintegral-C pada I dan $\int_I Tf = T\left(\int_I f\right)$.

Bukti:

(1) Karena $f : I \to X$ terintegral-C pada I, maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat fungsi positif $\delta(t) : I \to R^+$ sehingga $\left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \frac{\varepsilon}{\|x^*\|}$ untuk setiap partisi-C δ-fine D dari I. Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ berlaku

$$\left| S(x^*,D) - x^*\left(\int_I f\right) \right| \le \|x^*\| \left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \varepsilon.$$

(2) Karena $T : X \to Y$ operator linear kontinu, maka ada bilangan $M > 0$ sehingga $\|Tx\| \le M\|x\|$ untuk setiap $x \in X$. Jadi untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan, ada fungsi positif $\delta(t) : I \to R^+$ sehingga $\left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \frac{\varepsilon}{M}$ untuk setiap partisi-C δ-fine D dari I.
Dengan demikian diperoleh

$$\left\| S(Tf,D) - T\left(\int_I f\right) \right\| = M \left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \varepsilon. \ ■$$

Teorema kekonvergenan yang dibicarakan di sini terkait dengan konsep keterintegralan-serentak (*equi-integrable*).

Definisi 3.2.

Diketahui $\{f_k\}$ barisan fungsi yang terdefinisi pada I dan bernilai di ruang Banach X. Barisan fungsi $\{f_k\}$ dikatakan terintegral-C serentak pada I jika untuk setiap k, f_k terintegral-C pada

I, dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada fungsi positif $\delta(t): I \to R^+$ sehingga $\left\| S(f_k, D) - \int_I f_k \right\| < \varepsilon$ untuk setiap k, dengan D adalah sebarang partisi-C δ-fine dari I.

Teorema 3.3
Misalkan $\{f_k\}$, $f_k : I \to X$, terintegral-C serentak pada I sehingga $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$. Maka fungsi $f: I \to X$ terintegral-C pada I dan berlaku $\lim\limits_{k\to\infty} \int_I f_k = \int_I f$.

Bukti: Karena barisan fungsi $\{f_k\}$ terintegral-C serentak, maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan ada fungsi positif $\delta(t): I \to R^+$ sehingga $\left\| S(f_k, D) - \int_I f_k \right\| < \varepsilon$, untuk setiap k, dengan D adalah sebarang partisi-C δ-fine dari I. Tetapkan sebuah partisi D demikian. Karena $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$, maka terdapat bilangan asli N sehingga $\|S(f_k, D) - S(f, D)\| < \varepsilon$ untuk setiap $k > N$.
Dengan demikian berlaku

$$\begin{aligned}
\left\| \int_I f_k - \int_I f_m \right\| &\le \left\| S(f,D) - \int_I f_k \right\| + \left\| S(f,D) - \int_I f_m \right\| \\
&\le \|S(f_k,D) - S(f,D)\| + \left\| S(f_k,D) - \int_I f_k \right\| + \|S(f_m,D) - S(f,D)\| + \\
&\quad \left\| S(f_m,D) - \int_I f_m \right\| \\
&< 4\varepsilon
\end{aligned}$$

untuk setiap $k, m > N$.

Jadi barisan vektor $\left\{ \int_I f_k \right\}$ di dalam X merupakan barisan Cauchy, yang artinya $\lim\limits_{k\to\infty} \int_I f_k = A \in X$ ada. Dengan kata lain, ada bilangan asli M sehingga $\left\| \int_I f_k - A \right\| < \varepsilon$ untuk setiap $k > M$. Ambil sebarang partisi-C δ-fine D dari I. Karena $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$, maka ada $n > M$ sehingga $\|S(f_n, D) - S(f, D)\| < \varepsilon$.
Oleh karena itu diperoleh,

$$\|S(f,D) - A\| \le \|S(f,D) - S(f_n,D)\| + \left\| S(f_n,D) - \int_I f_n \right\| + \left\| \int_I f_n - A \right\| < 3\varepsilon.$$

Terbukti f terintegral-C pada I dan $\lim\limits_{k\to\infty} \int_I f_k = \int_I f$. ■

Teorema selanjutnya memberikan kriteria keterintegralan-C menggunakan unsur di dalam bola satuan dari ruang dual ruang Banach X.

Teorema 3.4
Fungsi $f: I \to X$ terintegral-C pada I jika dan hanya jika $\{x^* f : x^* \in B(X^*)\}$ terintegral-C serentak pada I.
Bukti: Apabila f terintegral-C pada I, maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan ada fungsi positif $\delta(t): I \to R^+$ sehingga $\left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \varepsilon$ untuk setiap partisi-C δ-fine D dari I. Oleh karena itu $\left\| S(x^* f, D) - x^*\left(\int_I f \right) \right\| \le \|x^*\| \left\| S(f,D) - \int_I f \right\| < \varepsilon$, dan akibatnya $\{x^* f : x^* \in B(X^*)\}$ terintegral-C serentak pada I.

Sebaliknya apabila $\{x^*f : x^* \in B(X^*)\}$ terintegral-C serentak pada I, maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan ada fungsi positif $\delta(t) : I \to R^+$ sehingga $\left\| S(x^*f, D) - \int_I x^*f \right\| < \varepsilon$ untuk setiap partisi-C δ-fine D dari I dan untuk setiap $x^* \in B(X^*)$. Dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach diperoleh bahwa $\left\| S(f, D) - \int_I f \right\| < \varepsilon$, yakni terintegral-$C$ pada I. ∎

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa integral-C mengintegralkan semua turunan dari fungsi terdiferensial.

Definisi 3.5
Fungsi $F : I \to X$ terdiferensial di $t \in I$ jika ada $f(t) \in X$ sehingga

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \frac{F(t+\delta) - F(t)}{\delta} - f(t) \right\| = 0.$$

Turunan F di t dituliskan sebagai $F'(t) = f(t)$.

Teorema 3.6
Jika fungsi $F : I \to X$ terdiferensial pada I dengan $f(t) = F'(t)$ untuk setiap $t \in I$, maka $f : I \to X$ terintegral-C pada I.

Bukti: Dari definisi turunan, untuk setiap $t \in I$ terdapat fungsi positif $\delta(t) : I \to R^+$ sehingga

$$\left\| \frac{F(s) - F(t)}{s - t} - f(t) \right\| < \frac{\varepsilon^2}{2(1 + \varepsilon\, m(I))},$$

untuk setiap $s \in I$ dengan $|s - t| < \delta(t)$.

Ambil sebarang partisi-C δ-fine $D = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^m$ dari I, maka berlaku

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^m (f(t_i)m(I_i) - F(I_i)) \right\| &\le \sum_{i=1}^m \left\| (f(t_i)m(I_i) - F(I_i)) \right\| \\
&< \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon m(I)} \sum_{i=1}^m (d(t_i, I_i) + m(I_i)) \\
&< \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon m(I)} \left(\frac{1}{\varepsilon} + m(I) \right) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi $f : I \to X$ terintegral-C pada I dan $\int_I f = F(I) = F(b) - F(a)$. ∎

Terakhir dibicarakan karakterisasi deskriptif integral-C menggunakan konsep fungsi kontinu mutlak-C $(AC - C)$.

Definisi 3.7
Diberikan fungsi $F : I \to X$ dan $E \subseteq I$.

(1) F dikatakan kontinu-mutlak-C atau $AC - C$ pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada konstanta $\eta > 0$ dan fungsi positif $\delta(t) : I \to R^+$ sehingga $\left\| \sum_i F(I_i) \right\| < \varepsilon$ untuk setiap partisi-C parsial δ-fine $D = \{(I_i, t_i)\}$ dari I, di

mana titik-titik ujung dari I_i berada di E dan $\sum_i m(I_i) < \eta$.

(2) F dikatakan kontinu mutlak diperumum-C atau $ACG-C$ pada E jika F kontinu pada E dan E dapat dinyatakan sebagai gabungan terhitung himpunan-himpunan E_n dimana F bersifat $AC-C$ pada setiap E_n.

Teorema 3.8

Jika fungsi $f: I \to X$ terintegral-C pada I dengan fungsi primitif $F: I \to X$, maka F bersifat $ACG-C$ pada I.

Bukti: Menurut definisi integral-C dan dari Lema Saks-Henstock, untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan ada fungsi positif $\delta(t): I \to R^+$ sehingga $\left\| \sum_{i=1}^{m} \left(f(t_i)m(I_i) - F(I_i) \right) \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi-C parsial δ-fine $D = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{m}$ dari I. Tulis $E_n = \{ t \in I : \| f(t) \| \le n \}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$, maka $I = \bigcup_n E_n$. Tetapkan suatu partisi-C parsial δ-fine $D' = \{(I_i, t_i)\}$ sehingga titik-titik ujung I_i berada di E_n dan memenuhi $\sum_i m(I_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_i F(I_i) \right\| &\le \left\| \sum_i F(I_i) - f(t_i)m(I_i) \right\| + \left\| \sum_i f(t_i)m(I_i) \right\| \\
&\le \left\| \sum_i F(I_i) - f(t_i)m(I_i) \right\| + \| f(t_i) \| \sum_i m(I_i) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + n \sum_i m(I_i) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi F bersifat $AC-C$ pada setiap E_n, yang berarti F bersifat $ACG-C$ pada I. ■

4. Kesimpulan

Telah dikontruksi integral-C untuk fungsi yang bernilai di ruang Banach. Hasil-hasil klasik seperti kriteria Cauchy dan Lema Saks-Henstock dapat diperumum secara langsung. Lebih lanjut dengan menggunakan konsep koleksi fungsi yang terintegral-C serentak dapat dibuktikan sebuah teorema kekonvergenan serta karakterisasi keterintegralan-C. Terakhir, karakterisasi deskriptif integral-C diperoleh melalui perumuman fungsi kontinu mutlak yang disebut fungsi $AC-C$ dan $ACG-C$. Hasil ini ternyata sejalan dengan karakterisasi deskriptif integral Lebesgue melalui fungsi kontinu mutlak maupun integral Henstock-Kurzweil melalui fungsi $AC-\delta$ dan $ACG-\delta$.

Kepustakaan

Bongiorno, B. 1996. "Un Nuovo Interale il Problema dell Primitive." *Le Matematiche*, **51** (2): 299-313.

Bongiorno, B. *et al.* 2000. "A Constructive Minimal Integral which Includes Lebesgue Integrable Functions and Derivatives." *J. London Math. Soc.* (2), **62** (1): 117-126.

Bruckner, A.M. *et al*. 1986. "The Minimal Integral which Includes Lebesgue Integrable Functions and Derivatives." *Collq. Mat.* **50**: 289-293.

Di Piazza, L. 2002. "A Riemann-type Minimal Integral for the Classical Problem of Primitives." *Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste*, **XXXIV**: 143-153.

Gordon, R. A. 1994. *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Providence: American Mathematical Society.

Schwabik, S. and Ye, G. 2005. *Topics in Banach Space Integration*. Singapore: World Scientific.

Suryawan, H. P. 2007. "Integral McShane Fungsi Bernilai Banach." *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Universitas Negeri Yogyakarta (ISBN: 978-979-99314-2-9), 41-50.

Suryawan, H. P. 2007. "Integral-C dan Karakterisasi Deskriptifnya." *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Universitas Katolik Parahyangan (ISSN 1907-3909), 22-29.

Zhao, D. and Ye, G. 2007. "C-integral and Denjoy-C Integral." *Commun. Korean Math. Soc.* **22** (1): 27-39.

HERRY PRIBAWANTO SURYAWAN

Memperoleh gelar Sarjana Sains dari Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada pada tahun 2004 dan Magister Sains bidang Matematika dari FMIPA, Institut Teknologi Bandung pada tahun 2008. Saat ini menjadi dosen di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta. Bidang minat yang ditekuni adalah analisis fungsional dan teori integral.