KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA
2024

MATEMATIKA

Tingkat Lanjut

Edisi Revisi

Yosep Dwi Kristanto
Muhammad Taqiyuddin
Al Azhary Masta
Elyda Yulfiana

SMA/MA Kelas XI

Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XI (Edisi Revisi)

Penulis
Yosep Dwi Kristanto
Muhammad Taqiyuddin
Al Azhary Masta
Elyda Yulfiana

Penelaah
Sunardi
Kiki Ariyanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras
Supriyatno
Lenny Puspita Ekawaty
Maharani Prananingrum

Kontributor
Iman Santoso
Siti Lita Fauziyah

Ilustrator
Yol Yulianto
Dono Merdiko

Editor
Uly Amalia
Maharani Prananingrum

Editor Visual
Nadia Mahatmi

Desainer
Dono Merdiko

Penerbit
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi

Dikeluarkan oleh
Pusat Perbukuan Kompleks Kemdikbudristek
Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
https://buku.kemdikbud.go.id

Edisi Revisi, 2024
ISBN 978-623-388-334-4 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-623-388-335-1 (jil.1 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 10/15 pt, SIL License.
xiv, 306 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Buku berkaitan erat dengan kurikulum. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada kurikulum yang berlaku, yaitu Kurikulum Merdeka.

Salah satu bentuk dukungan terhadap implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan ialah mengembangkan buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru. Buku ini merupakan sumber belajar utama dalam pembelajaran bagi siswa dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai dengan karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan menjadi fondasi dalam membentuk Profil Pelajar Pancasila yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berkebinekaan global, berjiwa gotong royong, mandiri, kritis, dan kreatif.

Buku teks utama, sebagai salah satu sarana membangun dan meningkatkan budaya literasi masyarakat Indonesia, perlu mendapatkan perhatian khusus. Pemerintah perlu menyiapkan buku teks utama yang mengikuti perkembangan zaman untuk semua mata pelajaran wajib dan mata pelajaran peminatan, termasuk Pendidikan Khusus. Sehubungan dengan hal itu, Pusat Perbukuan merevisi dan menerbitkan buku-buku teks utama berdasarkan Capaian Pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Kami berharap buku ini dapat menjadi landasan dalam memperkuat ketahanan budaya bangsa, membentuk mentalitas maju, modern, dan berkarakter bagi seluruh generasi penerus. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Juli 2024
Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Halo, Anak Indonesia! Selamat belajar Matematika!

Buku ini memandumu berpetualang di dunia matematika untuk menemukan sendiri matematika melalui aktivitas Eksplorasi. Buku ini juga memberikan banyak contoh cara menggunakan ilmu matematika hasil penemuanmu untuk menyelesaikan berbagai masalah. Kamu juga mendapatkan ruang untuk menerapkan ide-ide matematika pada akhir setiap contoh tersebut. Dengan demikian, melalui buku ini, kamu akan berpetualang, belajar dari contoh, kemudian menerapkannya untuk menyelesaikan bermacam masalah.

Buku ini juga menyiapkanmu untuk menjadi masyarakat yang berdaya pada abad ke-21. Masalah-masalah dalam kolom Mari Berpikir Kritis, Mari Berpikir Kreatif, Mari Berkolaborasi, dan Mari Mengomunikasikan ditujukan untuk itu. Kamu juga dapat mempelajari betapa dekat dan berharganya matematika melalui kolom Matematika dan Sains, serta Matematika dalam Budaya. Tak hanya itu, fitur Proyek pada setiap akhir bab mengajakmu untuk bekerja layaknya masyarakat abad ke-21. Tema-tema yang diusung dalam buku ini (seperti perubahan iklim, ketahanan pangan, dan keanekaragaman hayati) bertujuan membangun kesadaranmu untuk membuat bumi tempat hidupmu saat ini juga dapat ditinggali oleh generasi-generasi setelahmu.

Kami berharap buku ini bukan menjadi sumber matematika bagimu. Akan tetapi, buku ini lebih memandumu untuk menemukan dan mengkreasi sendiri matematikamu, kemudian menggunakannya untuk hidup dan berdaya pada abad ke-21.

Jakarta, Mei 2024

Tim Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

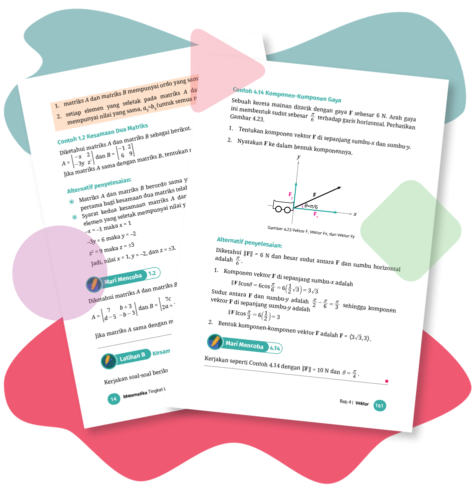
Daftar Tabel

Ada Apa di Buku Ini?

Pada buku ini, kamu diajak untuk bermatematika melalui fitur-fitur yang menyenangkan. Apa saja fitur-fitur dalam buku ini?

Eksplorasi

Fitur ini mengajakmu berpetualang untuk menemukan ide-ide matematika. Kamu dapat menggunakan fitur ini secara terbimbing atau mandiri.

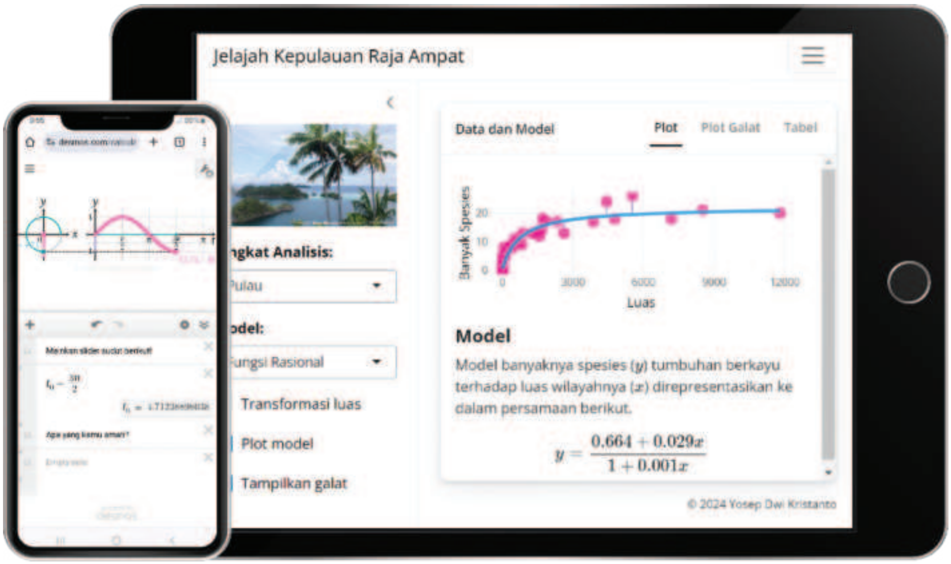


Contoh dan Mari Mencoba

Kamu dapat melihat penerapan matematika yang telah dipelajari pada fitur Contoh dan langsung menerapkannya dalam fitur Mari Mencoba.

Aktivitas Interaktif

Fitur Aktivitas Interaktif mengajakmu berpetualang di dunia digital dengan tujuan membantumu memahami ide-ide matematika yang sedang dipelajari.



Selain ketiga fitur tersebut, buku ini juga kaya akan fitur-fitur lain agar kamu mengalami pembelajaran matematika yang lengkap dan menyenangkan.

Pertanyaan Pemantik

Fitur yang berada pada sampul setiap bab ini bertujuan memantik rasa ingin tahumu tentang matematika dalam bab tersebut.

Peta Materi dan Kata Kunci

Kamu dapat menggunakan fitur ini untuk melihat gambaran umum keterkaitan topik-topik matematika yang akan dipelajari di dalam bab tersebut dan konsep-konsep pentingnya.

Pengantar Bab

Apa menariknya materi dalam bab yang akan kamu pelajari? Kamu dapat menemukannya pada bagian pengantar bab, yang berisi cerita atau fakta menarik.

Mari Berpikir Kritis

Fitur ini mengajakmu untuk membiasakan diri dalam menganalisis, merefleksikan, dan membuat keputusan berdasarkan informasi yang diterima.

Mari Berpikir Kreatif

Fitur ini berisi permasalahan yang mengajakmu untuk mengkreasi gagasan yang orisinal, bermakna, dan berdampak bagi pembelajaranmu sendiri maupun orang lain.

Mari Berkolaborasi

Fitur ini menyiapkanmu agar siap menghadapi masa depan yang sangat terkoneksi satu sama lain. Fitur ini berisi permasalahan yang perlu dikerjakan secara kolaboratif.

Mari Mengomunikasikan

Fitur ini bertujuan melatih komunikasi matematismu. Fitur ini mengajakmu untuk menganalisis dan mengevaluasi pemikiran atau strategi orang lain. Tak hanya itu, kamu juga diajak untuk mengomunikasikan pemikiran dan strategimu kepada orang lain.

Matematika dalam Budaya

Fitur ini memberi pesan bahwa matematika itu ada di mana-mana, termasuk di dalam budaya. Melalui fitur ini, kamu akan menemukan koneksi antara matematika dan budaya.

Ringkasan

Fitur ini berisi ringkasan materi penting per bab yang dapat kamu pelajari dengan memindai kode respons cepat yang tersaji terlebih dahulu.

Proyek

Pada fitur ini kamu memperoleh ruang untuk mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilanmu dalam menyelesaikan masalah yang diberikan. Beberapa proyek dapat kamu kerjakan setelah memindai kode respons cepat yang tersaji.

Refleksi

Fitur ini menyediakan kesempatan bagimu untuk merefleksikan pengalaman belajarmu.

Matematika dan Sains

Fitur ini berisi cerita atau fakta yang menunjukkan dekatnya Matematika dengan Sains. Dengan fitur ini, kamu diharapkan menjadi lebih tertarik untuk mempelajari matematika dan mendapatkan informasi-informasi yang bermanfaat di luar matematika.

Latihan

Kamu dapat menggunakan fitur yang berada pada akhir setiap subbab ini untuk menguji seberapa jauh pemahamanmu terhadap ide-ide matematika yang dipelajari di dalam subbab tersebut.

Uji Kompetensi

Kamu dapat menggunakan fitur ini untuk menguji tingkat pemahamanmu terhadap topik-topik matematika yang telah dipelajari di dalam suatu bab.

Pengayaan

Kamu dapat menggunakan fitur ini untuk memperkaya pengetahuan dan keterampilan matematikamu tentang topik dalam suatu bab.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024
Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-335-1

Bab 1
MATRIKS

Apakah kamu pernah memikirkan ketika mengirim pesan WhatsApp kepada seseorang, mengapa orang lain tidak dapat menerima pesan tersebut?

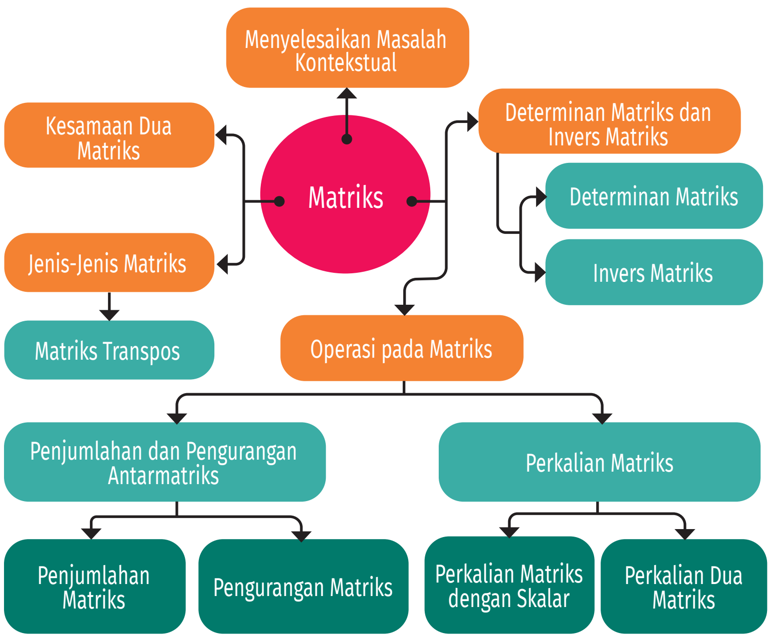
Sumber: chase-chappell/unsplash (2021)

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya;
- menentukan matriks transpos;
- menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks;
- menjelaskan konsep operasi penjumlahan dan pengurangan dua matriks;
- menjelaskan konsep operasi perkalian skalar dengan matriks dan perkalian dua matriks;
- menentukan determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3;
- menentukan invers matriks;
- membuat model matematika; serta
- menyelesaikan masalah kontekstual matriks.

Peta Materi



Kata Kunci

matriks, matriks transpos, kesamaan dua matriks, operasi pada matriks, determinan matriks, dan invers matriks.

Pesan Rahasia

Gambar 1.1 Keamanan Data

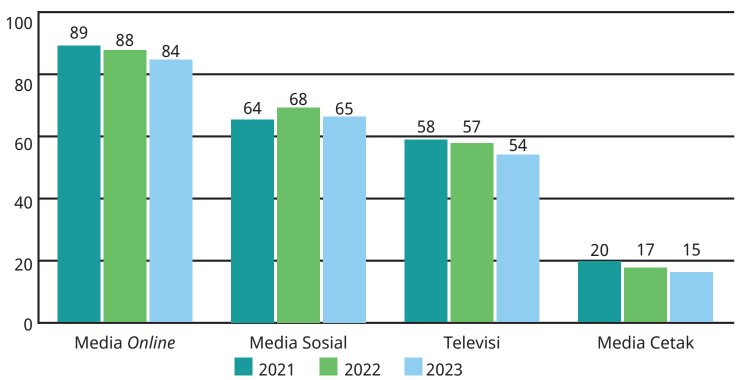
Pengamanan dan kerahasiaan data merupakan hal yang sangat penting dari suatu sistem informasi. Kasus penyadapan komunikasi banyak terjadi, baik antarindividu maupun antarnegara. Hal ini sangat merugikan sehingga untuk mengantisipasinya, dibutuhkan suatu teknik pengamanan data seperti kriptografi. Kriptografi adalah suatu ilmu dan seni menyandikan pesan ke dalam bentuk yang tidak dapat dimengerti maknanya oleh orang lain. Kriptografi digunakan untuk menjaga keamanan pesan yang dikirim dari suatu tempat ke tempat lain. Bagaimana cara membuat pesan kriptografi? Kamu akan mempelajari detailnya pada proyek bab ini.

Salah satu cara pembuatan pesan kriptografi adalah menggunakan bentuk matriks. Matriks memiliki operasi perkalian yang melibatkan beberapa elemennya sekaligus sehingga membuat penyidikan kode sulit dilakukan. Selain diterapkan pada kriptografi, matriks juga banyak digunakan di bidang lain dalam kehidupan sehari-hari. Tentunya kita dapat memahami hal ini setelah mempelajari matriks. Mari, kita belajar matriks pada bab ini dengan sungguh-sungguh dan semangat!

A. Jenis-Jenis Matriks

Apa itu matriks? Bagaimana penyajian data dalam bentuk matriks? Apa saja jenis-jenis matriks? Mari, kita memperhatikan pemaparan berikut!

Masyarakat Indonesia dapat mengakses berita melalui media informasi, seperti media *online*, media sosial, televisi, dan media cetak. Berdasarkan databoks.katadata.co.id, hasil survei yang dilakukan terhadap 2012 responden di Indonesia pada tahun 2021—2023 tersaji sebagai berikut.



Gambar 1.2 Sumber Berita Utama Masyarakat Indonesia (2021—2023)

Sumber: Cindy Mutia Annur/ Databoks (2023)

Data tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 89 & 64 & 58 & 20 \\ 88 & 68 & 57 & 17 \\ 84 & 65 & 54 & 15 \end{bmatrix}$$

Kolom pada matriks A menyatakan sumber berita media *online*, media sosial, televisi, dan media cetak. Baris pada matriks A menyatakan data pada tahun 2021, 2022, dan 2023. Matriks A mempunyai ordo 3×4 dan elemen-elemennya sebagai berikut.

- $a_{11} = 89$
- $a_{12} = 64$
- $a_{13} = 58$
- $a_{14} = 20$
- $a_{21} = 88$
- $a_{22} = 68$
- $a_{23} = 57$
- $a_{24} = 17$
- $a_{31} = 84$
- $a_{32} = 65$
- $a_{33} = 54$
- $a_{34} = 15$

Jenis matriks A adalah matriks datar. Untuk mengenal jenis-jenis matriks, mari kita memperhatikan penjabaran berikut.

1. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks berordo $1 \times n$ yang terdiri atas satu baris dan memuat n elemen. Berikut ini contoh matriks baris.

$A_{1\times2} = [85\ 70]$, matriks baris yang berordo 1×2

$B_{1\times5} = [65\ 60\ 90\ 95\ 80]$, matriks baris yang berordo 1×5

2. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks berordo $m \times 1$ yang terdiri atas satu kolom dan memuat m elemen. Berikut ini contoh matriks kolom.

$A_{2\times1} = \begin{bmatrix} 68 \\ 79 \end{bmatrix}$, matriks kolom yang berordo 2×1

$B_{3\times1} = \begin{bmatrix} 70 \\ 68 \\ 92 \end{bmatrix}$, matriks kolom yang berordo 3×1

3. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks berordo $m \times n$ dengan $m = n$. Berikut ini contoh matriks persegi.

$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 21 & 11 \\ 32 & 25 \end{bmatrix}$, matriks persegi yang berordo 2×2

$B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 21 & 11 & 12 \\ 10 & 27 & 31 \\ 19 & 17 & 27 \end{bmatrix}$, matriks persegi yang berordo 3×3

Perhatikan matriks persegi berordo $n \times n$ berikut ini!

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Diagonal samping matriks } A \\ \\ \\ \\ \longrightarrow \text{Diagonal utama matriks } A \end{matrix}$$

Dalam matriks persegi, elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{11} dengan elemen a_{nn} disebut *diagonal utama* matriks, sedangkan elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{1n} dengan elemen a_{n1} disebut *diagonal samping* matriks.

4. **Matriks Datar dan Matriks Tegak**

Matriks datar adalah matriks berordo $m \times n$ dengan $m < n$, artinya banyak kolom lebih banyak daripada banyak baris. *Matriks tegak* adalah matriks berordo $m \times n$ dengan $m > n$, artinya banyak baris lebih banyak daripada banyak kolom. Matriks datar dan matriks tegak kerap disebut *matriks persegi panjang*. Berikut ini contoh matriks datar dan matriks tegak.

$$A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ matriks datar yang berordo } 3 \times 4$$

$$B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 24 & 11 \\ 9 & 21 \\ 15 & 17 \end{bmatrix}, \text{ matriks tegak yang berordo } 3 \times 2$$

5. **Matriks Segitiga**

Matriks segitiga adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang berada di bawah diagonal utama atau di atas diagonal utama bernilai nol. Matriks segitiga ada dua macam yaitu sebagai berikut.

a. *Matriks segitiga atas* adalah matriks yang semua elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol. Berikut ini contohnya.

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. *Matriks segitiga bawah* adalah matriks yang semua elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol. Berikut ini contohnya.

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. **Matriks Diagonal**

Perhatikan matriks persegi berikut ini!

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen pada matriks di atas bernilai nol, kecuali yang terletak pada diagonal utama. Matriks dengan ciri ini disebut *matriks diagonal.*

7. **Matriks Identitas**

Perhatikan matriks diagonal berikut ini!

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai satu disebut *matriks identitas*.

8. **Matriks Nol**

Perhatikan matriks berikut ini!

$$O_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_{1\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua elemen pada matriks O di atas bernilai nol. Matriks seperti ini dinamakan *matriks nol.*

9. **Matriks Simetris**

Matriks simetris adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang letaknya simetris terhadap diagonal utama bernilai sama. Dengan kata lain, elemen a_{ij} sama dengan elemen a_{ji} dengan $i \neq j$. Berikut ini contoh matriks simetris.

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. **Matriks Transpos**

Untuk memahami matriks tranpos, mari kita memperhatikan permasalahan berikut!

Kedisiplinan kehadiran dari peserta didik merupakan hal terpenting untuk kesuksesan kegiatan belajar mengajar. Berikut ini data rekapan absensi kehadiran peserta didik setiap kelas di suatu SMA yang dicetak dengan orientasi halaman *landscape*.

Tabel 1.1 Data Rekapan Absensi Peserta Didik SMA Makmur dalam Satu Semester

Keterangan \ Kelas	X 1	X 2	X 3	XI 1	XI 2	XI 3	XII 1	XII 2	XII 3
Izin	5	3	2	1	0	3	1	1	3
Sakit	1	4	0	1	1	3	2	1	3
Tanpa keterangan	0	2	2	0	3	2	5	1	2

Jika data tersebut direpresentasikan ke dalam matriks, akan diperoleh matriks berikut ini.

$$D_{3\times 9} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk keperluan laporan, Kepala Sekolah SMA Makmur menghendaki data tersebut dicetak pada kertas dengan orientasi halaman *portrait* agar tampilannya rapi. Dengan demikian, matriks $D_{3\times 9}$ berubah menjadi matriks $D_{9\times 3}$ berikut.

$$D_{9\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Dari permasalahan tersebut, kita dapat menyimpulkan bahwa matriks $D_{9\times 3}$ merupakan transpos dari matriks $D_{3\times 9}$. *Matriks transpos* adalah matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar setiap elemen pada baris menjadi elemen pada kolom dan sebaliknya. Matriks transpos D dinotasikan dengan D^T atau D^t.

Contoh 1.1 Matriks Transpos

1. Jika $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ merupakan matriks kolom, maka transpos matriks C adalah matriks baris $C^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Jika $D = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks persegi, maka transpos matriks D adalah $D^t = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 2 & -6 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ yang juga merupakan matriks persegi.

Mari Mencoba 1.1

Tentukan transpos dan jenis setiap matriks berikut!

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

Mari Mengomunikasikan

Padi merupakan salah satu tanaman pangan yang memegang peranan penting bagi perekonomian di Indonesia. Terkadang padi yang akan dipanen mengalami gangguan yang mengakibatkan penurunan hasil atau bisa disebut gagal panen. Hal ini dapat disebabkan oleh beberapa faktor, seperti kekeringan, banjir, dan hama. Berikut ini data luas lahan tanaman padi yang mengalami gagal panen.

Tabel 1.2 Data Luas Lahan Tanaman Padi (dalam ha) yang Gagal Panen

Kabupaten	Penyebab		
	Kekeringan	Banjir	Hama
Pacitan	0	375	699
Ponorogo	27	991	321

Kabupaten	Penyebab		
	Kekeringan	Banjir	Hama
Blitar	0	101	0
Kediri	327	12	0
Malang	0	0	2.237
Jember	19	0	36

Kerjakan kegiatan berikut berdasarkan data di atas!

1. Pilihlah data pada Tabel 1.2 agar dapat membentuk matriks segitiga berordo 3 × 3. Buatlah matriksnya.
2. Buatlah transpos dari matriks yang telah kamu buat.
3. Jelaskan simpulanmu berdasarkan jawaban soal nomor 1 dan 2.

Latihan A Jenis-Jenis Matriks

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—4.

1. Matriks tegak merupakan bagian dari matriks persegi panjang.
2. Jika matriks A adalah matriks diagonal, maka matriks A adalah matriks segitiga.
3. Jika matriks I adalah matriks simetris, maka matriks I adalah matriks identitas.
4. Transpos dari matriks baris adalah matriks kolom.

Penerapan Konsep

5. Tentukan jenis matriks-matriks berikut.

   a. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan A^t merupakan transpos matriks A, maka tentukan jenis matriks A dan jenis matriks A^t.

7. Jika matriks I adalah matriks identitas, maka matriks I adalah matriks diagonal. Berikan penjelasan tentang kebenaran pernyataan tersebut.

8. Asupan gizi bagi seorang atlet sangatlah penting sebagai persediaan energi tubuh. Persediaan tersebut digunakan ketika melakukan berbagai aktivitas fisik, misalnya pada saat latihan, bertanding, dan pemulihan baik setelah latihan maupun setelah bertanding. Berdasarkan interaktif.kompas.id (yang bersumber dari rivertownaquatics.com), perkiraan kebutuhan minimal energi pada atlet renang putra sebagai berikut.

   - Atlet usia 11—12 tahun memiliki kebutuhan normal 2.000 kalori. Jika ditambah 1 jam latihan, kebutuhan menjadi 2.200 kalori. Adapun jika ditambah 2 jam latihan, kebutuhan menjadi 2.500 kalori.
   - Atlet usia 13—14 tahun memiliki kebutuhan normal 2.200 kalori. Jika ditambah 1 jam latihan, kebutuhan menjadi 2.500 kalori. Adapun jika ditambah 2 jam latihan, kebutuhan menjadi 3.000 kalori.
   - Atlet usia 15—18 tahun memiliki kebutuhan normal 2.600 kalori. Jika ditambah 1 jam latihan, kebutuhan menjadi 2.900 kalori. Adapun jika ditambah 2 jam latihan, kebutuhan menjadi 3.200 kalori.
   - Atlet usia 19—25 tahun memiliki kebutuhan normal 2.700 kalori. Jika ditambah 1 jam latihan, kebutuhan menjadi 3.000 kalori. Adapun jika ditambah 2 jam latihan, kebutuhan menjadi 3.300 kalori.

   Buatlah matriks berdasarkan data di atas dan tentukan jenis matriksnya.

B. Kesamaan Dua Matriks

Pada subbab ini kita akan mempelajari kesamaan dua matriks. Untuk itu, mari kita bersiap dengan mengerjakan aktivitas eksplorasi berikut ini!

Eksplorasi **Kesamaan Dua Matriks**

Melalui kegiatan eksplorasi, kita diajak untuk menemukan konsep kesamaan dua matriks. Perhatikan permasalahan berikut!

Matriks berikut menunjukkan harga jual kue (dalam rupiah) di Toko A.

$$\begin{bmatrix} 44.000 & 71.000 & 53.000 \\ 38.000 & 52.000 & 43.000 \\ 33.000 & 45.000 & 38.000 \end{bmatrix}$$

Baris matriks di atas secara berturut-turut menunjukkan ukuran kue kotak besar, kotak sedang, dan kotak kecil. Kolom pertama menunjukkan harga kue bika ambon, kolom kedua menunjukkan harga kue lapis legit, dan kolom ketiga menunjukkan harga kue bolu pandan.

Misalkan Toko B menjual macam kue yang sama dengan Toko A. Di samping itu, ukuran dan harganya pun sama. Sajikan data Toko A ke dalam matriks A dan data Toko B ke dalam matriks B. Amatilah kedua matriks tersebut! Menurut kamu, apakah matriks A dan matriks B sama? Apakah kedua matriks tersebut memiliki ordo yang sama? Bagaimana keterkaitan elemen-elemen seletak dari matriks A dan matriks B? Berikanlah simpulan dari pengamatan kamu!

Dari permasalahan tersebut, kita dapat menentukan konsep kesamaan dua matriks seperti berikut.

Definisi 1.1 **Kesamaan Dua Matriks**

Matriks A dan matriks B dikatakan sama, dinyatakan sebagai $A = B$, jika dan hanya jika

1. matriks A dan matriks B mempunyai ordo yang sama
2. setiap elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij}=b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh 1.2 Kesamaan Dua Matriks

Diketahui matriks A dan matriks B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -x & 2 \\ -3y & z^2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Jika matriks A sama dengan matriks B, tentukan nilai x, y, dan z.

Alternatif penyelesaian:

- Matriks A dan matriks B berordo sama yaitu 2×2, berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi.
- Syarat kedua kesamaan matriks A dan matriks B adalah setiap elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama sehingga
  $-x = -1$ maka $x = 1$
  $-3y = 6$ maka $y = -2$
  $z^2 = 9$ maka $z = \pm 3$
  Jadi, nilai $x = 1$, $y = -2$, dan $z = \pm 3$.

Mari Mencoba 1.2

Diketahui matriks A dan matriks B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & b+3 \\ d-5 & -b-3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 7c & 3a-1 \\ 2a+1 & -5c \end{bmatrix}$$

Jika matriks A sama dengan matriks B, tentukan nilai $a + b + c + d$.

Latihan B Kesamaan Dua Matriks

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Dua matriks mempunyai ordo sama merupakan salah satu syarat kedua matriks tersebut sama.
2. Dua matriks yang sama selalu memiliki ordo sama.
3. Jika diketahui matriks $R = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka matriks R sama dengan matriks C.

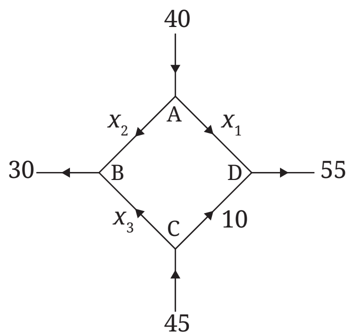
Penerapan Konsep

4. Jika $A = \begin{bmatrix} -x-3y & 0 \\ (x-2y)^2 & 1 \end{bmatrix}$ dan I adalah matriks identitas berordo 2×2 dengan $A = I$, tentukan nilai $x + y$.
5. Hitunglah nilai $a + b + c + d$ yang memenuhi kesamaan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} a+2b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

6. **Aplikasi matriks dalam bidang komputer.**

   Gambar di samping menunjukkan jaringan komputer dengan 4 *node*. Laju aliran dan arah aliran di cabang-cabang tertentu diketahui. Jaringan komputer tersebut disajikan dalam matriks berikut:



$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + 10 \\ x_1 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

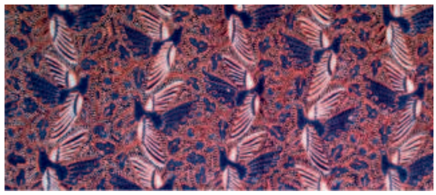
dengan baris matriks secara berturut-turut menunjukkan *node* A, B, C, dan D. Tentukan laju aliran x_1, x_2, dan x_3.

C. Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

1. Penjumlahan Matriks

Matematika dalam Budaya **Batik Emprit**

Burung emprit (Jawa) atau burung pipit merupakan burung yang tidak pernah lepas dari kelompoknya. Dengan selalu hidup berkelompok, burung emprit mampu bertahan menghadapi dunia yang luas meskipun berbadan kecil.



Gambar 1.3 Batik Emprit
Sumber: Kemenperin/bbkb.kemenperin.go.id (2020)

Dalam produksi batik, burung emprit dipilih sebagai salah satu motif batik yang mengandung pesan agar manusia, sebagai makhluk sosial, belajar dari alam dan sekitarnya. Manusia harus menjaga hubungan baik dengan sesama (Nugroho, 2020).

Produksi batik tentunya membutuhkan biaya. Tahukah kamu bahwa perhitungan biaya produksi batik dapat dijelaskan dengan penjumlahan matriks?

Sebelum mempelajari definisi formal dari penjumlahan matriks, mari kita mengerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Penjumlahan Matriks**

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kita akan menemukan konsep penjumlahan matriks. Perhatikan permasalahan berikut!

Batik telah menjadi bagian dari budaya Indonesia. Pembuatan batik memerlukan biaya produksi. Berikut ini data biaya bahan dasar dan biaya tenaga kerja di sebuah perusahaan industri kerajinan batik pada bulan Januari.

Tabel 1.3 Data Biaya Bahan Dasar (dalam juta rupiah)

	Batik *Handprint*	Batik Cap	Batik Tulis
Kualitas I	23	45	82
Kualitas II	16	32	60

Tabel 1.4 Data Biaya Tenaga Kerja (dalam juta rupiah)

	Batik *Handprint*	Batik Cap	Batik Tulis
Kualitas I	8	10	15
Kualitas II	6	8	14

Dengan mengacu pada data di atas, kamu dapat melakukan langkah-langkah berikut.

1. Buatlah matriks biaya bahan dasar dan matriks biaya tenaga kerja.
2. Tentukan matriks biaya produksi yang merupakan penjumlahan dari biaya pembelian bahan dasar dan biaya tenaga kerja.
3. Interpretasikan setiap elemen matriks biaya produksi.
4. Apabila biaya bahan dasar batik tulis dihapus pada matriks, apakah matriks biaya produksi dapat dihitung? Berikan alasanmu.

Dari permasalahan tersebut, tulislah yang kamu ketahui mengenai penjumlahan matriks.

Dari kegiatan eksplorasi yang telah dilakukan, definisi penjumlahan matriks dapat ditulis sebagai berikut.

Definisi 1.2 **Penjumlahan Matriks**

Jika matriks A dan matriks B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}, maka ada matriks C yang merupakan hasil penjumlahan matriks A dengan matriks B atau $C = A + B$. Matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Contoh 1.3 Penjumlahan Matriks

Diketahui matriks-matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan jumlah matriks A dan matriks B.

Alternatif penyelesaian:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+(-1) & 9+(-3) \\ 3+(-1) & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, jumlah matriks A dan matriks B adalah $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Mari Mencoba 1.3

Tentukan hasil penjumlahan matriks $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ dan matriks $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

Eksplorasi Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kita akan menemukan sifat-sifat penjumlahan matriks.

Diketahui matriks-matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Hitunglah $A + B$ dan $B + A$. Bagaimana dugaan kamu?
2. Tentukan $(A + B) + C$ dan $A + (B + C)$. Apa yang dapat kamu peroleh?
3. Jika ada matriks O yang merupakan matriks nol berordo sama dengan matriks A, tentukan $A + O$ dan $O + A$. Sifat apa yang kamu dapatkan?
4. Jika matriks $-A$ merupakan lawan dari matriks A, $-A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, tentukan penjumlahan matriks A dan matriks $-A$. Simpulan apa yang kamu peroleh setelah menjumlahkan kedua matriks tersebut?

Berdasarkan kegiatan eksplorasi di atas, diperoleh sifat-sifat penjumlahan matriks berikut.

Sifat 1.1 **Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks**

Misalkan matriks A, B, C, dan O merupakan matriks-matriks yang berordo sama, maka dalam penjumlahan matriks berlaku:

- sifat komutatif: $A + B = B + A$
- sifat asosiatif: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- terdapat matriks O yang bersifat $A + O = O + A = A$
- matriks A mempunyai lawan yaitu matriks $-A$ yang bersifat $A + (-A) = O$.

2. Pengurangan Matriks

Kita dapat menerapkan rumusan penjumlahan matriks untuk memahami konsep pengurangan matriks.

Definisi 1.3 **Pengurangan Matriks**

Jika matriks A dan matriks B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$, maka pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks B. Penulisannya sebagai berikut.

$$A - B = A + (-B)$$

Contoh 1.4 Pengurangan Matriks

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan hasil dari:

1. $A - B$
2. $A - C$

Alternatif penyelesaian:

1. $-B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1 & 2+2 \\ 1+(-1) & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi, $A - B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Matriks A dan matriks C berordo tak sama sehingga $A - C$ tidak terdefinisi.

Mari Mencoba 1.4

Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ dan matriks $Q = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan $P - Q$.

Berdasarkan Contoh 1.4, jelas bahwa pengurangan matriks A dan matriks B adalah dengan mengurangkan elemen-elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak. Dengan demikian, definisi pengurangan matriks dapat pula dituliskan sebagai berikut.

Definisi 1.4 Pengurangan Matriks

Jika matriks A dan matriks B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}, maka ada matriks C yang merupakan hasil pengurangan matriks A dengan matriks B atau $C = A - B$. Matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Contoh 1.5 Pengurangan Matriks

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 9 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan $A - B$.

Alternatif penyelesaian:

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 9 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-3 & 9-0 \\ 2-2 & 9-(-5) \\ 8-2 & -7-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 14 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

Jadi, $A - B = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 14 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$.

Mari Mencoba 1.5

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$P = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika X adalah matriks berordo 3×3 dan $X + P = Q$, tentukan matriks X.

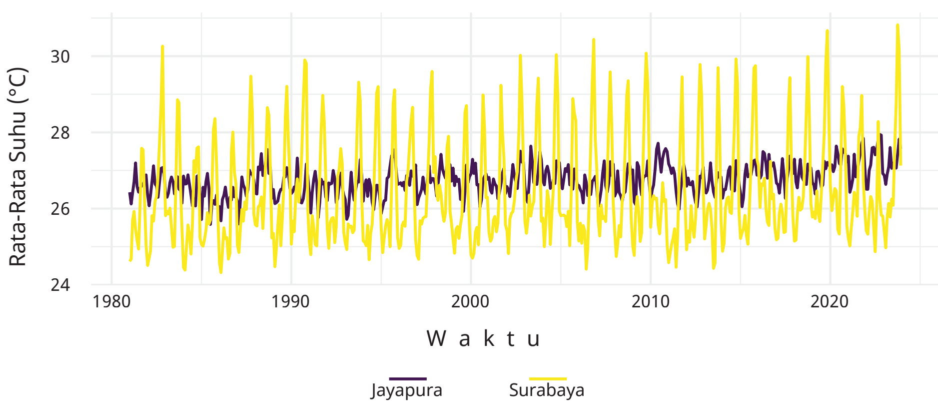
Mari Berpikir Kritis

Apakah sifat-sifat operasi penjumlahan matriks pada Sifat 1.1 berlaku untuk operasi pengurangan matriks? Berikan alasannya!

Matematika dan Sains

Visualisasi Data Perubahan Iklim

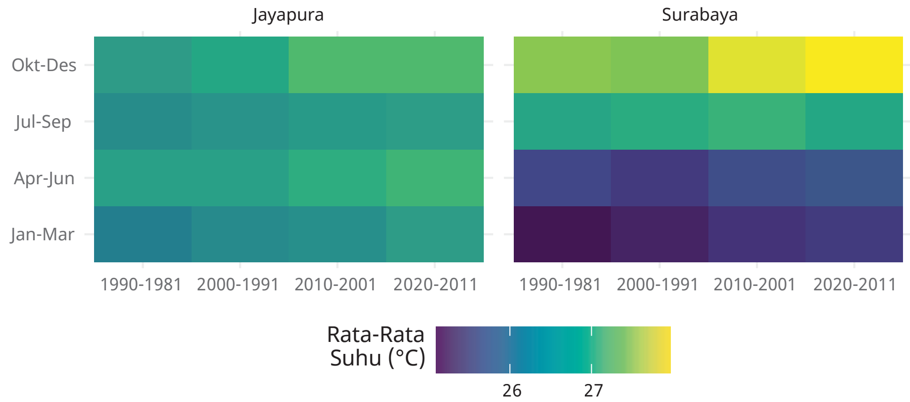
Salah satu tanda perubahan iklim adalah naiknya suhu global dari waktu ke waktu. Apakah suhu lokal juga terpengaruh akibat perubahan iklim tersebut? Gambar 1.4 berikut menunjukkan tren rata-rata suhu di dua wilayah Indonesia, yaitu Jayapura dan Surabaya, pada tahun 1981–2023.



Gambar 1.4 Tren Rata-Rata Suhu Bulanan di Jayapura dan Surabaya pada Tahun 1981–2023

Sumber: Data NASA POWER (power.larc.nasa.gov)

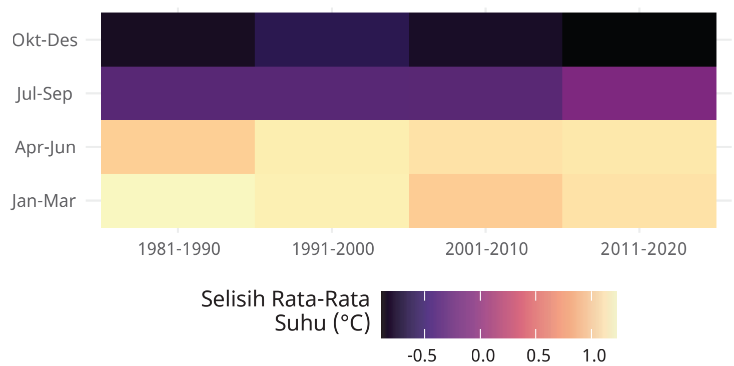
Kamu mungkin cukup kesulitan untuk membaca tren pada gambar di atas. Dengan bantuan matriks, diagram pada gambar tersebut dapat dibuat lebih sederhana. Selain itu, kamu juga akan lebih mudah menemukan tren rata-rata suhu kedua wilayah tersebut dari dua dimensi waktu, yaitu tahun dan bulan. Perhatikan Gambar 1.5 berikut!



Gambar 1.5 Visualisasi Rata-Rata Suhu di Jayapura dan Surabaya dengan Bantuan Matriks

Sumber: Data NASA POWER (power.larc.nasa.gov)

Berdasarkan gambar di atas, bagaimana tren rata-rata suhu Jayapura dan Surabaya? Naik, turun, atau konstan? Pada bulan apa kedua wilayah tersebut rata-rata suhunya tertinggi? Lebih panas mana, Jayapura atau Surabaya? Untuk menjawab pertanyaan terakhir ini, kamu dapat menggunakan selisih matriks. Visualisasinya ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 1.6 Selisih Rata-Rata Suhu Jayapura dan Surabaya

Sumber: Data NASA POWER (power.larc.nasa.gov)

Gambar di atas dengan jelas menunjukkan wilayah mana yang lebih panas. Pada periode Januari–Maret dan April–Juni, Jayapura lebih panas dibandingkan Surabaya (selisihnya positif). Hal ini berkebalikan dengan periode Juli–September dan Oktober–Desember.

Kamu mungkin bertanya-tanya, bagaimana diagram pada Gambar 1.5 dan 1.6 menggambarkan matriks? Gambar 1.5 merupakan hasil pengolahan data matriks-matriks berikut. Elemen-elemen kedua matriks tersebut dipetakan pada warna. Semakin tinggi nilainya, warnanya semakin kuning.

$$T_{\text{Jayapura}} = \begin{bmatrix} 26,67 & 26,81 & 27,08 & 27,08 \\ 26,47 & 26,56 & 26,65 & 26,69 \\ 26,71 & 26,72 & 26,89 & 26,99 \\ 26,33 & 26,46 & 26,51 & 26,68 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$T_{\text{Surabaya}} = \begin{bmatrix} 27,44 & 27,39 & 27,83 & 27,97 \\ 26,79 & 26,88 & 26,96 & 26,81 \\ 25,70 & 25,57 & 25,79 & 25,86 \\ 25,10 & 25,30 & 25,50 & 25,58 \end{bmatrix}$$

Selisih kedua matriks tersebut, yaitu $T_{\text{Jayapura}} - T_{\text{Surabaya}}$, divisualisasikan oleh diagram pada Gambar 1.6. Dapatkah kamu menentukan selisih kedua matriks tersebut? Bandingkan hasilnya dengan Gambar 1.6!

Latihan C Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Operasi penjumlahan matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan elemen-elemen matriks A dan elemen-elemen matriks B saja.

2. Dua buah matriks dapat dikurangkan apabila matriks tersebut memiliki ordo yang sama.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$.

Penerapan Konsep

4. Tentukan nilai x, y, dan z yang memenuhi:

$$\begin{bmatrix} 2x & y \\ 3z & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -x \\ 2y & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = O,$$ dengan O adalah matriks nol berordo 2×2.

5. Tentukan nilai a dan b dari $\begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4b \\ 4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6. **Ekonomi.** Berikut ini adalah matriks banyaknya buah (dalam kg) yang dikirim oleh penyuplai pada cabang Toko A dan Toko B.

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 50 & 62 \\ 70 & 66 \\ 45 & 58 \\ 40 & 47 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{jeruk} \\ \text{apel} \\ \text{pir} \\ \text{lemon} \end{array} \end{array}$$

Setelah dicek ternyata ada beberapa kg buah yang busuk. Banyak buah (dalam kg) yang busuk disajikan pada matriks berikut.

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{jeruk} \\ \text{apel} \\ \text{pir} \\ \text{lemon} \end{array} \end{array}$$

Tentukan matriks banyaknya buah yang masih segar untuk dijual.

D. Perkalian Matriks

1. Perkalian Matriks dengan Skalar

Kamu sudah mempelajari penjumlahan matriks pada Subbab C. Konsep penjumlahan berulang pada aljabar akan digunakan dalam matriks. Mari, kita melakukan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Perkalian Matriks dengan Skalar**

Pada aktivitas ini, kita diajak untuk menemukan konsep perkalian matriks dengan skalar. Konsep penjumlahan berulang pada aljabar akan digunakan dalam matriks.

Perhatikan matriks berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan aturan penjumlahan matriks diperoleh

$$A + A = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ldots + \ldots & \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots & \ldots + \ldots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times \ldots & 2 \times \ldots \\ 2 \times \ldots & 2 \times \ldots \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= 2 \times \ldots$$

$$A + A + A = \ldots.$$

Apabila penjumlahan matriks A sampai k kali, maka diperoleh

$$\underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{k \text{ kali penjumlahan matriks } A} = \ldots.$$

Dari langkah-langkah di atas, jelaskan yang kamu ketahui mengenai perkalian matriks dengan skalar!

Berdasarkan aktivitas eksplorasi di atas, definisi perkalian matriks dengan skalar dapat diungkapkan sebagai berikut.

Definisi 1.5 **Perkalian Matriks dengan Skalar**

Jika matriks A berordo $m \times n$ dan k adalah bilangan real (k sering disebut *skalar*), maka kA menyatakan matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen pada matriks A dengan k.

Contoh 1.6 Perkalian Matriks dengan Skalar

Misalkan $P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -6 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. Tentukan $2P$.

Alternatif penyelesaian:

$$2P = 2\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -6 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times \frac{1}{4} & 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 2 \times (-6) & 2 \times 1 & 2 \times (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -12 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Mari Mencoba 1.6

Misalkan $Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ dan $k = 4$. Tentukan kQ.

Sifat 1.2 Sifat-Sifat Perkalian Matriks dengan Skalar

Misalkan matriks A dan B merupakan matriks-matriks yang berordo sama, serta k dan h merupakan skalar, maka berlaku:

- $kO = O$, dengan O adalah matriks nol
- $kA = O$, untuk $k = 0$
- sifat asosiatif: $h\,(kA) = (hk)\,A$
- sifat distributif: $(h \pm k)\,A = hA \pm kA$
- sifat distributif: $k\,(A \pm B) = (kA) \pm (kB)$

2. Perkalian Dua Matriks

Eksplorasi Perkalian Dua Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kita diajak untuk menemukan konsep perkalian dua matriks. Mari, kita perhatikan permasalahan berikut!

Sebuah perusahaan yang bergerak di bidang konstruksi memiliki beberapa kontrak pekerjaan di tiga lokasi berbeda, yaitu di Kota Pontianak, Kota Surabaya, dan Kota Makassar. Berikut ini data banyaknya karyawan pada perusahaan di ketiga lokasi tersebut.

Tabel 1.5 Data Banyak Karyawan

Lokasi	Karyawan Tetap	Karyawan Paruh Waktu
Kota Pontianak	450	120
Kota Surabaya	380	140
Kota Makasar	420	87

Besar gaji per hari untuk karyawan tetap adalah Rp125.000,00, sedangkan untuk karyawan paruh waktu Rp80.000,00. Dengan menggunakan konsep matriks, dana yang harus dikeluarkan perusahaan per harinya pada setiap lokasi dapat diperoleh sebagai berikut.

Misalkan data banyak karyawan menjadi matriks A dan besar gaji karyawan (dalam ribu rupiah) menjadi matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Dana yang harus dikeluarkan perusahaan tersebut dinyatakan dalam matriks dengan mengalikan matriks A dengan matriks B.

$$AB = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Kamu dapat melakukan langkah-langkah berikut.

1. Interpretasikan setiap elemen matriks hasil perkalian matriks di atas.
2. Perhatikan ordo matriks A, ordo matriks B, dan ordo matriks AB. Bagaimana dugaanmu?
3. Apabila salah satu kolom pada matriks A dihilangkan, apakah perkalian matriks A dengan matriks B dapat dilakukan? Jelaskan.
4. Buatlah simpulan dari permasalahan tersebut.

Definisi perkalian dua matriks dapat diungkapkan sebagai berikut.

Definisi 1.6 Perkalian Dua Matriks

Jika matriks A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times p$, maka ada matriks C yang merupakan hasil perkalian matriks A dengan matriks B atau $C = AB$. Matriks C berordo $m \times p$ dan nilai elemen-elemen c_{ij} diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i pada matriks A terhadap elemen kolom ke-j pada matriks B, kemudian hasilnya ditambahkan.

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Contoh 1.7 Perkalian Dua Matriks

Jika $A = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan matriks AB dan matriks BA.

Alternatif penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7(1)+2(-1)+(-2)(2) & -7(2)+2(3)+(-2)(0) \\ 1(1)+0(-1)+(-1)(2) & 1(2)+0(3)+(-1)(0) \\ 2(1)+3(-1)+(-1)(2) & 2(2)+3(3)+(-1)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7+(-2)+(-4) & -14+6+0 \\ 1+0+(-2) & 2+0+0 \\ 2+(-3)+(-2) & 4+9+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & -8 \\ -1 & 2 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks $AB = \begin{bmatrix} -13 & -8 \\ -1 & 2 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$.

Matriks BA tidak terdefinisi karena banyak kolom pada matriks B tidak sama dengan banyak baris pada matriks A.

Mari Mencoba 1.7

Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan matriks CD dan matriks DC.

Mari Berpikir Kritis

Sebuah industri rumah tangga memproduksi keripik tempe, keripik pisang, dan keripik kentang. Makanan tersebut dipasarkan ke tempat A, tempat B, dan tempat C. Banyaknya keripik (dalam stoples) disajikan pada matriks P berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 20 \\ 25 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

Kolom dalam matriks P berturut-turut menunjukkan tempat A, tempat B, dan tempat C. Adapun barisnya secara berturut-turut menunjukkan keripik tempe, keripik pisang, dan keripik kentang.

Harga untuk setiap stoples keripik (dalam rupiah) dinyatakan dalam matriks berikut.

$$Q = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 20.000 \\ 15.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{keripik tempe} \\ \text{keripik pisang} \\ \text{keripik kentang} \end{array} \end{array}$$

1. Tentukan matriks PQ.
2. Apakah matriks PQ merupakan matriks pendapatan untuk setiap tempat? Apabila iya, interpretasikan setiap elemen matriks tersebut, namun apabila tidak, carilah solusi agar menemukan matriks pendapatan untuk setiap tempat.

Berikut ini merupakan sifat-sifat perkalian dua matriks.

Sifat 1.3 **Sifat-Sifat Perkalian Dua Matriks**

Misalkan matriks A, B, C, dan I merupakan matriks-matriks yang berordo sama, I merupakan matriks identitas, maka berlaku:

- sifat asosiatif: $(AB)\,C = A\,(BC)$
- sifat identitas: $AI = IA = A$
- sifat distributif: $A(B \pm C) = AB \pm AC$ atau $(A \pm B)\,C = AC \pm BC$.

Mari Berpikir Kritis

Apakah perkalian dua matriks bersifat komutatif? Jelaskan!

Kamu dapat membaca Matematika dan Sains tentang penggunaan matriks dalam pemberian fitur efek filter pada gambar dengan memindai kode respons cepat di samping.

Pindai

Latihan D Perkalian Matriks

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Misalkan k adalah skalar dan A adalah matriks berordo $m \times n$, maka kA juga berordo $m \times n$.
2. Jika matriks A dan B berordo sama, dengan A adalah matriks nol dan B adalah sembarang matriks, maka AB juga matriks nol.
3. Tidak ada matriks yang memenuhi sifat "A bukan matriks nol dan $AA = A$".

Penerapan Konsep

4. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, dan X matriks berordo 2×2 yang memenuhi persamaan $P - 2X = 3Q$. Tentukan matriks X.
5. Diketahui $\begin{bmatrix} x-2 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai $x + y$.
6. **Ekonomi.** Tata, Putri, dan Qaila menabung di bank bersama-sama. Matriks besar tabungan mereka (dalam rupiah) sebagai berikut.

   $$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2.000.000 \\ 3.500.000 \\ 4.000.000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Tata} \\ \text{Putri} \\ \text{Qaila} \end{array}$$

   Apabila suku bunga tunggal 6% per tahun, tentukan matriks besarnya bunga tabungan mereka (dalam rupiah).
7. **Ekonomi.** Sebuah toko kue kering memiliki dua cabang, yaitu di Yogyakarta dan di Jakarta. Berikut ini adalah matriks banyaknya kue (dalam stoples) dengan kolom-kolom matriks berturut-turut menyatakan kue putri salju, kue nastar, dan kue sagu.

   $$\begin{bmatrix} 23 & 22 & 17 \\ 27 & 20 & 16 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Yogyakarta} \\ \text{Jakarta} \end{array}$$

Harga kue putri salju Rp40.000,00 per stoples; kue nastar Rp30.000,00 per stoples; dan kue sagu Rp27.000,00 per stoples. Dengan konsep perkalian matriks, tentukan pendapatan di setiap cabang toko kue apabila semua kue terjual.

E. Determinan Matriks dan Invers Matriks

1. Determinan Matriks

Konsep determinan matriks memiliki kaitan dengan penyelesaian sistem persamaan linear. Mari, kita memperhatikan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) berikut!

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Solusi umum dari SPLDV tersebut dapat ditunjukkan berikut ini.

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \text{ dan } y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \text{ dengan } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Kedua pecahan di atas memiliki penyebut sama yaitu $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ yang disebut *determinan matriks A*.

Definisi 1.7 **Determinan Matriks**

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks A dapat dinyatakan:

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Berdasarkan Definisi 1.7, penyelesaian SPLDV dengan cara matriks sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \text{ dengan } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \text{ dan } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah himpunan yang memuat pasangan berurutan (x, y).

Contoh 1.8 Determinan Matriks Berordo 2 × 2

1. Tentukan nilai determinan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$.
2. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$.

Alternatif penyelesaian:

1. $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \times (-5) - (-7) \times 3 = 26$.

   Jadi, determinan matriks A adalah 26.

2. Bentuk matriks dari $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$ adalah $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$.

   Nilai x dan y ditentukan sebagai berikut.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{(7 \times (-4)) - (14 \times (-1))}{(2 \times (-4)) - (1 \times (-1))} = \frac{-28 + 14}{-8 + 1} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{(2 \times 14) - (1 \times 7)}{(2 \times (-4)) - (1 \times (-1))} = \frac{28 - 7}{-8 + 1} = \frac{21}{-7} = -3$$

   Jadi, himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$ adalah himpunan yang memuat pasangan berurutan (2, –3).

Mari Mencoba 1.8

1. Diketahui matriks $M = \begin{bmatrix} 9 & x \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$ dan det $M = 9$, tentukan nilai x.
2. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$.

Kita juga dapat menentukan determinan matriks dengan Metode Sarrus dan Metode Ekspansi Kofaktor.

a. Metode Sarrus

Bagaimana cara menentukan determinan matriks berordo 3 × 3?

Cara menentukan determinan matriks berordo 3 × 3 dengan Metode Sarrus adalah dengan menyalin elemen-elemen pada kolom pertama dan kolom kedua dari matriks tersebut ke sebelah kanan. Setelah itu, determinan matriks berordo 3 × 3 diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan hasil perhitungan enam diagonal (elemen setiap diagonal dikalikan terlebih dahulu), seperti yang ditunjukkan berikut ini.

Misalnya $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka determinan matriks A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|ccc} & & & (-) & (-) & (-) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ & & & (+) & (+) & (+) \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Catatan: Metode Sarrus digunakan untuk menentukan determinan matriks berordo 3 × 3. Metode ini ditemukan oleh matematikawan Prancis bernama Pierre Frédéric Sarrus.

b. Metode Ekspansi Kofaktor

Metode Ekspansi Kofaktor digunakan untuk menentukan determinan berordo lebih dari 2 × 2.

Definisi 1.8 **Minor dan Kofaktor Matriks**

Jika A adalah sebuah matriks persegi, maka minor elemen a_{ij} dinotasikan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari sebuah matriks yang diperoleh setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan. Kofaktor elemen baris ke-i dan kolom ke-j adalah $k_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Kamu dapat mempelajari penjelasan berikut untuk memahami minor dan kofaktor.

Misalkan A adalah matriks berordo 3 × 3. Minor a_{22} diperoleh dengan menghilangkan elemen pada baris kedua dan kolom kedua.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{maka } M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Baris kedua dan kolom kedua dihilangkan

Kofaktor elemen a_{22} adalah $k_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$

Kofaktor elemen a_{23} adalah $k_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$

Matriks kofaktor A:

$$K(A) = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, determinan matriks dengan ekspansi kofaktor dan minor dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.9 **Determinan Matriks Metode Ekspansi Kofaktor**

Jika A adalah sebuah matriks persegi (ordo lebih dari 2 × 2), maka determinan matriks A dapat ditentukan sebagai berikut:

- $\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, k_{ij} = a_{1j}\, k_{1j} + a_{2j}\, k_{2j} + \ldots + a_{nj}\, k_{nj}$

  (ekspansi kofaktor minor kolom ke-j)
- $\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, k_{ij} = a_{i1}\, k_{i1} + a_{i2}\, k_{i2} + \ldots + a_{in}\, k_{in}$

  (ekspansi kofaktor minor baris ke-i)

Contoh 1.9 Determinan Matriks

Tentukan determinan matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

Alternatif penyelesaian I:

Determinan matriks P dengan Metode Sarrus.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad (-60)\ (-18)\ (-24) \\ |P| = \left|\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{matrix} \\ \qquad\qquad (24)\ (30)\ (36) \end{array}$$

$= (1 \times 6 \times 4) + (3 \times 2 \times 5) + (2 \times 2 \times 9) - (5 \times 6 \times 2) - (9 \times 2 \times 1) - (4 \times 2 \times 3)$

$= 24 + 30 + 36 + -60 - 18 - 24$

$= -12$

Jadi, determinan matriks P adalah –12.

Alternatif penyelesaian II:

Kita akan menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama untuk menentukan determinan matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

$$|P| = 1\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$= 1(6 \times 4 - 9 \times 2) - 3(2 \times 4 - 5 \times 2)\ \ 2(2 \times 9 - 5 \times 6)$

$= 1(24 - 18) - 3(8 - 10) + 2(18 - 30)$

$= 1(6) - 3(-2) + 2(-12)$

$= 6 + 6 - 24$

$= -12$

Jadi, determinan matriks P adalah -12.

Mari Mencoba 1.9

Tentukan determinan matriks $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ menggunakan:

1. Metode Sarrus
2. Metode Ekspansi Kofaktor kolom ketiga

Kita dapat menggunakan determinan matriks berordo 3 × 3 ini untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV). Perhatikan SPLTV berikut!

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Nilai x, y, dan z dapat ditentukan sebagai berikut.

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ \text{dan } z = \frac{D_z}{D},\ \text{dengan } D \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},\ \text{dan } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) adalah himpunan yang memuat tripel berurutan (x, y, z).

Eksplorasi Sifat Determinan Matriks

Pada aktivitas ini, kita akan menemukan sifat determinan matriks.

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Hitunglah nilai $|A|$, $|B|$, dan tentukan matriks AB.
2. Tentukan $|A|\,|B|$ dan $|AB|$. Dugaan apa yang dapat kamu peroleh?

Berdasarkan eksplorasi yang telah dilakukan, sifat determinan matriks dapat ditulis sebagai berikut.

Sifat 1.4 Sifat Determinan Matriks

Jika matriks A dan matriks B adalah matriks persegi yang berordo sama, maka $|AB| = |A|\,|B|$.

Mari Berpikir Kreatif

Selidiki apakah pernyataan berikut berlaku untuk semua matriks.

1. Jika $|A|$, $|B|$, dan $|C|$, maka $|ABC| = |A|\,|B|\,|C|$.
2. Jika A merupakan matriks berordo $n \times n$ dan k merupakan skalar, maka $|kA| = k^n|A|$.

2. Invers Matriks

Di dalam himpunan bilangan real, setiap bilangan a (bukan nol) memiliki kebalikan yaitu bilangan a^{-1} dengan sifat $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Bilangan a^{-1} disebut *invers* (kebalikan) perkalian dari a. Berdasarkan pengetahuan tersebut, invers matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.10 Invers Matriks

Jika A adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ dan I adalah matriks identitas berordo $n \times n$, maka terdapat matriks A^{-1} yang memenuhi sifat

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

A disebut *matriks nonsingular* dan A^{-1} disebut *invers* dari matriks A. Jika matriks A^{-1} tidak dapat ditemukan, maka A disebut dengan *matriks singular*.

Catatan:

Matriks A disebut *matriks nonsingular* jika $|A| \neq 0$

Matriks A disebut *matriks singular* jika $|A| = 0$

Rumus 1.1 Invers Matriks Berordo 2 × 2

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ memiliki invers jika dan hanya jika

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Invers matriks A dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, Adjoin\,(A)$$

dengan $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ dan $Adjoin\,(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Contoh 1.10 Invers Matriks Berordo 2 × 2

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Alternatif penyelesaian:

$|A| = 3(2) - (-1)(-7) = 6 - 7 = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, Adjoin\,(A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Jadi, invers matriks A adalah $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Mari Mencoba 1.10

Diketahui $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks $X^{-1} + Y^{-1}$. Apakah matriks $X^{-1} + Y^{-1}$ sama dengan matriks $(X + Y)^{-1}$?

Rumus 1.2 **Invers Matriks Berordo 3 × 3**

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ memiliki invers jika dan hanya jika $|A| \neq 0$. Jadi, invers matriks A dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \textit{Adjoin}\,(A)$$

Determinan matriks A dapat ditentukan dengan Metode Sarrus atau Metode Ekspansi Kofaktor Minor. Adapun *Adjoin* (A) dapat ditentukan dengan transpos dari matriks kofaktor.

Kamu dapat memperhatikan contoh berikut untuk melihat bagaimana menentukan invers matriks berordo 3 × 3.

Contoh 1.11 Invers Matriks Berordo 3 × 3

Tentukan invers dari matriks $P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Alternatif penyelesaian:

$$|P| = \left|\begin{matrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

$$= -2 + 6 + 0 + 1 - 0 - 6$$

$$= -1$$

$$K(P) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -7 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$Adjoin(P) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi, invers dari matriks P adalah $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Mari Mencoba 1.11

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Kita telah mempelajari cara menentukan invers matriks, selanjutnya kerjakan eksplorasi berikut untuk menemukan sifat invers matriks!

Eksplorasi Sifat Invers Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kita akan menemukan sifat invers matriks melalui pendekatan penyelesaian SPLDV.

Perhatikan sistem persamaan linear dua variabel berikut!

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Lakukan langkah-langkah berikut.

1. Sajikan SPLDV di atas dalam bentuk matriks.
2. Kalikan kedua ruas dengan $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}$.
3. Hitunglah hasil dari langkah kedua.

Misalkan $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, bagaimana dugaan kamu berdasarkan kegiatan eksplorasi tersebut?

Berdasarkan kegiatan eksplorasi yang telah kamu lakukan, sifat invers matriks dapat ditulis sebagai berikut.

Sifat 1.5 **Sifat Invers Matriks**

Jika A adalah matriks yang mempunyai invers, maka penyelesaian sistem persamaan linear $AX = B$ dapat ditentukan dengan $X = A^{-1}B$.

Latihan E Determinan Matriks dan Invers Matriks

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Jika A dan B merupakan matriks persegi yang berordo sama, maka $|A| + |B| = |A + B|$.
2. Matriks $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks singular.
3. Jika A adalah matriks yang mempunyai invers, maka $(A^{-1})^{-1} = A$.

Penerapan Konsep

4. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, dan matriks C memenuhi $AC = B$, tentukan nilai determinan C.
5. Tentukan $(AB^{-1})^{-1}$ jika diketahui $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
6. **Biologi.** Ahli biologi menempatkan tiga jenis bakteri ke dalam tabung reaksi yang diberi tanda Strain I, Strain II, dan Strain III. Ada tiga jenis makanan berbeda yang disediakan setiap hari, yaitu 980 satuan makanan A, 740 satuan makanan B, dan 680 satuan makanan C. Setiap bakteri mengonsumsi sejumlah satuan makanan setiap harinya yang disajikan pada matriks berikut.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \end{array}$$

Tentukan banyak bakteri dari Strain I, Strain II, dan Strain III dengan cara:

a. determinan matriks
b. invers matriks

Ringkasan

Pindai

Kamu dapat membaca ringkasan setiap bab dengan memindai kode respons cepat di samping.

Uji Kompetensi Bab 1

Kerjakanlah soal-soal uji kompetensi berikut ini dengan benar!

Pemahaman

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—4.

1. Jika diketahui matriks A, matriks B, dan matriks C dengan $AB = C$ dan C memiliki 3 baris, maka matriks B juga memiliki 3 baris.
2. Jika I dan A adalah matriks yang dapat dikalikan dan I adalah matriks identitas, maka $I^2A = A^2$.
3. Jika A dan B adalah matriks persegi yang berordo sama, maka $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
4. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang mempunyai invers dan berordo sama yaitu $n \times n$, maka matriks $B^{-1}(A^{-1}B^{-1})^{-1} A^{-1} = I$ dengan I berupa matriks identitas, berordo $n \times n$.

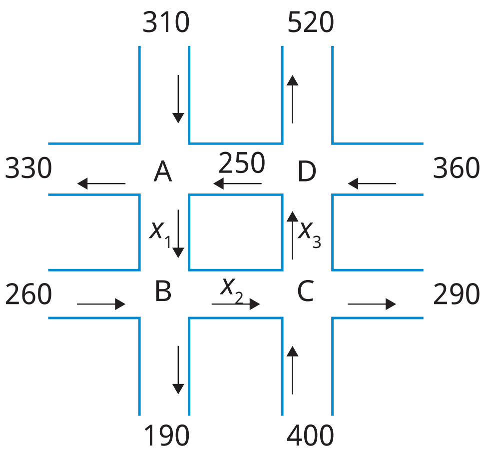
Penerapan

5. Tentukan nilai x, y, dan z jika matriks $A = \begin{bmatrix} 9 & x+y+z & 2x-y+2z \\ 12 & 7 & 3x+2y-z \\ 12 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks simetris.
6. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 1 \\ 3 & c+2 & -3 \\ -2 & 4 & -b \end{bmatrix}, \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Jika $B - A = C^t$ dan C^t merupakan tranpos matriks C, tentukan nilai $c\sqrt{b+a}$.

7. **Arus lalu lintas.** Perhatikan gambar berikut ini!



Gambar di atas menunjukkan arus lalu lintas di jalan raya pada suatu daerah. Angka-angka yang terdapat pada gambar menyatakan jumlah kendaraan yang melintas. Prinsip yang digunakan yaitu banyak kendaraan yang masuk menuju titik persimpangan A, B, C, dan D harus sama dengan jumlah kendaraan yang keluar. Buatlah matriks dari permasalahan tersebut, kemudian tentukan banyak kendaraan pada x_1, x_2, dan x_3.

8. **Konstruksi.** Sebuah pabrik sedang dibangun. Pemilik pabrik merencanakan untuk memasang atap baja ringan pada tiga bangunan di pabrik tersebut. Pemilik pabrik mengundang dua kontraktor agar menyerahkan tawaran terpisah untuk pemasangan atap baja ringan pada setiap bangunan. Berikut ini adalah tabel tawaran-tawaran yang diterima pabrik (dalam juta rupiah).

Tabel 1.6 Penawaran Pemasangan Atap Baja Ringan

	Bangunan 1	Bangunan 2	Bangunan 3
Kontraktor A	16	15	19
Kontraktor B	14	13	24

Tentukan jumlah tawaran setiap kontraktor menggunakan konsep matriks. Kontraktor mana yang akan dipilih untuk pemasangan baja ringan agar pengeluaran minimum?

9. **Reaksi fotosintesis.** Perhatikan persamaan reaksi fotosintesis berikut!

$$(x_1)CO_2 + (x_2)H_2O \rightarrow (x_3)C_6H_{12}O_6 + (x_4)O_2$$

Bentuk matriks setiap molekul dengan baris matriks berturut-turut menunjukkan unsur C, H, dan O tersaji sebagai berikut.

$$CO_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ H_2O = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_6H_{12}O_6 = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix},\ \text{dan } O_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jika $x_4 = 6$, tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 agar persamaan kimia setimbang. Dengan menggunakan konsep matriks, tentukan persamaan reaksi kesetimbangannya.

10. **Industri.** Sebuah pabrik furnitur akan membuat ranjang dan rak televisi dengan tiga pilihan jenis furnitur. Banyak furnitur yang akan dibuat ditampilkan dalam matriks P di bawah ini dengan kolom matriks berturut-turut menunjukkan ranjang dan rak televisi, sedangkan baris matriks berturut-turut menunjukkan jenis furnitur: *free standing furniture, built in furniture,* dan *knockdown furniture.*

$$P = \begin{bmatrix} 20 & 19 \\ 8 & 12 \\ 15 & 17 \end{bmatrix}$$

Setiap barang membutuhkan material furnitur yang berbeda. Luas bahan material (dalam m^2) tiap furnitur ditunjukkan pada matriks Q dengan kolom matriks berturut-turut menunjukkan material MDF (papan serat kepadatan menengah) dan *plywood* (kayu lapis), sedangkan baris matriks berturut-turut menunjukkan ranjang dan rak televisi.

$$Q = \begin{bmatrix} 30 & 29 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks PQ dan interpretasikan setiap elemennya.

11. **Ekonomi.** Hitunglah total keluaran setiap sektor jika ditargetkan permintaan akhir sektor P adalah 200 dan sektor Q adalah 300, dengan matriks teknologi sebagai berikut.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} P & Q \\ \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}14 \\ 0{,}02 & 0{,}20 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{sektor P} \\ \text{sektor Q} \end{array}$$

Catatan: rumus permintaan akhir

$U = (I - A)\ X$

dengan

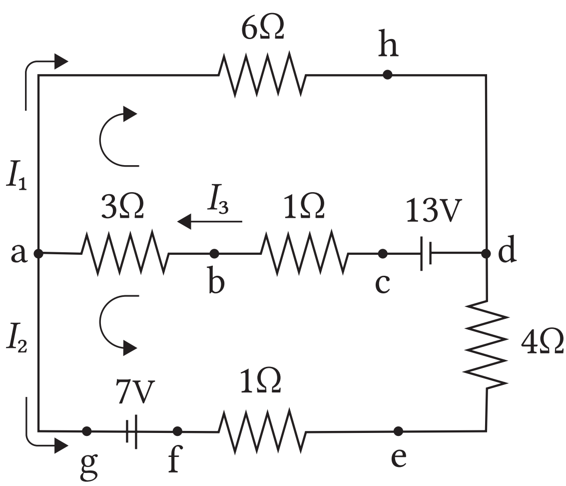
U = matriks permintaan akhir berordo $m \times 1$

I = matriks identitas berordo $m \times m$

A = matriks teknologi berordo $m \times m$

X = matriks total keluaran berordo $m \times 1$

12. **Arus listrik.** Perhatikan rangkaian arus listrik berikut!



Dari gambar di samping, berdasarkan hukum Kirchhoff I dan hukum Kirchhoff II diperoleh:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ -6I_1 - 4I_3 = -13 \\ -5I_2 - 4I_3 = -20 \end{cases}$$

Tentukan kuat arus I_1, I_2, dan I_3 (satuan ampere).

Penalaran

13. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, tentukan matriks $A^{2.017} + A^{2.020} + A^{2.023}$.

14. Perhatikan SPLDV berikut ini!

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$$

Himpunan penyelesaian SPLDV di atas memiliki anggota yang tak hingga banyaknya. Kaitkanlah banyaknya penyelesaian suatu SPLDV dengan determinan matriks. Buatlah kesimpulan.

15. Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 4c \end{bmatrix}$. Jika bilangan positif 2, a, dan $4c$ membentuk barisan geometri berjumlah 14 dan bilangan 2, b, dan $4c$ membentuk barisan aritmetika, tentukan $\det\left(\left(\left(\left(P^t\right)^{-1}\right)^t\right)^{-1}\right)^t$.

Proyek

Pesan Rahasia

Apakah kamu pernah memikirkan ketika mengirim pesan WhatsApp kepada seseorang, mengapa orang lain tidak dapat menerima pesan tersebut? Apakah WhatsApp dapat membaca pesan yang kita kirimkan? Jawabannya adalah orang lain tidak dapat menerima pesan tersebut, bahkan WhatsApp tidak dapat membaca pesan kita kepada seseorang karena WhatsApp membangun aplikasinya menggunakan metode enkripsi *end-to-end*.

Enkripsi adalah proses mengamankan suatu informasi dengan membuat informasi tersebut tidak dapat dibaca tanpa bantuan khusus. Dengan metode enkripsi *end-to-end*, pesan WhatsApp hanya dapat dibaca oleh *end user* atau pengguna aplikasi. Pesan dari *end user* 1 (pengirim pesan) hanya dapat dibaca oleh *end user* 2 (penerima pesan) secara otomatis. Walaupun pesan dikirim melalui WhatsApp, aplikasi tersebut tidak dapat membacanya karena pesan berbentuk enkripsi. Jadi, enkripsi *end-to-end* WhatsApp menjamin bahwa informasi atau pesan yang dikirim melalui aplikasi WhatsApp hanya dapat dibaca oleh pengirim dan penerima pesan sehingga penyadapan data dapat dihindari.

Metode enkripsi *end-to-end* yang digunakan WhatsApp merupakan kriptografi tingkat lanjut. Pada proyek ini, kita akan mencoba menerapkan kriptografi sederhana yaitu menggunakan matriks untuk membuat pesan rahasia kepada teman kita. Kamu dapat membentuk kelompok kerja terlebih dahulu, kemudian setiap kelompok melakukan langkah-langkah berikut.

Membuat pesan rahasia

1. Buatlah sebuah pesan yang akan dikirim untuk kelompok lain.
2. Buatlah aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai dengan urutan alfabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	...	...	...	26

3. Ubahlah pesan menjadi kode angka.

Huruf	...	...	...	...	...	dst.
Angka	...	...	...	...	...	dst.

4. Susunlah bilangan ke dalam matriks A berordo $3 \times n$, dengan urutan peletakan bilangan a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, ..., a_{3n}. Apabila banyak bilangan bukan kelipatan 3, maka pada akhir kode diisi nol agar matriks sempurna.
5. Buatlah sembarang matriks K yang merupakan matriks kunci berordo 3×3. Matriks K ini diketahui pengirim pesan dan penerima pesan.
6. Tentukan matriks KA.
7. Lakukan operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks KA.

   Catatan: Modulo (mod) adalah sebuah operasi yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lain. Mod 27 dipilih agar setiap elemen matriks KA dapat dikembalikan menjadi huruf sesuai dengan aturan langkah ke-3, yaitu dengan kode angka 0—26. Misalnya 28 mod 27 = 1, 27 mod 27 = 0, atau –14 mod 27 = 13.
8. Ubah kembali setiap elemen hasil mod 27 yang kamu peroleh dari langkah 7 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah ke-3.
9. Tulislah pesan rahasia, kemudian kirim pesan tersebut kepada kelompok lain.

Membaca pesan rahasia

1. Gunakan aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai dengan urutan alfabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	...	...	...	26

2. Ubahlah pesan yang telah diterima menjadi kode angka.
3. Susunlah matriks B dengan ordo $3 \times n$, dengan urutan peletakan bilangan $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, \ldots, a_{3n}$.
4. Penerima pesan mengetahui matriks K. Karena diketahui $B = KA$, bagaimana mencari matriks A? Tentukan matriks A.
5. Lakukan operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks A.
6. Ubah kembali elemen hasil mod 27 yang kamu peroleh dari langkah ke-5 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah ke-1.
7. Temukan isi dari pesan rahasia.

Tuliskan simpulan dari proyek yang kamu kerjakan.

Pengayaan

Kamu telah mempelajari matriks pada bab ini. Untuk memperkaya atau memperdalam pengetahuan dan keterampilan yang dimiliki, kamu dapat mempelajari cara menentukan invers matriks dengan metode operasi baris elementer melalui tautan *https://s.id/PengayaanBab1Matriks* atau dengan memindai kode respons cepat di samping.

Pindai

Refleksi

Kita dapat mengingat kembali pengalaman ketika mempelajari "Bab 1 Matriks" ini. Selanjutnya, refleksikan pengalaman belajar tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut!

1. Ceritakan sejauh mana manfaat yang dirasakan setelah kamu berdinamika pada bab ini!
2. Apa saja strategi belajar yang kamu gunakan untuk memahami bab ini? Apakah semua strateginya sudah membantumu untuk belajar secara optimal?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024
Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-335-1

Bab 2
POLINOMIAL

Salah satu kunci penting pembangunan berkelanjutan adalah ketahanan pangan. Bagaimana fungsi polinomial dapat digunakan untuk memodelkan masalah ketahanan pangan?

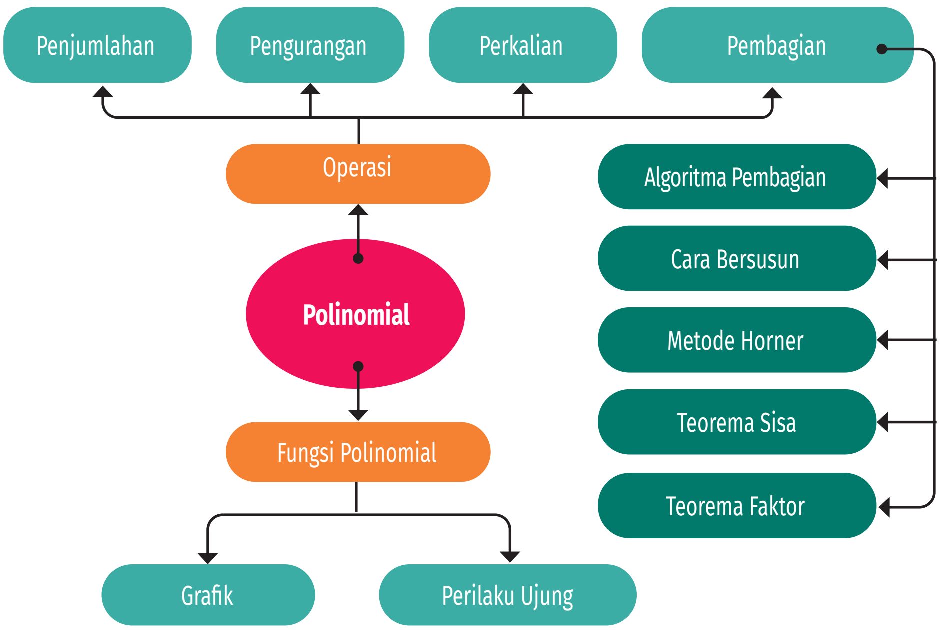
Sumber: donoem (2013)

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- menjelaskan definisi polinomial dan fungsi polinomial;
- mengidentifikasi karakteristik polinomial;
- melakukan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial;
- melakukan pembagian polinomial;
- menggunakan Teorema Sisa;
- melakukan pemfaktoran polinomial;
- menentukan pembuat nol polinomial;
- membuktikan identitas polinomial; dan
- melakukan pemfaktoran polinomial menggunakan identitas polinomial.

Peta Materi



Kata Kunci

polinomial, fungsi polinomial, algoritma pembagian, teorema sisa, teorema faktor, dan metode Horner.

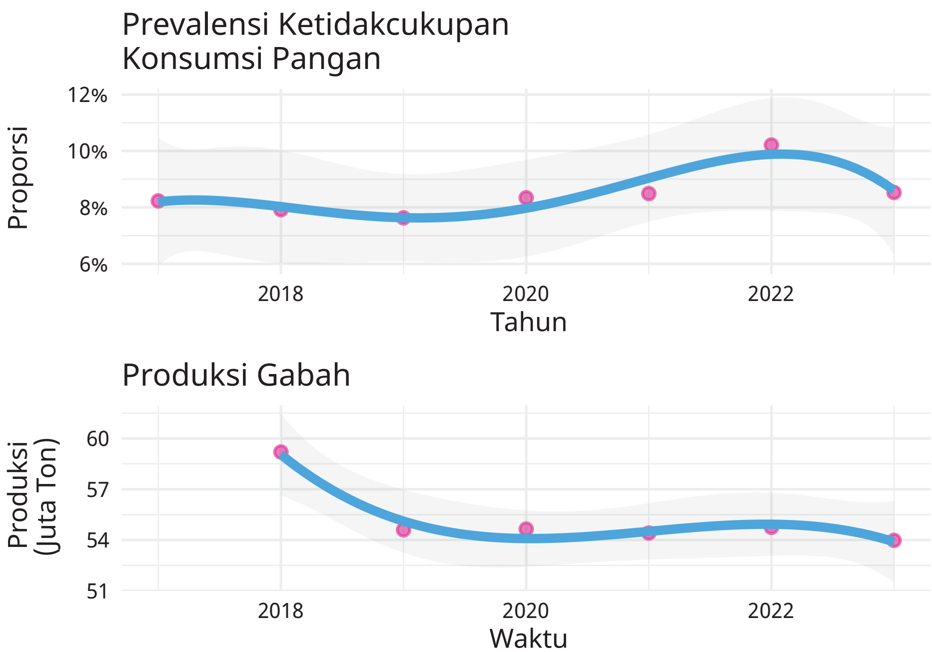
Pembangunan Berkelanjutan dan Polinomial

Tahukah kamu bahwa sebanyak 8,53% penduduk Indonesia mengonsumsi makanan yang kurang dari kebutuhannya? Karena pada umumnya penduduk Indonesia mengonsumsi nasi, apakah angka tersebut berhubungan dengan produksi gabah?

Gambar 2.1 Statistik Prevalensi Ketidakcukupan Konsumsi Pangan 2023

Sumber: Data BPS Susenas (2023)

Fungsi polinomial dalam bab ini sangat bermanfaat untuk memahami masalah ketahanan pangan tersebut. Gambar 2.2 menunjukkan bagaimana fungsi polinomial dapat memodelkan ketidakcukupan konsumsi pangan dan produksi gabah setiap tahunnya. Tren penting apa yang dapat kamu cermati? Kamu akan menjawabnya pada kolom Matematika dan Sains pada akhir Subbab A. Untuk itu, ayo, kita mulai belajar polinomial dengan penuh semangat!



Data: Badan Pusat Statistik, Susenas

Gambar 2.2 Penggunaan Fungsi Polinomial untuk Memodelkan Masalah Ketahanan Pangan

A. Polinomial dan Fungsi Polinomial

Pada subbab ini kamu akan mempelajari polinomial dan fungsi polinomial. Kamu juga akan diajak untuk menganalisis suatu polinomial dengan mengidentifikasi derajat polinomial tersebut.

1. Pengertian Polinomial

Sebelum melihat definisi formal polinomial, kamu dapat mengerjakan aktivitas eksplorasi berikut untuk mengenal penyusun dari polinomial, yaitu monomial.

Eksplorasi **Mengenal Monomial**

Di jenjang sekolah menengah pertama, kamu telah belajar tentang bentuk-bentuk aljabar. Pada aktivitas ini, kamu akan menggunakan pengetahuan mengenai bentuk-bentuk aljabar tersebut untuk mengidentifikasi karakteristik monomial.

1. Kelompokkan bentuk-bentuk aljabar berikut menjadi dua bagian.

   $\sqrt[3]{P}; 2x^2y; -8; \frac{2}{m}; 1,24k^4;$ dan $5a^{-6}$

   Selanjutnya, jelaskan alasan kamu dalam mengelompokkan bentuk-bentuk tersebut.

2. Salah satu cara untuk mengelompokkan bentuk-bentuk aljabar pada nomor 1 adalah sebagai berikut.

   Kelompok 1: $2x^2y$, -8, dan $1,24k^4$

   Kelompok 2: $\sqrt[3]{p}$, $\frac{2}{m}$, dan $5a^{-6}$

   Menurut kamu, pengelompokan tersebut didasarkan pada apa?

3. Pada nomor 2, bentuk-bentuk aljabar dalam kelompok pertama disebut *monomial*, sedangkan bentuk-bentuk aljabar dalam kelompok kedua bukanlah monomial. Jika demikian, menurut kamu, apa yang dimaksud dengan monomial?

Monomial adalah suatu bilangan, variabel berpangkat bilangan cacah, atau perkalian bilangan dengan satu atau lebih variabel berpangkat bilangan cacah. Dengan demikian, monomial juga dapat dikatakan sebagai sebuah ekspresi matematika yang terdiri atas satu suku. *Konstanta* merupakan monomial yang tidak memuat variabel, misalnya -8 dan 25. Adapun faktor numerik dari suatu monomial disebut *koefisien*.

Monomial merupakan salah satu jenis polinomial. Seperti pada bilangan real, jika kita menjumlahkan dua bilangan real akan menghasilkan bilangan real, penjumlahan dari dua atau lebih monomial merupakan polinomial. Untuk lebih jelasnya, perhatikan definisi polinomial berikut!

Definisi 2.1 **Definisi Polinomial**

Polinomial adalah bentuk aljabar yang berupa monomial atau penjumlahan dari dua atau lebih monomial.

Monomial-monomial penyusun suatu polinomial disebut *suku*. Untuk lebih memahami polinomial, perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 2.1 Mengidentifikasi Polinomial

Tentukan apakah setiap bentuk aljabar berikut merupakan polinomial atau bukan.

1. $4x^3y - 3x^2$
2. $x + 2\sqrt{x}$
3. $2x^3 - 5x^{-2} + 1$

Alternatif penyelesaian:

1. Bentuk $4x^3y - 3x^2$ merupakan polinomial karena $4x^3y - 3x^2$ dan $-3x^2$ merupakan monomial.
2. Bentuk $x + 2\sqrt{x}$ bukan polinomial karena $2\sqrt{x}$ bukan monomial. Hal ini karena pangkat variabel pada $2\sqrt{x}$ bukan bilangan cacah.
3. Bentuk $2x^3 - 5x^{-2} + 1$ bukan polinomial karena $-5x^{-2}$ bukan monomial. Hal ini karena pangkat variabel pada $-5x^{-2}$ bukan bilangan cacah.

Mari Mencoba 2.1

Apakah $\frac{2x^2}{y} + xy^2$, $4 - x - 2x^4$, dan $3xy^4 + 5x^3y^2 - 7x$ merupakan polinomial? Jelaskan alasannya!

2. Derajat Suatu Polinomial

Salah satu karakteristik polinomial adalah derajatnya. Untuk mengetahui derajat suatu polinomial, kerjakan eksplorasi berikut ini!

Eksplorasi Mengetahui Derajat Suatu Polinomial

1. Berikut ini adalah pasangan monomial dan derajatnya.

Monomial	Derajat
$4x^5$	5
$\frac{3}{4}x^2y^7$	9
$0{,}12x$	1
$2{,}17x^3yz^3$	7

Dari contoh-contoh tersebut, menurutmu, bagaimana cara menentukan derajat suatu monomial?

2. Sekarang perhatikan pasangan polinomial dan derajatnya berikut ini.

Polinomial	Derajat
$2x^3$	3
$x - 5$	1
$5x^4y^2 + xy^2 - 2x^5y^6$	11
$0{,}13x^3 + 1{,}56x^2 - 2{,}24x + 1{,}72$	3

Berdasarkan informasi pada tabel di atas, bagaimana cara menentukan derajat suatu polinomial?

Dalam aktivitas eksplorasi sebelumnya kamu telah menemukan cara menentukan derajat suatu monomial. Bandingkan dengan definisi berikut!

Definisi 2.2 Derajat Monomial

Jika a adalah koefisien yang tak nol, derajat monomial ax^n adalah n. Derajat suatu monomial yang terdiri atas beberapa variabel adalah jumlah dari eksponen semua variabel tersebut.

Misalnya kita memiliki monomial $2x^2yz^3$. Monomial ini variabelnya x, y, dan z dan masing-masing memiliki eksponen 2, 1, dan 3. Dengan demikian, derajat monomialnya adalah $2 + 1 + 3 = 6$.

Setiap suku polinomial merupakan monomial. Oleh karena itu, penentuan derajat suatu polinomial bergantung pada monomial-monomial yang menjadi suku polinomial tersebut.

Definisi 2.3 **Derajat Polinomial**

Derajat suatu polinomial adalah derajat tertinggi suku-sukunya.

Untuk lebih memahami derajat polinomial, cermati contoh berikut ini!

Contoh 2.2 Menentukan Derajat Polinomial

Tentukan derajat polinomial $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$.

Alternatif penyelesaian:

Derajat $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ sama dengan derajat sukunya yang paling tinggi. Derajat suku-suku polinomial tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

Derajat: **3** Derajat: **1**

$$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Derajat: **2** Derajat: **0**

Derajat tertinggi sukunya adalah 3 sehingga derajat polinomial tersebut adalah 3.

Mari Mencoba 2.2

Tentukan derajat $13{,}13x^2y^3z^4 - 8{,}98xy^4z^5 + 10{,}18$.

Mari Mengomunikasikan

Rahma menganggap bahwa derajat 0 adalah 0. Dia beralasan bahwa 0 merupakan konstanta dan dapat dituliskan kembali menjadi $0x^0$. Apakah kamu setuju dengan Rahma? Mengapa?

Mari Berpikir Kreatif

Tanpa melakukan penjabaran secara utuh, carilah cara untuk menentukan derajat polinomial $(6x^5 - 5)^2 (2x^2 + 7)^3$. Selanjutnya, gunakan cara tersebut untuk menentukan derajat setiap polinomial berikut.

1. $(x^2 - 1)^{15} (x^5 + 3)^{10}$
2. $(4 - 16x^4)^2 (3 - x^2)^3 (1 + x)^4$

3. Fungsi Polinomial dan Grafiknya

Bentuk polinomial dapat digunakan untuk mendefinisikan suatu fungsi. Untuk mengetahui hal ini, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut ini!

Eksplorasi Pertandingan dalam Liga

Dalam dunia olahraga, liga biasanya dipilih sebagai format kompetisi antartim. Dengan format seperti itu, setiap tim akan bertanding dengan semua tim lainnya. Selain itu, pada kebanyakan liga, setiap dua tim akan bertanding dua kali, kandang dan tandang.

Sebagai contoh sederhana, sebuah liga terdiri atas tiga tim, yaitu A, B, dan C. Total banyaknya pertandingan dalam liga tersebut adalah 6, yaitu A lawan B, A lawan C, B lawan A, B lawan C, C lawan A, dan C lawan B. Tim yang disebut pertama dalam pertandingan tersebut bertindak sebagai tuan rumah (kandang).

1. Jika dalam liga terdapat 4 tim, berapa jumlah pertandingan? Bagaimana jika dalam liga tersebut terdapat 5, 10, atau 20 tim?
2. Buatlah sebuah rumus untuk menentukan jumlah pertandingannya dalam sebuah liga jika terdapat x tim.
3. Rumus yang kamu temukan pada nomor 2 dapat dinyatakan ke dalam fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, dan c adalah bilangan real. Tentukan nilai a, b, dan c tersebut.
4. Fungsi yang kamu temukan pada nomor 3 merupakan salah satu contoh fungsi polinomial. Dari keterangan tersebut, cobalah untuk menduga apa yang dimaksud dengan fungsi polinomial.

Eksplorasi yang telah kamu lakukan menghasilkan salah satu jenis fungsi polinomial, yaitu fungsi kuadrat. Selain fungsi kuadrat, masih banyak fungsi yang termasuk kategori fungsi polinomial. Salah satunya adalah fungsi linear. Kamu sudah mempelajari fungsi linear di sekolah menengah pertama.

Untuk mengetahui pengertian fungsi polinomial secara lebih jelas, perhatikan definisi berikut ini!

Definisi 2.4 **Fungsi Polinomial**

Fungsi polinomial dalam variabel x adalah fungsi yang memiliki bentuk umum:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

dengan koefisien-koefisiennya, yaitu a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, dan a_0, adalah bilangan-bilangan real, $a_n \neq 0$, dan n adalah bilangan cacah.

Serupa dengan bentuk polinomial, fungsi polinomial juga memiliki derajat. Derajat fungsi polinomial yang disebutkan dalam definisi di atas adalah n. Suku fungsi polinomial yang memiliki derajat tertinggi disebut *suku utama*. Koefisien suku utama tersebut dinamakan *koefisien utama*.

Karakteristik suatu fungsi dapat dilihat grafiknya. Bagaimana grafik fungsi polinomial? Cermati Contoh 2.3 berikut!

Contoh 2.3 Menggambar Grafik Fungsi Polinomial

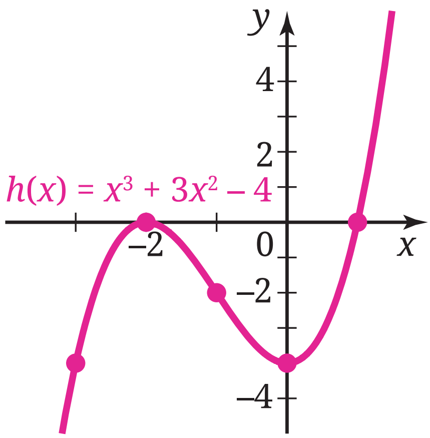
Gambarlah grafik $h(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

Alternatif penyelesaian:

Grafik fungsi h dapat digambar dengan membuat tabel nilai fungsi tersebut untuk beberapa nilai x terlebih dahulu.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$y = h(x)$	–20	–4	0	–2	–4	0	16
(x, y)	(–4, –20)	(–3, –4)	(–2, 0)	(–1, –2)	(0, –4)	(1, 0)	(2, 16)

Selanjutnya, kita menggambar titik-titik (x, y) pada bidang koordinat untuk kemudian dihubungkan dengan kurva halus. Grafik fungsi h ditunjukkan pada gambar berikut.

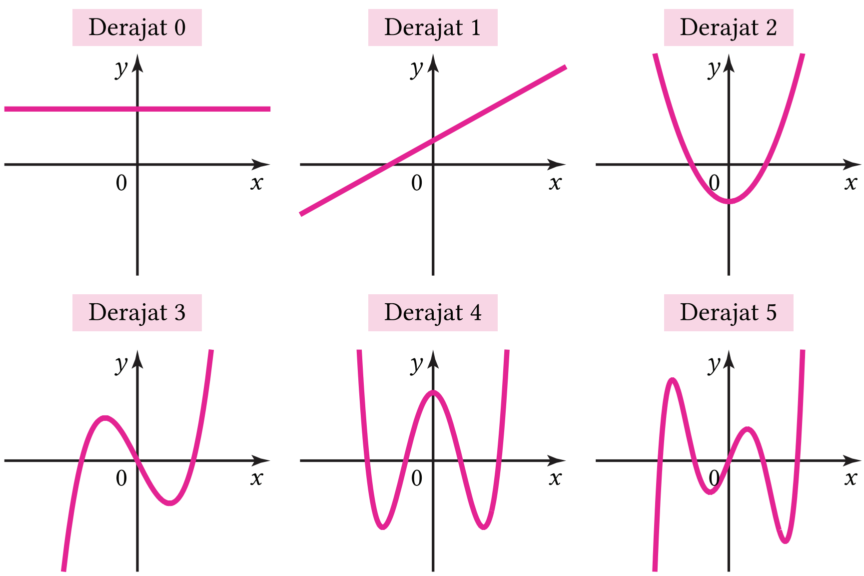


Gambar 2.3 Grafik Fungsi $h(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Mari Mencoba 2.3

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$.

Pada Contoh 2.3 kamu telah melihat grafik fungsi polinomial. Contoh-contoh lainnya ditunjukkan pada Gambar 2.4 berikut.



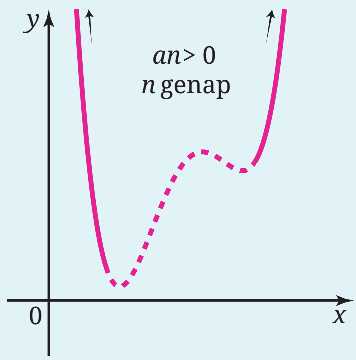
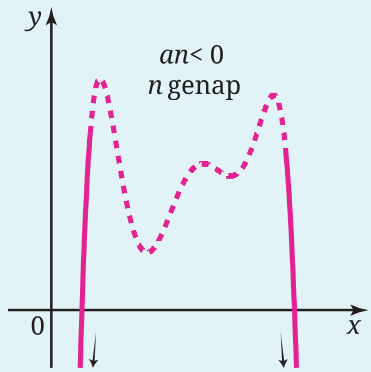
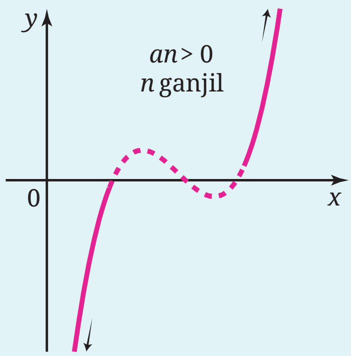
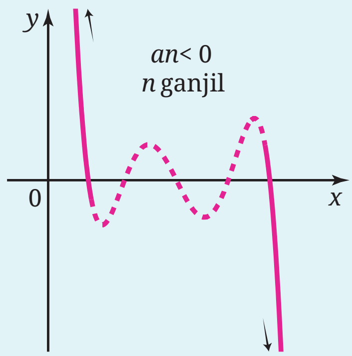
Gambar 2.4 Grafik Fungsi Polinomial Berderajat 0 sampai dengan 5

Salah satu karakteristik grafik fungsi polinomial adalah perilaku ujungnya. *Perilaku ujung* merupakan perilaku dari suatu grafik ketika x mendekati tak hingga atau negatif tak hingga. Perilaku ujung dari grafik fungsi polinomial ditentukan oleh suku utamanya dan dideskripsikan pada sifat berikut.

Sifat 2.1 Perilaku Ujung Grafik Fungsi Polinomial

Jika $a_n x^n$ dengan $n > 0$ adalah suku utama dari suatu polinomial, maka perilaku ujung grafiknya dapat dibagi menjadi empat kategori berikut.

Tabel 2.1 Perilaku Ujung Grafik Fungsi Polinomial

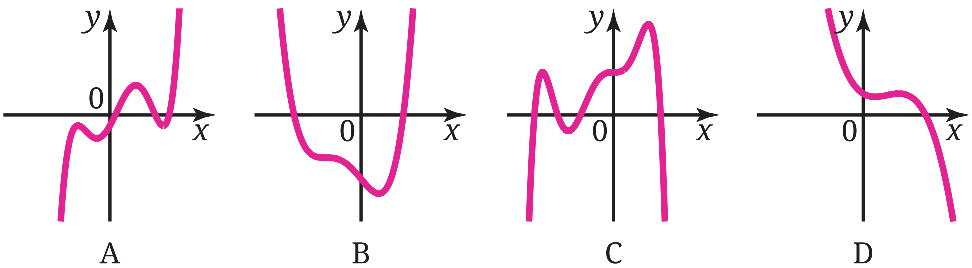
n	$a_n > 0$	$a_n < 0$
Genap	 Grafiknya mengarah ke kiri atas dan ke kanan atas (↖, ↗)	 Grafiknya mengarah ke kiri bawah dan ke kanan bawah (↙, ↘)
Ganjil	 Grafiknya mengarah ke kiri bawah dan ke kanan atas (↙, ↗)	 Grafiknya mengarah ke kiri atas dan ke kanan bawah (↖, ↘)

Perhatikan contoh berikut ini untuk lebih memahami penggunaan perilaku ujung grafik fungsi polinomial.

Contoh 2.4 Menggunakan Perilaku Ujung Grafik Fungsi Polinomial

Dengan mengidentifikasi perilaku ujungnya, pasangkan setiap fungsi polinomial berikut dengan salah satu grafik A—D pada Gambar 2.5 yang paling sesuai.

1. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 3$
2. $g(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$
3. $h(x) = -x^6 - \frac{11}{4}x^5 + x^4 + 5x^3 + 2$
4. $k(x) = 25x^5 - 20x^4 - 26x^3 + 12x^2 + 9x - 1$



Gambar 2.5 Grafik-Grafik Fungsi Polinomial

Alternatif penyelesaian:

Untuk memasangkan fungsi polinomial dengan grafiknya, kita perlu mengidentifikasi derajat polinomial tersebut dan tanda koefisien utamanya.

No.	Suku Utama	Derajat	Tanda Koefisien Utama	Perilaku Ujung	Grafik
1.	x^4	4, genap	positif	↖, ↗	B
2.	$-x^3$	3, ganjil	negatif	↖, ↘	D
3.	$-x^6$	6, genap	negatif	↙, ↘	C
4.	$25x^5$	5, ganjil	positif	↙, ↗	A

Mari Mencoba 2.4

Jelaskan perilaku ujung grafik $f(x) = -2x^7 - 3x^3 + 1$.

Aktivitas Interaktif

Untuk menyelidiki bagaimana perilaku ujung dari fungsi-fungsi polinomial, kamu dapat memindai kode respons cepat atau membuka tautan berikut.

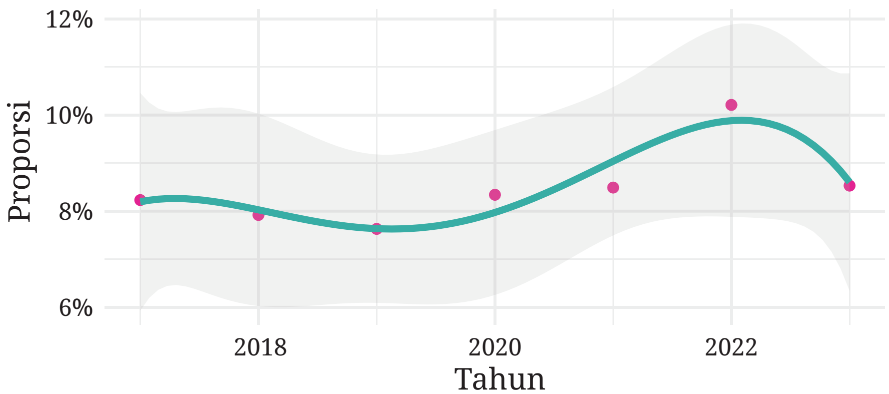
https://s.id/ujung-polinom

Pindai

Matematika dan Sains

Memahami Isu Ketahanan Pangan di Indonesia

Fungsi polinomial dapat digunakan untuk memahami permasalahan ketahanan pangan. Dengan fungsi ini, kita dapat memodelkan prevalensi ketidakcukupan konsumsi pangan penduduk Indonesia setiap tahunnya.

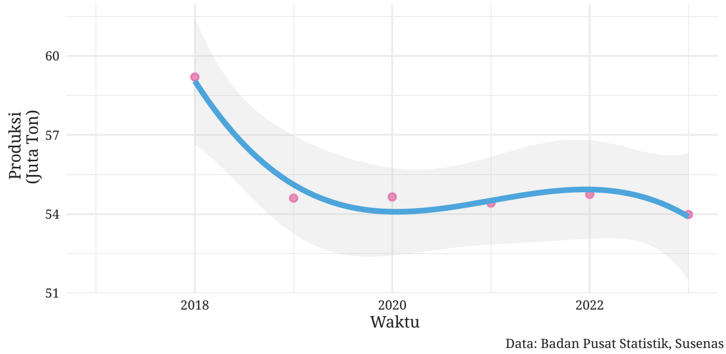


Data: Badan Pusat Statistik, Susenas

Gambar 2.6 Prevalensi Ketidakcukupan Konsumsi Pangan Setiap Tahunnya

Jika kamu perhatikan, model pada Gambar 2.6 tidak benar-benar melalui titik-titiknya. Hal ini karena adanya galat dalam model tersebut. Meskipun demikian, model tersebut tampak sederhana sehingga kamu lebih mudah memahami tren datanya. Coba deskripsikan tren yang kamu lihat!

Gambar berikut menunjukkan tren produksi gabah di Indonesia mulai tahun 2018 sampai dengan tahun 2023.



Gambar 2.7 Produksi Gabah Setiap Tahunnya

Produksi gabah tersebut penting bagi negara kita karena sebagian besar penduduknya mengonsumsi nasi sebagai makanan utama. Deskripsikan tren produksi gabah di Indonesia setiap tahunnya!

Latihan A Polinomial dan Fungsi Polinomial

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Benar atau salah? Bentuk aljabar $6{,}24x^2 - 3{,}41x + 7{,}69$ merupakan suatu polinomial.
2. Benar atau salah? Grafik $f(x) = 2x^3 - x + 4$ melalui titik $(-2, 18)$.
3. Perilaku ujung fungsi polinomial $f(x) = -5x^7 + 2x^4 - 8$ adalah ....

Penerapan Konsep

4. Tentukan apakah setiap bentuk aljabar berikut merupakan polinomial.

   a. $9 - x + 3x^2 - 4x^3$

   b. $4a^2 \mathrm{b} - 9ab^2$

   c. $\dfrac{x}{y^2} - 2x^2 y$

5. Cari derajat setiap polinomial berikut.

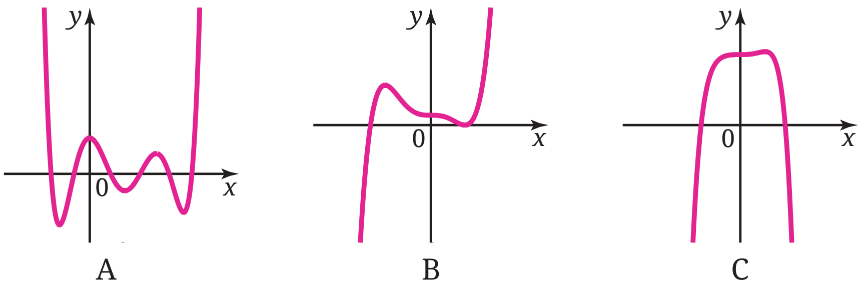
   a. $x^6 - 12x^4 + 3x^2 - 10$

   b. $12x^2 y - 5xy^2 z + 10$

   c. $\dfrac{1}{2}p^4 - 2pq + \dfrac{3}{4}q^3$

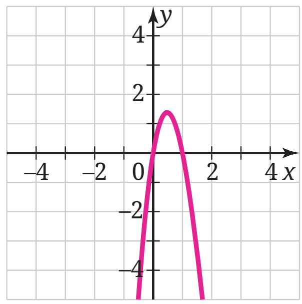
6. Sketsalah grafik $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$.

7. Dari ketiga grafik fungsi polinomial pada gambar di bawah, tentukan grafik yang paling tepat untuk $P(x) = -2x^6 + x^3 + 3$. Jelaskan alasannya.

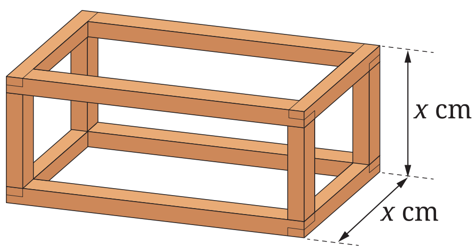


8. Galang menggambar grafik $f(x) = x^3 - 7x^2 + 6x$ dengan menggunakan kalkulator grafik. Hasil grafiknya tampak pada gambar di samping.

   Galang menyadari bahwa perilaku ujung grafik pada gambar tersebut tidak sesuai dengan perilaku ujung grafik fungsi polinomial dengan derajat ganjil dan koefisien utama positif. Apa yang menyebabkan ketidaksesuaian tersebut?

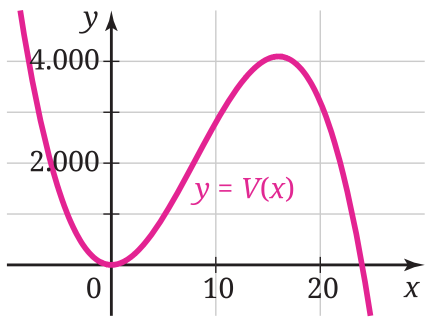


9. Kayu sepanjang 192 cm akan digunakan sebagai rangka untuk membuat sebuah kandang burung. Kandang tersebut berbentuk balok yang sepasang sisinya berbentuk persegi seperti pada gambar.



   a. Nyatakan volume V kandang tersebut sebagai fungsi terhadap x. (Abaikan ketebalan kayunya.)

   b. Paulina menggambarkan grafik fungsi V yang ditemukan pada bagian a seperti pada gambar di samping.



Apakah grafik Paulina sesuai dengan daerah asal fungsi tersebut? Jika sudah sesuai, jelaskan alasannya. Jika tidak, bagaimana seharusnya?

c. Berdasarkan grafik fungsi V, perkirakan volume maksimum kandang tersebut.

B. Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

Polinomial memiliki hubungan yang dekat dengan bilangan. Supaya dapat memahaminya, kerjakan eksplorasi berikut ini!

Eksplorasi **Membandingkan Bilangan dengan Polinomial**

Melalui aktivitas ini, kamu akan membandingkan bilangan dengan polinomial. Cermati bilangan dan polinomial yang bersesuaian di dalam tabel berikut untuk menemukan hubungannya. Gunakan hubungan yang telah kamu temukan untuk mengisi bagian-bagian kosong dalam tabel.

53	50 + 3	$5x + 3$
375	300 + 70 + 5	$3x^2 + 7x + 5$
2.298	2.000 + 200 + 90 + 8	$2x^3 + 2x^2 + 9x + 8$
6.311	6.000 + 300 + 10 + 1	
17.742		

Menurut kamu, apa kesamaan antara bilangan dan polinomial pada baris yang sama di dalam tabel tersebut? Apa perbedaannya?

Kamu telah menemukan kesamaan antara bilangan dan polinomial. Oleh karena itu, operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada polinomial dapat dilakukan dengan cara yang serupa seperti pada bilangan.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Bagaimana cara melakukan penjumlahan dan pengurangan polinomial? Untuk mengetahuinya, cermati eksplorasi berikut!

Eksplorasi — Melakukan Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

1. Salah satu cara melakukan penjumlahan dan pengurangan bilangan adalah dengan cara bersusun. Perhatikan contoh perhitungan bersusun berikut ini!

$$\begin{array}{r} 2.735 \\ 6.241 \\ \hline 8.976 \end{array} + \qquad \begin{array}{r} 9.465 \\ 2.334 \\ \hline 7.131 \end{array} -$$

   Jelaskan cara melakukan penjumlahan dan pengurangan bersusun tersebut!

2. Dengan cara yang serupa, lengkapi penjumlahan dan pengurangan polinomial dengan cara bersusun berikut!

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \\ 6x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} + \qquad \begin{array}{l} 9x^3 + 4x^2 + 6x + 5 \\ 2x^3 + 3x^2 + 3x + 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} -$$

   Jelaskan cara penjumlahan dan pengurangan polinomial tersebut! Sifat operasi apa yang kamu gunakan?

3. Setelah menyelesaikan langkah nomor 2, temanmu menemukan cara yang berbeda. Berikut ini adalah caranya.

   Penjumlahan Polinomial

$$\begin{aligned} (2x^3 + 7x^2 + 3x + 5) + (6x^3 + 2x^2 + 4x + 1) &= 2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 + 6x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \\ &= 2x^3 + 6x^3 + 7x^2 + 2x^2 + 3x + 4x + 5 + 1 \\ &= (2 + 6)x^3 + (7 + 2)x^2 + (3 + 4)x + (5 + 1) \\ &= 8x^3 + 9x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

   Pengurangan Polinomial

$$\begin{aligned} (9x^3 + 4x^2 + 6x + 5) - (2x^3 + 3x^2 + 3x + 4) &= 9x^3 + 4x^2 + 6x + 5 - 2x^3 - 3x^2 - 3x - 4 \\ &= 9x^3 - 2x^3 + 4x^2 - 3x^2 + 6x - 3x + 5 - 4 \\ &= (9 - 2)x^3 + (4 - 3)x^2 + (6 - 3)x + (5 - 4) \end{aligned}$$

   Menurutnya cara tersebut pada dasarnya sama dengan cara pada nomor 2. Apakah kamu setuju? Jelaskan alasanmu!

Dari eksplorasi tersebut kamu telah menemukan prosedur untuk melakukan penjumlahan dan pengurangan polinomial. Ketika melakukannya, kamu menjumlahkan dan mengurangkan suku-suku yang sejenis. *Suku-suku sejenis* adalah suku-suku yang memiliki variabel sama dan eksponen dari variabelnya juga sama.

Tabel 2.2 Contoh Suku-Suku Sejenis dan Tidak Sejenis

Suku-Suku Sejenis	Bukan Suku-Suku Sejenis
$3x, -7x, -\frac{1}{5}x$	$11x, 4x^2, \frac{2}{3}x^4$
$\frac{1}{2}x^3, 4x^3, -2x^3$	$4x^3, -2x^4, -x^5$
$2x^2yz^3, \frac{1}{7}yx^2z^3, -5z^3yx^2$	$\frac{3}{4}x^2yz^3, 2x^2y, -7xy^2z^3$

Untuk menjumlahkan dan mengurangkan suku-suku sejenis, kamu dapat menggunakan sifat distributif seperti ilustrasi berikut ini.

$2x^3 + 6x^3 = (2 + 6)x^3 = 8x^3$

$4x^2 - 7x^2 = (4 - 7)x^2 = -3x^2$

Supaya lebih memahami penjumlahan dan pengurangan polinomial, perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.5 Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Tentukan hasil dari:

1. $(2x^3 - 4x^2 + x - 11) + (5x^3 + x^2 - 3x - 9)$
2. $(x^4 - 3x^2 + 4x - 6) - (5x^3 + 2x^2 - x - 4)$

Alternatif penyelesaian:

1. Penjumlahan polinomial yang diberikan dapat dilakukan seperti berikut.

$(2x^3 - 4x^2 + x - 11) + (5x^3 + x^2 - 3x - 9)$

$= 2x^3 - 4x^2 + x - 11 + 5x^3 + x^2 - 3x - 9$ Hilangkan tanda kurung

$= 2x^3 + 5x^3 - 4x^2 + x^2 + x - 3x - 11 - 9$ Kelompokkan suku-suku sejenis

$= 7x^3 - 3x^2 - 2x - 20$ Sifat distributif

Jadi, hasilnya adalah $7x^3 - 3x^2 - 2x - 20$.

2. Pengurangan polinomial yang diberikan dapat dilakukan seperti berikut.

$$
\begin{aligned}
&(x^4 - 3x^2 + 4x - 6) - (5x^3 + 2x^2 - x - 4) \\
&\quad = x^4 - 3x^2 + 4x - 6 - 5x^3 - 2x^2 + x + 4 && \text{Hilangkah tanda kurung} \\
&\quad = x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 4x + x - 6 + 4 && \text{Kelompokkan suku-suku sejenis} \\
&\quad = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x - 2 && \text{Sifat distributif}
\end{aligned}
$$

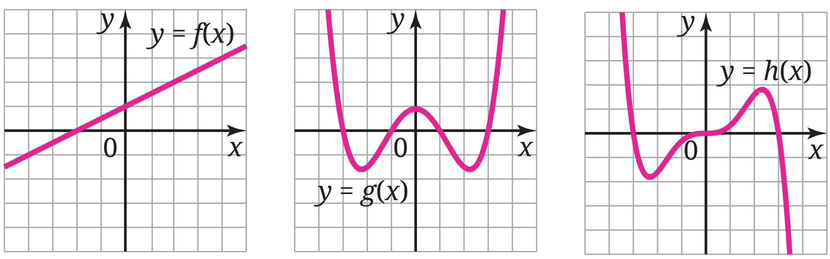
Jadi, hasilnya adalah $x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x - 2$.

Mari Mencoba 2.5

Jumlahkan $(2a^2b - 3ab^2 + 5)$ dengan $(3a^2b + ab^2)$.

Mari Berpikir Kreatif

Gambar berikut menunjukkan grafik dari fungsi polinomial f, g, dan h.



Gambar 2.8 Grafik Fungsi f, g, dan h

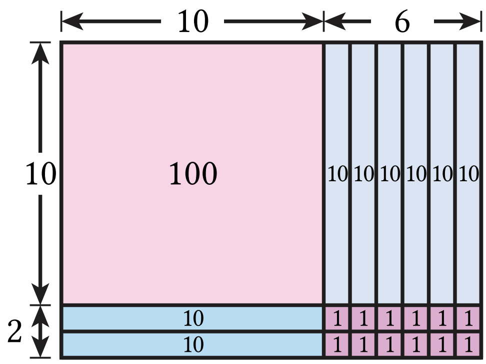
1. Tanpa mencari persamaan fungsinya, carilah cara untuk mensketsa grafik dari $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$. Jelaskan mengapa cara tersebut tepat!
2. Berdasarkan cara pada nomor 1, sketsalah juga grafik $f(x) + h(x)$, $g(x) + h(x)$, $f(x) - h(x)$, dan $g(x) - h(x)$.

2. Perkalian Polinomial

Seperti dua operasi sebelumnya, yaitu penjumlahan dan pengurangan, operasi perkalian pada polinomial juga dapat dibangun melalui perkalian bilangan.

Eksplorasi Mengalikan Dua Polinomial

1. Hasil kali dua bilangan dapat dimaknai sebagai luas daerah. Misalnya, 16×12 dapat diartikan sebagai luas daerah persegi panjang yang memiliki panjang 16 dan lebar 12. Karena $16 = 10 + 6$ dan $12 = 10 + 2$, perkalian kedua bilangan tersebut dapat dimodelka seperti pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Perkalian 16 × 12 sebagai Luas Daerah

   a. Model luas daerah tersebut dapat disederhanakan menjadi tabel di bawah ini. Mengapa demikian?

	10	6
10	100	60
2	20	12

   b. Cobalah menghitung 16×12 dengan perkalian bersusun. Apakah ada kesamaan antara perkalian bersusun tersebut dengan hasil pada tabel di atas?

2. Gunakan cara pada nomor 1 untuk menentukan hasil kali $(x + 6)(x + 2)$.

	x	6
x		
2		

3. Dengan cara seperti pada nomor 2, tentukan $(x - 5)(x^2 + 3x - 1)$.

4. Salah satu temanmu menyederhanakan perkalian pada nomor 3 seperti berikut.

$$\begin{aligned}(x - 5)(x^2 + 3x - 1) &= x^3 + 3x^2 - x - 5x^2 - 15x + 5\\ &= x^3 - 2x^2 - 16x + 5\end{aligned}$$

Tentukan kesamaan cara tersebut dengan cara pada nomor 3.

5. Apakah cara temanmu pada nomor 4 dapat ditulis dalam bentuk berikut?

$$(x - 5)(x^2 + 3x - 1) = x\,(x^2 + 3x - 1) - 5(x^2 + 3x - 1)$$

Sifat apa yang digunakan untuk mengubah bentuk di ruas kiri persamaan menjadi bentuk di ruas kanan?

Sekarang kamu telah mengetahui bagaimana mengalikan dua polinomial, selanjutnya perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.6 Perkalian Polinomial

Tentukan hasil perkalian $(x^2 - 2x + 7)(2x - 5)$.

Alternatif penyelesaian:

Setiap suku $x^2 - 2x + 7$ dikalikan dengan $2x - 5$.

$(x^2 - 2x + 7)(2x - 5)$

$= x^2(2x - 5) - 2x(2x - 5) + 7(2x - 5)$	Sifat distributif
$= 2x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 10x + 14x - 35$	Sifat distributif
$= 2x^3 - 9x^2 + 24x - 35$	Sederhanakan

Mari Mencoba 2.6

Tentukan hasil dari $(4x^2 - x + 3)(x^2 - 1)$.

Mari Berpikir Kreatif

Dua bilangan dapat dikalikan dengan cara bersusun. Hal ini juga dapat dilakukan pada polinomial satu variabel. Lakukan perkalian pada Contoh 2.6 dengan cara bersusun!

Latihan B Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

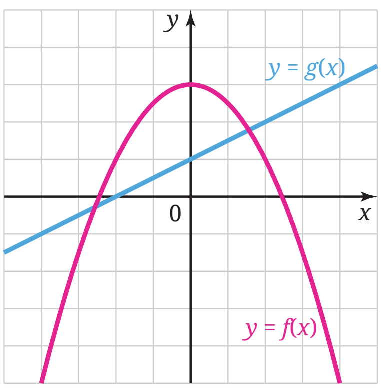
Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Bentuk $2x^2 - 5x^2$ dapat diubah menjadi $(2 - 5)x^2$ dengan menggunakan sifat ...
2. Benar atau salah? Polinomial pertama dikurangi polinomial kedua sama dengan negatif dari penjumlahan kedua polinomial tersebut.
3. Benar atau salah? $(5x - 1) - (3x - 4) = 5x - 1 - 3x - 4$.

Penerapan Konsep

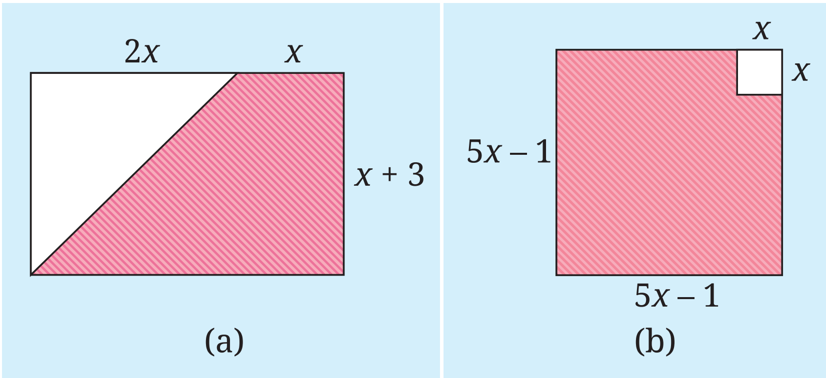
4. Sederhanakan penjumlahan dan pengurangan polinomial berikut ini.
   a. $(3m^2n + mn - 12) + (2m^2n - mn^2 + 7)$
   b. $(2x^4 - x^3 + 4x - 12) - (x^4 + 2x^3 - x^2 - 6)$
5. Gambar berikut menyajikan grafik fungsi polinomial f dan g. Berdasarkan grafik kedua fungsi tersebut, sketsalah grafik $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$.



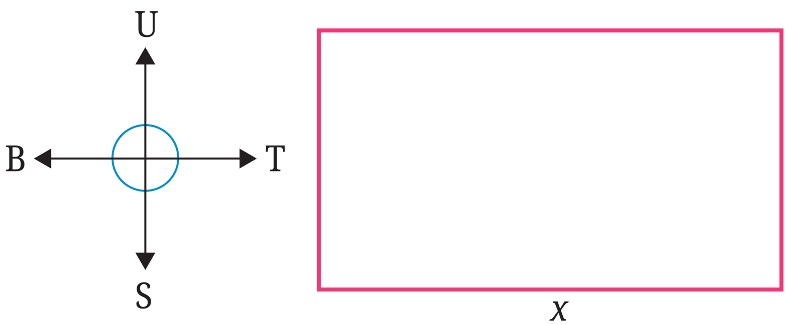
6. Tentukan hasil perkalian $(3a - b + 2)(a + 2b - 5)$.
7. Perhatikan persamaan berikut ini.

   $(x^{\square} - x + 1)(\square x - 1) = A(x)$

   Jika tanda kotak pada persamaan diganti dengan sembarang bilangan real, apakah $A(x)$ selalu merupakan polinomial? Mengapa?
8. Nyatakan luas daerah yang diarsir pada gambar (a) dan (b) ke dalam x.



9. Pak Alex akan memagari tanahnya yang berbentuk persegi panjang dengan pagar plastik pembibitan (lihat gambar di bawah). Karena terdapat tiupan angin yang kencang, pagar yang mengarah ke arah timur-barat perlu dibuat lebih kuat. Menurut perhitungannya, biaya pemagaran ke arah timur-barat adalah sebesar Rp1.500,00 per meter, sedangkan yang ke arah utara-selatan adalah Rp1.000,00 per meter.



   Jika Pak Alex menyediakan anggaran Rp500.000,00 untuk keperluan pemagaran tersebut, nyatakan luas tanah yang dipagari sebagai fungsi L terhadap x.

C. Pembagian Polinomial

Pada subbab ini kamu akan mempelajari pembagian polinomial. Untuk itu, mari kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Membagi Bilangan**

Sebelum mempelajari cara melakukan pembagian pada polinomial, kamu akan diajak untuk mengamati pembagian pada bilangan. Cermati bentuk-bentuk pembagian berikut dan isilah bagian-bagian yang kosong dalam tabel sesuai dengan pola yang kamu temukan!

$\frac{7}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$\frac{13}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$13 = 5 \cdot 2 + 3$
$\frac{23}{6}$	$3\frac{5}{6}$	
	$4\frac{3}{8}$	
$\frac{57}{10}$		

Kegiatan eksplorasi tersebut menunjukkan beberapa cara menuliskan pembagian bilangan. Misalnya, jika kita membagi 7 dengan 4, kita mendapatkan hasil 1 dan sisa 3. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \qquad \text{atau} \qquad \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$$

Selain dengan cara demikian, kita juga dapat menuliskannya sebagai berikut.

$$\overset{\text{Bilangan yang dibagi}}{7} = \underset{\text{Pembagi}}{4} \cdot \overset{\text{Hasil bagi}}{1} + \underset{\text{Sisa}}{3}$$

Pembagian pada polinomial serupa dengan pembagian bilangan. Operasi tersebut dinyatakan dalam algoritma pembagian berikut.

Sifat 2.2 **Algoritma Pembagian Polinomial**

Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial, dengan $Q(x) \neq 0$, maka ada polinomial $H(x)$ dan polinomial $S(x)$ yang masing-masing tunggal, dengan $S(x)$ bernilai 0 atau polinomial berderajat kurang dari $Q(x)$, sedemikian sehingga

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \quad \text{atau} \quad P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$$

Polinomial $Q(x)$ disebut *pembagi*, $H(x)$ adalah *hasil bagi*, dan $S(x)$ adalah *sisa*.

Algoritma pembagian polinomial tersebut dapat diilustrasikan sebagai berikut.

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 8}{x + 3} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x + 3}$$

atau

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x^2 + x + 2) + 2$$

Artinya, jika kita membagi $x^3 + 4x^2 + 5x + 8$ dengan $x + 3$, kita akan mendapatkan hasil bagi $x^2 + x + 2$ dan sisa 2. Pertanyaannya sekarang, bagaimana cara kita mengetahui bahwa hasil bagi dan sisanya seperti itu? Untuk menjawabnya, kita dapat menggunakan pembagian bersusun.

Mari Berpikir Kritis

Apakah benar $x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x^2 + x + 2) + 2$? Buktikan persamaan tersebut!

1. Pembagian Bersusun

Seperti pada penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial, kita dapat menemukan cara membagi polinomial melalui pembagian bilangan.

Eksplorasi **Melakukan Pembagian Polinomial Bersusun**

1. Sebagai bekal kamu di nomor selanjutnya, hitunglah 297 dibagi 14 dengan melengkapi pembagian bersusun berikut ini.

$$\begin{array}{r} 2\ldots \\ 14\overline{)297} \\ \underline{28}\ - \\ \ldots \\ \underline{\ldots}\ - \\ \ldots \end{array}$$

2. Pahami aturan pembagian bersusun yang dilakukan pada bilangan (sebelah kiri). Gunakan aturan tersebut untuk melengkapi pembagian bersusun pada polinomial yang bersesuaian (sebelah kanan).

$$\begin{array}{r} 112 \\ 13\overline{)1.458} \\ \underline{13}\ - \\ 15 \\ \underline{13}\ - \\ 28 \\ \underline{26}\ - \\ 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} x^2 \\ x+3\overline{)x^3+4x^2+5x+8} \\ \underline{x^3+3x^2}\ - \\ x^2+5x \end{array}$$

Kamu telah mengetahui cara melakukan pembagian polinomial dengan cara bersusun. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut untuk mempelajari pembagian polinomial dengan kasus berbeda.

Contoh 2.7 Pembagian Polinomial Bersusun

Bagilah $4x^4 + 17x^3 - 3x + 1$ dengan $x^2 + 4x - 1$. Tuliskan hasilnya ke dalam bentuk-bentuk algoritma pembagian.

Alternatif penyelesaian:

Kita melakukan pembagian bersusun dengan terlebih dahulu menyisipkan suku $0x^2$ pada polinomial yang dibagi agar suku-sukunya lengkap.

$$\begin{array}{rl} 4x^2 + x & \\ x^2+4x-1\overline{)4x^4+17x^3+0x^2-3x+1} & \\ 4x^4+16x^3-4x^2 & \text{Kalikan pembagi dengan } 4x^2 \\ \hline x^3+4x^2-3x\ - & \text{Kurangi} \\ x^3+4x^2-x & \text{Kalikan pembagi dengan } x \\ \hline -2x+1\ - & \text{Kurangi} \end{array}$$

Proses pembagian tersebut menyisakan polinomial $-2x + 1$ yang derajatnya kurang dari polinomial pembagi, yaitu $x^2 + 4x - 1$. Hasil pembagiannya dapat dituliskan ke dalam bentuk berikut.

$$\frac{4x^4+17x^3-3x+1}{x^2+4x-1}=4x^2+x+\frac{-2x+1}{x^2+4x-1}$$

Bentuk tersebut juga dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$4x^4+17x^3-3x+1=(x^2+4x-1)(4x^2+x)-2x+1$$

Mari Mencoba 2.7

Carilah polinomial hasil bagi $H(x)$ dan polinomial sisa $S(x)$ setelah $P(x) = x^3 - x + 9$ dibagi $Q(x) = x^2 - 2x + 3$. Nyatakan hasilnya ke dalam $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$.

Mari Berpikir Kreatif

1. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $(x^3 - 1) : (x - 1)$. Ulangi untuk pembagian $(x^4 - 1) : (x - 1)$.
2. Gunakan hasil pada nomor 1 untuk menduga hasil bagi dan sisa dari $(x^8 - 1) : (x - 1)$.
3. Apa yang dapat kamu simpulkan? Buktikan!

2. Metode Horner

Selain dengan cara bersusun, kita dapat melakukan pembagian polinomial dengan cara yang lebih sederhana, yaitu metode Horner. Akan tetapi, metode tersebut hanya dapat digunakan jika pembaginya berbentuk $x - c$.

Eksplorasi Membagi Polinomial dengan Metode Horner

Metode Horner dapat dikatakan sebagai bentuk penyederhanaan pembagian bersusun. Hal ini karena di dalam metode Horner, kita cukup menuliskan bagian-bagian yang penting. Bandingkan pembagian bersusun dan metode Horner berikut ini!

Pembagian Bersusun

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1x^2 + 2x - 3 \\
\cline{2-2}
x - 2 & x^3 + 0x^2 - 7x + 8 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2x^2 - 7x \\
 & \quad 2x^2 - 4x \\
\cline{2-2}
 & \qquad -3x + 8 \\
 & \qquad -3x + 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2
\end{array}
$$

Metode Horner

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 0 & -7 & 8 \\
 & & 2 & 4 & -6 \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & 2
\end{array}
$$

1. Pembagian polinomial dengan cara bersusun dan metode Horner memiliki beberapa kesamaan. Jelaskan kesamaan tersebut!
2. Pembagian bersusun dan metode Horner juga memiliki perbedaan. Jelaskan perbedaan tersebut!
3. Berdasarkan pengamatanmu dalam membandingkan cara bersusun dan metode Horner, jelaskan langkah-langkah untuk melakukan pembagian polinomial dengan metode Horner!

Setelah mengetahui cara melakukan metode Horner, perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 2.8 Menggunakan Metode Horner

Gunakan metode Horner untuk membagi $2x^3 + 5x^2 + 6$ dengan $x + 3$.

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, tuliskan koefisien-koefisien dan konstanta polinomial yang dibagi, yaitu 2 (koefisien x^3), 5 (koefisien x^2), 0 (koefisien x), dan 6 (konstanta). Penulisan koefisien dan konstanta ini harus urut dari suku berderajat tertinggi sampai terendah.

Dalam metode Horner, jika polinomial pembaginya $x - c$, kita tuliskan c sebagai penggantinya. Karena $x + 3 = x - (-3)$, kita mengganti pembaginya menjadi -3.

$$
\begin{array}{c|cccc}
-3 & 2 & 5 & 0 & 6 \\
 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

Selanjutnya, kita menggunakan metode Horner dengan menjumlahkan bilangan-bilangan dalam satu kolom, kemudian mengalikan hasilnya dengan –3 dan meletakkan hasil kalinya ke kanan-atas.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-3 & 2 & 5 & 0 & 6 \\
 & & -6 & 3 & -9 \\
\hline
 & 2 & -1 & 3 & \boxed{-3}
\end{array} +$$

Panah ke bawah : Jumlahkan
Panah ke kanan-atas : Kalikan dengan −3

Dari pembagian tersebut, kita mendapatkan hasil bagi $2x^2 - x + 3$ dan sisa –3. Dengan demikian, kita dapat menuliskannya menjadi bentuk berikut.

$$2x^3 + 5x^2 + 6 = (x + 3)(2x^2 - x + 3) - 3$$

Mari Mencoba 2.8

Tentukan hasil bagi dan sisa dari pembagian $x^4 + 4$ oleh $x - 1$ dengan menggunakan metode Horner.

Mari Berkolaborasi

Berkelompoklah dengan seorang teman, kemudian bagilah tugas agar masing-masing mengerjakan salah satu permasalahan berikut ini!

1. Gunakan metode Horner untuk membagi $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ dengan $2x - 1$. Ikuti langkah-langkah berikut.
   a. Ubahlah pembaginya menjadi bentuk $a(x - c)$. Berapakah nilai a dan c?
   b. Gunakan metode Horner untuk membagi $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ dengan $x - c$. Nyatakan hasilnya ke dalam bentuk berikut ini.
   $$2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = (x - c) \cdot H_1(x) + S(x)$$
   c. Gunakan manipulasi aljabar pada algoritma pembagian sedemikian sehingga kamu akan mendapatkan bentuk berikut.
   $$2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = (2x - 1) \cdot H(x) + S(x)$$
   d. Dari bentuk terakhir tersebut, tentukan hasil bagi dan sisanya.

2. Gunakan metode Horner untuk membagi $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dengan $(x - 1)(x - 3)$. Gunakan panduan berikut ini.

   a. Dengan metode Horner, bagilah $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dengan $(x - 1)$ dan nyatakan hasilnya ke dalam bentuk berikut.

   $$x^4 - 10x^2 - 5x + 10 = (x - 1) \cdot H_1(x) + S_1(x)$$

   b. Gunakan metode Horner untuk membagi $H_1(x)$ dengan $(x - 3)$. Tuliskan hasilnya ke dalam bentuk berikut.

   $$H_1(x) = (x - 3) \cdot H_2(x) + S_2(x)$$

   c. Substitusikan persamaan pada bagian b ke persamaan pada bagian a untuk mendapatkan bentuk seperti ini.

   $$x^4 - 10x^2 - 5x + 10 = (x - 1)(x - 3) \cdot H(x) + S(x)$$

   d. Dari persamaan tersebut, tentukan hasil bagi dan sisanya.

Setelah menyelesaikan permasalahan tersebut, bagikan apa yang telah dipelajari kepada temanmu!

3. Teorema Sisa

Apakah pembagian polinomial hanya dapat digunakan untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian? Untuk menjawab pertanyaan ini, pelajari eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Membagi Polinomial dan Menentukan Nilai Fungsi Polinomial**

1. Misalkan polinomial $P(x)$ dibagi dengan suatu polinomial yang berbentuk $x - c$. Lengkapi tabel berikut dengan sisa pembagiannya dan nilai $P(c)$.

$P(x)$	Pembagi	Sisa	$P(c)$
$P(x) = x^2 + 4x - 16$	$x - 3$		$P(3) =$
$P(x) = x^2 - 2x - 14$	$x - 1$		$P(1) =$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 11$	$x + 2$		$P(-2) =$
$P(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$	$x + 7$		$P(-7) =$
$P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 10$	x		$P(0) =$

2. Amati kembali tabel yang telah dilengkapi pada nomor 1. Setelah itu, buatlah dugaan berdasarkan pengamatan tersebut.
3. Berdasarkan pengamatan terhadap tabel pada nomor 1, Karuna menemukan bahwa nilai sisa pembagian di kolom ketiga selalu sama dengan nilai $P(c)$ di kolom keempat. Oleh karena itu, dia menduga bahwa sisa pembagian polinomial $P(x)$ oleh $x - c$ selalu sama dengan nilai $P(c)$, yaitu nilai polinomial tersebut ketika $x = c$. Apakah kamu setuju dengan Karuna? Jika iya, jelaskan alasannya. Jika tidak, berikan satu contoh yang dapat membantah dugaan Karuna.

Kamu telah mendapatkan simpulan mengenai sisa pembagian polinomial dan nilai fungsi polinomial. Bandingkan simpulanmu dengan teorema berikut ini!

Sifat 2.3 **Teorema Sisa**

Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x - c$, maka sisanya sama dengan $P(c)$.

Untuk mengetahui penggunaan Teorema Sisa, perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.9 Menggunakan Teorema Sisa

Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 10$ dibagi dengan $x + 4$. Dengan menggunakan Teorema Sisa, tentukan nilai $P(-4)$.

Alternatif penyelesaian:

Kita akan melakukan pembagian pada dua polinomial yang diberikan dengan menggunakan metode Horner. Karena $x + 4 = x - (-4)$, pembagiannya ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
-4 & 2 & 5 & -10 & 9 & 0 & -10 \\
 & & -8 & 12 & -8 & -4 & 16 \\
\hline
 & 2 & -3 & 2 & 1 & -4 & \boxed{6}
\end{array}\ +$$

Dengan demikian, hasil baginya adalah $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 4$ dan sisanya adalah 6.

Berdasarkan Teorema Sisa, nilai $P(-4)$ sama dengan sisa pembagian $P(x)$ oleh $x + 4 = x - (-4)$. Berdasarkan hasil sebelumnya, sisanya adalah 6 sehingga $P(-4) = 6$.

Mari Mencoba 2.9

Jika $P(x) = 3x^5 - 20x^4 - 6x^3 - 48x - 8$ dibagi dengan $x - 7$, tentukan hasil bagi dan sisanya. Gunakan Teorema Sisa untuk mencari nilai $P(7)$.

Mari Mengomunikasikan

Setelah mencermati Teorema Sisa, Ahmad mendapati bahwa $P(c)$ sama dengan sisa $P(x)$ setelah dibagi dengan $x - c$ karena c tersebut merupakan pembuat nol $x - c$ (selesaian $x - c = 0$ adalah $x = c$). Berdasarkan hal ini, dia menduga bahwa Teorema Sisa tersebut juga berlaku jika pembaginya adalah $ax - b$. Karena pembuat nol $ax - b$ adalah $x = \frac{b}{a}$, dia berpendapat bahwa jika $P(x)$ dibagi dengan $ax - b$, sisanya sama dengan $P(\frac{b}{a})$.

Apakah kamu setuju dengan dugaan Ahmad? Jika iya, jelaskan alasannya. Jika tidak, berilah satu contoh yang membantah dugaan tersebut.

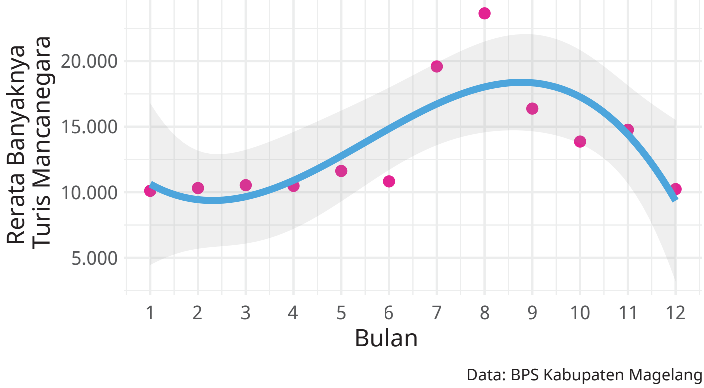
Matematika dalam Budaya — Berkunjung ke Candi Borobudur

Gambar 2.10 Candi Borobudur

Sumber: Jakub Halun/Wikimedia Commons/CC BY-SA 4.0 (2022)

Tak dapat dipungkiri, kemegahan dan keindahan Candi Borobudur telah mengundang banyak wisatawan untuk berkunjung ke candi tersebut. Candi yang merupakan salah satu Situs Warisan Dunia ini menjadi wujud betapa agungnya budaya dan peradaban masa lampau bangsa Indonesia. Fakta tersebut menjadi daya tarik tersendiri bagi wisatawan mancanegara untuk berkunjung ke Candi Borobudur.

Seperti dalam data Badan Pusat Statistik Kabupaten Magelang, rata-rata banyaknya wisatawan mancanegara yang berkunjung ke Candi Borobudur pada tahun 2008–2022 adalah sekitar 13 ribu tiap bulannya. Secara lebih jelas, sebaran rata-rata banyaknya wisatawan mancanegara di candi tersebut setiap bulannya disajikan pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Rata-Rata Banyaknya Turis Mancanegara Candi Borobodur Setiap Bulannya

Setelah mencermati grafik pada Gambar 2.11, kamu tentu tidak asing dengan polanya. Pola dalam grafik tersebut dapat dimodelkan dengan fungsi polinomial berderajat 3. Fungsi polinomial berderajat 3 yang paling sesuai adalah sebagai berikut.

$$y = -66{,}8497x^3 + 1.110{,}35x^2 - 4.054{,}46x + 13.634{,}1$$

dengan x adalah bulan dan y adalah rata-rata banyaknya wisatawan mancanegara pada bulan tersebut. Dengan menggunakan model tersebut, dapatkah kamu memperkirakan rata-rata banyaknya wisatawan mancanegara pada bulan Januari dan September?

Latihan C Pembagian Polinomial

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Benar atau salah? Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $Q(x)$, maka derajat sisa pembagiannya selalu kurang dari derajat $Q(x)$.
2. Benar atau salah? Cermati proses pembagian dengan metode Horner berikut.

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 8 & -10 \\ & & 5 & -5 & 15 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{5} \end{array} +$$

Pembagian tersebut dapat dituliskan ke dalam persamaan berikut.

$$\frac{x^3-6x^2+8x-10}{x+5}=x^2-x+3+\frac{5}{x+5}$$

3. Karena polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x - c$ memiliki sisa k, nilai $P(c)$ = ...

Penerapan Konsep

4. Misalkan $P(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$ dan $Q(x) = x^2 + 2x - 1$. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $P(x)$ oleh $Q(x)$ dengan menggunakan pembagian bersusun, kemudian nyatakan hasilnya ke dalam bentuk $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$.

5. Gunakan metode Horner untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian berikut ini.

$$\frac{2x^4+5x^3+2x^2+11x-15}{x+3}$$

6. Pembagian bersusun dan metode Horner berikut digunakan untuk mencari hasil bagi dan sisa pembagian setelah $P(x) = 3x^3 - 17x^2 + 31x - 8$ dibagi dengan $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

<table>
<tr><th>Cara 1: Pembagian Bersusun</th><th>Cara 2: Metode Horner</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x - 5 \\ \hline
x^2 - 4x + 3 & 3x^3 - 17x^2 + 31x - 8 \\
 & 3x^3 - 12x^2 + 9x \quad - \\ \hline
 & -5x^2 + 22x - 8 \\
 & -5x^2 + 20x - 15 \quad - \\ \hline
 & 2x + 7
\end{array}$$

Jadi, hasil baginya $3x - 5$ dan sisanya $2x + 7$.

</td><td>

Karena $Q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, proses pembagiannya adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 3 & -17 & 31 & -8 \\
 & & 3 & -14 & 17 \; + \\ \hline
3 & 3 & -14 & 17 & \boxed{9} \\
 & & 9 & -15 \; + & \\ \hline
 & 3 & -5 & \boxed{2} &
\end{array}$$

Jadi, hasil baginya $3x - 5$ dan sisanya 2.

</td></tr>
</table>

Jawaban yang diperoleh dari kedua cara tersebut ternyata berbeda. Tentukan letak kesalahannya.

7. Misalkan $P(x) = 3x^6 - 11x^5 + x^3 + 20x^2 - 3$ dan $c = \frac{2}{3}$. Gunakan metode Horner dan Teorema Sisa untuk menentukan nilai $P(c)$.

8. Polinomial $P(x)$ jika dibagi $x - 2$ sisanya -3, dan jika dibagi $x + 3$ sisanya -13. Tentukan sisa polinomial tersebut jika dibagi $x^2 + x - 6$.

9. Perhatikan polinomial $P(x)$ dan $Q(x)$ berikut.

$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 10$

$Q(x) = ((2x - 9)x + 7)x - 10$

a. Tunjukkan bahwa kedua polinomial tersebut sama.

b. Tentukan $P(4)$ dan $Q(4)$.

c. Ubahlah bentuk polinomial $R(x) = x^4 - 13x^3 + 23x^2 - 12x + 10$ menjadi bentuk seperti polinomial $Q(x)$, kemudian gunakan hasilnya untuk menentukan $R(11)$.

d. Gunakan metode Horner untuk membagi $R(x)$ dengan $x - 11$.

e. Bandingkan operasi-operasi yang digunakan pada bagian c untuk menghitung $R(11)$ dengan langkah-langkah yang digunakan pada bagian d.

D. Faktor dan Pembuat Nol Polinomial

Pada subbab sebelumnya, kamu telah mempelajari Teorema Sisa. Kamu dapat menggunakan pemahaman terhadap teorema tersebut untuk menyelesaikan eksplorasi berikut.

Eksplorasi **Mencermati dan Memilih Pembagian Polinomial**

Pada aktivitas ini kamu akan mencermati pembagian polinomial dan mempelajari karakteristiknya. Untuk itu, lakukan pembagian pada setiap bentuk yang diberikan, kemudian pilihlah satu bentuk pembagian yang menurutmu berbeda dengan yang lain. Bersiaplah untuk memberikan alasan terhadap bentuk pembagian pilihanmu!

1. $\dfrac{x^2 + 4x - 2}{x - 1}$

2. $\dfrac{2x^2 + 9x + 4}{x + 3}$

3. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

4. $\dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1}$

1. Teorema Faktor

Jika suatu polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x - c$, salah satu kemungkinannya adalah bahwa pembagian tersebut menghasilkan sisa nol. Berdasarkan Teorema Sisa, kita dapat menyimpulkan bahwa $P(c) = 0$. Dengan kata lain, c adalah *pembuat nol P*. Jika c adalah pembuat nol P, apa hubungan $x - c$ dengan $P(x)$? Untuk menjawabnya, selesaikan aktivitas berikut!

Eksplorasi Menuju Teorema Faktor

1. Lengkapi tabel di bawah. Untuk mengisi kolom ketiga, tentukan nilai $P(c)$ untuk setiap $P(x)$ dan c yang diberikan. Untuk mengisi kolom keempat, bagilah $P(x)$ dengan $x - c$ dan nyatakan hasilnya ke dalam bentuk $P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S(x)$.

$P(x)$	c	$P(c)$	$P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S(x)$
$P(x) = x^2 - x - 12$	4		
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$	–3		
$P(x) = x^4 - 16$	–2		

2. Setelah melengkapi tabel pada nomor 1, Ambar menduga bahwa jika c adalah pembuat nol P, maka $x - c$ adalah faktor dari $P(x)$. Apakah kamu setuju dengan dugaan Ambar? Jelaskan alasannya!
3. Ambar memiliki dugaannya lagi. Dugaannya kali ini merupakan "kebalikan" dari dugaan pada nomor 2. Dia menduga bahwa jika $x - c$ adalah faktor $P(x)$, maka c adalah pembuat nol dari P. Apakah kamu sependapat dengan Ambar? Jelaskan alasannya!

Berdasarkan eksplorasi sebelumnya, kamu telah menemukan ide Teorema Faktor. Isi dari Teorema Faktor disajikan sebagai berikut.

Sifat 2.4 Teorema Faktor

Misalkan $P(x)$ adalah suatu polinomial dan c adalah bilangan real. $P(c) = 0$ jika dan hanya jika $x - c$ merupakan faktor $P(x)$.

Untuk mengetahui penggunaan Teorema Faktor, perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.10 Memfaktorkan Polinomial

Ajeng mengamati bahwa jumlah semua koefisien dan konstanta $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ sama dengan nol. Oleh karena itu, dia menyimpulkan bahwa $x - 1$ merupakan salah satu faktor $P(x)$. Buktikan simpulan Ajeng tersebut dan gunakan simpulannya untuk memfaktorkan $P(x)$ secara lengkap!

Alternatif penyelesaian:

Kita akan membuktikan simpulan Ajeng menggunakan Teorema Faktor, yaitu dengan menentukan nilai $P(1)$.

$$P(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 13(1) + 10 = 1 + 2 - 13 + 10 = 0$$

Karena $P(1) = 0$, berdasarkan Teorema Faktor, $x - c$ adalah faktor dari $P(x)$. Selanjutnya, kita mencari hasil bagi $P(x)$ setelah dibagi $x - 1$ dengan menggunakan metode Horner.

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 2 & -13 & 10 \\
 & & 1 & 3 & -10 \\
\hline
 & 1 & 3 & -10 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
\cline{5-5}
\end{array}$$

Dengan demikian, hasil baginya adalah $x^2 + 3x - 10$. Sekarang kita memfaktorkan $P(x)$ secara lengkap seperti berikut.

$P(x)$	$= x^3 + 2x^2 - 13x + 10$	Polinomial yang diberikan
	$= (x - 1)(x^2 + 3x - 10)$	Hasil metode Horner sebelumnya
	$= (x - 1)(x - 2)(x + 5)$	$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

Mari Mencoba 2.10

Misalkan $P(x) = x^3 - 2x^2 - 21x - 18$. Tunjukkan bahwa $P(-1) = 0$, kemudian gunakan hal tersebut untuk memfaktorkan $P(x)$ secara lengkap.

Mari Berpikir Kritis

1. Apakah simpulan Ajeng pada Contoh 2.10 selalu berlaku untuk semua polinomial yang jumlah koefisien dan konstantanya sama dengan nol? Jelaskan alasanmu!
2. Ajeng juga memiliki prinsip bahwa jika jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap sama dengan yang ganjil, polinomial tersebut memiliki faktor $x + 1$. (Misalnya $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 5x + 21$. Karena $3 + 5 = -13 + 21$, maka $P(x)$ memiliki faktor $x + 1$.) Apakah kamu setuju dengan Ajeng? Jelaskan alasanmu!

Apa yang telah digunakan oleh Ajeng pada Contoh 2.10 sangat bermanfaat untuk menemukan faktor suatu polinomial. Selain itu, Sifat 2.5 berikut ini juga dapat membantu kita untuk menemukan pembuat nol rasional suatu polinomial.

Sifat 2.5 **Pembuat Nol Rasional**

Misalkan polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ memiliki koefisien dan konstanta yang semuanya bilangan bulat dengan $a_n \neq 0$ dan $a_0 \neq 0$. Jika polinomial $P(x)$ tersebut memiliki pembuat nol rasional $\frac{p^n}{q}$, maka p merupakan faktor dari a_0 dan q merupakan faktor dari a_n.

Sifat 2.5 bersama Teorema Faktor dapat mempermudah kita dalam menentukan faktor-faktor dari polinomial. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.11 Menggunakan Teorema Faktor dan Pembuat Nol Rasional

Faktorkan polinomial $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ secara lengkap.

Alternatif penyelesaian:

Jika polinomial tersebut memiliki pembuat nol rasional p/q, maka p merupakan faktor dari $a_0 = 18$, yaitu ±1, ±2, ±3, ±6, dan ±9, sedangkan q merupakan faktor dari $a_n = 1$, yaitu ±1. Dengan cara mencoba-coba, kita dapat menunjukkan bahwa 3 adalah salah satu pembuat nol polinomial $P(x)$ tersebut.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 2 & -9 & -18 \\ & & 3 & 15 & 18 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array} +$$

Dengan demikian, polinomial $P(x)$ dapat dituliskan sebagai perkalian faktor-faktornya seperti berikut.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 2x^2 - 9x - 18 \\ &= (x^2 + 5x + 6)(x - 3) \\ &= (x + 3)(x + 2)(x - 3) \end{aligned}$$

Mari Mencoba 2.11

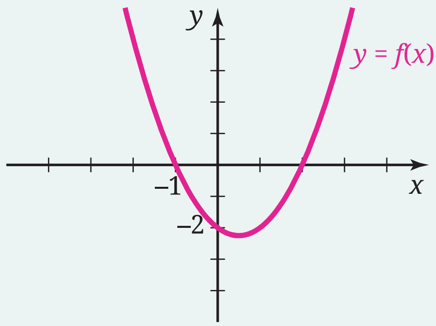
Faktorkan $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ secara lengkap.

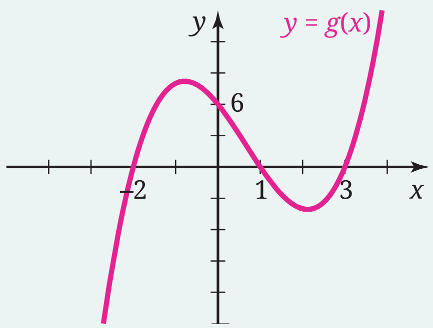
2. Faktor dan Pembuat Nol Fungsi Polinomial

Kamu telah mempelajari Teorema Faktor pada bagian sebelumnya. Teorema Faktor tersebut memberikan koneksi antara pembuat nol dan faktor suatu polinomial. Sekarang kita akan memperluas hubungan tersebut secara visual dengan menggunakan grafik fungsi polinomial.

Eksplorasi **Menemukan Koneksi antara Faktor Fungsi Polinomial dan Grafiknya**

1. Gunakan informasi pada Gambar 2.12 dan Gambar 2.13 untuk melengkapi tabel berikut ini dengan bentuk pemfaktoran dari fungsi polinomial yang diberikan. (Untuk menentukan bentuk pemfaktorannya, kamu dapat memanfaatkan pembuat nol rasional dan Teorema Faktor.)

<table>
<tr><th>Fungsi Polinomial</th><th>Grafik</th></tr>
<tr><td>$f(x) = x^2 - x - 2$
Bentuk pemfaktoran:
$f(x) =$ ________</td><td>

Gambar 2.12 Grafik Fungsi f</td></tr>
<tr><td>$g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
Bentuk pemfaktoran:
$g(x) =$ ________</td><td>

Gambar 2.13 Grafik Fungsi g</td></tr>
</table>

2. Amati kembali bentuk pemfaktoran fungsi polinomial dan grafiknya pada nomor 1. Apa yang dapat kamu simpulkan?

Dalam aktivitas eksplorasi sebelumnya kamu telah menemukan prinsip yang sangat berguna untuk menggambar grafik fungsi polinomial. Jika kita dapat menyatakan fungsi polinomial ke dalam perkalian faktor-faktornya secara lengkap, faktor-faktor tersebut berhubungan dengan perpotongan grafik fungsi tersebut terhadap sumbu-x. Prinsip ini ditegaskan oleh *sifat hasil kali nol*. Misalnya A dan B adalah bentuk-bentuk aljabar. Berdasarkan sifat hasil kali nol, pernyataan berikut benar.

$$A \cdot B = 0 \text{ jika dan hanya jika } A = 0 \text{ atau } B = 0$$

Oleh karena itu, sampai di sini kita telah mendapatkan dua hal yang sangat membantu untuk menggambar grafik fungsi polinomial, yaitu perilaku ujung-ujung grafik yang telah kamu pelajari pada subbab A dan perpotongan grafik dengan sumbu-x yang telah kamu temukan pada aktivitas eksplorasi sebelumnya. Selain kedua hal tersebut, kita juga dapat menentukan perpotongan grafik dengan sumbu-y dengan cara mensubstitusi $x = 0$ ke dalam persamaan fungsi. Untuk lebih memahaminya, perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.12 Perpotongan Grafik dengan Sumbu-x

Tentukan perpotongan grafik fungsi $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$ terhadap sumbu-x.

Alternatif penyelesaian:

Untuk menemukan perpotongan grafik fungsi f, kita tentukan semua pembuat nolnya. Karena jumlah koefisien suku-suku yang memiliki eksponen ganjil sama dengan yang genap $(-2 + 10 = -4 + 12)$, maka -1 adalah pembuat nol f atau $x + 1$ adalah salah satu faktornya (lihat kembali prinsip Ajeng pada Mari Berpikir Kritis terakhir).

Selanjutnya, kita menggunakan metode Horner untuk menentukan hasil bagi $f(x)$ setelah dibagi $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & -2 & -4 & 10 & 12 \\
 & & 2 & 2 & -12 \\
\hline
 & -2 & -2 & 12 & \boxed{0}
\end{array} +$$

Dengan demikian, $-2x^3 - 4x^2 + 10x + 12 = (x + 1)(-2x^2 - 2x + 12)$. Sekarang kita tentukan semua pembuat nolnya.

$$\begin{aligned} (x + 1)(-2x^2 - 2x + 12) &= 0 && \text{Hasil metode Horner sebelumnya} \\ -2(x + 1)(x^2 + x - 6) &= 0 && \text{Faktorkan ke luar } -2 \text{ dari } -2x^2 - 2x + 12 \\ -2(x + 1)(x + 3)(x - 2) &= 0 && x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita selesaikan persamaan terakhir menggunakan sifat hasil kali nol.

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \quad \text{atau} \quad & x + 3 &= 0 \quad \text{atau} \quad & x - 2 &= 0 \\ x &= -1 & x &= -3 & x &= 2 \end{aligned}$$

Jadi, grafik f memotong sumbu-x di $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, dan $(2, 0)$.

Mari Mencoba 2.12

Tentukan perpotongan grafik fungsi $g(x) = x^3 - 3x + 2$ terhadap sumbu-x.

Ingin mempelajari faktor dan pembuat nol secara lebih mendalam? Silakan kerjakan aktivitas interaktif berikut!

Aktivitas Interaktif

Seperti judulnya, aktivitas interaktif "Pembuat Nol, Persamaan, dan Grafik Fungsi Polinomial" ini mengajakmu untuk menemukan hubungan antara pembuat nol, persamaan, dan grafik fungsi polinomial.

Untuk mengerjakannya, silakan kunjungi tautan *https://student.desmos.com/* atau pindai kode respons cepat di samping. Setelah itu, masukkan kode yang diberikan oleh gurumu. Selamat bereksplorasi!

Pindai

Latihan D Faktor dan Pembuat Nol Polinomial

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Untuk suatu polinomial $P(x)$, nilai $P(10)$ adalah 0. Dengan demikian, ... adalah faktor polinomial tersebut.

2. Benar atau salah? Grafik fungsi polinomial $P(x)$ memotong sumbu-x di titik (3, 0). Dengan demikian, $(x + 3)$ adalah faktor dari $P(x)$.

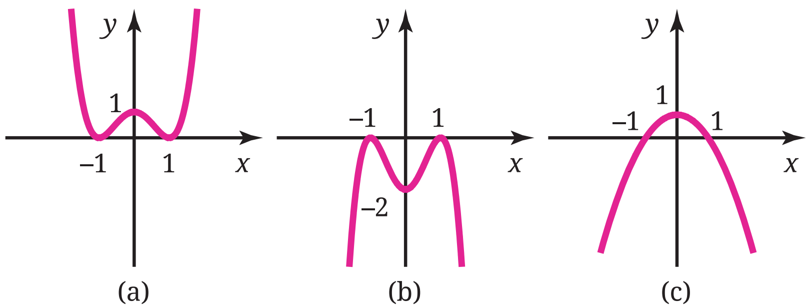
3. Benar atau salah? Fungsi $P(x) = (x + 7)(x + 3)(x – 2)$ adalah fungsi polinomial berderajat tiga satu-satunya yang grafiknya memotong sumbu-x di (–7, 0), (–3, 0), dan (2, 0).

Penerapan Konsep

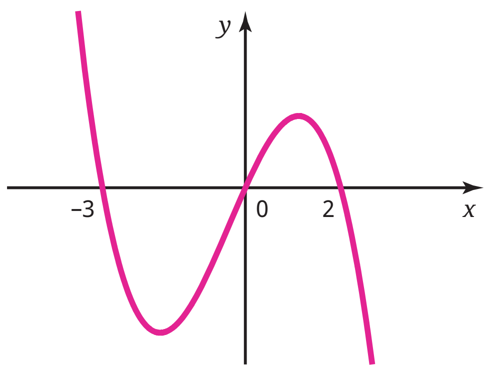
4. Jika $P(x) = x^4 – 2x^3 – 13x^2 + 14x + 24$, tunjukkan bahwa $P(–3) = 0$ dan $P(2) = 0$. Gunakan fakta tersebut untuk memfaktorkan $P(x)$ secara lengkap.

5. Faktorkan $P(x) = 5x^3 – 28x^2 + 45x – 18$ secara lengkap.

6. Dari ketiga grafik pada gambar di bawah, manakah yang merupakan grafik $f(x) = (x + 1)^2(x – 1)^2$?



7. Diberikan tiga fungsi polinomial, yaitu $f(x) = x^3 + x^2 – 6x$, $g(x) = –x^3 – x^2 + 6x$, dan $h(x) = x^3 – 4x$. Dari ketiga fungsi tersebut, manakah yang grafiknya ditunjukkan seperti pada gambar di bawah? Jelaskan alasannya.



8. Carilah polinomial berderajat 4 yang pembuat nolnya adalah –3, 0, 1, dan 4 dan koefisien x^2-nya adalah 11.

9. Jika $x + 2$ dan $x - 3$ adalah faktor dari $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 18$, tentukan nilai a dan b.

10. Sebuah peti kemas memiliki panjang 1 meter lebih dari dua kali lebarnya, sedangkan tingginya dua kali lebarnya. Jika volume peti kemas tersebut 936 m^3, tentukan luas permukaan peti kemas tersebut.

E. Identitas Polinomial

Tahukah kamu bahwa kita dapat menggunakan matematika untuk bermain sulap? Untuk mengetahuinya, silakan kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial**

Melalui aktivitas ini kamu akan mengetahui cara menggunakan identitas polinomial untuk bermain sulap. Untuk itu, lakukan langkah-langkah berikut ini!

1. Pilihlah satu bilangan secara bebas.
2. Jumlahkan bilangan tersebut dengan 1 dan kurangkan bilangan tersebut dengan 1, kemudian kalikan hasil penjumlahan dan pengurangan tersebut.
3. Jumlahkan hasil sebelumnya dengan 11.
4. Setelah selesai, kurangi hasilnya dengan kuadrat dari bilangan yang kamu pilih di awal tadi.

Berapa pun bilangan yang dipilih, kamu selalu akan mendapatkan 10. Sekarang cermati kembali langkah-langkahmu untuk mendapatkan bilangan 10 tadi, kemudian kerjakan soal-soal berikut!

a. Coba kamu misalkan bilangan yang dipilih tadi adalah x. Bentuk aljabar seperti apa yang dapat memodelkan operasi-operasi matematika yang kamu lakukan dari langkah 1 sampai dengan langkah 4?
b. Tunjukkan bahwa bentuk aljabar yang kamu temukan pada bagian a, hasilnya selalu sama dengan 10.
c. Tunjukkan bahwa persamaan yang digunakan dalam permainan sulap tadi setara dengan persamaan $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.
d. Dengan ide yang sama, buatlah permainan sulap yang berbeda dan terapkan kepada temanmu.

Pada aktivitas eksplorasi tersebut, kamu telah menggunakan suatu persamaan polinomial yang selalu benar untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya. Persamaan seperti ini disebut *identitas polinomial*. Identitas polinomial yang digunakan pada aktivitas eksplorasi sebelumnya merupakan bentuk khusus dari salah satu identitas yang sudah kamu pelajari pada pembelajaran-pembelajaran sebelumnya.

Sifat 2.6 **Beberapa Identitas Polinomial**

Berikut ini beberapa identitas polinomial.

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Untuk membuktikan bahwa suatu persamaan merupakan identitas, kita perlu menunjukkan bahwa bentuk di ruas kiri persamaan tersebut *sama dengan* bentuk di ruas kanan untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya. Sebaliknya, jika kita ingin menunjukkan bahwa suatu persamaan *bukan* merupakan identitas, kita cukup memberikan satu contoh nilai variabel yang membuat bentuk di ruas kiri persamaan tersebut tidak sama dengan bentuk di ruas kanan. Untuk lebih memahaminya, perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.13 Membuktikan Identitas Polinomial

Buktikan bahwa setiap persamaan berikut merupakan identitas polinomial atau bukan.

1. $(2x^2 - y^2)^2 = 4x^4 - 4x^2y^2 + y^4$
2. $(2a - 5)(2a + 5) = 4a^2 - 20a + 25$

Alternatif penyelesaian:

1. Persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial. Untuk membuktikannya, kita akan memulai dari ruas kiri. Kita harus menunjukkan bahwa bentuk di ruas kiri sama dengan bentuk di ruas kanan seperti berikut.

$(2x^2 - y^2)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2y^2) + (y^2)^2$ Identitas polinomial 3

$= 4x^4 - 4x^2y^2 + y^4$ Sederhanakan

Karena bentuk ruas kiri sama dengan bentuk ruas kanan, terbukti bahwa persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial.

2. Kita pilih $a = 0$ untuk menentukan nilai yang berada di ruas kiri dan kanan persamaan.

   Ruas kiri: $(2 \cdot 0 - 5)(2 \cdot 0 + 5) = (-5)(5) = -25$

   Ruas kanan: $4(0)^2 - 20(0) + 25 = 25$

   Karena ada $a = 0$ yang menyebabkan bentuk ruas kiri tidak sama dengan bentuk ruas kanan, persamaan polinomial yang diberikan bukan merupakan identitas polinomial.

Mari Mencoba 2.13

Buktikan bahwa setiap persamaan polinomial berikut merupakan identitas polinomial atau bukan.

1. $(2m - 3)^3 = 8m^3 - 27$
2. $(2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$

Kamu telah mampu membuktikan identitas polinomial. Selanjutnya, kerjakan aktivitas berikut!

Mari Berkolaborasi

Buatlah sebuah identitas polinomial dan mintalah temanmu untuk membuktikan identitas polinomial tersebut. Selanjutnya, koreksilah hasil temanmu.

Salah satu kegunaan identitas polinomial adalah untuk memfaktorkan polinomial. Hal ini ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 2.14 Menggunakan Identitas Polinomial

Faktorkan $(3x - 1)^2 - 25$.

Alternatif penyelesaian:

Polinomial yang diberikan merupakan pengurangan dua bentuk kuadrat. Oleh karena itu, kita menggunakan identitas polinomial 1 untuk memfaktorkannya.

$(3x-1)^2-25$	$=(3x-1)^2-5^2$	$25=5^2$
	$=[(3x-1)+5][(3x-1)-5]$	Identitas polinomial 1
	$=[3x-1+5][3x-1-5]$	Hilangkan tanda kurung
	$=(3x+4)(3x-6)$	Sederhanakan

Jadi, $(3x-1)^2-25=(3x+4)(3x-6)$.

Mari Mencoba 2.14

Faktorkan $4x^2+12xy+9y^2$.

Latihan E Identitas Polinomial

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Benar atau salah? Semua persamaan polinomial merupakan identitas polinomial.
2. Benar atau salah? Jika ada satu saja nilai variabel yang tidak memenuhi suatu persamaan polinomial, maka persamaan polinomial tersebut bukanlah identitas polinomial.
3. $p^3-q^3=\ldots.$

Penerapan Konsep

4. Buktikan bahwa persamaan-persamaan polinomial berikut merupakan identitas polinomial atau bukan.
   a. $3(x-1)^2=(3x-3)^2$
   b. $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-ac+bc)$

5. Jika $(x^2 + x - 6)(x - 4) = P(x) \cdot (x + 3)$ adalah identitas, tentukan polinomial $P(x)$.

6. **Masalah bilangan.** Togar melakukan perhitungan terhadap beberapa pasang bilangan berikut.

$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$	$3 + 2 = 5$
$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$	$4 + 3 = 7$
$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$	$5 + 4 = 9$
$6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$	$6 + 5 = 11$

Setelah mengamati polanya, Togar menyimpulkan bahwa selisih dari kuadrat dua bilangan bulat yang berurutan selalu sama dengan jumlah kedua bilangan tersebut. Apakah kamu setuju dengan pernyataan Togar? Jika iya, buktikan pernyataan tersebut. Jika tidak, carilah satu contoh yang menyangkalnya.

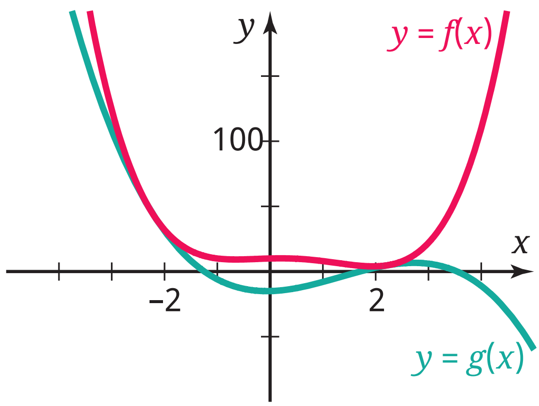
7. **Tripel Pythagoras.** Jika a dan b adalah bilangan-bilangan real positif dengan $a > b$, buktikan bahwa $a^2 - b^2$, $2ab$, dan $a^2 + b^2$ merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku.

8. Faktorkan setiap polinomial berikut ini.

   a. $16(4 - 3x)^2 - 25$

   b. $m^4 + 6m^2n^2 + 9n^4$

9. Grafik fungsi $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 10$ dan $g(x) = -2x^3 + 8x^2 + x - 15$ ditunjukkan pada gambar berikut.



Tentukan titik-titik potong kedua grafik tersebut.

Ringkasan

Pindai

Kamu dapat membaca ringkasan setiap bab dengan memindai kode respons cepat di samping.

Uji Kompetensi Bab 2

Kerjakanlah soal-soal uji kompetensi berikut ini dengan benar!

Pemahaman

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Perilaku ujung grafik fungsi polinomial yang berderajat ganjil dan memiliki koefisien utama negatif mengarah ke kiri bawah dan kanan atas. $(\swarrow, \nearrow)$.

2. Pembagian pada dua polinomial dilakukan dengan menggunakan metode Horner seperti berikut.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 0 & -3 & -8 \\ & & 3 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & \multicolumn{1}{|c}{10} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

   Hasil pembagian tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$x^3 - 3x - 8 = (x - 3)(x^2 + 3x + 6) + 10$$

3. Persamaan $4a^2 - 1 = (2a + 1)(2a - 1)$ merupakan identitas polinomial.

Lengkapilah pernyataan nomor 4—6 berikut dengan isian yang paling tepat.

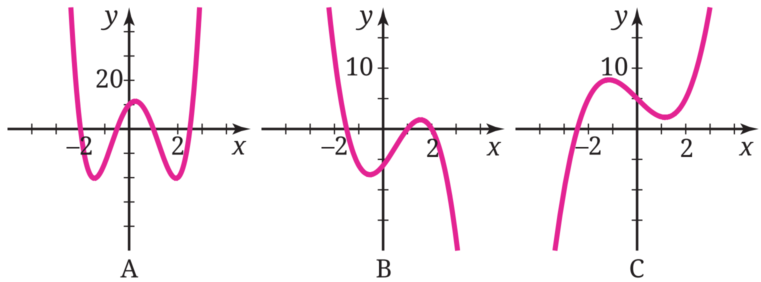
4. Jika $a \neq 0$, derajat $ax^n y^m$ adalah ....

5. Berdasarkan Teorema Sisa, jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x + 4$, sisanya adalah ....

6. Derajat polinomial $9 - x + 2x^2 - 4x^3 - 5x^4$ dan $3a^4b^3 - 4a^5 + 2b^3 - 10$ adalah ....

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan tepat.

7. Deskripsikan perilaku ujung grafik fungsi polinomial $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$, kemudian pilihlah grafik pada gambar di bawah yang paling sesuai untuk merepresentasikan grafik fungsi f tersebut.



8. Sederhanakan $(m + n + 1)(m + n - 1) - (m - n + 1)(m + n + 1)$.

9. Misalkan $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 3$ dan $Q(x) = (x + 2)(x - 2)$. Bagilah $P(x)$ dengan $Q(x)$, kemudian nyatakan hasilnya ke dalam bentuk $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$.

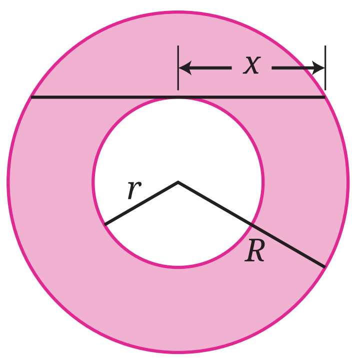
10. Gunakan metode Horner dan Teorema Sisa untuk menentukan nilai $P(c)$ jika $P(x) = x^4 - 10x^3 + 84x - 28$ dan $c = 9$.

11. Tentukan semua titik potong grafik fungsi polinomial $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$ dengan sumbu-x.

12. Buktikan apakah persamaan polinomial $49 - (2x + 7)^2 = -2x(14 + 2x)$ dan $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ merupakan identitas polinomial.

Penerapan

13. **Luas daerah.** Perhatikan daerah yang diarsir pada gambar di bawah. Daerah tersebut terletak di antara dua lingkaran yang memiliki pusat sama.



Nyatakan luas daerah yang diarsir sebagai fungsi terhadap x.

14. **Luas permukaan.** Sebuah kotak karton berbentuk balok memiliki panjang, lebar, dan tinggi secara berturut-turut 50 cm, 30 cm, dan 25 cm.

    a. Tentukan luas permukaan kotak tersebut.

b. Jika kotak tersebut dibuat ulang dengan memotong panjang, lebar, dan tingginya sepanjang x m, tentukan luas permukaan kotak yang baru.

c. Tentukan nilai x jika luas permukaan kotak yang baru adalah 3.400 m^2.

15. **Volume.** Seutas kawat sepanjang 144 cm akan digunakan untuk membuat rangka balok yang alasnya berbentuk persegi dengan panjang sisi x cm.

    a. Nyatakan volume balok tersebut sebagai fungsi terhadap x.

    b. Tentukan daerah asal fungsi pada bagian a.

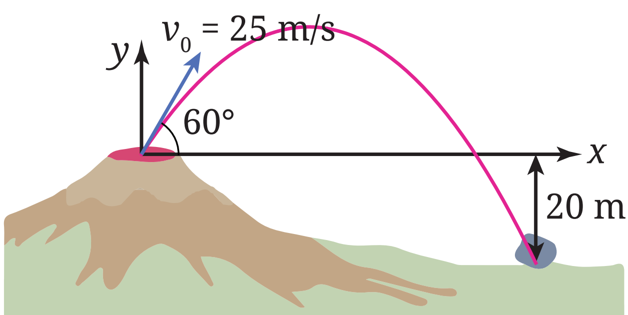
    c. Tentukan volume balok tersebut untuk $x = 12$.

16. **Finansial.** Jika uang sejumlah 100 juta rupiah ditabung ke bank selama 3 tahun, saldo uang tersebut (dalam juta rupiah) dinyatakan dalam rumus berikut.

    $$S(x) = 100(1 + x)^3$$

    dengan x adalah bunga bank per tahunnya. Tentukan saldonya jika bank tersebut memberikan bunga 5% per tahun.

17. **Letusan gunung berapi.** Gunung Semeru adalah salah satu gunung berapi yang dapat melontarkan batu pijar ketika meletus. Misalkan sebongkah batu besar terlontar dari kawah gunung tersebut dengan kecepatan 25 m/s dan besar sudut 60° di atas garis horizontal seperti pada gambar berikut.



    Dengan menggunakan prinsip-prinsip Fisika dan menganggap bahwa kawah gunung tersebut sebagai titik (0, 0), lintasan batu tersebut dapat dimodelkan sebagai fungsi berikut.

    $$y = \sqrt{3}\,x - \frac{4}{125}x^2$$

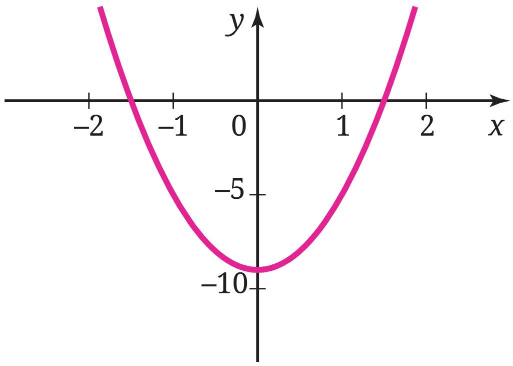
    dengan x adalah jarak horizontal yang telah ditempuh batu tersebut, sedangkan y adalah ketinggiannya relatif terhadap kawah gunung.

a. Tentukan ketinggian batu tersebut relatif terhadap kawah gunung ketika $x = 25$ m.

b. Batu tersebut membentur tanah ketika terletak 20 m di bawah kawah. Tentukan jarak horizontal batu tersebut dari kawah ketika sampai di tanah.

Penalaran

18. Nyoman mengalikan $(2x + 3)(2x - 3)$ dan mendapatkan hasil $4x^2 + 9$. Untuk memeriksa apakah perhitungannya sudah tepat, dia menggunakan kalkulator grafik untuk menggambar grafik $y = (2x + 3)(2x - 3)$ dan $y = 4x^2 + 9$. Hasilnya diperlihatkan pada gambar.



Karena hanya melihat satu grafik, dia menganggap bahwa grafik $y = (2x + 3)(2x - 3)$ berimpit dengan grafik $y = 4x^2 + 9$. Dengan demikian, kedua polinomial tersebut sama sehingga jawabannya sudah tepat. Jelaskan mengapa simpulan Nyoman terhadap tampilan kalkulator grafiknya tidak tepat.

19. Buktikan Sifat 2.5, yaitu jika $P(x)$ adalah polinomial yang semua koefisien dan konstantanya adalah bilangan bulat dengan koefisien utama dan konstantanya tidak nol, serta memiliki pembuat nol rasional $\frac{p}{q}$, maka p merupakan faktor dari konstanta dan q merupakan faktor dari koefisien utama $P(x)$.

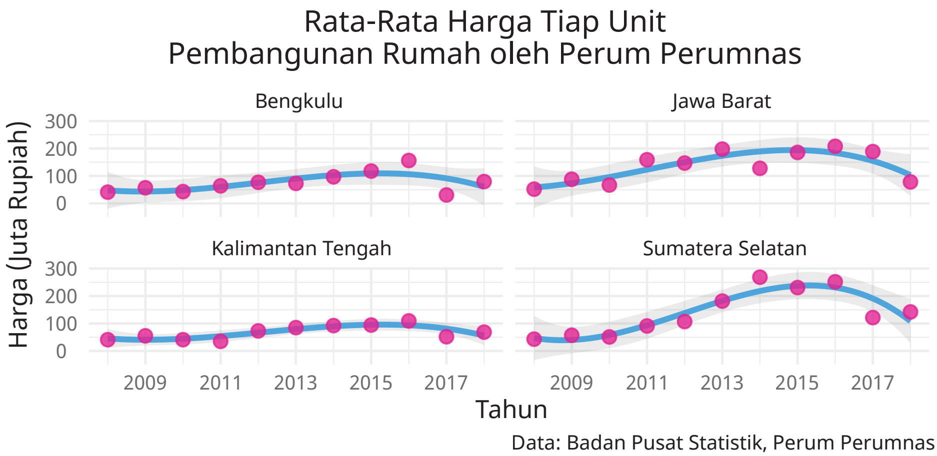
Proyek

Pindai

Kamu dapat mengerjakan proyek berjudul Strategi Menang Lelang dengan memindai kode respons cepat di samping.

Pengayaan Menulis Artikel Berita

Kamu telah mengetahui bagaimana fungsi polinomial sangat bermanfaat untuk memahami dunia di sekitar kita. Sekarang, kita akan menggunakan fungsi ini untuk memodelkan rata-rata harga pembangunan rumah di empat provinsi setiap tahunnya. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 2.14 Tren Harga Pembangunan Rumah di Empat Provinsi

1. Deskripsikan tren umum harga pembangunan rumah pada Gambar 2.15. Apa persamaan tren di setiap provinsi tersebut? Apa perbedaannya?
2. Anggaplah kamu sebagai penulis berita media massa. Tulislah sebuah artikel berita yang melaporkan temuanmu pada nomor 1. Jika memungkinkan, bagikan tulisanmu tersebut melalui media sosial dengan tagar #Polinomial, #Pengayaan, dan #PembangunanRumah.

Refleksi

Kamu dapat mengingat kembali pengalaman ketika mempelajari "Bab 2 Polinomial" ini. Selanjutnya, refleksikan pengalaman belajarmu tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut!

1. Ceritakan sejauh mana manfaat yang dirasakan setelah kamu berdinamika pada bab ini!
2. Apa saja strategi belajarmu untuk memahami bab ini? Apakah semua strateginya sudah membantumu untuk belajar secara optimal?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024
Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-335-1

Bab 3
FUNGSI TRIGONOMETRI

Pada Maret 2021 kapal Ever Given tersangkut di Terusan Suez. Bagaimana fungsi trigonometri dapat digunakan untuk memodelkan fenomena alam yang turut membantu dalam penyelamatan kapal tersebut?

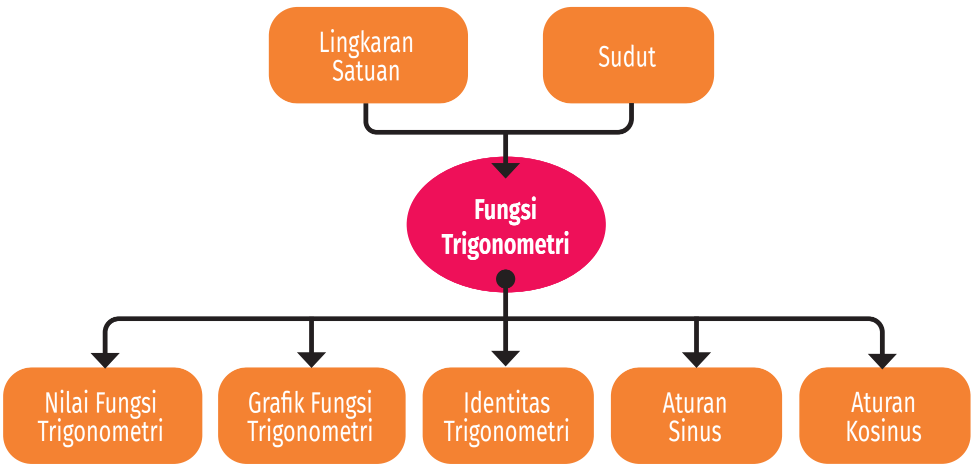
Sumber: NASA JSC ISS image library/Wikimedia Commons/CC0 (2021)

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- menentukan nilai fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real;
- mensketsa grafik fungsi trigonometri menggunakan transformasi fungsi;
- menginterpretasi grafik fungsi trigonometri menggunakan transformasi fungsi;
- menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri lainnya; dan
- menyelesaikan permasalahan menggunakan Aturan Sinus dan Aturan Kosinus.

Peta Materi



Kata Kunci

fungsi trigonometri, lingkaran satuan, grafik, identitas trigonometri, Aturan Sinus, dan Aturan Kosinus.

Memahami Dunia di Sekitar Kita

Pernahkah kamu membayangkan untuk tinggal di negara lain? Kira-kira, apa saja yang berbeda dengan tempat tinggalmu saat ini? Tentu banyak yang berbeda seperti durasi waktu sehari, yaitu periode dari matahari terbit hingga terbenam. Pada bagian proyek bab ini, kamu akan diajak untuk memodelkan dan membandingkan durasi waktu sehari di Kota Denpasar dan Kota Perth dengan fungsi trigonometri.

Gambar 3.1 Peta Lokasi Denpasar dan Perth

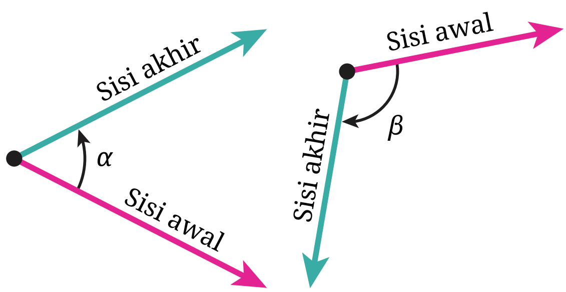
Tak hanya itu, fungsi trigonometri juga dapat digunakan untuk memahami fenomena pasang surut air laut. Fenomena ini turut membantu dalam penyelamatan kapal Ever Given yang tersangkut di Terusan Suez. Kamu dapat membaca detailnya pada kolom Matematika dan Sains pada akhir Subbab B. Oleh karena itu, ayo pelajari bab ini dengan penuh semangat!

A. Fungsi Trigonometri dan Lingkaran Satuan

Fungsi trigonometri erat kaitannya dengan sudut. Oleh karena itu, mari kita mengawali dengan membahas sudut!

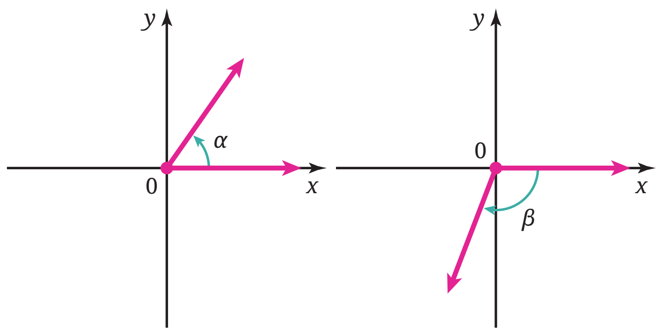
1. Sudut

Dalam trigonometri, sudut dipandang sebagai perputaran suatu sinar garis dari sisi awal ke sisi akhir dengan pusat di pangkalnya. Jika perputarannya berlawanan arah putaran jarum jam, besar sudutnya positif. Sebaliknya, jika perputarannya searah putaran jarum jam, besar sudutnya negatif. Perhatikan gambar berikut!



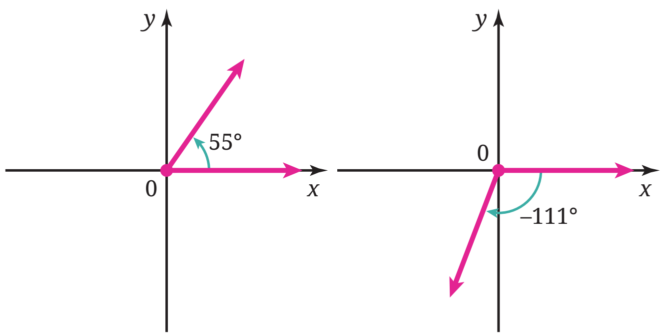
Gambar 3.2 Sudut Positif dan Sudut Negatif

Kita dapat menggambar sudut dalam posisi baku. Suatu sudut dikatakan dalam *posisi baku* ketika titik sudutnya berada di titik asal O(0, 0) dan sisi awalnya berimpit dengan sumbu-x positif seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.3 Sudut α Positif dan Sudut β Negatif dalam Posisi Baku

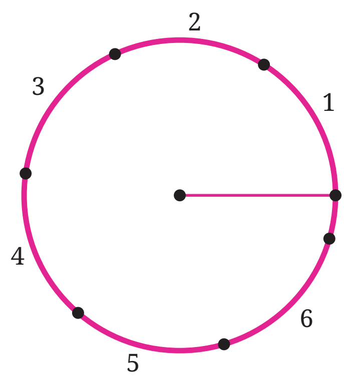
Kamu telah mengenali ukuran sudut di kelas X yang dinyatakan dalam derajat. Ketika menggunakan derajat, kita membagi satu putaran penuh menjadi 360 bagian untuk mendapatkan sebuah sudut yang besarnya 1°. Dengan demikian, sudut-sudut pada Gambar 3.3 beserta ukurannya ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.4 Sudut-Sudut yang Berukuran 55° dan –111° dalam Posisi Baku

Satuan sudut selain derajat ialah *radian*. Satuan radian melibatkan fakta bahwa satu keliling sembarang lingkaran sama dengan 2π (atau sekitar 6,28) kali jari-jarinya.

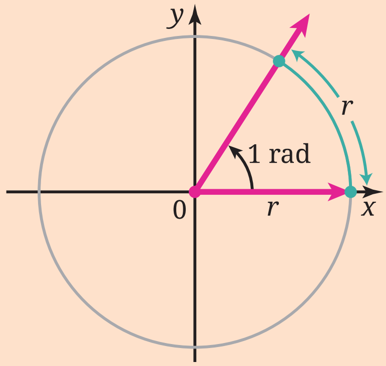
Dalam radian, besar satu putaran penuh adalah 2π radian. Perhatikan definisi berikut!



Gambar 3.5 Keliling Lingkaran Dibandingkan Jari-jarinya

Definisi 3.1 **Radian**

Sudut pusat sebuah lingkaran berukuran 1 radian (1 rad) jika sudut pusat tersebut menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari lingkaran tersebut. Besar 1 rad tampak pada gambar berikut.

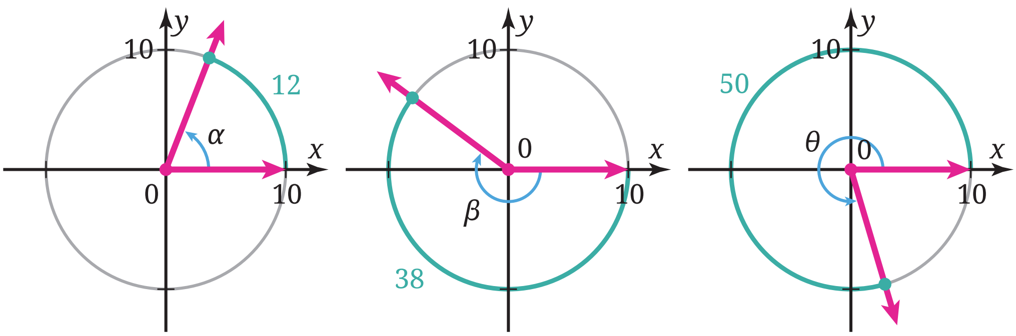


Gambar 3.6 Sudut yang Besarnya 1 rad

Untuk lebih memahami ukuran radian, perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.1 Mengukur Sudut dalam Radian

Tentukan besar ketiga sudut pada Gambar 3.7 dalam radian!



Gambar 3.7 Tiga Sudut Pusat Lingkaran

Alternatif penyelesaian:

Sudut α, β, dan θ merupakan sudut pusat lingkaran yang berjari-jari 10. Berdasarkan Definisi 3.1, sebuah sudut yang menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jarinya memiliki ukuran 1 rad. Karena sudut α menghadap busur lingkaran sepanjang 12, besar sudut tersebut adalah

$$\alpha = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \text{ rad}$$

Besar sudut β dapat ditentukan dengan cara yang serupa. Karena arah putaran sisi akhir sudut β searah putaran jarum jam, besar sudutnya adalah

$$\beta = -\frac{38}{10} = -3\frac{4}{5} \text{ rad}$$

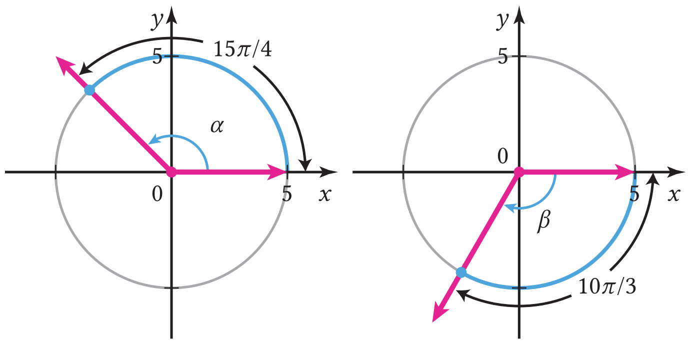
Sudut θ menghadap busur lingkaran sepanjang 50 dengan putaran berlawanan arah putaran jarum jam sehingga besar sudutnya adalah

$$\theta = \frac{50}{10} = 5 \text{ rad}$$

Jadi, besar sudut α, β, dan θ berturut-turut adalah $1\frac{1}{5}$ rad, $-3\frac{4}{5}$ rad, dan 5 rad.

Mari Mencoba 3.1

Perhatikan Gambar 3.8!



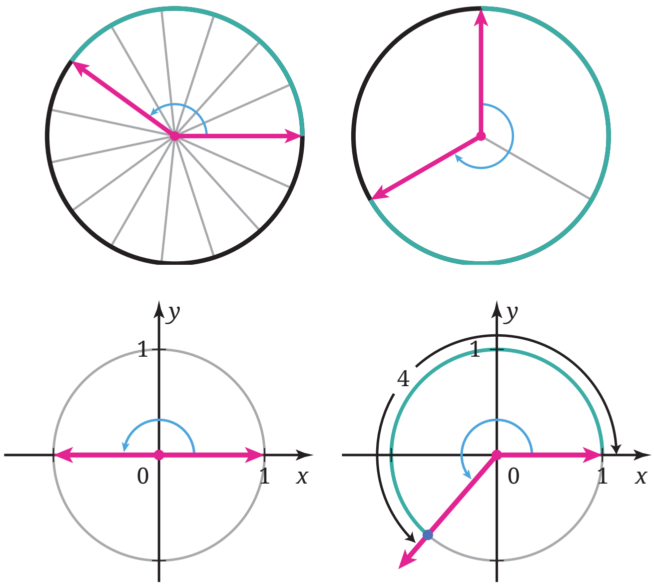
Gambar 3.8 Sudut-Sudut Pusat α dan β

Tentukan besar sudut α dan β dalam radian.

Sekarang kita telah mengenal dua satuan sudut, yaitu derajat dan radian. Bagaimana hubungan kedua satuan tersebut? Ayo, lakukan eksplorasi berikut!

Eksplorasi Menentukan Hubungan antara Derajat dan Radian

1. Tentukan besar keempat sudut pada Gambar 3.9 dalam derajat dan radian!



Gambar 3.9 Empat Sudut Pusat Lingkaran

2. Lengkapilah tabel berikut dengan besar sudut-sudut yang bersesuaian!

No.	Besar Sudut (dalam Derajat)	Besar Sudut (dalam Radian)
1.	45°	$\frac{\pi}{4}$
2.	–120°	
3.	360°	
4.		π
5.		–3

3. Berdasarkan nomor 1 dan 2, bagaimana caramu mengonversi sudut yang diukur dalam derajat ke radian? Bagaimana jika sebaliknya?

Sebagai alternatif, kamu juga dapat menemukan hubungan antara derajat dan radian dengan melakukan aktivitas interaktif berikut.

Aktivitas Interaktif

Ayo, eksplorasi hubungan antara ukuran sudut derajat dan radian dengan mengunjungi *https://s.id/derajat-rad* atau memindai kode respons cepat di samping! Kamu dapat menggunakan pertanyaan-pertanyaan berikut sebagai panduan eksplorasi.

Pindai

1. Berapakah besar sudut (dalam derajat dan radian) 0,25 putaran dan 0,6 putaran?
2. Buatlah beberapa putaran dan simpanlah besar sudutnya dalam derajat dan radian. Lihat grafik dan tabelnya, kemudian tentukan hubungan antara derajat dan radian!

Hasil yang diperoleh dari aktivitas eksplorasi sebelumnya dapat dirangkum dalam sifat berikut.

Sifat 3.1 **Hubungan antara Derajat dan Radian**

Berikut ini adalah hubungan antara derajat dan radian.

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Untuk mengonversi derajat ke radian, kalikan dengan $\frac{\pi}{180}$ rad.
2. Untuk mengonversi radian ke derajat, kalikan dengan $\frac{180°}{\pi}$.

Untuk lebih memahami cara mengonversi satuan sudut, silakan mempelajari contoh berikut!

Contoh 3.2 Mengonversi Sudut

Nyatakan:

1. 30° ke dalam radian
2. $\frac{5\pi}{3}$ rad ke dalam derajat

Alternatif penyelesaian:

1. $30° = 30\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$
2. $\frac{5\pi}{3} \text{ rad} = \frac{5\pi}{3}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 300°$

Mari Mencoba 3.2

Konversilah 75° menjadi radian dan 6 rad menjadi derajat.

Penulisan sudut dalam radian biasanya tidak disertai dengan penanda rad. Hal ini berbeda dengan penulisan derajat yang selalu disertai dengan tanda °. Dengan demikian, jika kamu mendapati ukuran sudut yang tidak memiliki satuan atau penanda, sudut tersebut berarti dinyatakan dalam radian. Sebagai contoh, ukuran sudut dalam bentuk 75° merupakan sudut dalam derajat, sedangkan 75 merupakan sudut dalam radian.

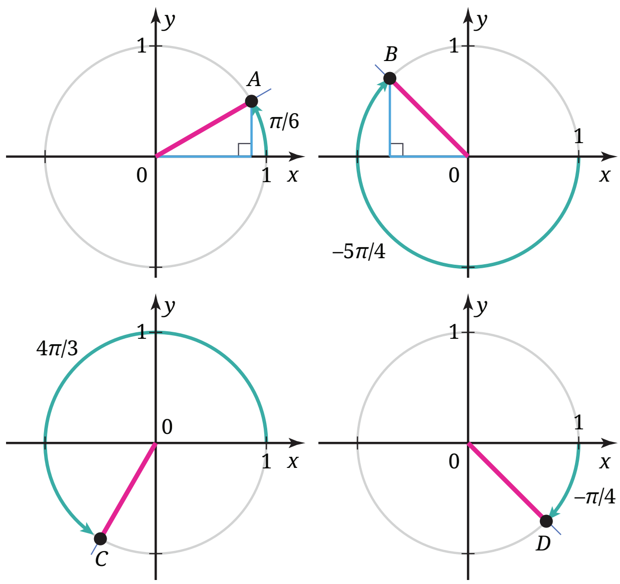
2. Fungsi Trigonometri Bilangan Real

Di kelas X kamu telah mempelajari perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku. Kamu dapat menggunakan pengetahuan tentang perbandingan trigonometri tersebut untuk melakukan eksplorasi berikut.

Eksplorasi Menentukan Koordinat Titik pada Lingkaran Satuan

Di dalam aktivitas eksplorasi ini, kamu akan menentukan koordinat titik-titik yang diberikan menggunakan bantuan perbandingan trigonometri segitiga siku-siku.

1. Titik-titik *A*, *B*, *C*, dan *D* pada Gambar 3.10 berada pada lingkaran satuan, yaitu lingkaran yang berpusat di titik asal (0, 0) dan berjari-jari 1 satuan. Berdasarkan informasi pada gambar tersebut, tentukan koordinat keempat titik itu! (Perhatikan tanda, positif atau negatif, dari koordinat-koordinatnya.)



Gambar 3.10 Titik-Titik *A*, *B*, *C*, dan *D* pada Lingkaran Satuan

2. Berdasarkan perhitunganmu pada nomor 1, secara umum, bagaimana cara menentukan koordinat suatu titik yang berada pada lingkaran satuan jika diketahui besar sudutnya?

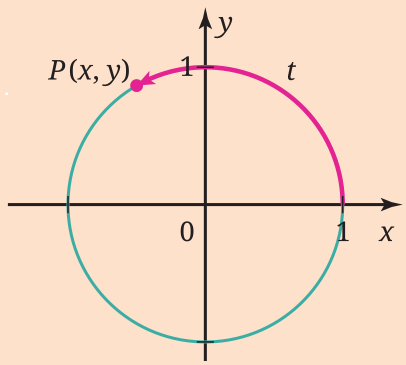
Melalui aktivitas eksplorasi sebelumnya, kita mendapatkan dua hal penting berikut.

- Koordinat x dan y titik-titik pada lingkaran satuan merupakan fungsi terhadap besar sudut pusat lingkaran tersebut.
- Koordinat x dan y titik-titik tersebut dapat ditentukan dengan perbandingan trigonometri.

Berdasarkan kedua hal tersebut, kita dapat mendefinisikan fungsi trigonometri sebagai berikut.

Definisi 3.2 **Fungsi Kosinus, Fungsi Sinus, dan Fungsi Tangen**

Misalkan t adalah sembarang bilangan real dan $P(x, y)$ adalah titik pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut pusat t, seperti pada Gambar 3.11 berikut.



Gambar 3.11 Sudut Pusat t dan Titik $P(x, y)$

Fungsi-fungsi trigonometri kosinus, sinus, tangen, sekan, kosekan, dan kotangen secara berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.

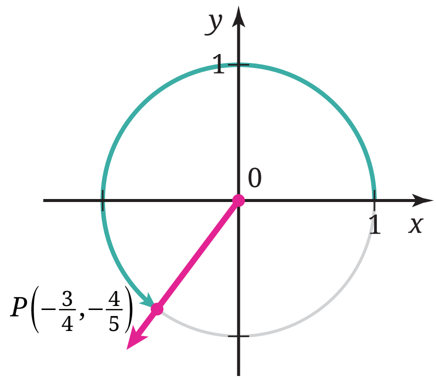
$$\cos t = x \qquad \sin t = y \qquad \tan t = \frac{y}{x}; x \neq 0$$

$$\sec t = \frac{1}{x}; x \neq 0 \qquad \csc t = \frac{1}{y}; y \neq 0 \qquad \cot t = \frac{x}{y}; y \neq 0$$

Untuk lebih memahami cara menentukan nilai fungsi trigonometri, silakan cermati contoh berikut!

Contoh 3.3 Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

Titik P merupakan titik pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut pusat t, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.12. Tentukan sin t, cos t, dan tan t.



Gambar 3.12 Titik *P* pada Lingkaran Satuan dan Sudut Pusat *t*

Alternatif penyelesaian:

Koordinat x dan y titik P secara berturut-turut adalah $-\frac{3}{5}$ dan $-\frac{4}{5}$. Berdasarkan Definisi 3.2, kita memperoleh

$$\sin t = y = -\frac{4}{5}$$

$$\cos t = x = -\frac{3}{5}$$

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

Mari Mencoba 3.3

Sudut pusat t bersesuaian dengan sebuah titik berkoordinat $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pada lingkaran satuan. Tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t.

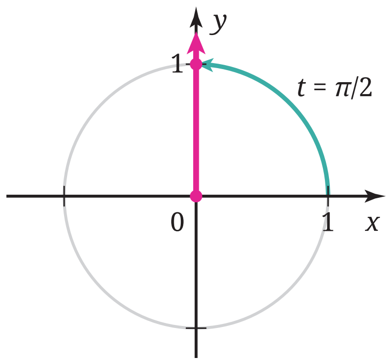
Kita dapat menggunakan Definisi 3.2 untuk menentukan nilai fungsi trigonometri sudut-sudut yang sisi akhirnya berimpit dengan sumbu-sumbu koordinat. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.4 Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

Tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t untuk $t = \frac{\pi}{2}$.

Alternatif penyelesaian:

Sebuah sinar garis yang berimpit dengan sumbu-x positif, jika diputar dengan pusat $O(0, 0)$ sejauh $\frac{\pi}{2}$, akan memotong bagian atas lingkaran satuan. Titik potongnya ini memiliki koordinat (0, 1) seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.13 Sudut Pusat $t = \frac{\pi}{2}$

Dengan demikian, kita mendapatkan

$\sin t = y = 1$

$\cos t = x = 0$

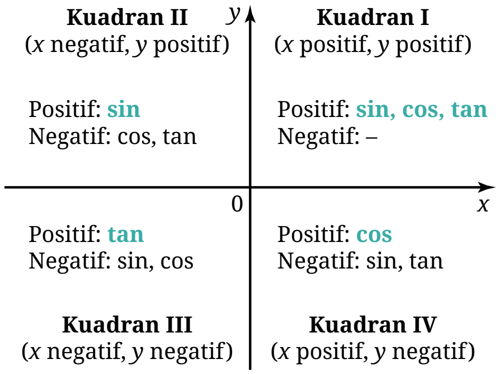
$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (tak terdefinisi)

Mari Mencoba 3.4

Tentukan $\sin t$, $\cos t$, dan $\tan t$ untuk $t = \pi$.

3. Bilangan Acuan dan Nilai Fungsi Trigonometri

Berdasarkan Definisi 3.2, kita dapat menentukan tanda (positif atau negatif) dari nilai fungsi trigonometri untuk sudut tertentu dengan mudah. Untuk sudut-sudut dalam posisi baku yang sisi akhirnya di kuadran II, misalnya, sembarang titik yang berada di sisi akhirnya memiliki koordinat x negatif dan koordinat y positif. Dengan demikian, $\sin t$ di kuadran II bernilai positif, sedangkan $\cos t$ dan $\tan t$ bernilai negatif. Tanda dari nilai fungsi-fungsi trigonometri di semua kuadran dirangkum pada Gambar 3.14 berikut.



Gambar 3.14 Tanda Fungsi-Fungsi Trigonometri di Semua Kuadran

Definisi 3.2 dan tanda fungsi-fungsi trigonometri pada Gambar 3.14 dapat digunakan untuk menentukan nilai fungsi trigonometri sembarang bilangan real t. Untuk itu, ayo kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

1. Titik-titik dengan koordinat (–4, –3), (3, 0), dan (0, –2) berada pada kuadran mana?
2. Dengan menggunakan Definisi 3.2, tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t untuk setiap nilai t berikut.

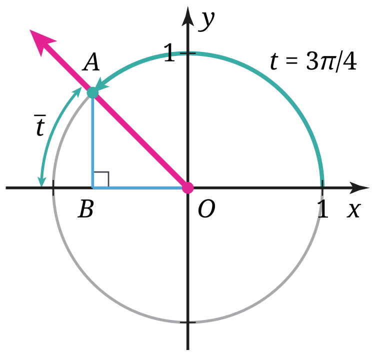
$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi, \text{ dan } \frac{3\pi}{2}.$$

   Isikan hasilnya ke dalam tabel berikut.

t	sin t	cos t	tan t
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			

3. Tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t jika $t = \frac{3\pi}{4}$. Untuk melakukannya, ikuti panduan berikut.

a. Lukislah lingkaran satuan pada bidang koordinat dan sebuah sudut sebesar $t = \frac{3\pi}{4}$. Tandai titiknya sebagai titik A. Lukis juga segitiga siku-siku bantuan yang bersesuaian. Hasilnya tampak pada Gambar 3.15 berikut.



Gambar 3.15 Sudut $t = \frac{3\pi}{4}$ dalam Posisi Baku

b. Misalnya $\bar{t}$ adalah sudut terkecil yang dibentuk oleh $\overrightarrow{OA}$ dan sumbu-x (*lihat* Gambar 3.15). Tentukan besar $\bar{t}$.

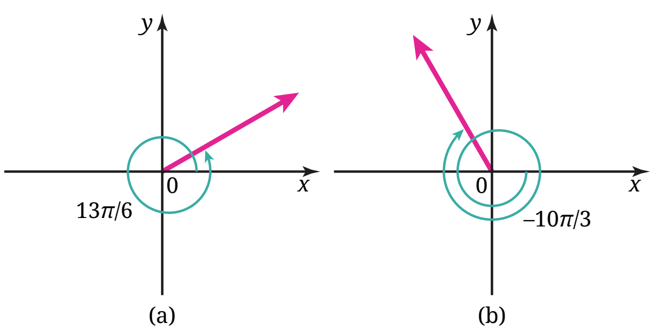
c. Dengan menggunakan perbandingan trigonometri segitiga siku-siku, tentukan koordinat titik A.

d. Dengan menggunakan hasil pada bagian (c) dan Definisi 3.2, tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t. Perhatikan tanda positif atau negatifnya.

e. Bandingkan hasilnya dengan nilai sin $\bar{t}$, cos $\bar{t}$, dan tan $\bar{t}$.

4. Tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t untuk $t = \frac{4\pi}{3}$ dan $t = -\frac{\pi}{4}$. (Gunakan cara seperti pada nomor 2.)

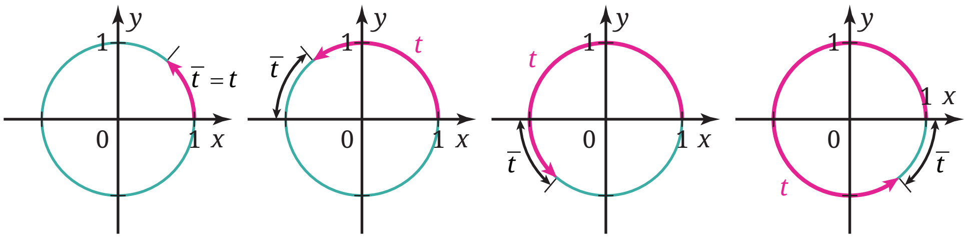
5. Tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t untuk $t = \frac{13\pi}{6}$ dan $t = -\frac{10\pi}{3}$. Kedua sudut tersebut ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.16 Sudut-Sudut $\frac{13\pi}{6}$ dan $-\frac{10\pi}{3}$ dalam Posisi Baku

6. Tentukan nilai sin t, cos t, dan tan t untuk $t = \frac{21\pi}{4}$ dan $t = -\frac{37\pi}{6}$.
7. Secara umum, bagaimana kamu menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real?

Pada aktivitas eksplorasi sebelumnya, kamu telah menemukan strategi untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real. Strategi tersebut melibatkan bilangan acuan $\bar{t}$. *Bilangan acuan* $\bar{t}$ yang bersesuaian dengan t adalah panjang busur lingkaran satuan terpendek antara titik yang ditentukan oleh t dan sumbu-x. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 3.17 Bilangan Acuan $\bar{t}$ untuk t pada Setiap Kuadran

Untuk mengetahui cara menentukan bilangan acuan, silakan mencermati contoh berikut!

Contoh 3.5 Menentukan Bilangan Acuan

Tentukan bilangan acuan untuk $t = \frac{4\pi}{3}$ dan $t = 315°$.

Alternatif penyelesaian:

Karena $t = \frac{4\pi}{3}$ berada di kuadran III, bilangan acuannya dapat ditentukan seperti berikut.

$$\bar{t} = t - \pi = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

Sudut $t = 315°$ berada di kuadran IV sehingga sudut acuannya adalah $\bar{t} = 360° - 315° = 45°$.

Mari Mencoba 3.5

Carilah bilangan acuan untuk $t = \frac{\pi}{3}$ dan $t = \frac{2\pi}{3}$.

Penentuan bilangan acuan sangat berguna untuk menentukan nilai fungsi trigonometri. Perhatikan contoh berikut!

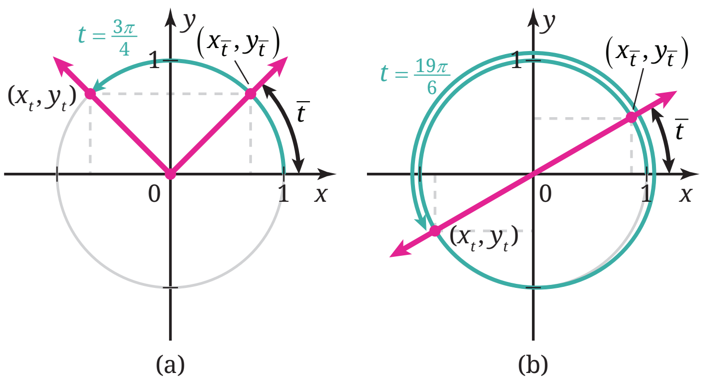
Contoh 3.6 Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

Tentukan nilai $\cos \frac{3\pi}{4}$ dan $\sin \frac{19\pi}{6}$.

Alternatif penyelesaian:

Bilangan acuan $t = \frac{3\pi}{4}$ adalah $\bar{t} = \frac{\pi}{4}$. Coba perhatikan Gambar 3.18 (a). Karena titiknya di kuadran II, absis (koordinat x) titik tersebut negatif. Dengan demikian, kita memperoleh

$$\cos \frac{3\pi}{4} = x_t = -x_{\bar{t}} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Gambar 3.18 Representasi $t = \frac{3\pi}{4}$ dan $\frac{19\pi}{6}$ pada Lingkaran Satuan

Bilangan acuan $t = \frac{19\pi}{6}$ adalah $\bar{t} = \frac{\pi}{6}$, seperti yang ditunjukkan Gambar 3.18 (b). Karena titiknya di kuadran III, ordinat (koordinat y) titik tersebut negatif. Dengan demikian, kita memperoleh

$$\sin \frac{19\pi}{6} = y_t = -y_{\bar{t}} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Mari Mencoba 3.6

Tentukan nilai dari $\sin \frac{7\pi}{4}$ dan $\cos \frac{5\pi}{6}$.

Kita dapat meringkas cara pada Contoh 3.6. Karena $t = \frac{3\pi}{4}$ berada di kuadran II, nilai kosinusnya negatif. Dengan demikian, nilai kosinusnya sama dengan negatif dari kosinus bilangan acuannya.

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Penentuan $\sin\frac{19\pi}{6}$ juga dapat menggunakan cara yang serupa. Dengan demikian, langkah-langkah penentuan nilai fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real t sebagai berikut.

a. Tentukan bilangan acuan $\bar{t}$ yang bersesuaian dengan t.

b. Tentukan tanda, positif atau negatif, nilai fungsi trigonometri untuk t tersebut. Tanda ini bergantung pada kuadran mana sisi akhir sudut t tersebut.

c. Nilai fungsi trigonometri untuk t sama dengan nilai fungsi trigonometri untuk $\bar{t}$, kecuali mungkin tandanya berbeda.

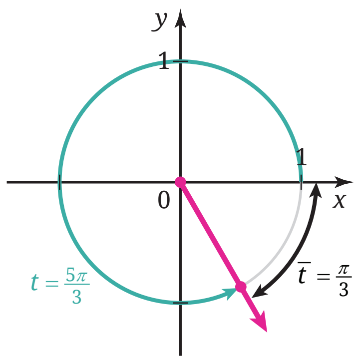
Penentuan nilai fungsi sekan (sec), kosekan (csc), dan kotangen (cot) serupa dengan penentuan nilai fungsi kosinus, sinus, dan tangen. Kamu dapat memperhatikan contoh berikut.

Contoh 3.7 Menentukan Nilai Fungsi Sekan, Kosekan, dan Kotangen

Tentukan $\sec t$, $\csc t$, dan $\cot t$ untuk $t = \frac{5\pi}{3}$.

Alternatif penyelesaian:

Sudut $t = \frac{5\pi}{3}$ terletak pada kuadran IV sehingga bilangan acuannya adalah $\bar{t} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.19.



Gambar 3.19 Representasi $t = \frac{5\pi}{3}$ dan Bilangan Acuannya

Karena terletak di kuadran IV dan sekan (sec) merupakan kebalikan dari kosinus (cos), tanda nilai sekan tersebut adalah positif. Dengan demikian, kita peroleh

$$\sec\frac{5\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menentukan csc $\frac{5\pi}{3}$ dan cot $\frac{5\pi}{3}$ seperti berikut.

$$\csc\frac{5\pi}{3} = -\csc\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot\frac{5\pi}{3} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Mari Mencoba 3.7

Tentukan nilai sec t, csc t, dan cot t untuk $t = \frac{7\pi}{6}$.

4. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Terdapat satu sifat yang sangat membantu untuk menentukan nilai fungsi trigonometri, yaitu sifat fungsi genap dan fungsi ganjil. Suatu fungsi f merupakan *fungsi genap* jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap x dalam daerah asalnya. Suatu fungsi f merupakan *fungsi ganjil* jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap x dalam daerah asalnya.

Sifat 3.2 **Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil**

Kosinus dan sekan merupakan fungsi-fungsi genap. Dengan kata lain,

$\cos(-t) = \cos t$ $\qquad$ $\sec(-t) = \sec t$

Sinus, kosekan, tangen, dan kotangen merupakan fungsi-fungsi ganjil. Dengan kata lain,

$\sin(-t) = -\sin t$ $\qquad$ $\csc(-t) = -\csc t$

$\tan(-t) = -\tan t$ $\quad$ $\cot(-t) = -\cot t$

untuk sembarang bilangan real t yang menjadi daerah asal setiap fungsi tersebut.

Kamu ingin mengeksplorasi Sifat 3.2 tersebut secara interaktif? Ayo, kunjungi aktivitas berikut!

Aktivitas Interaktif

Aktivitas pembelajaran ini mengajak kamu untuk menyelidiki sifat genap dan ganjil fungsi trigonometri. Silakan mengunjungi *https://s.id/trig-genap-ganjil* atau memindai kode respons cepat di samping.

Pindai

Untuk memahami penggunaan Sifat 3.2, silakan mencermati contoh berikut!

Contoh 3.8 Menggunakan Sifat Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Tentukan nilai sin $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ dan sec $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan Sifat 3.2, kita memperoleh

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

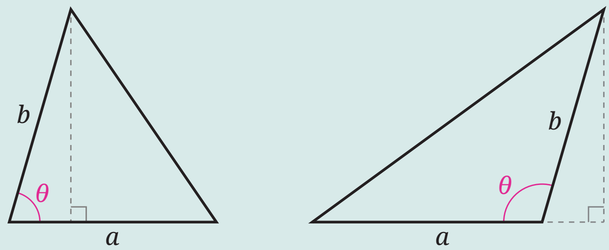
Mari Mencoba 3.8

Carilah nilai cos $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ dan csc $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Kita mengakhiri subbab ini dengan menerapkan fungsi trigonometri untuk menentukan luas segitiga. Kerjakan Mari Berpikir Kreatif berikut!

Mari Berpikir Kreatif

Misalkan kamu memiliki sebuah segitiga yang satu sudut dalam dan panjang dua sisi yang mengapitnya diketahui.



Gambar 3.20 Segitiga dengan Sudut Dalam θ dan Panjang Sisi-Sisinya a dan b

Tunjukkan bahwa luas segitiga tersebut adalah $L = \frac{1}{2} ab \sin \theta$.

Latihan A Fungsi Trigonometri dan Lingkaran Satuan

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

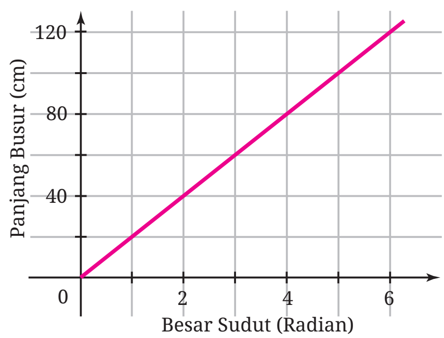
Pemahaman Konsep

1. Benar atau salah? Sebuah sudut berada dalam posisi baku jika sisi awalnya berimpit dengan sumbu-x.
2. Untuk mengonversi sebuah sudut yang dinyatakan ke dalam derajat menjadi radian, kalikan sudut tersebut dengan ....
3. Jika t adalah sembarang bilangan real dan sudut t dalam posisi baku memotong lingkaran satuan di (x, y), maka

$\cos t =$	$\sec t =$ ....
$\sin t =$	$\csc t =$ ....
$\tan t =$	$\cot t =$ ....

Penerapan Konsep

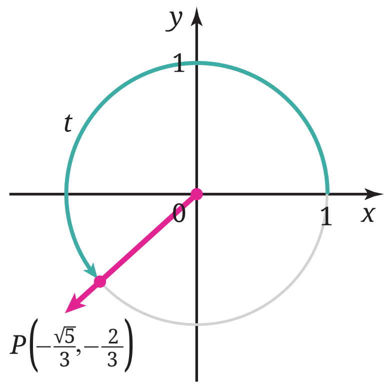
4. Gambar di samping menunjukkan hubungan antara panjang busur lingkaran dan besar sudut pusat yang menghadap busur tersebut. Tentukan jari-jari lingkaran tersebut.



5. Nyatakan sudut-sudut berikut ke dalam radian: 45°, 144°, dan 306°.

6. Konversilah sudut-sudut berikut ke dalam derajat: 3, $\frac{3\pi}{4}$, dan $\frac{11\pi}{6}$.

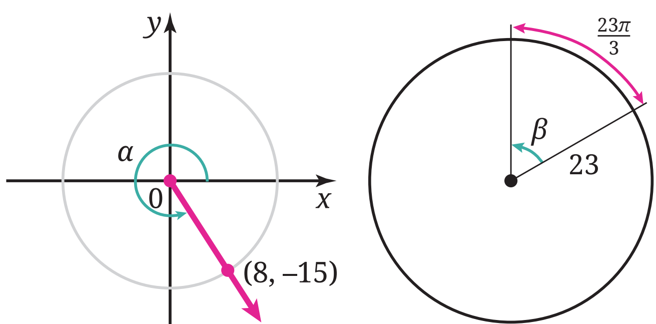
7. Perhatikan gambar berikut, kemudian carilah nilai sin *t*, cos *t*, dan tan *t*.



Sudut Pusat *t* dan Titik *P* pada Lingkaran Satuan

8. Cari nilai sinus, kosinus, dan tangen untuk $t = 0$ dan $t = \frac{3\pi}{2}$.

9. Tentukan nilai sinus, kosinus, dan tangen untuk sudut α dan sudut β yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Sudut α dan Sudut β

10. Diberikan nilai *t* sebagai berikut:

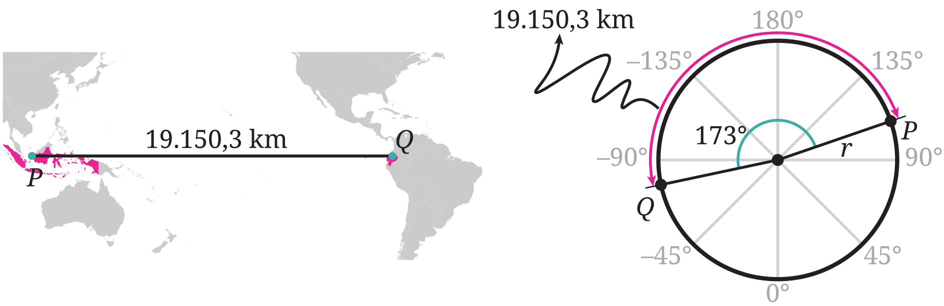
$$\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \text{ dan } \frac{11\pi}{6}.$$

   a. Tentukan bilangan acuan $\bar{t}$ untuk setiap bilangan *t* tersebut.

   b. Carilah nilai keenam fungsi trigonometri untuk setiap *t* tersebut.

11. Tentukan nilai dari sec $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ dan tan $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

12. **Jari-Jari Bumi**. Pontianak (Indonesia) dan Quito (Ekuador) merupakan dua kota yang dilalui oleh garis khatulistiwa. Dua monumen dalam kota tersebut, yaitu Khatulistiwa Park dan Mitad del Mundo, menunjukkan posisi eksak garis khatulistiwa. Berdasarkan Google Maps (lihat gambar), koordinat kedua monumen tersebut secara berturut-turut adalah sekitar (0°, 109°) dan (0°, –78°). Kedua monumen tersebut berjarak sekitar 19.150,3 km.



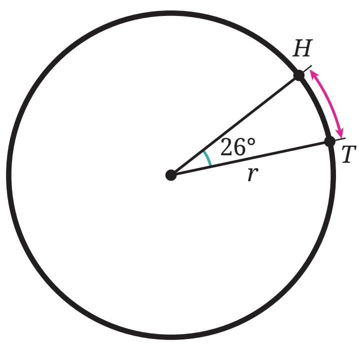
Posisi Khatulistiwa Park (*P*) dan Mitad del Mundo (*Q*) Dilihat dari Atas Khatulistiwa dan Kutub Utara

a. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan jari-jari bumi.

b. Berdasarkan NASA, jari-jari bumi jika diukur di sepanjang garis khatulistiwa adalah 6.378,137 km (kamu dapat memeriksa di *https://s.id/fakta-bumi*). Apakah jawaban kamu pada bagian (a) sama dengan informasi dari NASA tersebut? Mengapa?

Pindai

13. **Jarak Dua Tempat**. Taman Nasional Tesso Nilo berkoordinat di (0°, 102°) dan Tugu Khatulistiwa Halmahera Selatan berkoordinat di (0°, 128°). Posisi kedua tempat tersebut direpresentasikan pada gambar di bawah.



Posisi Taman Nasional Tesso Nilo (*T*) dan Tugu Khatulistiwa Halmahera Selatan (*H*)

Gunakan informasi tentang jari-jari bumi di sepanjang khatulistiwa pada soal nomor 12 untuk menentukan jarak kedua tempat itu!

B. Grafik Fungsi Trigonometri

Pasang dan surut air laut merupakan contoh fenomena yang paling mudah diprediksi karena konsistensinya. Seperti halnya matahari terbit dari timur dan terbenam di barat, kita juga mengetahui bahwa air laut mengalami pasang dan surut. Fenomena pasang surut air laut tersebut dipengaruhi oleh gravitasi bulan dan matahari serta rotasi bumi dan bulan. Grafik fungsi trigonometri yang akan dibahas pada subbab ini dapat digunakan untuk memodelkan ketinggian permukaan air laut karena adanya fenomena ini.

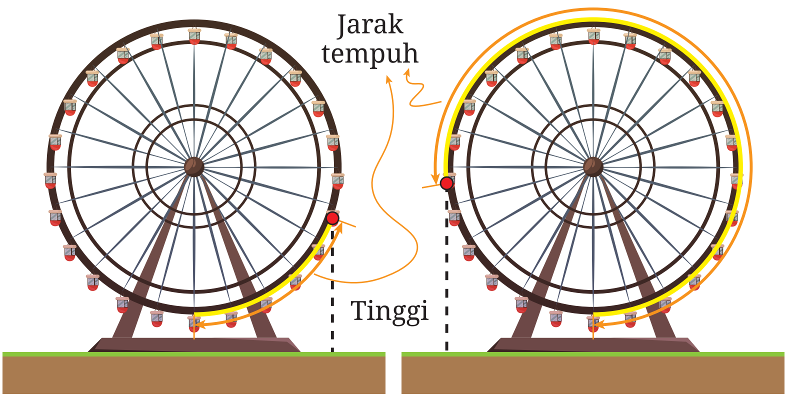
Gambar 3.21 Keindahan Pantai Padangbai, Karangasem, Bali

Sumber: Yosep Dwi Kristanto (2023)

Fokus kita dalam subbab ini adalah untuk menginterpretasi dan mensketsa grafik fungsi-fungsi trigonometri. Sebelum itu, ayo kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi — Menentukan Hubungan antara Jarak Tempuh dan Ketinggian

Ketika di pasar malam, Sondang naik kincir ria. Mula-mula, dia berada di bagian bawah kincir ria tersebut. Ketika kincir ria berputar, jarak tempuh dan ketinggian Sondang berubah-ubah. Perhatikan Gambar 3.22!



Gambar 3.22 Jarak Tempuh dan Ketinggian Sondang

Sketsalah hubungan antara jarak tempuh dan ketinggian Sondang dalam kincir ria tersebut pada Gambar 3.23!

Gambar 3.23 Sketsa Hubungan antara Jarak Tempuh dan Tinggi

Sebagai alternatif kegiatan eksplorasi sebelumnya, kamu dapat melakukan aktivitas interaktif berikut.

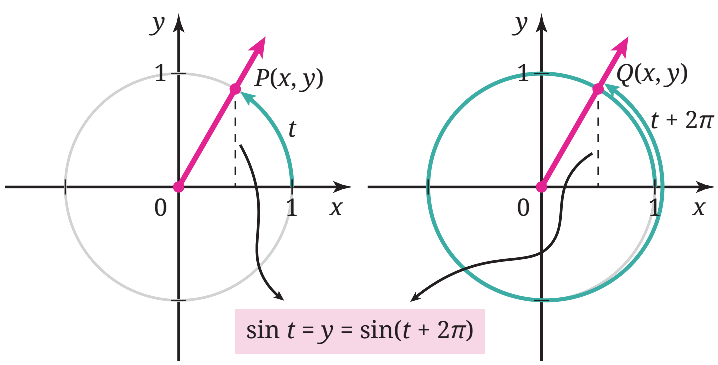
Aktivitas Interaktif

Aktivitas pembelajaran digital "Sukaria Bermain Kincir Ria" mengajakmu untuk menemukan hubungan antara jarak tempuh dan ketinggian dalam permasalahan kincir ria secara interaktif. Untuk melakukannya, silakan mengunjungi *https://student.desmos.com/* atau memindai kode respons cepat di samping, kemudian menginput kode yang diberikan oleh guru.

Pindai

1. Grafik Fungsi Sinus dan Fungsi Kosinus serta Transformasinya

Pertama-tama, mari kita menyelidiki salah satu karakteristik fungsi sinus. Berdasarkan definisinya, nilai fungsi ini dipengaruhi oleh koordinat titik $P(x, y)$ pada lingkaran satuan yang posisinya bersesuaian dengan busur sepanjang t. Padahal, kita mengetahui bahwa keliling lingkaran satuan adalah 2π. Dengan demikian, posisi titik P tersebut akan sama dengan titik yang bersesuaian dengan busur sepanjang $t + 2\pi$. Kamu dapat memperhatikan gambar berikut.



Gambar 3.24 Posisi Titik yang Bersesuaian dengan Busur t sama dengan $t + 2\pi$

Dengan demikian, nilai sinus untuk t dan $t + 2\pi$ juga sama. Hal ini juga berlaku untuk nilai kosinus. Secara umum, kita mendapatkan:

$\sin (t + 2n\pi) = \sin t$

$\cos (t + 2n\pi) = \cos t$

untuk sembarang bilangan bulat n

Dengan kata lain, nilai fungsi sinus dan fungsi kosinus berulang atau *periodik* dalam selang 2π. Selang inilah yang disebut *periode*. Periode fungsi $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ adalah 2π.

Sekarang kamu akan menggunakan sifat periodik kedua fungsi tersebut untuk mensketsa grafiknya. Silakan kerjakan eksplorasi berikut!

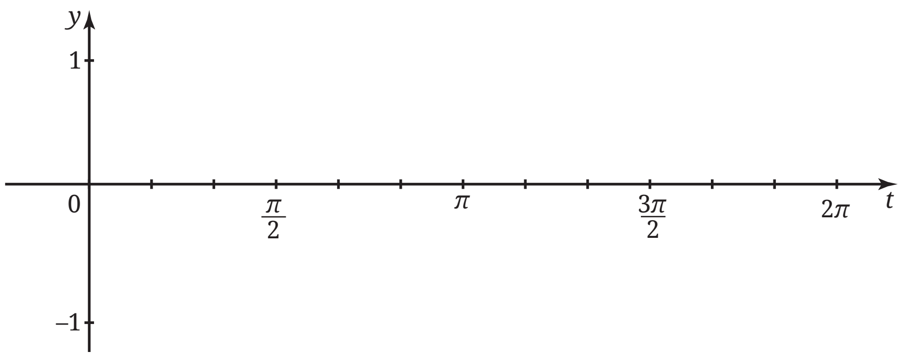
Eksplorasi — Menggambar Grafik $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dengan Plot Titik

Dalam aktivitas eksplorasi ini, kamu akan mensketsa dan menganalisis grafik fungsi $y = \sin t$ dalam satu periode, yaitu $0 \le t \le 2\pi$. Ikuti langkah-langkah berikut ini untuk menggambar grafik fungsi tersebut.

1. Lengkapi tabel berikut dengan nilai fungsi $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dalam satu periodenya.

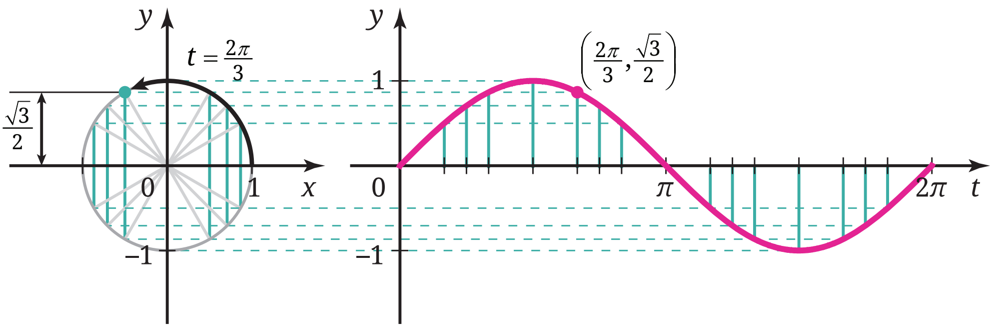
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin t													
cos t													

2. Dengan menggunakan tabel pada nomor 1, sketsalah grafik fungsi $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dalam satu periodenya pada Gambar 3.25.



Gambar 3.25 Bidang Koordinat

Selain dengan plot titik, kita juga dapat melukis grafik fungsi $y = \sin t$ dengan bantuan lingkaran satuan. Berdasarkan Definisi 3.2, nilai $y = \sin t$ sama dengan koordinat y dari sebuah titik yang posisinya sejauh t dari (1, 0) pada lingkaran satuan. Berdasarkan hal ini, grafik fungsi $y = \sin t$ ditunjukkan pada gambar berikut.



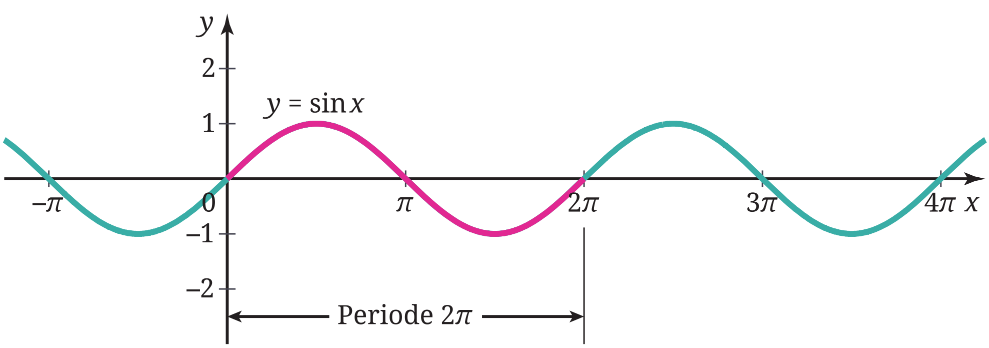
Gambar 3.26 Grafik Fungsi $y = \sin t$ untuk $0 \leq t \leq 2\pi$

Aktivitas Interaktif

Ingin melihat hubungan antara lingkaran satuan dan grafik fungsi sinus secara interaktif? Ayo, kunjungi tautan *https://s.id/sin-lingkaran* atau pindai kode respons cepat di samping! Kamu dapat memainkan animasinya dan mengamati bagaimana grafik fungsi sinus terbentuk.

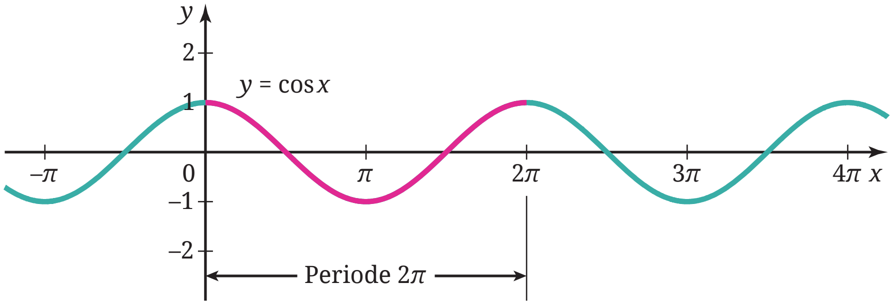
Pindai

Grafik fungsi sinus pada Gambar 3.26 hanya merentang pada satu periodenya. Kita dapat melanjutkan grafik fungsi tersebut dan hasilnya ditunjukkan pada Gambar 3.27.



Gambar 3.27 Grafik Fungsi $y = \sin x$

Adapun grafik fungsi $y = \cos x$ ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.28 Grafik Fungsi $y = \cos x$

Sebagai catatan, fungsi pada Gambar 3.26 menggunakan variabel t, sedangkan pada Gambar 3.27 dan 3.28 menggunakan variabel x. Penggantian variabel tersebut tidak menyebabkan perubahan nilai fungsi dan grafiknya. Oleh karena itu, selanjutnya kita menggunakan variabel x.

Berbekal grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, kita dapat mensketsa grafik keluarga fungsi trigonometri menggunakan transformasi fungsi. Perhatikan contoh berikut!

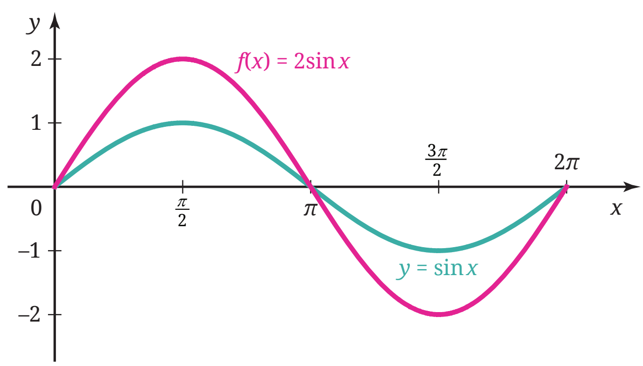
Contoh 3.9 Mensketsa Transformasi Grafik Fungsi Trigonometri

Sketsalah grafik dari setiap fungsi sinus berikut pada $0 \leq x \leq 2\pi$.

1. $f(x) = 2 \sin x$
2. $g(x) = -2 \sin x$
3. $h(x) = \sin 2x$

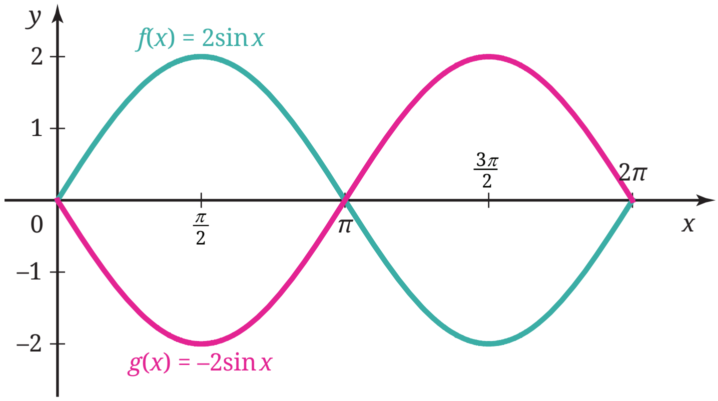
Alternatif penyelesaian:

1. Grafik fungsi f dapat diperoleh dengan meregangkan grafik $y = \sin x$ secara vertikal dengan faktor 2. Grafik fungsi $f(x) = 2 \sin x$ ditunjukkan pada Gambar 3.29.



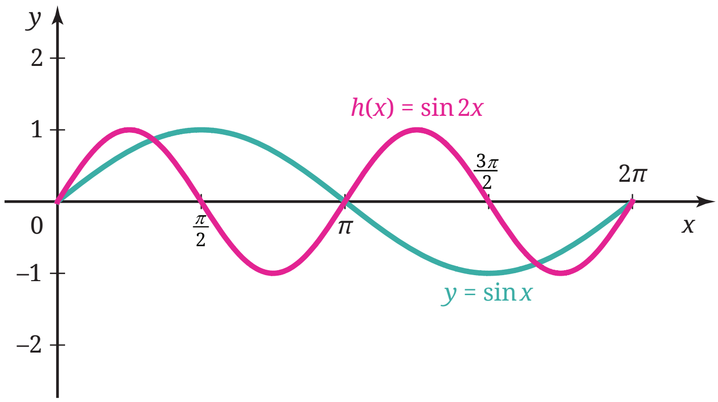
Gambar 3.29 Grafik Fungsi $f(x) = 2 \sin x$

2. Karena $g(x) = -f(x)$, grafik fungsi g dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik fungsi g terhadap sumbu-x. Dengan demikian, grafik fungsi g ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.30 Grafik Fungsi $g(x) = -2 \sin x$

3. Grafik fungsi h dapat diperoleh dengan memampatkan grafik $y = \sin x$ secara horizontal dengan faktor $\frac{1}{2}$. Dengan demikian, grafik fungsi h tersebut seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.31 Grafik Fungsi $h(x) = \sin 2x$

Mari Mencoba 3.9

Sketsalah grafik fungsi (untuk $0 \le x \le 2\pi$) dari:

1. $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ 2. $g(x) = -\frac{1}{2} \cos x$ 3. $h(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

Pada Contoh 3.9 nomor 1, kita dapat melihat bahwa pengali 2 menyebabkan grafik fungsi sinusnya semakin melebar secara vertikal. Jarak antara nilai tengah dan nilai maksimum atau nilai minimum fungsi tersebut menjadi 2. Jarak tersebut bernama *amplitudo*. Dengan kata lain, amplitudo fungsi sinus dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$A = \frac{1}{2}\,|M - m|$$

dengan:

- M merupakan nilai y maksimum fungsi
- m merupakan nilai y minimum fungsi

Grafik fungsi $f(x) = 2 \sin x$ dan $g(x) = -2 \sin x$ sama-sama memiliki ampitudo 2. Secara umum, fungsi $y = a \sin x$ dan $y = a \cos x$ memiliki ampitudo $|a|$.

Berdasarkan Contoh 3.9 nomor 3, kita dapat melihat bahwa pengali variabel x dalam fungsi sinus menyebabkan perubahan periode fungsi tersebut. Grafik fungsi $h(x) = \sin 2x$ memiliki periode π. Secara umum, fungsi $y = \sin kx$ dan $y = \cos kx$ memiliki periode $\frac{2\pi}{k}$.

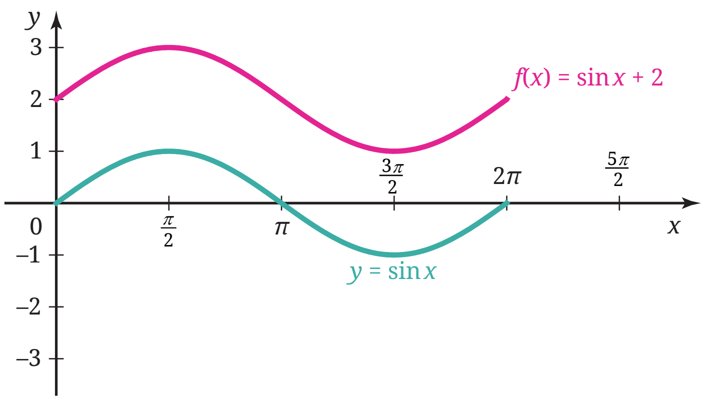
Contoh 3.10 Mensketsa Transformasi Grafik Fungsi Trigonometri

Sketsalah setiap grafik fungsi berikut dalam satu periode.

1. $f(x) = \sin x + 2$
2. $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Alternatif penyelesaian:

1. Grafik fungsi $f(x) = \sin x + 2$ dapat diperoleh dengan menggeser grafik fungsi $y = \sin x$ ke atas sejauh 2 satuan. Dengan demikian, grafik fungsi f tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.32 berikut.

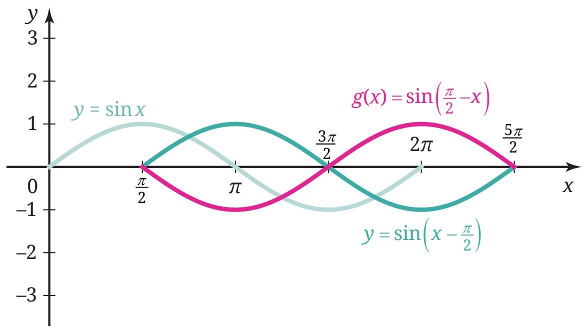


Gambar 3.32 Grafik Fungsi $f(x) = \sin x + 2$ dalam Satu Periode

2. Kita dapat menuliskan kembali fungsi g menjadi

$$g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Oleh karena itu, grafik g dapat diperoleh dengan menggeser grafik $y = \sin x$ ke kanan sejauh $\frac{\pi}{2}$, kemudian mencerminkan hasilnya terhadap sumbu-x. Grafik fungsi g tersebut ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.33 Grafik Fungsi $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ dalam Satu Periode

Mari Mencoba 3.10

Sketsalah grafik fungsi $f(x) = 3 - \cos x$ dalam satu periode.

Dari Contoh 3.9 dan Contoh 3.10, kita dapat melihat bahwa keluarga fungsi sinus dan fungsi kosinus dapat diperoleh dengan melakukan transformasi terhadap $y = \sin x$ dan $y = \cos x$.

Sifat 3.3 Transformasi Fungsi Sinus dan Fungsi Kosinus

Fungsi sinus: $y = a \sin k(x - b) + c$ dengan $k > 0$

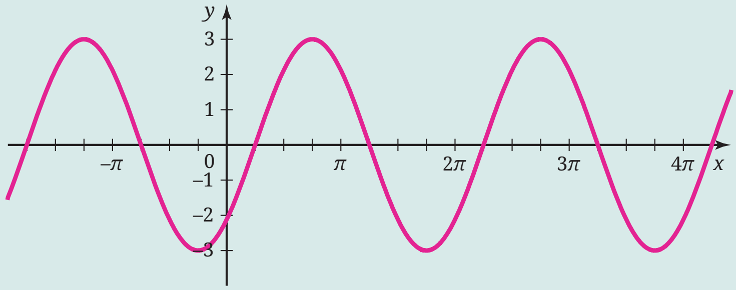
Fungsi kosinus: $y = a \cos k(x - b) + c$ dengan $k > 0$

Grafik kedua fungsi tersebut memiliki amplitudo $|a|$, periode $\frac{2\pi}{k}$, pergeseran horizontal b, dan pergeseran vertikal c.

Kita telah mengetahui cara mensketsa grafik fungsi sinus dan fungsi kosinus jika terdapat persamaan fungsinya. Bagaimana jika sebaliknya, yaitu kita diberikan sebuah grafik dan diminta untuk menentukan persamaan fungsinya? Silakan kerjakan Mari Berpikir Kreatif berikut!

Mari Berpikir Kreatif

Diberikan grafik seperti pada Gambar 3.34 berikut.



Gambar 3.34 Grafik Fungsi Trigonometri

1. Dhien menganggap bahwa grafik tersebut merupakan grafik fungsi $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, sedangkan Ahmad melihatnya sebagai grafik fungsi $y = 3 \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$. Siapa yang menurut kamu tepat? Mengapa?
2. Paulina menemukan bahwa grafik pada Gambar 3.34 merupakan grafik setiap fungsi trigonometri berikut.

   $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $y = 3 \sin\left(x - \frac{9\pi}{4}\right)$, $y = 3 \sin\left(x - \frac{17\pi}{4}\right)$,

   $y = 3 \cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$, $y = 3 \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$, dan $y = 3 \cos\left(x - \frac{11\pi}{4}\right)$.

   Menurutmu, bagaimana Paulina memperoleh persamaan-persamaan fungsi tersebut?

Ayo, kamu kerjakan aktivitas interaktif berikut!

Aktivitas Interaktif

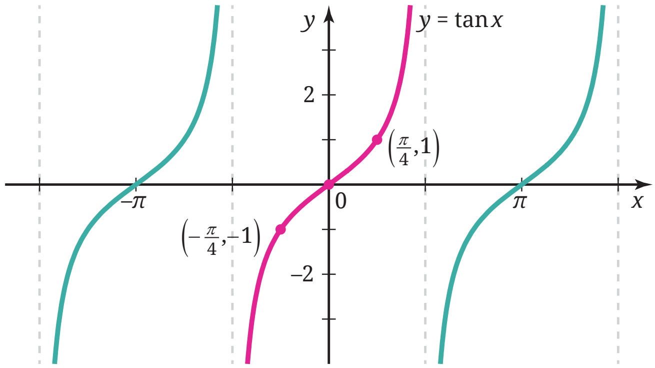
Jika memungkinkan, kamu dapat berlatih untuk melakukan transformasi fungsi sinus dan fungsi kosinus menggunakan kegiatan pembelajaran digital "Transformasi Fungsi Sinus dan Kosinus".

Silakan mengunjungi *https://student.desmos.com/* atau memindai kode respons cepat di samping, kemudian masukkan kode yang diberikan gurumu. Selamat bereksplorasi!

Pindai

2. Grafik Fungsi Tangen dan Transformasinya

Sekarang kita akan melukis grafik fungsi tangen. Grafik $y = \tan x$ ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.35 Grafik Fungsi $y = \tan x$

Berdasarkan gambar tersebut, kita dapat melihat bahwa fungsi $y = \tan x$ memiliki periode π. Fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ untuk sembarang bilangan bulat n. Grafik fungsinya seolah-olah mendekati sebuah garis vertikal ke arah atas (mendekati tak hingga) atau bawah (mendekati negatif tak hingga). Garis vertikal seperti inilah yang disebut *asimtot vertikal*.

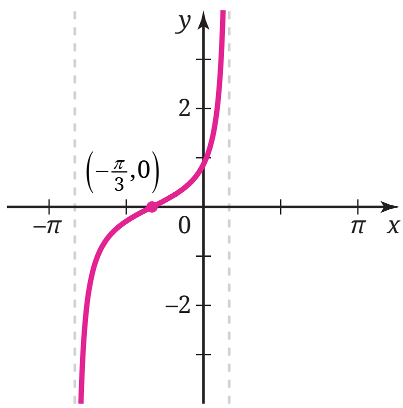
Sekarang perhatikan contoh berikut untuk mempelajari cara mensketsa transformasi grafik fungsi trigonometri.

Contoh 3.11 Mensketsa Transformasi Grafik Fungsi Trigonometri

Sketsalah grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ pada satu periode.

Alternatif penyelesaian:

Grafik fungsi f dapat diperoleh dengan menggeser grafik $y = \tan x$ ke kiri sejauh $\frac{\pi}{3}$ satuan, kemudian meregangkannya secara vertikal dengan faktor $\frac{1}{2}$. Karena satu periode fungsi $y = \tan x$ adalah $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ dan adanya pergeseran ke kiri sejauh $\frac{\pi}{3}$, maka satu periode fungsi f adalah $-\frac{5\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$. Grafik fungsi f ditunjukkan pada gambar di samping.



Gambar 3.36 Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Mari Mencoba 3.11

Sketsalah grafik fungsi $g(x) = 2 \tan \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dalam satu periode.

3. Pemodelan dengan Fungsi-Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri yang telah kamu pelajari berguna untuk memodelkan dan memperkirakan ketinggian pasang surut air laut. Untuk mengetahuinya, bacalah kolom berikut ini!

Matematika dan Sains — Gelombang Pasut Menyelamatkan Kapal yang Tersangkut

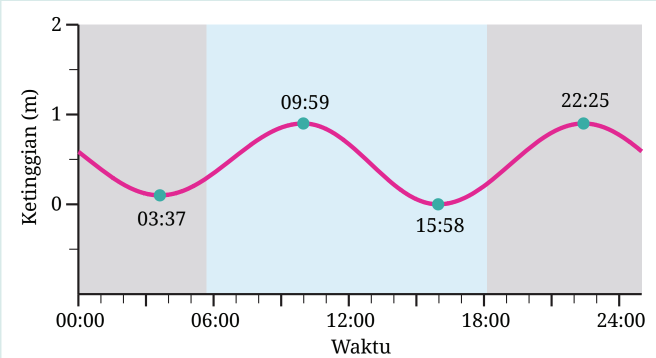
Pada Maret 2021, dunia digemparkan dengan berita kapal Ever Given yang tersangkut di Terusan Suez. Akibatnya, kapal tersebut menghalangi kapal-kapal lain yang menggunakan Terusan Suez untuk keperluan perdagangan. Tak ayal, kejadian ini mengganggu aktivitas ekonomi global untuk sementara waktu. Setelah enam hari, kapal tersebut akhirnya berhasil diselamatkan dan aktivitas transportasi di Terusan Suez berjalan dengan normal kembali.

Gambar 3.37 Kapal Ever Given Tersangkut di Terusan Suez

Sumber: NASA JSC ISS image library/Wikimedia Commons/CC0 (2021)

Tahukah kamu bahwa fenomena alam yang membantu proses penyelamatan kapal Ever Given adalah gelombang pasang surut air laut?

Gelombang pasang terjadi karena adanya gaya gravitasi yang disebabkan oleh bulan dan matahari. Gaya gravitasi tersebut dapat menarik perairan sehingga permukaan airnya lebih tinggi daripada biasanya. Kejadian alam ini menyebabkan perairan di belahan dunia lain menjadi surut. Karena setiap waktunya bulan berevolusi mengelilingi bumi, ketinggian permukaan di suatu perairan juga mengalami pasang surut secara periodik. Sebagai ilustrasi, Gambar 3.38 berikut menyajikan ketinggian permukaan perairan di Port Said (ujung utara Terusan Suez) ketika kapal Ever Given diselamatkan. Data yang digunakan pada gambar diperoleh dari situs web *pasanglaut.com*.



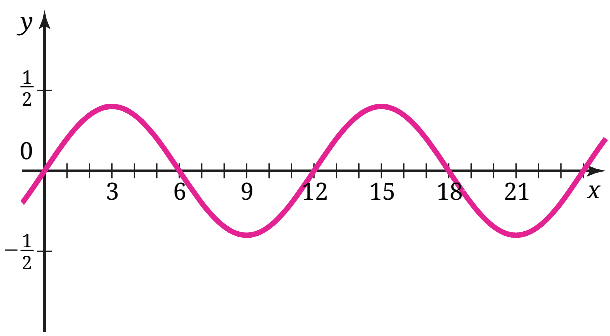
Gambar 3.38 Ketinggian Permukaan Air Laut di Port Said

Apakah kamu familier dengan pola ketinggian permukaan air yang ditunjukkan pada Gambar 3.38? Pola tersebut memiliki ketinggian maksimum dan minimum secara periodik. Hal ini mirip dengan karakteristik fungsi sinus dan kosinus. Oleh karena itu, kedua fungsi ini sangat bermanfaat untuk memodelkan fenomena pasang surut air laut.

Kamu sudah membaca penggunaan fungsi trigonometri dalam Matematika dan Sains. Selanjutnya, cermati contoh berikut!

Contoh 3.12 Penerapan Fungsi Trigonometri

Pada suatu hari, ketinggian permukaan air Teluk Kupang 0,4 m di atas rata-rata permukaan airnya ketika pasang dan menjadi 0,4 di bawah rata-rata permukaan airnya ketika surut. Pada hari itu, teluk ini mengalami dua kali pasang dan dua kali surut. Pada pukul 00.00 ketinggian permukaan air sama dengan ketinggian rata-ratanya. Berikut ini grafik ketinggian (dalam m) permukaan air Teluk Kupang setiap x jam setelah pukul 00.00.



Gambar 3.39 Ketinggian Permukaan Air Teluk Kupang

1. Carilah fungsi $y = a \sin bx$ yang memodelkan ketinggian permukaan air Teluk Kupang setiap waktunya.
2. Dengan menggunakan fungsi pada nomor 1, perkirakan ketinggian permukaan air teluk tersebut pada pukul 16.00.

Alternatif penyelesaian:

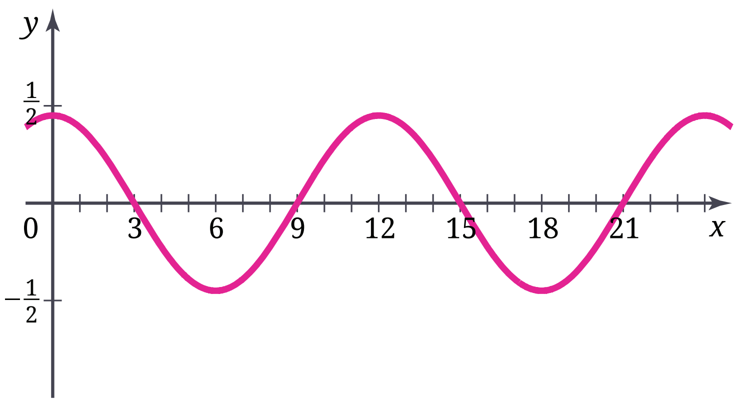
1. Berdasarkan informasi dari soal dan grafik pada Gambar 3.39, kita dapat melihat bahwa amplitudo grafiknya adalah 0,4 dan periodenya adalah 12. Dengan demikian, fungsi yang memodelkan ketinggian air Teluk Kupang setiap waktunya adalah $y = 0{,}4 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.
2. Dengan mensubstitusikan $x = 16$, kita memperoleh nilai fungsi berikut.

$$y = 0{,}4 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = 0{,}4 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 16\right) = 0{,}4 \sin\left(\frac{8}{3}\pi\right)$$
$$= 0{,}4\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{5}\sqrt{3} \approx 0{,}35$$

Jadi, ketinggian permukaan air Teluk Kupang pada pukul 16.00 adalah sekitar 0,35 m di atas tinggi rata-ratanya.

Mari Mencoba 3.12

Ketika bulan sabit pada awal Juni 2021, selisih ketinggian antara permukaan air pasang dan surut laut Kota Ambon adalah 0,9 m. Pada saat itu, pasang laut terjadi pukul 00.00 malam dan pukul 12.00 siang. Ketinggian permukaan laut terhadap ketinggian rata-rata setiap x jam setelah tengah malam direpresentasikan pada gambar berikut.



Gambar 3.40 Ketinggian Permukaan Air Laut Kota Ambon

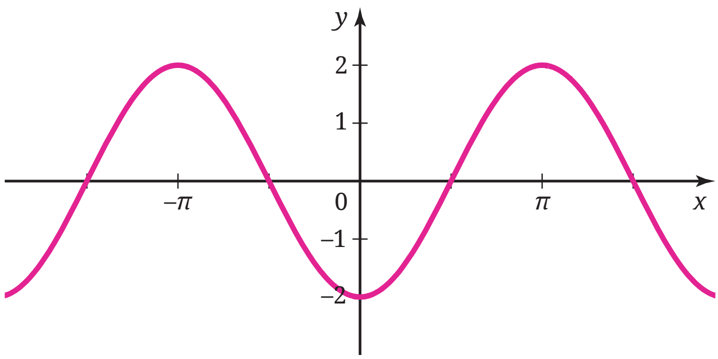
1. Tentukan fungsi $y = a \cos bx$ dari grafik pada gambar di atas.
2. Perkirakan ketinggian permukaan air laut di Kota Ambon pada pukul 07.00.

Latihan B Grafik Fungsi Trigonometri

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Benar atau salah? Grafik fungsi $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ dapat diperoleh dengan menggeser grafik $y = \sin x$ ke kanan sejauh $\frac{\pi}{4}$ satuan.
2. Grafik fungsi $y = a \sin k(x - b) + c$ memiliki amplitudo ... dan periode ....
3. Benar atau salah? Grafik berikut merepresentasikan fungsi $y = -2 \cos x$ dan $y = 2 \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

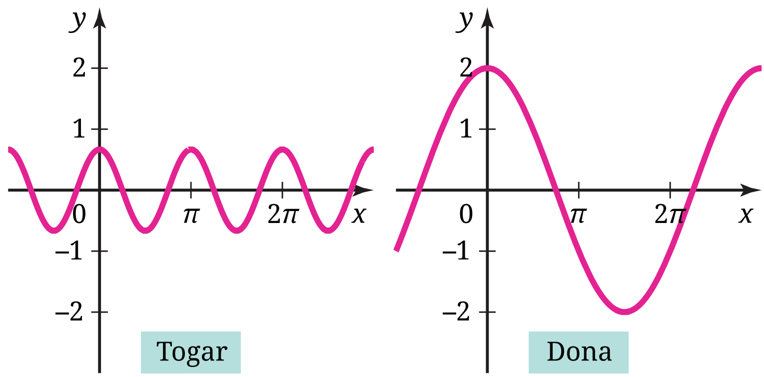


4. Periode grafik fungsi $y = \tan x$ adalah ....

Penerapan Konsep

5. Sketsalah grafik fungsi $g(x) = 2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dengan mentransformasi grafik $y = \sin x$. Sebutkan juga setiap transformasi yang digunakan secara terurut.
6. Diberikan fungsi $f(x) = -4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ dan fungsi $g(x) = \cos(3x - \pi)$.
   a. Tentukan amplitudo dan periodenya.
   b. Sketsalah grafiknya.

7. Togar dan Dona menggambar grafik fungsi $y = 2\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$. Hasilnya tampak pada gambar berikut.



Gambar siapakah yang paling tepat? Jelaskan alasannya.

8. Sebuah pelampung penanda di suatu pantai bergerak naik turun mengikuti ombak. Jarak antara posisi tertinggi dan terendah pelampung tersebut adalah 1,6 m. Pelampung tersebut bergerak dari posisi tertinggi ke posisi terendah setiap 4 detik.

   a. Anggap bahwa ketika 0 detik, posisi awal pelampung tersebut tepat di tengah-tengah, kemudian bergerak ke atas menuju titik tertinggi. Carilah fungsi yang memodelkan ketinggian pelampung tersebut setiap detiknya.
   b. Sketsalah grafik dari fungsi yang diperoleh pada bagian (a).
   c. Tentukan posisi pelampung tersebut 9 detik setelah posisi awalnya.

9. Sebuah kincir ria berdiameter 50 m membutuhkan waktu 15 menit untuk berputar satu putaran. Putaran kincir ria ini berlawanan arah putaran jarum jam.

   a. Jika seseorang mula-mula berada di puncak kincir ria, nyatakan ketinggian orang tersebut terhadap titik pusat kincir ria setiap menitnya.

   b. Tentukan ketinggian orang tersebut ketika kincir ria berputar selama 10 menit.

   c. Jika titik pusat kincir ria tersebut berada 27 m di atas permukaan tanah, modelkan ketinggian orang tersebut relatif terhadap permukaan tanah setiap menitnya.

C. Identitas Trigonometri

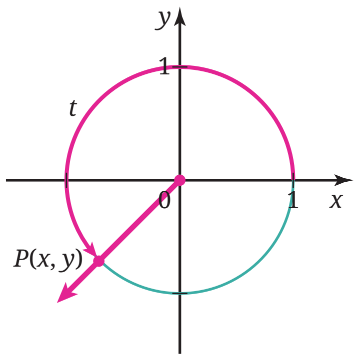
Pada Bab 2 kamu telah mengenal identitas polinomial. Pada subbab ini, kamu akan belajar identitas trigonometri.

1. Identitas-Identitas Dasar

Pertama-tama, kerjakan eksplorasi berikut untuk menemukan salah satu identitas trigonometri dasar.

Eksplorasi **Menemukan Identitas Trigonometri**

Di dalam aktivitas ini, kamu akan dipandu untuk menemukan salah satu identitas trigonometri. Untuk itu, lakukan langkah-langkah berikut ini!



Gambar 3.41 Lingkaran Satuan dan Sudut t

1. Perhatikan Gambar 3.41, kemudian nyatakan koordinat titik P ke dalam t.
2. Tuliskan persamaan yang menyatakan jarak antara titik P dan titik asal (0, 0). (*Petunjuk:* Gunakan teorema Pythagoras.)

Pada aktivitas eksplorasi sebelumnya, kamu telah mendapatkan salah satu identitas trigonometri. Identitas tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}$$

Identitas tersebut dinamakan *identitas Pythagoras* karena kamu menggunakan teorema Pythagoras untuk menemukannya. Identitas ini beserta identitas-identitas trigonometri lainnya dirangkum sebagai berikut.

Sifat 3.4 Identitas-Identitas Trigonometri Dasar

- Identitas Kebalikan

  $\csc t = \dfrac{1}{\sin t}$ $\quad$ $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ $\quad$ $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$

- Identitas Hasil Bagi

  $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ $\quad$ $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$

- Identitas Pythagoras

  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ $\quad$ $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$ $\quad$ $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$

- Identitas Genap Ganjil

  $\sin(-t) = -\sin t$ $\quad$ $\cos(-t) = \cos t$ $\quad$ $\tan(-t) = -\tan t$

Kita akan menggunakan identitas trigonometri pada Sifat 3.4 untuk membuktikan identitas lainnya. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.13 Membuktikan Identitas Trigonometri

Tunjukkan bahwa persamaan berikut merupakan identitas trigonometri.

$$\frac{\cos t + 1}{\tan^2 t} = \frac{\cos t}{\sec t - 1}$$

Alternatif penyelesaian:

Kita akan memanipulasi bentuk di ruas kanan agar menjadi sama dengan bentuk di ruas kiri. Untuk melakukannya, kita kalikan pembilang dan penyebutnya dengan $\sec t + 1$.

$$\frac{\cos t}{\sec t - 1} = \frac{\cos t}{\sec t - 1} \cdot \frac{\sec t + 1}{\sec t + 1} \qquad \text{Kalikan dengan 1 dalam bentuk } \frac{\sec t + 1}{\sec t + 1}$$

$$= \frac{\cos t(\sec t + 1)}{\sec^2 t - 1} \qquad \text{Perkalian sekawan}$$

$$= \frac{\cos t\left(\frac{1}{\cos t} + 1\right)}{\tan^2 t} \qquad \text{Identitas kebalikan dan identitas Pythagoras}$$

$$= \frac{1 + \cos t}{\tan^2 t} = \frac{\cos t + 1}{\tan^2 t} \qquad \text{Sederhanakan}$$

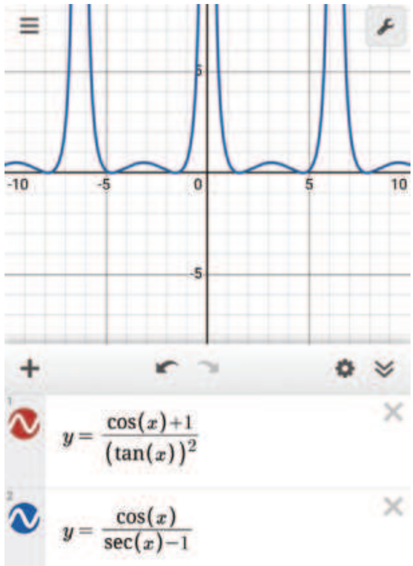
Ruas kanan sama dengan ruas kiri. Dengan demikian, persamaan yang diberikan merupakan identitas trigonometri.

Mari Mencoba 3.13

Tunjukkan bahwa persamaan berikut merupakan identitas.

$$\frac{\cos t}{\sec t \sin t} = \csc t - \sin t$$

Dengan menggunakan grafik, kita juga dapat menentukan apakah sebuah persamaan merupakan identitas. Caranya adalah dengan menggambar grafik fungsi bentuk di kedua ruas. Identitas pada Contoh 3.13 dapat ditunjukkan dengan kalkulator grafik seperti pada Gambar 3.42.



Gambar 3.42 Tangkapan Layar Kalkulator Grafik

Kamu perlu mengingat bahwa penggunaan grafik seperti itu tidak dapat dianggap sebagai pembuktian. Meskipun demikian, hasilnya dapat menjadi bukti kuat untuk menunjukkan bahwa persamaan yang diberikan merupakan identitas.

Sekarang, silakan kamu membuat identitas trigonometri sendiri dengan mengerjakan Mari Berkolaborasi berikut!

Mari Berkolaborasi

Kamu dapat membuat sebuah identitas trigonometri sendiri. Pertama-tama, tulislah sebuah bentuk trigonometri, kemudian nyatakan atau sederhanakan bentuk tersebut ke dalam bentuk trigonometri lainnya. Terakhir, dengan memberikan tanda sama dengan antara bentuk awal dan akhir, kamu mendapatkan identitas trigonometri.

Misalnya kita memilih bentuk $\frac{\tan t}{\csc t}$. Bentuk ini dapat dinyatakan ke dalam bentuk lain seperti berikut.

$$\frac{\tan t}{\csc t} = \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\sin t}} = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\sin t}{1}$$

$$= \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t}$$

$$= \sec t - \cos t$$

Dengan demikian, $\frac{\tan t}{\csc t} = \sec t - \cos t$ merupakan identitas trigonometri.

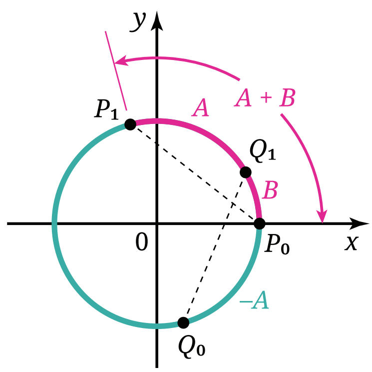
1. Gunakan cara tersebut untuk membuat sebuah identitas trigonometri. Jika perlu, verifikasikan identitas tersebut menggunakan kalkulator grafik.
2. Mintalah seorang temanmu untuk membuktikan identitas trigonometri tersebut. (Untuk itu, buatlah sebuah identitas yang cukup menantang bagi temanmu untuk membuktikannya.)

2. Identitas Penjumlahan dan Pengurangan Sudut

Sekarang kita akan menemukan identitas penjumlahan untuk kosinus. Kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Menemukan Identitas Penjumlahan Sudut untuk Kosinus**

1. Perhatikan Gambar 3.43! Pada gambar terdapat busur-busur dengan panjang B, $A + B$, dan $-A$ yang dimulai dari titik $P_0(1, 0)$.



Gambar 3.43 Titik P_0, P_1, Q_0, dan Q_1 pada Lingkaran Satuan

Jelaskan mengapa titik-titik P_1, Q_0, dan Q_1 secara berturut-turut memiliki koordinat $(\cos (A + B), \sin (A + B))$, $(\cos (-A), \sin (-A))$, dan $(\cos B, \sin B)$.

2. Tunjukkan bahwa koordinat Q_0 juga sama dengan $(\cos A, -\sin A)$.
3. Jelaskan mengapa ruas garis $\overline{P_0P_1}$ dan $\overline{Q_0Q_1}$ memiliki panjang yang sama.
4. Gunakan fakta pada nomor 3 dan teorema Pythagoras untuk menunjukkan bahwa $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

Kita telah menemukan salah satu identitas penjumlahan sudut dari eksplorasi sebelumnya. Dengan identitas tersebut, kita dapat menemukan identitas pengurangan untuk kosinus dengan mudah.

$$\begin{aligned}\cos(A - B) &= \cos(A + (-B)) \\ &= \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B) && \text{Identitas penjumlahan sudut} \\ &= \cos A \cos B + \sin A \sin B && \text{Identitas Genap Ganjil}\end{aligned}$$

Sekarang perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.14 Membuktikan Identitas Trigonometri

Buktikan bahwa $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ dan $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Alternatif penyelesaian:

Kita menggunakan identitas pengurangan untuk kosinus.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x && \text{Identitas pengurangan sudut} \\ &= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x && \text{Sederhanakan} \\ &= \sin x && \text{Sederhanakan}\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ untuk sembarang bilangan real x. Selanjutnya, misalkan $x = \frac{\pi}{2} - t$ sehingga $t = \frac{\pi}{2} - 2$. Dengan demikian, kita memperoleh $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ untuk sembarang bilangan real t. Kita juga dapat menuliskannya seperti berikut.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ atau } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x$$

Mari Mencoba 3.14

Dengan menggunakan hasil-hasil sebelumnya, buktikan kedua identitas berikut.

1. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
2. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

Latihan C Identitas Trigonometri

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Benar atau salah? Karena $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, maka $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$.
2. $\sec^2 t - \tan^2 t = ...$
3. Benar atau salah? Jika $\sec u = -\frac{5}{3}$, maka nilai $\cos u = -\frac{3}{5}$.

Penerapan Konsep

4. Buktikan setiap identitas trigonometri berikut.

   a. $\dfrac{\sin t}{\tan t} = \cos t$

   b. $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} = \dfrac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

5. Tunjukkan bahwa persamaan-persamaan berikut bukan merupakan identitas trigonometri.

   a. $\sin (x + y) = \sin x + \sin y$

   b. $\csc^2 x + \sec^2 x = 1$

6. **Menemukan Kesalahan**. Abel menyelidiki apakah $\sin t = \sin (-t)$ merupakan identitas. Dia melakukan langkah-langkah berikut ini.

$\sin t$	$= \sin (-t)$	Persamaan yang diberikan
$(\sin t)^2$	$= [\sin (-t)]^2$	Kuadratkan kedua ruas
$\sin^2 t$	$= (-\sin t)^2$	Sederhanakan; $\sin (-t) = -\sin t$
$\sin^2 t$	$= \sin^2 t$	Sederhanakan

   Pada langkah terakhir, Abel mendapatkan bentuk di ruas kiri sama dengan bentuk di ruas kanan. Dengan demikian, dia menyimpulkan bahwa $\sin t = \sin (-t)$ merupakan identitas. Apa yang dilakukan Abel tersebut tidak tepat. Temukan kesalahannya!

7. Dengan menggunakan $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$, tentukan $\sin \frac{5\pi}{12}$ dan $\cos \frac{5\pi}{12}$.

8. Buktikan identitas penjumlahan dan pengurangan sudut untuk tangen berikut.

   a. $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

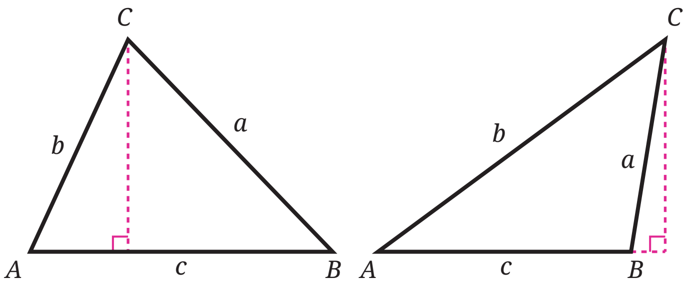
   b. $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

D. Aturan Sinus

Pada subbab ini kamu akan mempelajari lebih dalam tentang Aturan Sinus. Aturan Sinus memiliki hubungan yang dekat dengan segitiga. Untuk mempelajarinya, kerjakan eksplorasi berikut ini!

Eksplorasi **Menemukan Aturan Sinus**

Diberikan segitiga sembarang ABC dengan panjang sisi a, b, dan c seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.44 Segitiga Sembarang *ABC* dengan Garis Tinggi

1. Gambarlah garis tinggi dari titik A yang memotong sisi BC, garis tinggi dari titik B yang memotong sisi AC, dan garis tinggi dari titik C yang memotong sisi AB.
2. Labeli titik perpotongan garis tinggi dengan sisi AB, sisi BC, dan sisi AC secara berturut turut dengan P, Q, dan R.
3. Dari segitiga ACP, tentukan $\sin A$.
4. Dengan langkah yang sama, tentukan $\sin B$ dari segitiga BCP, $\sin B$ dari segitiga BAQ, dan $\sin C$ dari segitiga CAQ.
5. Dari $\sin A$, $\sin B$, dan $\sin C$ yang diperoleh, hubungan apa yang terlihat? Jelaskan.

Dari eksplorasi tersebut, kamu telah menemukan hubungan antara nilai sinus sudut-sudut dalam segitiga dan panjang sisi-sisinya. Hubungan tersebut dirangkum dalam Aturan Sinus berikut.

Sifat 3.5 **Aturan Sinus**

Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi a, b, dan c (lihat kembali Gambar 3.44), maka berlaku:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Mari Mengomunikasikan

Kamu telah mengetahui cara mendapatkan Aturan Sinus. Dapatkah kamu menemukan cara berbeda dalam mendapatkan Aturan Sinus?

Untuk lebih memahami Aturan Sinus, perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.15 Menentukan Panjang Sisi Suatu Segitiga

Sebuah segitiga PQR memiliki sisi PQ dengan panjang 10 cm, $\angle P = 60^\circ$ dan $\angle Q = 75^\circ$. Tentukan panjang QR?

Alternatif penyelesaian:

Jumlah besar sudut-sudut dalam segitiga adalah 180° sehingga

$\angle R = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

Dengan Aturan Sinus, kita memperoleh

$$\frac{\sin P}{QR} = \frac{\sin R}{PQ} \qquad \text{Aturan Sinus}$$

$$QR = \frac{\sin P}{\sin R} \cdot PQ \qquad \text{Sederhanakan}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot 10 \qquad \text{Substitusi } PQ = 10$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 10 = 5\sqrt{6} \qquad \text{Sederhanakan}$$

Jadi, panjang sisi QR adalah $5\sqrt{6}$ cm atau sekitar 12,25 cm.

Mari Mencoba 3.15

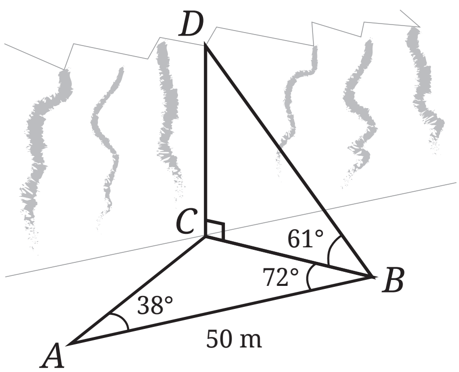
Sebuah segitiga ABC dengan panjang $AC = 12$ cm dan $\angle A = \angle B = 30°$. Tentukan panjang AB.

Aturan Sinus sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan di sekitar kita. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.16 Menentukan Tinggi Tebing

Dua orang pendaki, Anton dan Bobi, akan memanjat sebuah tebing yang curam. Akan tetapi, mereka perlu menentukan ketinggian tebing tersebut. Mereka melakukan langkah-langkah berikut.

1. Mereka berdiri terpisah sejauh 50 meter di tempat masing-masing.
2. Bobi mengukur sebuah sudut elevasi sebesar 61° dari dasar tebing ke tebing titik tertinggi.
3. Bobi juga mengukur besar sudut antara Anton dan dasar tebing, yaitu 72°.
4. Anton mengukur sudut antara Bobi dan dasar tebing, yakni sebesar 38°.



Gambar 3.45 Sketsa Posisi Tebing, Anton (A), dan Bobi (B)

Dengan mengacu pada Gambar 3.45, bantulah mereka untuk menentukan tinggi tebing tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan bahwa segitiga ABC dan BCD mempunyai satu sisi yang sama, yakni sisi BC. Pada segitiga ABC, diperoleh

$$\angle ABC = 180° - (38° + 72°) = 70°$$

Dengan memanfaatkan Aturan Sinus, kita memperoleh

$$\frac{BC}{\sin 38^\circ} = \frac{50}{\sin 70^\circ}$$

$$BC = \frac{50 \sin 38^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 32{,}7587$$

Selanjutnya, kita menentukan CD dengan tangen seperti berikut.

$$\tan 61° = \frac{CD}{BC}$$

$$\begin{aligned} CD &= BC \tan 61° \\ &\approx 32{,}7587 \tan 61° \\ &\approx 59{,}0983 \end{aligned}$$

Jadi, tinggi tebing tersebut sekitar 59,0983 meter.

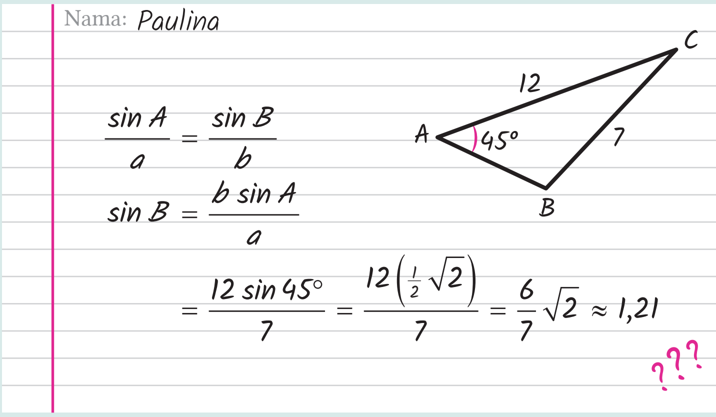
Mari Mencoba 3.16

Dua pemain basket, Anwar dan Beto, sedang melakukan latihan. Mereka berdiri terpisah sejauh 4 m dan sama-sama melihat ring basket. Beto mengukur sebuah sudut elevasi sebesar 61° dari dasar tiang ke ring basket. Dia juga mengukur sudut antara Anwar dan dasar tiang basket sebesar 72°. Anwar mengukur sudut antara Beto dan dasar tiang basket sebesar 38°. Jika Beto melakukan lemparan bola basket dari posisi dia berdiri dan bola tersebut masuk ring basket, apakah Beto mendapatkan 3 poin?

Mari Berpikir Kritis

Paulina menyelesaikan soal berikut.

Diberikan sebuah segitiga ABC dengan $\angle A = 45°$, $a = 7$, dan $b = 12$.
Pengerjaan Paulina ditunjukkan pada Gambar 3.46 berikut.



Gambar 3.46 Hasil Kerja Paulina

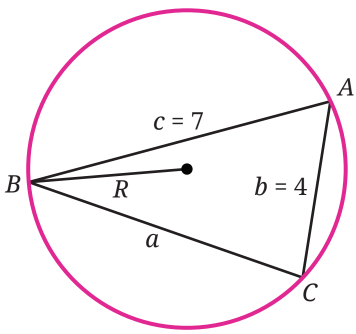
Pada hasil akhir pekerjaannya, dia mendapatkan sin $B \approx 1{,}21$. Dia mengetahui bahwa nilai maksimum sinus adalah 1 sehingga dia bingung apakah perhitungannya salah atau ada alasan lain. Bantulah Paulina menyelesaikan kebingungannya!

Latihan D Aturan Sinus

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Informasi untuk soal nomor 1—5: Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $b = 4$ dan $c = 7$. R adalah jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut. Segitiga tersebut tampak pada gambar berikut.



Segitiga *ABC* dan Lingkaran Luarnya

1. Benar atau salah? $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$
2. Benar atau salah? Luas segitiga ABC adalah $\frac{7a}{R}$.

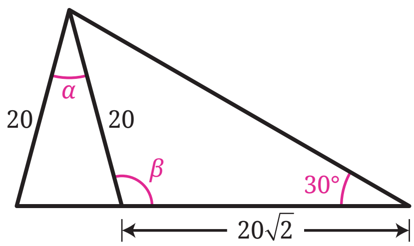
3. Benar atau salah? Jika $a < b$, maka nilai $\sin A < \sin B$.

4. Jika $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, dan $a = 15$, tentukan panjang b.

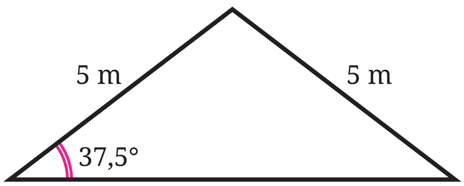
5. Jika $\angle C = 145°$, $b = 10$, dan $c = 6$, tentukan besar sudut B.

Penerapan Konsep

6. Pada gambar segitiga berikut, carilah besar α dan β.

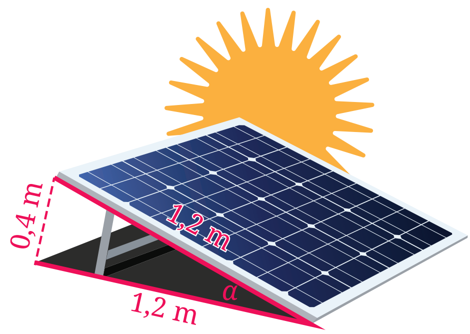


7. Seorang peternak mempunyai kandang ayam berbentuk segitiga sama kaki. Jika panjang salah satu sisi kandang tersebut adalah 5 meter dan besar sudut yang terbentang dalam kandang adalah 37,5° (*lihat* gambar di bawah), berapakah keliling kandang ayam tersebut? Berapakah luasnya?



Kandang Ayam Berbentuk Segitiga Sama Kaki

8. Sebuah panel surya dengan lebar 1,2 meter diletakkan di atas atap, seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.47 Panel Surya

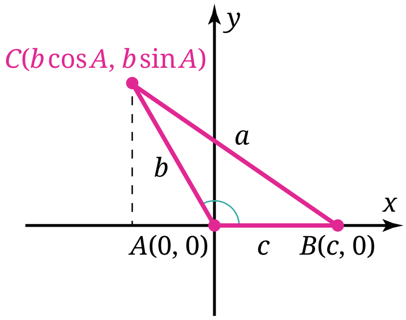
Berapakah sudut elevasi α dari panel surya?

E. Aturan Kosinus

Aturan Sinus tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan sembarang permasalahan segitiga. Kita memerlukan aturan lain. Mari, kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi Menemukan Aturan Kosinus

Misalkan kita memiliki segitiga ABC yang panjang sisi-sisinya a, b, dan c, dengan A di titik asal $O(0, 0)$ dan B pada sumbu-x positif.



Gambar 3.48 Segitiga *ABC* pada Bidang Koordinat

Berdasarkan informasi dan Gambar 3.48, jawablah pertanyaan berikut.

1. Mengapa koordinat titik C adalah $(b \cos A, b \sin A)$. Apakah koordinatnya tetap meskipun sudut A lancip?
2. Tentukan panjang BC menggunakan rumus jarak (teorema Pythagoras).
3. Karena $BC = a$, berdasarkan hasil dari nomor 2, apakah kamu dapat menunjukkan bahwa $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$?

Persamaan yang kamu temukan dalam eksplorasi sebelumnya dinamakan *Aturan Kosinus*. Perhatikan sifat berikut!

Sifat 3.6 Aturan Kosinus

Untuk sembarang segitiga ABC (perhatikan kembali Gambar 3.48), berlaku:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Persamaan kedua dan ketiga dalam Sifat 3.6 tersebut dapat ditemukan dengan cara serupa seperti pada eksplorasi sebelumnya.

Mari Mengomunikasikan

Kamu telah mengetahui bagaimana mendapatkan Aturan Kosinus. Dapatkah kamu menemukan cara berbeda untuk mendapatkan aturan tersebut?

Untuk lebih memahami Aturan Kosinus, perhatikan contoh berikut!

Contoh 3.17 Menggunakan Aturan Kosinus

Sebuah segitiga PQR memiliki sisi PQ, sisi PR, dan sisi QR yang panjangnya secara berturut-turut 10 cm, 5 cm, dan 7 cm. Berapa besar sudut P?

Alternatif penyelesaian:

Dengan memanfaatkan Aturan Kosinus, kita memperoleh

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2(PQ)(PR)\cos P \qquad \text{Aturan Kosinus}$$

$$\cos P = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2(PQ)(PR)} \qquad \text{Bentuk yang setara}$$

$$= \frac{10^2 + 5^2 - 7^2}{2(10)(5)} = \frac{76}{100} = \frac{19}{25} \qquad \text{Substitusi dan sederhanakan}$$

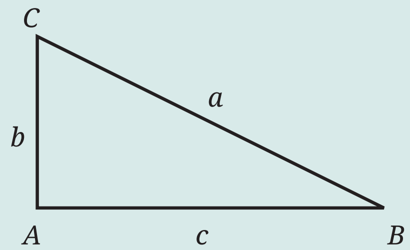
Dengan menggunakan kalkulator, kita mendapatkan besar sudut P sekitar 40,54°.

Mari Mencoba 3.17

Sebuah segitiga PQR dengan panjang sisi PQ, PR, dan QR secara berturut-turut adalah 10 cm, 5 cm, dan 7 cm. Berapa besar sudut Q?

Mari Berpikir Kritis

Untuk segitiga siku-siku seperti pada gambar di bawah, kamu mengetahui bahwa $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema Pythagoras).



Gambar 3.49 Segitiga Siku-Siku *ABC*

Dapatkah kamu menemukan hubungan antara a, b, dan c dengan memanfaatkan Aturan Kosinus untuk $\angle A < 90°$ dan $\angle A > 90°$?

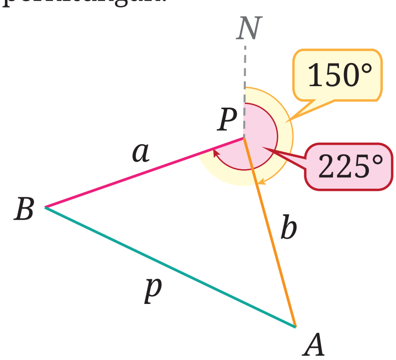
Kita dapat menggunakan Aturan Kosinus untuk menyelesaikan permasalahan di sekitar. Untuk lebih memahaminya, perhatikan Contoh 3.18 berikut!

Contoh 3.18 Menentukan Jarak Dua Pesawat Terbang

Dua pesawat terbang meninggalkan bandara pada waktu yang sama dan terbang selama 3 jam. Pesawat A terbang ke arah 150° dengan kecepatan 750 km/jam dan pesawat B terbang ke arah 225° dengan kecepatan 810 km/jam. Berapakah jarak kedua pesawat tersebut setelah 3 jam? (Besar sudut diukur dari arah utara searah putaran jarum jam.)

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, kita mensketsa posisi kedua pesawat tersebut untuk mempermudah proses perhitungan.



Gambar 3.50 Arah Pesawat Terbang *A* dan *B*

Kecepatan pesawat A dan pesawat B secara berturut-turut adalah 750 km/jam dan 810 km/jam. Setelah terbang 3 jam, jarak tempuh kedua pesawat tersebut adalah

$b = 750 \cdot 3 = 2.250$ km dan $a = 810 \cdot 3 = 2.430$ km

Sudut yang dibentuk antara a dan b adalah $225^o - 150^o = 75^o$. Dengan memanfaatkan Aturan Kosinus, kita memperoleh

$$p^2 = 2.250^2 + 2.430^2 - 2(2.250)(2.430) \cos 75^o$$

$$= 10.967.400 - 10.935.000 \cos 75°$$

$$p = \sqrt{10.967.400 - 10.935.000 \cos 75°} \approx 2.852,58$$

Jadi, jarak kedua pesawat tersebut setelah terbang 3 jam adalah sekitar 2.852,58 km.

Mari Mencoba 3.18

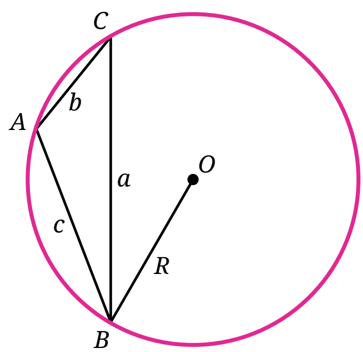
Akmal, Aira, dan Ariz bermain petak umpet. Akmal dan Aira berlari untuk bersembunyi meninggalkan Ariz pada waktu yang sama. Akmal berlari ke arah 150° dengan kecepatan 2 m/s dan Aira berlari ke arah 225° dengan kecepatan 1 m/s. Setelah 10 detik, mereka berhasil menemukan tempat persembunyian masing-masing. Berapakah jarak tempat persembunyian Akmal dengan Aira?

Latihan E Aturan Kosinus

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Informasi untuk soal nomor 1—3: Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $b = 4$ dan $c = 7$. R adalah jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut. Segitiga tersebut tampak pada gambar berikut.

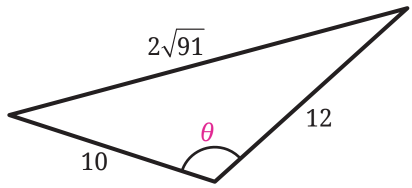


Segitiga *ABC* dan Lingkaran Luarnya

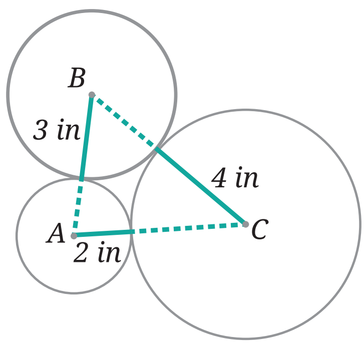
1. Benar atau salah? Jika $\angle A = 90°$, maka $a^2 = b^2 + c^2$.
2. Benar atau salah? Jika $\angle A > 90°$, maka $121 > a^2 > 65$.
3. Benar atau salah? Jika O pusat lingkaran dan $\angle OBC = 30°$, maka $a = 3R^2$.
4. Jika $\angle C = 60°$, $a = 6$, dan $b = 10$, panjang c adalah ....
5. Jika $a = 12$, $b = 14$, dan $c = 8$, besar sudut B adalah ....

Penerapan Konsep

6. Tentukan besar sudut θ dalam segitiga pada gambar berikut.



7. Seorang peternak ikan lele mencoba membuat kolam lele yang berbentuk prisma dengan alas segitiga. Dia memiliki dua potong kayu dengan panjang 15 meter dan 10 meter. Dia menyatukannya untuk memulai segitiganya. Dia berencana pergi ke toko untuk membeli potongan kayu ketiga untuk menyelesaikan segitiga tersebut. Dia ingin membangun kolam berbentuk segitiga sehingga potongan kayu ketiga akan membentuk sudut 40° dengan panjang potongan 20 meter. Mungkinkah dia membuat kolam tersebut? Jika iya, berapa panjang potongan kayu ketiga tersebut?
8. Seorang insinyur menempatkan tiga pipa sehingga saling bersinggungan. Penampang ketiga pipa tersebut ditunjukkan pada gambar berikut.



Misalkan pipa dengan pusat A, B, dan C mempunyai jari-jari berturut-turut 2 inci, 3 inci, dan 4 inci. Berapakah besar sudut-sudut dalam segitiga ABC?

Ringkasan

Pindai

Kamu dapat membaca ringkasan setiap bab dengan memindai kode respons cepat di samping.

Uji Kompetensi Bab 3

Kerjakanlah soal-soal uji kompetensi berikut ini dengan benar!

Pemahaman

Tentukan apakah pernyataan nomor 1—5 berikut *Benar* atau *Salah*.

1. Panjang busur lingkaran satuan di hadapan sudut pusat yang besarnya t rad adalah t.
2. Sudut yang besarnya $\frac{13\pi}{12}$ memiliki bilangan acuan $\bar{t} = \frac{13\pi}{12} - \pi = \frac{\pi}{12}$ sehingga $\sin \frac{13\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$.
3. Grafik $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ tidak terdefinisi ketika $x = \frac{\pi}{2}$.
4. Persamaan $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ merupakan sebuah identitas trigonometri.
5. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi a, b, dan c. Jika $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, maka segitiga ABC adalah segitiga tumpul.

Lengkapilah pernyataan nomor 6—10 berikut dengan isian yang paling tepat.

6. Sudut yang besarnya $t = 4{,}5$ memiliki bilangan acuan sebesar $\bar{t} \approx$ ....
7. Grafik $y = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ memiliki amplitudo ... dan periode ....
8. Jika $\tan x = 2$ dan $\sin x < 0$, nilai $\cos x =$ ....
9. Untuk sembarang bilangan real x, $1 - \sin^2 x =$ ....
10. Diberikan segitiga ABC. Jika $\angle A = \angle B = 45°$, perbandingan AB dan AC adalah ....

Jawablah soal-soal berikut dengan tepat.

11. Tentukan nilai $\tan \frac{3\pi}{4}$, $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, dan $\cos \frac{11\pi}{3}$.
12. Buktikan identitas-identitas trigonometri berikut.

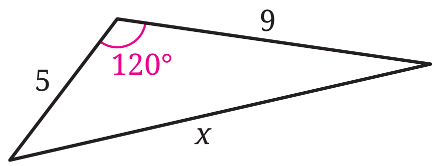
    a. $\frac{\tan t}{\csc t} = \frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\sec t}$

    b. $\frac{1}{(1 + \sin y)(1 - \sin y)} = 1 + \tan^2 y$

13. Tentukan amplitudo dan periode fungsi $y = 2 \cos 3x$, kemudian sketsalah grafiknya.

14. Diketahui sebuah segitiga ABC dengan $a = 75$, $b = 100$, dan $\angle A = 30°$. Tentukan besar dua sudut dalam lainnya dan c.

15. Tentukan x berdasarkan gambar segitiga berikut.



Penerapan

16. **Kincir Ria**. Sebuah kincir ria memiliki diameter 30 m dan memerlukan waktu 12 menit untuk menempuh satu putaran penuh. Kincir ria tersebut berputar berlawanan arah jarum jam. Jika seseorang mula-mula berada di puncak kincir ria tersebut, carilah fungsi $y = a \cos bx$ yang memodelkan ketinggian orang tersebut relatif terhadap pusat kincir ria setiap menitnya.

17. **Kincir Ria**. Seseorang menaiki kincir ria. Ketinggian (dalam m) orang tersebut terhadap permukaan tanah setiap menitnya dapat dirumuskan sebagai berikut.

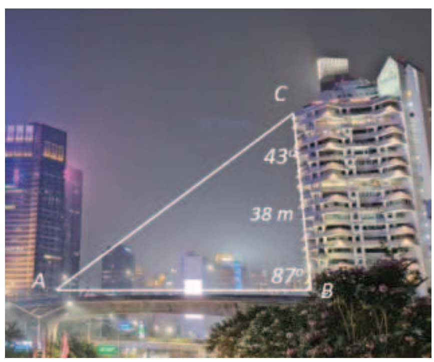
$$h(t) = 24 + 22 \sin \left(\frac{\pi}{7} t\right)$$

    a. Berapakah diameter kincir ria tersebut?

    b. Berapa lamakah waktu yang diperlukan kincir ria tersebut untuk menempuh satu putaran?

    c. Jika kincir ria tersebut berputar berkali-kali, sebutkan tiga waktu yang berbeda ketika orang tersebut berada di titik tertinggi kincir ria itu.

18. **Masalah Jarak**. Seseorang sedang mengamati dua gedung seperti yang tampak pada gambar di samping.

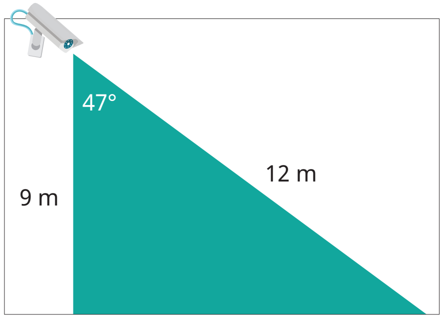


Gambar 3.51 Posisi Dua Gedung

Sumber: Al Azhary Masta (2024)

Misalkan diketahui jarak B ke C adalah 38 m, $\angle B$ = 87°, dan $\angle C$ = 43°. Tentukan jarak dari A ke C.

19. **Luas Daerah**. Sebuah kamera CCTV dipasang di sebuah ruangan. Kamera tersebut mempunyai bidang pandang 47° (*lihat* gambar di samping). Berapa meter persegi luas bidang lantai yang dapat direkam?



Penalaran

20. Aldo ingin membuktikan identitas trigonometri $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Dia memilih beberapa sudut θ, yaitu 30°, 45°, dan 60°. Setelah itu, dia menuliskan hasil perhitungannya ke dalam tabel berikut.

θ	$\tan\theta$	$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
30°	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	1	$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$
60°	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Karena nilai kolom kedua sama dengan nilai kolom ketiga pada baris yang sama, maka $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Dengan demikian, Aldo menganggap bahwa dia telah membuktikan identitas trigonometri tersebut. Apakah kamu setuju dengan strategi yang digunakan oleh Aldo? Jelaskan alasannya.

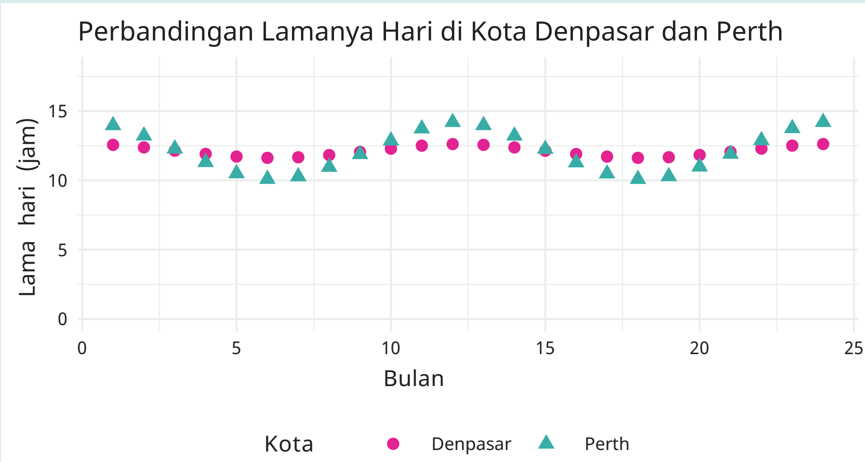
21. Segitiga ABC memiliki panjang sisi a, b, dan c. Apakah luas segitiga tersebut dapat ditentukan dengan persamaan berikut? Mengapa?

$$L = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

Proyek Variasi Lama Hari di Denpasar dan Perth

Apakah kamu pernah menyadari bahwa lamanya suatu hari (dari terbit hingga terbenamnya matahari) berbeda dengan hari-hari lainnya? Mungkin ada yang pernah menyadari dan ada yang tidak karena hal tersebut dipengaruhi oleh tempat tinggal masing-masing. Untuk mengilustrasikannya, kita akan menggunakan Kota Denpasar (Bali) dan Kota Perth (Australia Barat). Jika kamu melihat di globe atau peta, Kota Perth ini terletak jauh di selatan Kota Denpasar.

1. Grafik berikut menunjukkan rata-rata lama hari (dalam jam) Kota Denpasar dan Kota Perth pada tahun 2023 dan 2024 per bulan.



Gambar 3.52 Lama Hari per Bulan di Denpasar dan Perth pada 2023 dan 2024

Sumber data: www.timeanddate.com

   Berdasarkan grafik tersebut, menurutmu, manakah yang merepresentasikan lama hari di Kota Denpasar dan Kota Perth? Jelaskan alasannya.

2. Carilah fungsi $y = a \cos (bx) + c$ yang dapat memodelkan lama hari di Kota Denpasar dan Kota Perth, kemudian sketsalah grafiknya.

3. Kota Karratha, Australia Barat, terletak di antara Kota Denpasar dan Kota Perth. Hanya berdasarkan informasi ini, sketsalah perkiraan grafik lama hari di kota tersebut pada tahun 2023—2024.

4. Sebagai bonus, kamu dapat mengeksplorasi lamanya hari (dan hal-hal lainnya, seperti kapan matahari terbit dan terbenam) di beberapa kota dengan menggunakan Kalkulator Matahari. Silakan mengunjungi tautan *https://s.id/kalk-matahari* atau memindai kode respons cepat di samping. Agar fokus, koneksikan eksplorasimu dengan fungsi trigonometri yang telah dipelajari.

Pindai

5. **Bermedia Sosial.** Bagikan hasil eksplorasi kamu pada nomor 4 ke media sosialmu. Agar dapat ditemukan oleh teman-teman, gunakan tagar #ProyekTrigonometri dan #KalkulatorMatahari.

Pengayaan

Masih terdapat identitas trigonometri yang tidak dibahas dalam buku ini. Contohnya identitas-identitas trigonometri sudut rangkap dan sudut setengahan. Cari dan bacalah berbagai sumber untuk membuktikan identitas-identitas berikut ini!

Identitas Sudut Rangkap

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$
- $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Identitas Sudut Setengahan

- $\sin \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$
- $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$
- $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

Refleksi

Pada bab ini kamu telah mempelajari fungsi trigonometri dan grafiknya, identitas-identitas trigonometri, Aturan Sinus, dan Aturan Kosinus. Selanjutnya, refleksikan pengalaman belajarmu tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut!

1. Ceritakan sejauh mana manfaat yang dirasakan setelah kamu berdinamika pada bab ini!
2. Apa saja strategi belajar yang kamu gunakan untuk memahami bab ini? Apakah semua strateginya sudah membantu kamu untuk belajar secara optimal?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024
Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-335-1

Bab 4
VEKTOR

Apakah mungkin seseorang berlayar melawan arah angin?

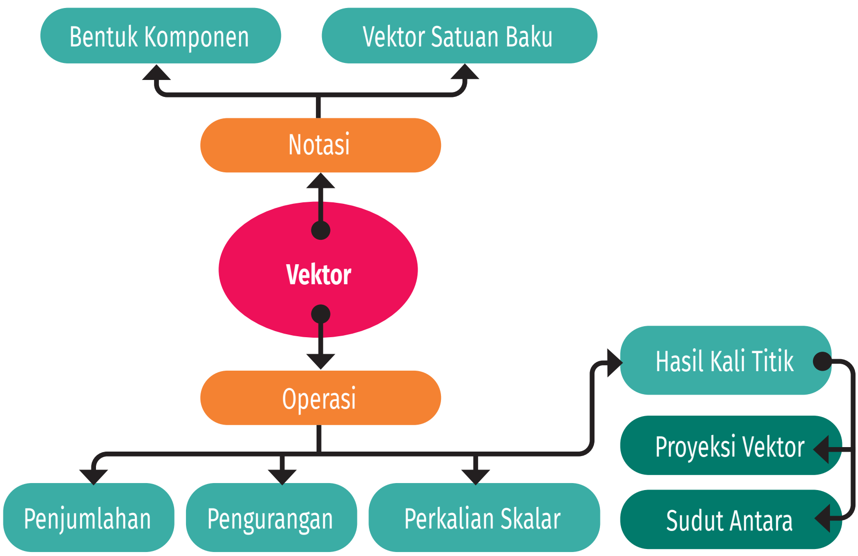
Sumber: Cbuske46, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (2018)

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- mengidentifikasi permasalahan sehari-hari yang dapat dijelaskan atau direpresentasikan dengan konsep vektor;
- melakukan operasi-operasi vektor;
- memaknai hasil operasi vektor secara geometris;
- menuliskan sebuah vektor sebagai kombinasi vektor-vektor satuan;
- melakukan operasi hasil kali titik antara dua vektor;
- menggunakan sifat-sifat operasi hasil kali titik antara dua vektor dalam penyelesaian masalah;
- menentukan besar sudut antara dua vektor dengan menggunakan hasil kali titik;
- menentukan proyeksi suatu vektor ke vektor lain;
- menentukan panjang vektor hasil proyeksi suatu vektor ke vektor lain; dan
- membuktikan beberapa teorema geometris dengan menggunakan konsep vektor.

Peta Materi



Kata Kunci

vektor, bentuk komponen vektor, vektor satuan baku, hasil kali titik, dan pembuktian.

Berlayar Bebas di Lautan Lepas

Sebagian orang menjadikan berlayar sebagai kegiatan untuk memperoleh penghasilan. Sebagian orang lainnya berlayar dengan tujuan berekreasi mengarungi lautan bebas. Pelayaran memanfaatkan tenaga yang disediakan oleh alam secara cuma-cuma. Dengan mengetahui ke mana arah dan kecepatan angin yang berembus, seorang pelayar dapat menakhodai kapalnya secara cekatan. Bahkan, ia dapat mengatur kapalnya untuk berlayar melawan angin. Bagaimana caranya? Kamu akan mempelajari detailnya pada proyek bab ini.

Gambar 4.1 Kapal Layar

Sumber: Eliasm00n, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons, July 12, 2023

Pada bab ini kita akan mempelajari vektor. Dengan visualiasi vektor, kita dapat menggambarkan arah dan kecepatan angin seperti pada visualisasi prakiraan cuaca yang melibatkan angin. Hal ini tentu saja akan memberikan informasi yang berharga bagi para pelayar. Tidak hanya itu, vektor dapat digunakan untuk menggambarkan gaya dan resultan gaya sehingga kita dapat menghitung usaha dan torsi dari gaya tersebut. Tentunya kita dapat memahami semua masalah terapan ini setelah memahami vektor. Oleh karena itu, mari kita mempelajari vektor dengan penuh semangat!

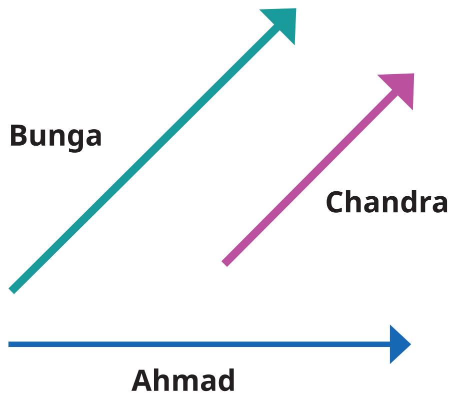
A. Vektor pada Bidang

Bayangkan tiga kejadian berikut!

> Ahmad berlayar ke arah timur dengan kecepatan 60 km/jam. Bunga berlayar ke arah timur laut dengan kecepatan 60 km/jam. Adapun Chandra berlayar ke arah timur laut dengan kecepatan 40 km/jam.

Bagaimana kamu membedakan ketiga kejadian tersebut?

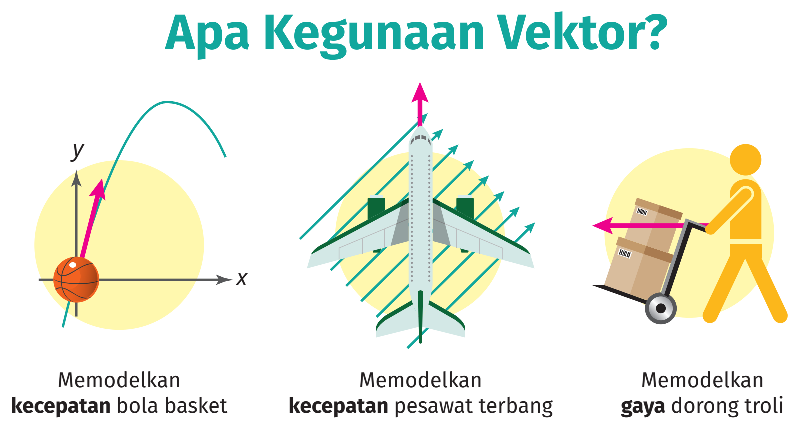
Jika dilihat dari kecepatan, besaran kecepatan Ahmad dan Bunga sama. Jika dilihat dari arahnya, Bunga dan Chandra memiliki arah perpindahan yang sama. Namun, kita dapat membayangkan bahwa yang terjadi pada ketiga anak tersebut sama sekali berbeda. Untuk menggambarkannya, kita harus mempertimbangkan nilai kecepatan dan arahnya seperti yang tampak pada gambar berikut.



Gambar 4.2 Besar dan Arah Kecepatan Ahmad, Bunga, dan Chandra

Kita dapat merepresentasikan ketiga fenomena tersebut seperti yang terlihat pada gambar di atas. Kita dapat menyebut ketiga bentuk di atas sebagai vektor (pengertian dan notasi akan dibahas selanjutnya). Dengan cara ini, kita dapat menggambarkan kecepatan berlayar dari tiga orang yang memiliki nilai dan arah berbeda.

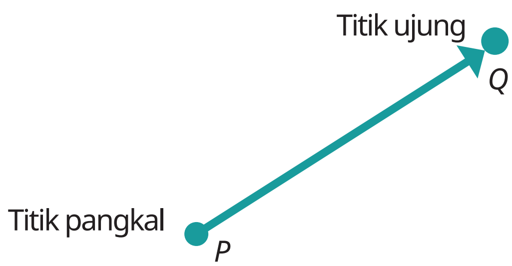
Perhatikan Gambar 4.3 berikut! Menurutmu, mengapa ketiga panah tersebut dapat merepresentasikan tiga fenomena? Apa makna panjang dan arah panahnya?



Gambar 4.3 Berbagai Contoh Kegunaan Vektor

1. Notasi Vektor

Seperti pada Gambar 4.2, vektor dapat digambarkan sebagai ruas garis berarah. Ruas garis berarah $\overrightarrow{PQ}$ memiliki titik pangkal P dan titik ujung Q. Panjang ruas garis tersebut dinotasikan dengan $\|\overrightarrow{PQ}\|$.



Gambar 4.4 Ruas Garis Berarah

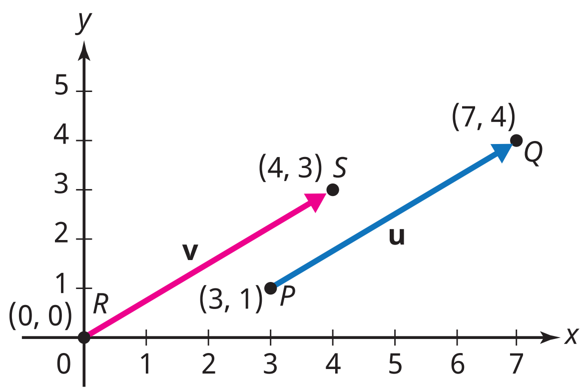
Vektor juga dapat dinotasikan dengan huruf kecil bercetak tebal, misalkan **u**, **v**, dan **w**. Selain itu, vektor juga dapat dinotasikan dengan huruf kecil bertanda panah di atasnya, misalnya $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$.

Contoh 4.1 Vektor-Vektor Ekuivalen

Misalkan **u** menggambarkan garis berarah dari titik (3, 1) ke titik (7, 4), sedangkan **v** menggambarkan garis berarah dari titik (0, 0) ke titik (4, 3). Bagaimana arah dan panjang kedua ruas garis tersebut? Apa yang dapat kamu simpulkan?

Alternatif penyelesaian:

Kita menggambarkan ruas garis berarah **u** dan **v** pada bidang koordinat. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 4.5 Ruas Garis Berarah **u** dan **v** pada Bidang Koordinat

Kita misalkan **u** sebagai ruas garis berarah $\overrightarrow{PQ}$ dan **v** sebagai ruas garis berarah $\overrightarrow{RS}$. Kedua ruas garis ini sama-sama mengarah ke kanan atas dengan gradien yang sama, yaitu

$$\text{Gradien } \overrightarrow{PQ} = \frac{4-1}{7-3} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Gradien } \overrightarrow{RS} = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$$

Bagaimana dengan panjang kedua ruas garis berarah tersebut? Kita dapat menentukan panjangnya menggunakan Rumus Jarak, yaitu

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(7-3)^2+(4-1)^2} = 5$$

$$\|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2} = 5$$

Karena $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{RS}$ memiliki panjang dan arah sama, kita dapat menyimpulkan bahwa kedua vektor ini ekuivalen, yakni **u** ekuivalen dengan **v**.

Mari Mencoba 4.1

Misalkan **u**, **v**, dan **w** secara berturut-turut merupakan ruas garis berarah dari (0, 0) ke (–3, –3), dari (1, 2) ke (4, 5), dan dari (–1, 6) ke (–4, 3). Tentukan vektor-vektor yang ekuivalen dari ketiga vektor tersebut!

Kita telah melihat dua ruas garis yang merepresentasikan vektor-vektor yang ekuivalen pada Contoh 4.1. Supaya lebih jelas, kita dapat menuliskan vektor-vektor tersebut ke dalam bentuk komponen.

Definisi 4.1 **Bentuk Komponen Suatu Vektor**

Jika **v** adalah vektor pada bidang dengan titik pangkal (x_1, y_1) dan titik ujung (x_2, y_2), **bentuk komponen vektor v** tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1 \rangle$$

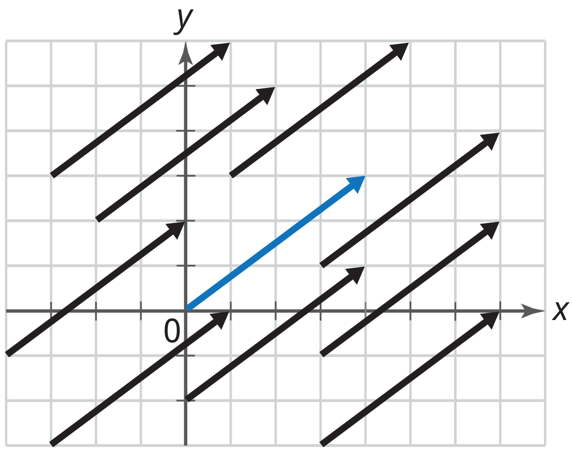
Bilangan v_1 dan v_2 disebut *komponen-komponen* vektor **v**. Jika titik pangkal dan titik ujung suatu vektor berada pada titik yang sama, vektor tersebut dinamakan *vektor nol* dengan notasi $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Dari Definisi 4.1 dan Contoh 4.1, kita dapat menyimpulkan bahwa dua vektor $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ekuivalen jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 = v_2$. Pada Contoh 4.1 kita juga telah mempelajari cara menentukan panjang atau nilai suatu vektor. Panjang vektor dapat ditentukan dengan Rumus Jarak.

Rumus 4.1 **Panjang Vektor**

Panjang vektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Suatu vektor yang dinyatakan dalam bentuk komponen-komponennya memiliki banyak sekali ruas garis berarah. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 4.6 yang menunjukkan beberapa ruas garis berarah dengan besar dan arah sama.



Gambar 4.6 Vektor-Vektor dengan Bentuk Komponen $\langle 4, 3 \rangle$

Semua vektor pada gambar di atas memiliki bentuk komponen $\langle 4, 3 \rangle$. Salah satu dari representasi vektor $\langle 4, 3 \rangle$ tersebut spesial karena ruas garis berarahnya memiliki titik pangkal di titik asal (0, 0) seperti yang tampak pada garis berarah berwarna biru. Garis biru tersebut merepresentasikan **vektor dalam posisi baku**.

Kita juga dapat memperhatikan bahwa Gambar 4.6 mengilustrasikan himpunan ruas garis berarah yang memiliki besar dan arah sama. Berdasarkan ilustrasi tersebut, kita dapat menyatakan bahwa secara geometris, sebuah vektor dapat dipandang sebagai *himpunan* ruas garis berarah yang ekuivalen, yakni memiliki besar dan arah sama.

Matematika dalam Budaya

Vektor Baris-berbaris

"Satu langkah ke depan, jalan!" teriak ketua barisan dengan penuh semangat. "Tiga langkah ke kanan, jalan!"

Komando seperti itu mungkin sudah familier, khususnya menjelang perayaan 17 Agustus atau ketika upacara bendera rutin. Tahukah kamu bahwa komando seperti itu dapat direpresentasikan sebagai sebuah vektor?

Gambar 4.7 Vektor dalam Kegiatan Baris-berbaris

Sumber: Mufid Majnun/Pixabay (2018)

Ketika seorang ketua barisan memberikan komando, setiap anggotanya akan mengikuti arahan tersebut. Pada ilustrasi sebelumnya, satu langkah ke depan dan tiga langkah ke kanan merupakan sebuah vektor. Vektor tersebut dilakukan oleh setiap anggota barisan yang bergerak seragam. Dengan demikian, jika dalam barisan tersebut terdapat 9 orang, akan ada 9 orang yang bergerak dengan arah dan besar yang sama. Gerakan tersebut dapat digambarkan menjadi 9 ruas garis berarah. Kesembilan ruas garis berarah tersebut terjadi karena ada satu vektor komando dari ketua barisan. *Nah*, dari analogi ini, apakah kamu sudah memahami bahwa sebuah vektor merupakan himpunan beberapa garis berarah dengan arah dan nilai yang sama?

Kamu ingin berlatih lagi mengenai panjang vektor pada bidang? Silakan kerjakan Aktivitas Interaktif berikut!

Aktivitas Interaktif

Pindai

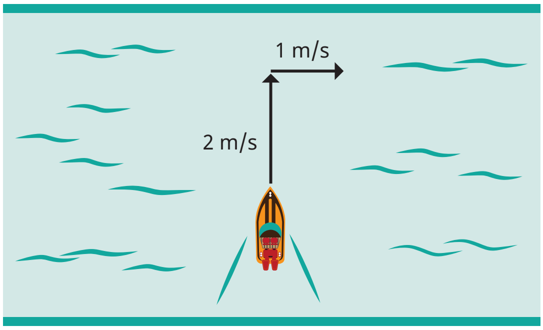
Kunjungi aktivitas interaktif berikut untuk membuat vektor dengan panjang tertentu. **Tautan:** *https://www.desmos.com/calculator/qilkvmyr0k*

2. Operasi-Operasi Vektor

Untuk memahami operasi-operasi vektor, perhatikan contoh berikut!

Contoh 4.2 Menyeberangi Sungai

Misalkan kamu akan menyeberangi sebuah sungai dengan kecepatan arus 1 m/s. Untuk melakukannya, kamu mengarahkan perahu tegak lurus terhadap sungai dengan kecepatan 2 m/s. Perhatikan ilustrasi yang ditunjukkan Gambar 4.8 berikut!

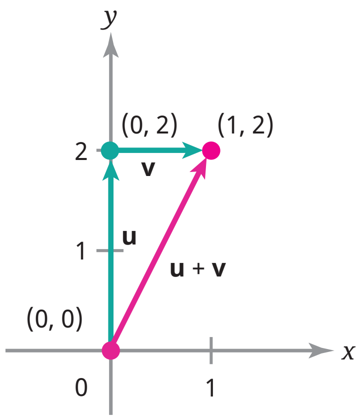


Gambar 4.8 Menyeberangi Sungai dengan Perahu

Bagaimana besar kecepatan dan arah perjalanan perahu tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Kita dapat menyederhanakan permasalahan dengan menggambarkan setiap informasi sebagai vektor **u** dan vektor **v** pada bidang koordinat.



Gambar 4.9 Sketsa Perjalanan Perahu

Berdasarkan Gambar 4.9, kita memperoleh informasi bahwa kombinasi vektor **u** dan vektor **v** adalah vektor yang memiliki titik pangkal di titik asal (0, 0) dan titik ujung di (1, 2), yaitu

$$\langle 1-0, 2-0\rangle = \langle 1, 2\rangle$$

Panjang vektor:

$$\|\langle 1,2\rangle\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

Dengan demikian, besar kecepatan perjalanan perahu tersebut adalah 2,24 m/s dengan arah seperti yang tampak pada Gambar 4.9.

Mari Mencoba 4.2

Bagaimana jika kecepatan perahunya dua kali lipat dari kecepatan perahu pada Contoh 4.2? Bagaimana jika arah arus sungainya berlawanan dengan arah arus sebelumnya?

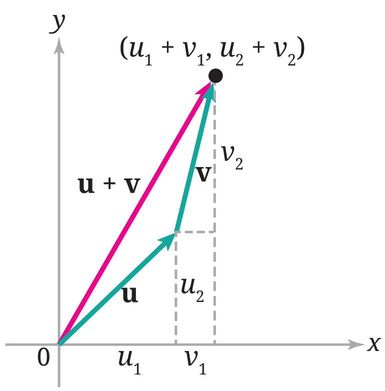
Aktivitas pada Contoh 4.2 merupakan operasi penjumlahan dua vektor. Diberikan **u** = $\langle 0-0, 2-0\rangle = \langle 0,2\rangle$ dan **v** = $\langle 1-0, 2-2\rangle = \langle 1,0\rangle$, penjumlahan kedua vektor ini adalah

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 0+1, 2+0\rangle$$

Secara umum, penjumlahan dua vektor dilakukan dengan menjumlahkan setiap komponennya. Misalkan **u** = $\langle u_1, u_2\rangle$ dan **v** = $\langle v_1, v_2\rangle$, jumlah kedua vektor tersebut sebagai berikut.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1+v_1, u_2+v_2\rangle$$

Berikut ini ilustrasi penjumlahan dua vektor.



Gambar 4.10 Penjumlahan Dua Vektor

Definisi operasi penjumlahan beserta operasi-operasi vektor lainnya dirangkum sebagai berikut.

Definisi 4.2 **Penjumlahan Vektor dan Perkalian Skalar**

Misalkan c adalah sebuah skalar serta $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ merupakan vektor, maka berlaku:

- penjumlahan vektor **u** dan **v** adalah vektor;

  $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$$

- perkalian skalar c dan **v** adalah vektor;

  $$c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2 \rangle$$

- negatif dari **v** adalah vektor; dan

  $$-\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle$$

- selisih **u** dan **v** adalah vektor.

  $$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$$

Untuk lebih memahami penjumlahan vektor dan perkalian skalar, cermati contoh berikut!

Contoh 4.3 Penjumlahan Vektor dan Perkalian Skalar

Misalkan $\mathbf{u} = \langle 32, -12 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle -7, 18 \rangle$. Tentukan $2\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, dan $\|\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\|$.

Alternatif penyelesaian:

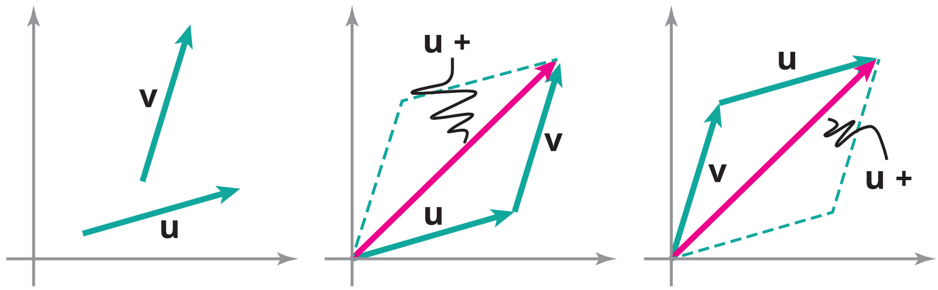
Dengan menggunakan definisi penjumlahan vektor dan perkalian skalar, kita peroleh

$$\begin{aligned}
2\mathbf{v} &= \langle 2 \cdot (-7), 2 \cdot 18 \rangle = \langle -14, 36 \rangle \\
\mathbf{u} + 2\mathbf{v} &= \langle 32, -12 \rangle + \langle -14, 36 \rangle \\
&= \langle 32 + (-14), -12 + 36 \rangle \\
&= \langle 18, 24 \rangle \\
\|\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\| &= \sqrt{18^2 + 24^2} = 30
\end{aligned}$$

Mari Mencoba 4.3

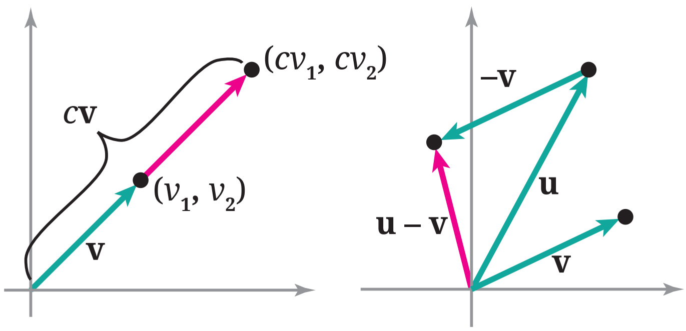
Diberikan $\mathbf{a} = \langle -2, -4 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle -8, 6 \rangle$. Tentukan $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, dan $\|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\|$.

Proses menjumlahkan vektor dan mengalikan skalar dengan vektor juga dapat digambarkan dengan grafik. Pertama-tama, kita posisikan agar titik pangkal sebuah vektor berimpit dengan titik ujung vektor lainnya, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.11. Hasilnya, vektor penjumlahan **u** + **v** merupakan diagonal jajargenjang yang memiliki sisi **u** dan sisi **v**.



Gambar 4.11 Proses Penjumlahan Vektor **u** dan Vektor **v**

Secara geometris, vektor yang merupakan hasil kali antara vektor **v** dan skalar c memiliki panjang $|c|$ kalinya dari panjang **v**. Jika c positif, vektor hasil kali skalar ini searah dengan **v**, sedangkan jika c negatif, arahnya berlawanan dengan **v**. Gambar berikut menunjukkan perkalian vektor dengan skalar, dan pengurangan vektor.



Gambar 4.12 Ilustrasi Perkalian Skalar dan Pengurangan Vektor

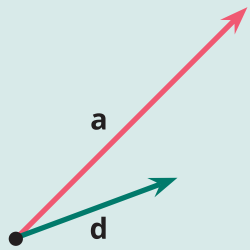
Mari Berpikir Kritis

Dapatkah kamu menjelaskan mengapa pengurangan dua vektor dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 4.12?

Kamu ingin berlatih lebih banyak lagi tentang operasi-operasi vektor? Silakan kerjakan Mari Berpikir Kreatif berikut.

Mari Berpikir Kreatif

Ruas garis berarah yang merepresentasikan vektor **a** dan vektor **d** ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 4.13 Ruas Garis Berarah Vektor **a** dan Vektor **d**

Carilah tiga kemungkinan vektor **b** dan vektor **c** sedemikian sehingga **a** + **b** – **c** = **d**.

Pada aktivitas eksplorasi berikutnya, kita akan menyelidiki sifat-sifat operasi vektor. Apakah sifat-sifatnya sama dengan sifat-sifat operasi pada bilangan real? Mari, kita menyelidikinya!

Eksplorasi Bagaimana Sifat-Sifat Operasi Vektor?

Kita mengetahui bahwa penjumlahan bilangan-bilangan real memiliki beberapa sifat, di antaranya komutatif, asosiatif, memiliki identitas, dan memiliki invers (lawan). Sifat-sifat ini juga berlaku untuk perkalian bilangan-bilangan real. Selain itu, kita juga telah mengetahui bahwa perkalian bilangan real bersifat distributif terhadap penjumlahan. Apakah sifat-sifat ini juga berlaku pada operasi-operasi vektor yang baru kita pelajari?

Mari, kita menemukan jawabannya. Misalkan kita diberikan tiga vektor pada bidang, yaitu

$$\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2 \rangle, \text{ dan } \mathbf{w} = \langle -2, 3 \rangle$$

dan dua skalar, yaitu $c = -4$ dan $d = 7$.

1. Tentukan hasil penjumlahan dua vektor berikut.

   a. **u** + **v**　　　　b. **v** + **u**

   Apa simpulan kamu? Apa nama sifat tersebut?

2. Tentukan hasil penjumlahan tiga vektor berikut.

   a. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ b. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

   Dari hasil di atas, bagaimana dugaanmu? Apa nama sifat tersebut?

3. Vektor nol **0** adalah vektor yang semua komponennya nol, $0 = \langle 0, 0 \rangle$. Tentukan penjumlahan **v** dengan **0**. Apa yang dapat kamu peroleh? Bagaimana besar dan arah vektor nol?

4. Tentukan hasil penjumlahan suatu vektor dengan negatifnya, $\mathbf{v} + (-\mathbf{v})$. Apa yang dapat kamu peroleh?

5. Dua skalar dapat dikalikan dengan suatu vektor dengan cara $c(d\mathbf{v})$ atau $(cd)\mathbf{v}$. Tentukan hasil perkalian skalar tersebut. Apa simpulan yang dapat kamu buat?

6. Hitung hasil perkalian skalar dan penjumlahan vektor berikut.

   a. $(c + d)\mathbf{v}$ b. $c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$

   Buatlah simpulan.

7. Tentukan hasil perkalian skalar dengan penjumlahan dua vektor berikut.

   a. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ b. $c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

   Apa yang dapat kamu peroleh?

8. Tentukan hasil perkalian skalar 0 dan 1 dengan vektor **v** berikut.

   a. $1(\mathbf{v})$ b. $0(\mathbf{v})$

   Apa yang dapat kamu peroleh?

Berdasarkan eksplorasi sebelumnya, kita mendapatkan sifat-sifat operasi vektor berikut.

Sifat 4.1 **Operasi Vektor**

Misalkan **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor pada suatu bidang, serta c dan d adalah skalar, maka berlaku:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ Sifat komutatif
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ Sifat asosiatif
- $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ Sifat identitas penjumlahan
- $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ Sifat invers penjumlahan

- $c(d\mathbf{v}) = (cd)\mathbf{v}$
- $(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ Sifat distributif
- $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ Sifat distributif
- $1(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$
- $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Untuk lebih memahami penggunaan sifat-sifat tersebut, perhatikan contoh berikut!

Contoh 4.4 Menggunakan Sifat-Sifat Operasi Vektor

Untuk sembarang vektor **v**, tunjukkan bahwa $3\mathbf{v} + (-3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Alternatif penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa persamaan yang diberikan selalu benar, kita menggunakan sifat distributif dan sifat perkalian dengan skalar nol. Untuk sembarang vektor **v**, berlaku:

$$3\mathbf{v} + (-3)\ \mathbf{v} = (3+(-3))\ \mathbf{v} = 0(\mathbf{v}) = 0$$

Jadi, dapat ditunjukkan bahwa $3\mathbf{v} + (-3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Mari Mencoba 4.4

Buktikan bahwa $2\mathbf{v} - \frac{1}{3}(3\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ untuk sembarang vektor **v**.

Pada contoh berikut, kita akan menentukan panjang vektor dari hasil perkalian skalar dengan sebuah vektor.

Contoh 4.5 Panjang Vektor dari Hasil Perkalian Skalar dengan Vektor

Jika $\mathbf{v} = \langle 8, -15 \rangle$, tentukan $|-3|\ \|\mathbf{v}\|$, $-3\mathbf{v}$, dan $\|-3\mathbf{v}\|$.

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, kita menentukan panjang vektor **v**.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{8^2 + (-15)^2} = 17$$

Dengan demikian,

$$|-3|\ \|\mathbf{v}\| = 3 \cdot 17 = 51$$

Selanjutnya, kita menentukan vektor –3**v**.

$$-3\mathbf{v} = \langle -3(8), -3(-15)\rangle = \langle -24, 45\rangle$$

Panjang vektor:

$$-3\mathbf{v} = \sqrt{(-24)^2 + 45^2} = \sqrt{576 + 2.025} = \sqrt{2.601} = 51$$

Apa yang dapat kamu amati dari hasil $|-3|\,\|\mathbf{v}\|$ dan $\|-3\mathbf{v}\|$? Kamu mungkin menduga bahwa $|-3|\,\|\mathbf{v}\| = \|-3\mathbf{v}\|$.

Mari Mencoba 4.5

Misalkan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ adalah sebuah vektor dan c adalah skalar. Tunjukkan bahwa $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$.

Kita dapat memperumum hasil pada Contoh 4.5 menjadi sifat berikut.

Sifat 4.2 Panjang Vektor Hasil dari Perkalian Skalar dengan Vektor

Jika **v** adalah sebuah vektor dan c adalah skalar, maka

$$|c|\,\|\mathbf{v}\| = \|c\mathbf{v}\|$$

Sifat di atas menyatakan bahwa hasil kali nilai mutlak c dan panjang vektor v sama dengan panjang dari vektor $c\mathbf{v}$.

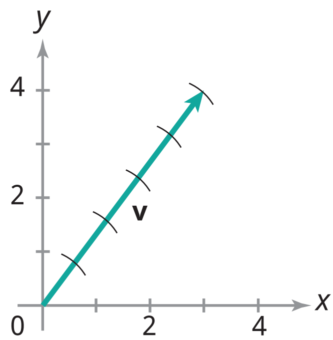
3. Vektor Satuan

Seperti dijelaskan sebelumnya, vektor memiliki arah dan besaran. Terkadang kita membutuhkan informasi arah, tetapi tidak terlalu membutuhkan informasi terkait besaran. Untuk kasus seperti ini, kita dapat melakukan proses *normalisasi* vektor, yakni menentukan sebuah vektor dengan panjang 1 dan arah yang sama dengan sebuah vektor yang dinormalisasi. Vektor yang dihasilkan dari proses ini dinamakan *vektor satuan*.

Lantas, apa kegunaan vektor satuan? Saat kita menganggap sebuah vektor sebagai besaran maka sangat berguna jika besaran tersebut memiliki satuan. Dalam kasus besaran volume, misalnya, kita dapat menyatakan 1.000 cm^3 sebagai 1.000 kalinya volume kubus satuan 1 cm^3. Hal ini juga berlaku untuk vektor. Untuk memahami proses normalisasi vektor dan vektor satuan secara lebih jelas, mari kita mempelajari contoh berikut.

Contoh 4.6 Menemukan Vektor Satuan

Diberikan vektor $\mathbf{v} = \langle 3,4 \rangle$. Berapakah panjang vektor $\mathbf{v}$? Selanjutnya, tentukan vektor $\mathbf{u}$ yang searah dengan vektor $\mathbf{v}$, tetapi memiliki panjang 1 satuan.



Gambar 4.14 Vektor $\mathbf{v} = \langle 3,4 \rangle$

Alternatif penyelesaian:

Vektor $\mathbf{v}$ diperlihatkan pada Gambar 4.14. Dengan menggunakan Rumus Jarak, kita dapat menentukan panjang $\mathbf{v}$.

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Selanjutnya, kita akan mencari sebuah vektor yang searah dengan $\mathbf{v}$, tetapi panjangnya 1 satuan. Misalnya vektor ini adalah $\mathbf{u}$. Apa dugaan kamu mengenai vektor $\mathbf{u}$ ini? Berdasarkan Gambar 4.14, kita menduga bahwa titik ujung vektor $\mathbf{u}$ diperoleh dengan membagi lima semua absis dan ordinat dari titik ujung $\mathbf{v}$. Dengan demikian, koordinat titik ujungnya adalah $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ dan $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$.

Apa betul dugaan tersebut? Mari, kita periksa dengan menentukan panjang $\mathbf{u}$.

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Bagaimana dengan arah vektor $\mathbf{u}$? Apakah searah dengan $\mathbf{v}$? Untuk itu, mari kita melihat gradiennya.

$$\text{Gradien } \mathbf{u} = \frac{\frac{4}{5} - 0}{\frac{3}{5} - 0} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Gradien } \mathbf{v} = \frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

Karena $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ sama-sama mengarah ke kanan atas dan bergradien $\frac{4}{3}$, maka kedua vektor ini searah. Jadi, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$ merupakan vektor satuan yang searah dengan vektor $\mathbf{v}$.

Mari Mencoba 4.6

Secara ringkas, kita mendapatkan vektor satuan $\mathbf{u}$ dengan membagi komponen-komponen vektor $\mathbf{v}$ dengan panjangnya. Apakah selalu seperti ini untuk mendapatkan vektor satuan **u** yang searah dengan **v**? Dengan kata lain, buktikan bahwa jika **v** adalah vektor bukan nol pada bidang, maka

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

memiliki panjang 1 dan searah dengan **v**.

Berdasarkan Contoh 4.6, kita mendapatkan rumus vektor satuan berikut.

Rumus 4.2 **Vektor Satuan**

Vektor satuan adalah vektor dengan panjang 1. Jika **v** adalah vektor bukan nol pada bidang, maka vektor satuan dari **v** dilambangkan dengan $\hat{\mathbf{v}}$ dan dapat dicari dengan rumus berikut.

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

Di sini, $\hat{\mathbf{v}}$ memiliki panjang 1 dan searah dengan **v**. Proses mencari vektor satuan dari **v** disebut *normalisasi*.

Sekarang kita telah mengenal vektor satuan. Selanjutnya, kita perlu mencermati dua vektor satuan khusus, yaitu vektor **i** dan vektor **j**. **i** merupakan vektor satuan dalam arah sumbu–*x* dan **j** vektor satuan dalam arah sumbu–*y*. Bentuk komponen kedua vektor ini adalah sebagai berikut.

$$\boxed{\mathbf{i} = \langle 1,0\rangle \text{ dan } \mathbf{j} = \langle 0,1\rangle}$$

Kedua vektor ini disebut *vektor satuan baku* yang dapat digunakan untuk menuliskan sembarang vektor lainnya.

Rumus 4.3 **Vektor dalam i dan j**

Vektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ dapat dinyatakan dalam vektor-vektor satuan baku **i** dan **j**, yaitu

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

Untuk lebih memahami cara menyatakan suatu vektor ke dalam kombinasi vektor-vektor satuan baku, kamu dapat memperhatikan contoh berikut.

Contoh 4.7 Menulis Suatu Vektor ke dalam Vektor-Vektor Satuan Baku

Diberikan $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle -2, 0\rangle$. Nyatakan vektor-vektor **u**, **v**, dan 3**u** + 2**v** ke dalam bentuk **i** dan **j**.

Alternatif penyelesaian:

Vektor **u** dan vektor **v** dapat dituliskan kembali ke dalam **i** dan **j**.

$$\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \text{ dan } \mathbf{v} = \langle -2, 0 \rangle = -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = -2\mathbf{i}$$

Selanjutnya, kita tentukan $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ seperti berikut.

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} &= 3(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + 2(-2\mathbf{i}) \\ &= (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) + (-4\mathbf{i}) \\ &= 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} \end{aligned}$$

Jika diperhatikan, kita dapat memanipulasi operasi penjumlahan dan perkalian skalar seperti pada bentuk-bentuk aljabar.

Mari Mencoba 4.7

Jika $\mathbf{a} = \langle -4, 3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle 2, -3 \rangle$, tuliskan vektor-vektor **a**, **b**, dan $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ ke dalam bentuk vektor-vektor satuan baku.

Latihan A Vektor pada Bidang

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Vektor adalah besaran yang hanya memiliki nilai.
2. Jika **a** dan **b** adalah dua vektor yang memiliki besaran sama, tetapi arahnya berlawanan, maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$.
3. Panjang vektor $c\mathbf{v}$ sama dengan hasil kali skalar c dengan panjang vektor **v**.
4. Vektor $\langle -4, 12 \rangle$ dapat dituliskan ke dalam kombinasi vektor-vektor satuan baku **i** dan **j**, yaitu ....

Penerapan Konsep

5. Sebuah vektor memiliki pangkal di (6, 2) dan ujung di (1, –5). Tentukan bentuk komponen vektor tersebut, kemudian hitung panjangnya.

6. **Navigasi**. Sebuah pesawat terbang menuju arah barat dengan kecepatan 300 km/jam. Angin dari arah tenggara menerpa pesawat tersebut dengan kecepatan 80 km/jam. Bagaimana kecepatan dan arah pesawat terbang tersebut?

7. **Resultan gaya**. Sebuah objek dikenai gaya dari arah kiri sebesar 80 N dan dari arah bawah sebesar 50 N. Bagaimana resultan gaya pada objek tersebut?

8. **Pembuktian**. Untuk sembarang sudut θ, buktikan bahwa $\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j}$ dan $\mathbf{v} = (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$ merupakan vektor-vektor satuan.

B. Hasil Kali Titik

Pada subbab sebelumnya kamu telah mempelajari operasi-operasi terhadap vektor pada bidang. Pada subbab ini kita akan mempelajari operasi lainnya, yaitu hasil kali titik.

Matematika dalam Budaya **Pacu Jawi**

Kegunaan operasi hasil kali titik berkaitan erat dengan sudut antara dua vektor (*lihat* halaman 184) dan proyeksi suatu vektor ke vektor lain (*lihat* halaman 187). Ketiga konsep tersebut dapat digunakan untuk memodelkan gaya yang searah dengan perpindahan suatu objek yang dikenai gaya tersebut. Sebagai contoh, gaya yang diberikan oleh sapi dalam Pacu Jawi terhadap alat bajak awalnya tidaklah searah dengan arah larinya. Akan tetapi, dengan hasil kali titik, kamu dapat mengetahui mengapa alat bajak tersebut bergerak searah dengan arah lari sapi tersebut. Oleh karena itu, mari kita memulai pembahasannya dari pengertian hasil kali titik.

Gambar 4.15 Hasil Kali Titik dalam Pacu Jawi
Sumber: Rodney Ee/Flickr/CC BY 2.0 DEED (2015)

1. Pengertian Hasil Kali Titik

Operasi penjumlahan vektor, pengurangan vektor, dan perkalian vektor dengan skalar menghasilkan suatu vektor baru. Tahukah kamu bahwa ada operasi pada vektor yang tidak menghasilkan suatu vektor baru? Operasi ini adalah hasil kali titik yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.3 **Hasil Kali Titik**

Jika $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ merupakan dua vektor pada bidang, maka **hasil kali titik** antara **u** dan **v** adalah

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Operasi hasil kali titik antara dua vektor menghasilkan suatu bilangan real yang disebut *skalar*. Oleh karena itu, operasi ini sering disebut *hasil kali skalar*. Supaya kamu memahami hasil kali titik, perhatikan contoh-contoh berikut!

Contoh 4.8 Hasil Kali Titik

Tentukan nilai dari:

1. $\langle 2,5 \rangle \cdot \langle -3,3 \rangle$
2. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j})$

Alternatif penyelesaian:

1. $\langle 2,5 \rangle \cdot \langle -3,3 \rangle = 2(-3) + 5(3) = -6 + 15 = 9$
2. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = 2(3) - 1(6) = 6 - 6 = 0$

Mari Mencoba 4.8

Tentukan nilai dari:

1. $\langle -3,-4 \rangle \cdot \langle 5,2 \rangle$
2. $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} - 1\mathbf{j})$

Apakah operasi hasil kali titik ini memiliki sifat-sifat yang serupa dengan operasi-operasi vektor yang telah kita pelajari sebelumnya? Mari, kita menyelidikinya!

Eksplorasi Menemukan Sifat-Sifat Hasil Kali Titik

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kita akan menemukan sifat-sifat hasil kali titik.

Diberikan tiga vektor **u**, **v**, dan **w** berikut.

$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, dan $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$

1. Tentukan hasil dari $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Bagaimana hubungan hasil tersebut dengan nilai dari $\| \mathbf{v} \|$?
2. Carilah nilai dari $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. Bagaimana nilai kedua hasil kali tersebut?
3. Tentukan nilai operasi pada vektor berikut.
   a. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
   b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
   Apa simpulan yang dapat kamu buat?
4. Misalkan c adalah skalar. Carilah hasil operasi antara skalar dan vektor-vektor berikut.
   a. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$
   b. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
   c. $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

   Bagaimana ketiga hasil tersebut?
5. Vektor nol pada bidang adalah $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$. Tentukan hasil kali titik $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v}$. Buatlah simpulan berdasarkan hasil tersebut.

Dari hasil eksplorasi yang telah kamu lakukan, sifat-sifat hasil kali titik dapat diungkapkan sebagai berikut.

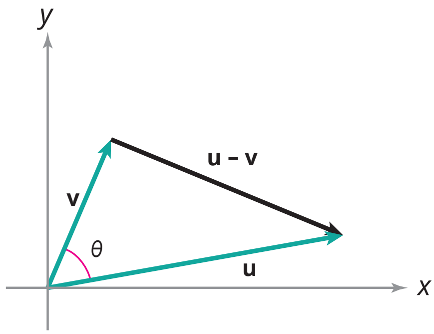
Sifat 4.3 Sifat-Sifat Hasil Kali Titik

Misalkan **u**, **v**, dan **w** adalah tiga vektor dan c adalah skalar, maka berlaku:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{v} \|^2$
- sifat komutatif: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- sifat distributif: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
- $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$

2. Sudut antara Dua Vektor

Apakah kamu masih mengingat konsep sudut? Di sini kita akan membahas konsep itu lagi. Pada Gambar 4.16, θ adalah sudut di antara dua vektor posisi $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$. Vektor posisi adalah vektor yang pangkalnya di titik asal.



Gambar 4.16 Sudut antara Vektor **u** dan Vektor **v**

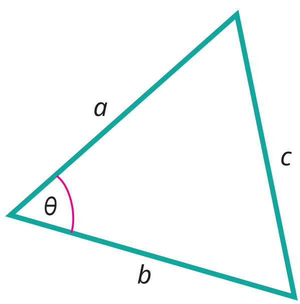
Kamu dapat menggunakan hasil kali titik yang telah dipelajari untuk menentukan besar sudut antara dua vektor. Untuk mengetahui caranya, lakukan eksplorasi berikut ini!

Eksplorasi **Sudut antara Dua Vektor**

Pada eksplorasi ini, kita akan menggunakan rumus trigonometri, yaitu Aturan Kosinus.

Aturan Kosinus

Perhatikan segitiga berikut!



Gambar 4.17 Segitiga dengan a, b, dan θ Diketahui

Jika panjang kedua sisi segitiga diketahui (misalkan a dan b) dan besar sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut diketahui (misalnya θ), maka kuadrat dari panjang sisi ketiga dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\theta$$

Perhatikan segitiga yang dibentuk oleh vektor-vektor **u**, **v**, dan **u** – **v** pada Gambar 4.16, kemudian kerjakan langkah-langkah berikut ini.

1. Dengan menggunakan Aturan Kosinus, tentukan kuadrat panjang vektor **u** – **v**.
2. Gunakan Sifat 4.3 ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ dan sifat distributif) untuk menyatakan kuadrat panjang **u** – **v**.
3. Dari hasil langkah kedua, nyatakan rumus ke dalam $\cos\theta$.

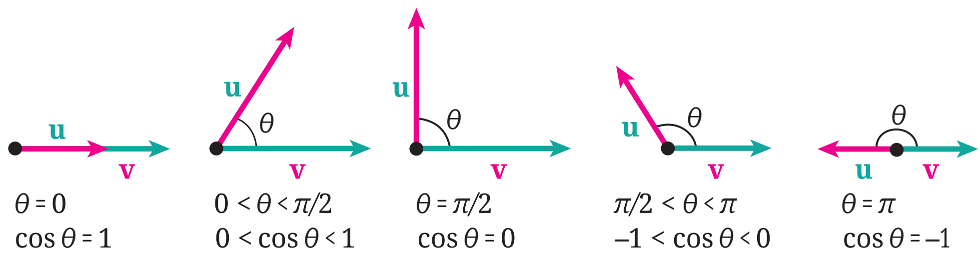
Berdasarkan eksplorasi kamu, diperoleh rumus berikut.

Rumus 4.4 **Sudut antara Dua Vektor**

Jika θ adalah besar sudut di antara vektor-vektor tak nol **u** dan **v**, dengan $0 \le \theta \le \pi$, maka

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Gambar berikut menunjukkan beberapa kemungkinan sudut yang dibentuk oleh dua vektor.



Gambar 4.18 Kemungkinan Sudut-Sudut antara Dua Vektor

Untuk lebih memahaminya, kamu dapat mencermati contoh berikut.

Contoh 4.9 Menentukan Sudut antara Dua Vektor

Diberikan empat vektor pada bidang, yaitu $\mathbf{a} = \langle 3, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, -2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle -2, -1 \rangle$, dan $\mathbf{d} = \langle -4, 2 \rangle$ Tentukan besar sudut di antara pasangan vektor-vektor berikut.

1. **a** dan **c**
2. **a** dan **b**
3. **c** dan **d**

Alternatif penyelesaian:

Karena perhitungan Rumus 4.4 membutuhkan panjang vektor, pertama-tama kita tentukan panjang setiap vektor.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(4 + 1)} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

1. Kosinus sudut antara vektor **a** dan vektor **c** adalah

   $$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{c}\|} = \frac{3(-2) + 6(-1)}{3\sqrt{5}(\sqrt{5})} = \frac{-12}{15} = -\frac{4}{5}$$

   Dengan demikian, $\theta = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = 2{,}5$ radian atau 143,13°.

2. Kosinus sudut antara vektor **a** dan vektor **b** adalah

   $$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{3(4) + 6(-2)}{3\sqrt{5}(2\sqrt{5})} = \frac{0}{30} = 0$$

   Karena nilai cos θ = 0, maka $\theta = \frac{\pi}{2}$ atau 90°. Vektor **a** dan vektor **b** membentuk sudut siku-siku sehingga kedua vektor tersebut saling tegak lurus atau ortogonal.

3. Kosinus sudut antara vektor **c** dan vektor **d** adalah

   $$\cos\theta = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{c}\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{-2(-4) + (-1)(2)}{\sqrt{5}(2\sqrt{5})} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

   Dengan demikian, θ = arccos$\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}9$ radian atau 53,13°.

Mari Mencoba 4.9

Tentukan besar sudut di antara vektor **u** = $\langle -3, 1\rangle$ dan vektor **v** = $\langle 2, -4\rangle$.

Dengan menggunakan Rumus 4.5, kamu dapat menyatakan hasil kali titik antara dua vektor ke dalam besar sudut dan panjang vektor-vektor.

Rumus 4.5 **Hasil Kali Titik**

Jika θ adalah besar sudut di antara vektor **u** dan vektor **v**, dengan $0 \le \theta \le \pi$, maka hasil kali titik kedua vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

Contoh 4.10 Menentukan Hasil Kali Titik Dua Vektor

Tentukan **a** · **b** jika panjang vektor **a** dan vektor **b** berturut-turut 6 dan 8, serta besar sudut di antara kedua vektor adalah 60°.

Alternatif penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta \\
&= (6)(8) \cos \theta \\
&= (6)(8) \cos 60^\circ \\
&= (6)(8)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 24
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 24$.

Mari Mencoba 4.10

Misalkan $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = 4$, dan besar sudut antara kedua vektor adalah 30º. Tentukan $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Berdasarkan Contoh 4.10, hubungan hasil kali titik dan sudut yang dibentuk dari dua vektor adalah sebagai berikut.

Jika θ adalah sudut di antara vektor-vektor tak nol **u** dan **v**, maka

- θ adalah sudut lancip jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- θ adalah sudut tumpul jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Contoh 4.11 Menentukan Sudut antara Dua Vektor

Tentukan hasil kali vektor $\mathbf{a} = \langle 3, 6 \rangle$ dan vektor $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$, kemudian periksa sudut yang terbentuk dari kedua vektor tersebut.

Alternatif penyelesaian:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3)(2) + (6)(-1) = 6 - 6 = 0$

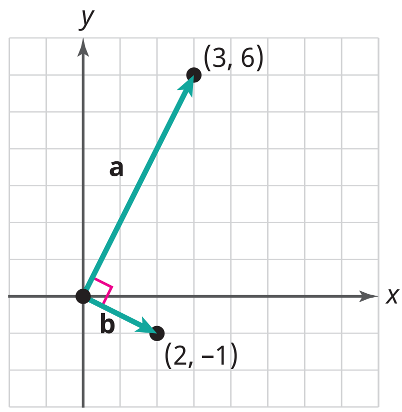
Karena $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, besar sudut yang terbentuk adalah $\frac{\pi}{2}$ atau 90°.

Jadi, vektor **a** tegak lurus terhadap vektor **b**.

Mari Mencoba 4.11

Diketahui vektor **u** = **i** + 2**j** dan vektor **v** = –2**i** + 3**j**. Tentukan hasil kali titik vektor **u** dan vektor **v**, kemudian periksa sudut yang terbentuk dari kedua vektor tersebut.

Pada Contoh 4.11 kedudukan dua vektor saling tegak lurus (ortogonal). Perhatikan gambar berikut untuk bisa melihatnya secara jelas!



Gambar 4.19 Vektor-Vektor yang Saling Tegak Lurus

Dari contoh tersebut, kita juga menemukan bahwa hasil kali titik antara dua vektor yang ortogonal sama dengan nol.

Definisi 4.4 **Vektor-Vektor Ortogonal**

Vektor-vektor **u** dan **v** ortogonal jika **u** · **v** = 0.

Contoh 4.12 Menentukan Sudut antara Dua Vektor

Diketahui vektor **a** $=\langle -2, 2\rangle$ dan vektor **b** $=\langle 2, p\rangle$. Jika vektor **a** ortogonal terhadap vektor **b**, tentukan nilai *p* yang mungkin.

Alternatif penyelesaian:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(-2)(2)+(2)(p)=-4+2p$

Karena vektor **a** ortogonal terhadap vektor **b**, maka **a** · **b** = 0.

$-4 + 2p = 0$

$2p = 4$

$p = 2$

Jadi, vektor **a** ortogonal terhadap vektor **b** untuk nilai $p = 2$.

Mari Mencoba 4.12

Diketahui vektor $\mathbf{u} = \langle -2, 6 \rangle$ dan vektor $\mathbf{v} = \langle 9, m \rangle$. Jika vektor **u** tegak lurus dengan vektor **v**, tentukan nilai m.

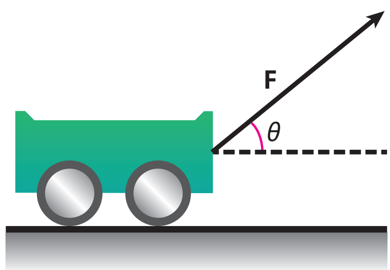
3. Proyeksi Vektor

Banyak permasalahan sehari-hari yang melibatkan vektor. Lebih khusus, vektor ini juga sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan fisika. Untuk lebih jelasnya, cermati penerapan vektor dalam ilmu fisika berikut ini!

Matematika dan Sains **Vektor dan Gaya**

Konsep perpindahan dan gaya telah digunakan oleh para fisikawan untuk menemukan usaha yang dikenakan terhadap suatu objek. Ternyata vektor sangat berpengaruh besar di sini. Vektor dapat digunakan untuk menggambarkan gaya yang terjadi pada objek tersebut.

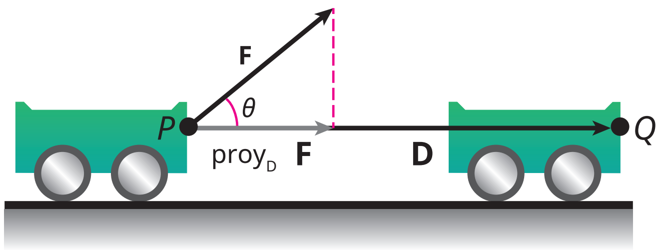
Sebagai contoh, bayangkan kamu sedang menarik sebuah kereta. Tarikan tersebut akan membentuk sudut tertentu terhadap garis horizontal. Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut!



Gambar 4.20 Tarikan Gaya **F** terhadap Kereta

Setelah kamu menarik kereta dengan gaya sebesar **F** ke arah θ dari garis horizontal sehingga kereta tersebut berpindah, berapa besarnya usaha yang kamu kenakan terhadap kereta tersebut? Kita akan menjawab permasalahan ini menggunakan proyeksi vektor.

Usaha yang dilakukan oleh gaya **F** di *sepanjang garis perpindahan* suatu objek dapat ditentukan dengan mengalikan besarnya gaya tersebut dengan perpindahan objeknya. Bagaimana jika arah gaya tersebut tidak sama dengan garis perpindahan objeknya? Perhatikan gambar berikut!



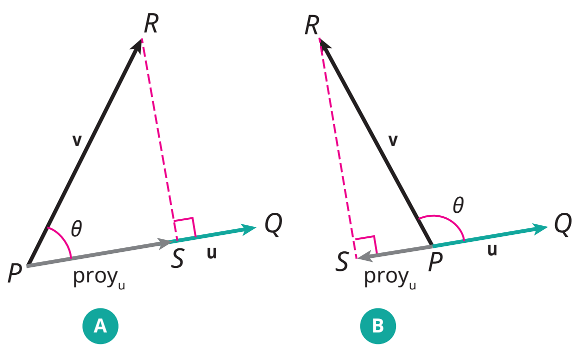
Gambar 4.21 Vektor Gaya **F** dan Vektor Perpindahan **D**

Gambar di atas menunjukkan perpindahan kereta dari titik P ke titik Q oleh gaya **F** yang arahnya membentuk sudut θ terhadap arah perpindahan keretanya. Untuk menentukan usaha yang disebabkan oleh gaya **F** tersebut, kita harus menemukan proyeksi gaya **F** ke vektor perpindahan **D**. Oleh karena itu, mari kita melakukan aktivitas eksplorasi berikut!

Eksplorasi Proyeksi Suatu Vektor terhadap Vektor Lain

Melalui aktivitas eksplorasi ini, kamu akan belajar untuk menemukan rumus proyeksi skalar dan proyeksi vektor.

Diberikan vektor $\overrightarrow{PQ}$ yang menggambarkan vektor **u** dan vektor $\overrightarrow{PR}$ yang menggambarkan vektor **v** seperti pada Gambar 4.22. Kedua vektor tersebut sama-sama memiliki titik pangkal P. Jika S merupakan sebuah titik pada bidang yang memuat vektor **v** sedemikian sehingga ruas garis RS tegak lurus terhadap garis PQ, maka vektor $\overrightarrow{PS}$ merupakan proyeksi vektor **v** terhadap **u**, dan dinotasikan dengan proy$_{\mathbf{u}}$ **v**.



Gambar 4.22 Proyeksi Vektor

Selanjutnya, tujuan aktivitas ini adalah menentukan proyeksi skalar yang dinotasikan $\text{komp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$.

1. Perhatikan segitiga *PRS*. Jika $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, dan θ diketahui, tentukan panjang vektor $\overrightarrow{PS}$. (Gunakan definisi fungsi kosinus.)

Catatan:

- Jika panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ bernilai positif, maka vektor $\overrightarrow{PS}$ searah dengan vektor **u** (*lihat* Gambar 4.22 (A)).
- Jika panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ bernilai negatif, maka vektor $\overrightarrow{PS}$ berlawanan arah dengan vektor **u** (*lihat* Gambar 4.22 (b)).

2. Ingat **Rumus 4.5** bahwa $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta$. Nyatakan panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ sehingga memuat $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ disebut juga proyeksi skalar dari vektor **v** terhadap vektor **u** sehingga dapat dinyatakan dalam notasi $\text{komp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$.

Kamu dapat memperhatikan kembali Gambar 4.22. Vektor $\overrightarrow{PS}$ merupakan proyeksi vektor dari vektor **v** terhadap vektor **u**. Lakukan langkah berikut untuk menemukan rumus proyeksi vektor yang dinotasikan dengan $\text{proy}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$.

1. Tentukan vektor satuan yang searah dengan **u**.
2. Karena $\overrightarrow{PS}$ segaris dengan **u**, tentukan vektor $\overrightarrow{PS}$ dengan mengalikan panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ dengan vektor satuan **u**.

Vektor $\overrightarrow{PS}$ disebut proyeksi vektor dari vektor **v** terhadap vektor **u** sehingga dapat dinyatakan dalam notasi $\text{proy}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$.

Panjang vektor berarah yang ditentukan pada eksplorasi disebut *proyeksi skalar* atau *komponen vektor*. Proyeksi skalar vektor **v** ke vektor **u** dinotasikan dengan $\text{komp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$. Proyeksi skalar $\text{komp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$ dapat dimaknai sebagai komponen vektor **v** di sepanjang **u**.

Rumus 4.6 **Proyeksi Skalar dan Proyeksi Vektor**

Misalkan **u** dan **v** adalah vektor-vektor bukan nol. *Proyeksi skalar* **v** ke **u** sebagai berikut.

$$\text{komp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}$$

Adapun *proyeksi vektor* **v** ke **u** sebagai berikut.

$$\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}\right)\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$$

Kamu dapat mencermati contoh soal berikut agar lebih memahami proyeksi skalar dan proyeksi vektor.

Contoh 4.13 Mencari Proyeksi Skalar dan Proyeksi Vektor

Diberikan vektor **a** = –2**i** + 6**j** dan **b** = 2**i** – **j**. Tentukan proyeksi skalar dan proyeksi vektor **a** ke **b**.

Alternatif penyelesaian:

$\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} = \langle -2, 6\rangle$

$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} = \langle 2, -1\rangle$

Pertama-tama, kita menentukan panjang vektor **b**.

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Proyeksi skalar **a** ke **b** adalah

$$\text{komp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{-2(2)+6(-1)}{\sqrt{5}} = -\frac{10}{\sqrt{5}} = -2\sqrt{5}$$

Proyeksi vektor **a** ke **b** adalah

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\right)\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = -2\sqrt{5}\,\frac{(2\mathbf{i}-\mathbf{j})}{\sqrt{5}} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Jadi, proyeksi skalar **a** ke **b** adalah $-2\sqrt{5}$ dan proyeksi vektor **a** ke **b** adalah –4**i** + 2**j**.

Mari Mencoba 4.13

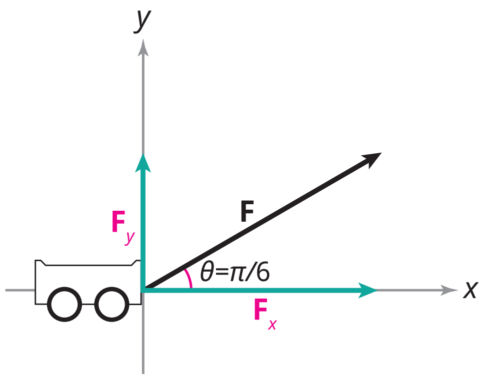
Misalkan $\mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$. Carilah proyeksi skalar dan proyeksi vektor **u** ke **v**.

Sekarang kita kembali ke permasalahan kereta. Contoh berikut menunjukkan cara menentukan komponen gaya yang searah dengan perpindahan kereta.

Contoh 4.14 Komponen-Komponen Gaya

Sebuah kereta mainan ditarik dengan gaya **F** sebesar 6 N. Arah gaya ini membentuk sudut sebesar $\frac{\pi}{6}$ terhadap garis horizontal. Perhatikan Gambar 4.23.

1. Tentukan komponen vektor **F** di sepanjang sumbu-x dan sumbu-y.
2. Nyatakan **F** ke dalam bentuk komponennya.



Gambar 4.23 Vektor **F**, Vektor **F**x, dan Vektor **F**y

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $\|\mathbf{F}\|$ = 6 N dan besar sudut antara **F** dan sumbu horizontal adalah $\frac{\pi}{6}$.

1. Komponen vektor **F** di sepanjang sumbu-x adalah

   $$\|\mathbf{F}\|\cos\theta = 6\cos\frac{\pi}{6} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

   Sudut antara **F** dan sumbu-y adalah $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ sehingga komponen vektor **F** di sepanjang sumbu-y adalah

   $$\|\mathbf{F}\|\cos\frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

2. Bentuk komponen-komponen vektor **F** adalah **F** = $\langle 3\sqrt{3}, 3\rangle$.

Mari Mencoba 4.14

Kerjakan seperti Contoh 4.14 dengan $\|\mathbf{F}\|$ = 10 N dan $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Setelah kamu memahami penggunaan vektor untuk menentukan komponen-komponen gaya, perhatikan contoh soal berikutnya!

Contoh 4.15 Menentukan Usaha

Jika kereta pada Contoh 4.14 berpindah sejauh 10 meter, tentukan usaha yang dilakukan oleh gayanya.

Alternatif penyelesaian:

Kereta bergerak secara horizontal sehingga komponen gaya horizontal yang digunakan.

$$\|\mathbf{F}_x\| = 3\sqrt{3}$$

Karena usaha sama dengan gaya dikalikan perpindahan, maka

$$\mathbf{W} = \|\mathbf{F}_x\|\|\mathbf{D}\| = 3\sqrt{3}(10) = 30\sqrt{3}$$

Jadi, usaha yang telah dilakukan adalah $30\sqrt{3}$ J.

Catatan: Simbol J merupakan kependekan dari Joule, yakni satuan dari usaha. Satuan ini setara dengan N · m atau kg · m^2 · s^{-2}.

Mari Mencoba 4.15

Sebuah meja didorong dengan gaya $\mathbf{F} = \langle 12, 16 \rangle$ sehingga perpindahannya $\mathbf{D} = \langle 25, 0 \rangle$. Hitunglah usaha yang dilakukan gaya tersebut.

Latihan B Hasil Kali Titik

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1 dan 2.

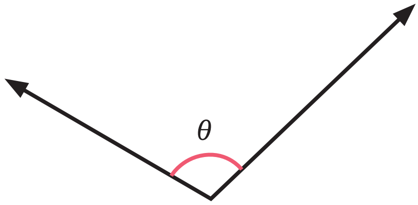
1. Diberikan sebuah vektor **v**, maka **v** · **v** = |**v**|.
2. Diberikan dua vektor bukan nol **a** dan **b**. Jika **a** · **b** = 0, maka kedua vektor tersebut saling tegak lurus.

Penerapan Konsep

3. Diketahui **a** = 3**i** + 2**j** dan **b** = **i** – 3**j**. Tentukan besar sudut yang diapit kedua vektor tersebut.

4. Vektor **u** dan vektor **v** secara berturut-turut memiliki panjang 12 dan 18. Jika besar sudut di antara kedua vektor tersebut adalah $\frac{\pi}{3}$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
5. **Mengamati.** Jelaskan simpulanmu tentang θ, besar sudut di antara dua vektor bukan nol **u** dan **v**, ketika

   a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$ b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ c. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$



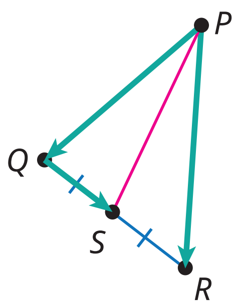
6. **Vektor dalam kopsis.** Vektor $\mathbf{n} = \langle 124, 155 \rangle$ secara berturut-turut menunjukkan banyak buku tulis dan banyak pensil yang terjual di koperasi siswa (kopsis) selama seminggu. Adapun vektor $\mathbf{h} = \langle 2.500, 1.000 \rangle$ secara berturut-turut menunjukkan harga buku tulis dan harga pensil. Bagaimana pendapat kamu tentang $\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}$?
7. Diberikan vektor $\mathbf{a} = \langle 3, 4 \rangle$ dan vektor $\mathbf{b} = \langle 11, -2 \rangle$. Tentukan proyeksi vektor **b** ke **a**.
8. **Perahu layar**. Sebuah perahu layar bergerak sejauh 100 m ke utara, sedangkan angin memberi gaya 500 N ke timur laut. Berapa banyak usaha yang dilakukan angin?

C. Pembuktian Geometris

Mungkin kita sudah pernah menyelesaikan soal pembuktian properti geometri dengan menggunakan kekongruenan. Misalnya, teorema Pythagoras dapat dibuktikan dengan kekongruenan. Selain itu, kita juga dapat membuktikan teorema Pythagoras dan properti geometri lain dengan pendekatan vektor. Dua contoh berikut memberikan gambaran pembuktian dengan pendekatan vektor pada segitiga dan jajargenjang.

Contoh 4.16 Segitiga

Diberikan sebuah segitiga *PQR* seperti pada gambar di bawah. *S* adalah titik tengah dari *QR*. Buktikan bahwa $\overrightarrow{QS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ})$.



Gambar 4.24 Segitiga *PQR*

Alternatif penyelesaian:

Karena S adalah titik tengah dari QR, kita dapat menuliskan persamaan berikut.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QS} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR})\\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ})\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\overrightarrow{QS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ})$.

Mari Mencoba 4.16

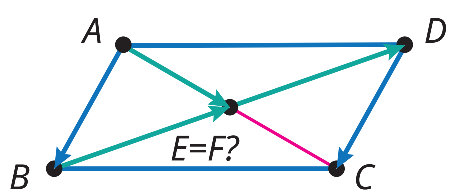
Diberikan segitiga yang sama dengan Contoh 4.16. Buktikan bahwa $\overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ})$.

Contoh 4.17 Jajargenjang

Diberikan sebuah jajargenjang. Buktikan bahwa kedua diagonal dari jajargenjang tersebut saling membagi dua sama panjang.

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, kita membuat ilustrasi dengan memisalkan jajargenjang tersebut sebagai jajargenjang $ABCD$. Misalkan titik tengah AC adalah titik E dan titik tengah BD adalah titik F. Kita dapat membuktikan bahwa diagonal AC dan diagonal BD saling membagi dua sama panjang apabila $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$.



Gambar 4.25 Jajargenjang *ABCD*

Pembuktian:

Karena E adalah titik tengah AC, kita dapat menuliskan persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) \\
&= \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF} \qquad \text{(karena } F \text{ adalah titik tengah } BD\text{)} \\
&= \overrightarrow{AF}
\end{aligned}$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$ serta diagonal AC dan diagonal BD saling membagi dua sama panjang. Jadi, terbukti bahwa kedua diagonal dari suatu jajargenjang saling membagi dua sama panjang.

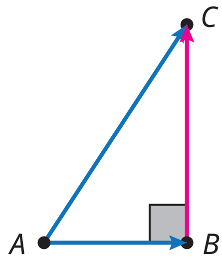
Mari Mencoba 4.17

Buktikan dengan menggunakan vektor bahwa kedua diagonal dari persegi panjang saling membagi dua sama panjang.

Seperti pada pemaparan sebelumnya, teorema Pythagoras dapat dibuktikan dengan pendekatan vektor. Kita akan membahas pembuktian ini dalam eksplorasi berikut.

Eksplorasi Membuktikan Teorema Pythagoras dengan Vektor

Misalkan kita memiliki sembarang segitiga siku-siku seperti pada gambar di bawah. Kita akan membuktikan bahwa $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Dalam pembuktian ini, kita memerlukan pengetahuan tentang hasil kali titik dan sifat-sifatnya.



Gambar 4.26 Segitiga Siku-Siku *ABC*

Langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Nyatakan $\overrightarrow{AC}$ dalam $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$.
2. Tentukan hasil dari kedua operasi berikut.
   a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
   b. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$

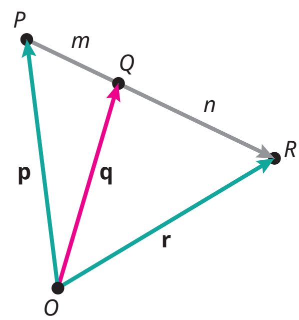
   Buatlah simpulan.
3. Untuk membuktikan bahwa $AC^2 = AB^2 + BC^2$, coba mulai dengan menyatakan AC^2 dalam hasil kali titik dari dua vektor. Selanjutnya, gunakan hasil dari 1 dan 2 untuk membantu menemukan persamaan yang diinginkan.

Masih banyak permasalahan geometri yang dapat dipecahkan dengan pendekatan vektor. Kamu dapat menjumpai salah satu permasalahan dalam segitiga yang menantang pada kegiatan Mari Berpikir Kritis berikut.

Mari Berpikir Kritis

Diberikan sebuah segitiga POR seperti pada gambar di bawah. Titik Q berada di sisi PR sedemikian sehingga $PQ : QR = m : n$. Misalkan $\mathbf{p}$ adalah $\overrightarrow{OP}$, $\mathbf{q}$ adalah $\overrightarrow{OQ}$, dan $\mathbf{r}$ adalah $\overrightarrow{OR}$.

Pada kegiatan berikut, kamu akan mencari keterkaitan antara tiga buah vektor: **p, q,** dan **r**.



Gambar 4.27 Segitiga *POR*

1. Nyatakan vektor $\overrightarrow{PR}$ ke dalam vektor $\mathbf{p}$ dan vektor $\mathbf{r}$.
2. Nyatakan vektor $\overrightarrow{PQ}$ ke dalam vektor $\overrightarrow{PR}$.
3. Gunakan hasil pada langkah ke-1 dan ke-2 untuk menyatakan vektor $\overrightarrow{PQ}$ ke dalam vektor $\mathbf{p}$ dan vektor $\mathbf{r}$.
4. Nyatakan vektor $\mathbf{q}$ ke dalam vektor $\mathbf{p}$ dan vektor $\overrightarrow{PQ}$ untuk menunjukkan bahwa $\mathbf{q} = \dfrac{m\mathbf{r} + n\mathbf{p}}{m+n}$.
5. Jika $P(x_1, y_1)$ dan $R(x_2, y_2)$, tentukan koordinat titik Q.

Untuk mengasah kemampuan kamu dalam membuktikan beberapa properti geometri dengan menggunakan vektor, coba selesaikan latihan berikut!

Latihan C Pembuktian Geometris

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

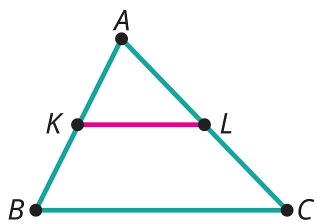
Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1 dan 2.

1. Jika $\overrightarrow{PQ} = \langle -3, -1 \rangle$ dan $\overrightarrow{PR} = \langle 1, -3 \rangle$, maka segitiga PQR adalah segitiga siku-siku.
2. Kedua diagonal layang-layang saling membagi dua sama panjang.

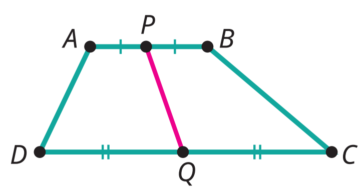
Penerapan Konsep

3. Pada gambar segitiga ABC di samping, titik K adalah titik tengah dari AB dan titik L adalah titik tengah dari AC.

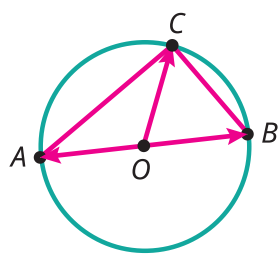


   a. Nyatakan $\overrightarrow{KL}$ dalam $\overrightarrow{KA}$ dan $\overrightarrow{LA}$.
   b. Nyatakan $\overrightarrow{BC}$ dalam $\overrightarrow{KA}$ dan $\overrightarrow{LA}$.
   c. Buktikan bahwa $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   d. Jelaskan mengapa $\overrightarrow{KL}$ dan $\overrightarrow{BC}$ sejajar.
4. Buktikan bahwa dua diagonal dari sebuah persegi saling tegak lurus dan saling membagi dua sama panjang.
5. Perhatikan gambar trapesium $ABCD$ di samping!

   Buktikan bahwa $AD + BC = 2PQ$.



6. Perhatikan gambar lingkaran di samping!



   a. Nyatakan $\overrightarrow{OA}$ dalam $\overrightarrow{OB}$.
   b. Nyatakan $\overrightarrow{BC}$ dan $\overrightarrow{AC}$ dalam $\overrightarrow{OB}$ dan $\overrightarrow{OC}$.
   c. Buktikan bahwa sudut ACB siku-siku.

Ringkasan

Kamu dapat membaca ringkasan setiap bab dengan memindai kode respons cepat di samping.

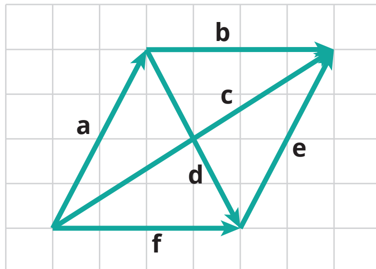
Pindai

Uji Kompetensi Bab 4

Kerjakanlah soal-soal uji kompetensi berikut ini dengan benar!

Pemahaman

Berdasarkan gambar di samping, tentukan apakah pernyataan pada nomor 1 dan 2 *Benar* atau *Salah*.



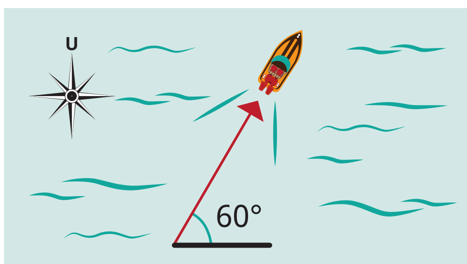
1. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} - \mathbf{a} = -\mathbf{d}$
3. Suatu vektor $\mathbf{v}$ memiliki titik pangkal $A(-2, -2)$ dan titik ujung $B(4, 5)$. Tulislah vektor tersebut dalam bentuk komponen dan dalam vektor-vektor satuan baku $\mathbf{i}$ dan $\mathbf{j}$.
4. Untuk vektor $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ dan vektor $\mathbf{v} = \mathbf{j} - \mathbf{i}$, tentukan:

   a. $-\frac{3}{4}\mathbf{v}$ b. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ c. $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$
5. Tentukan panjang vektor-vektor pada bidang berikut.

   a. $\mathbf{v} = \langle -3, 5 \rangle$ b. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
6. Carilah vektor satuan yang searah dengan vektor $\mathbf{v}$ berikut.

   a. $\mathbf{v} = \langle 4, -1 \rangle$ b. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
7. Tentukan besar sudut di antara vektor $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$ dan vektor $\mathbf{v} = \langle 1, 2 \rangle$.
8. Tentukan proyeksi skalar dan proyeksi vektor $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$ ke $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

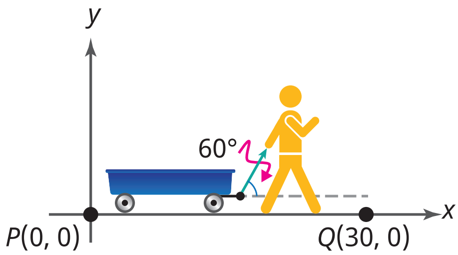
Penerapan



9. **Kecepatan kapal.** Sebuah sungai mengalir ke arah timur dengan kecepatan 5 m/s. Pada sungai ini, sebuah kapal akan menyeberang dari sisi selatan ke sisi utara sungai

dengan sudut 60° (perhatikan gambar di bawah) dan kecepatan 10 m/s. Tentukan kecepatan dan arah sebenarnya dari kapal tersebut.

10. **Menarik gerobak.** Seorang anak menarik sebuah gerobak sehingga dia menghasilkan gaya sebesar 80 N pada talinya. Jika tali tersebut membentuk sudut 60° terhadap garis horizontal, tentukan usaha yang dilakukan untuk memindahkan gerobak tersebut sejauh 30 meter.



11. **Diagonal belah ketupat.** Buktikan bahwa diagonal dari sebuah belah ketupat saling tegak lurus.

Penalaran

12. Tunjukkan bahwa vektor **w** = ‖**v**‖ **u** + ‖**u**‖ **v** membagi sudut di antara vektor **u** dan vektor **v** menjadi dua bagian yang sama besar.

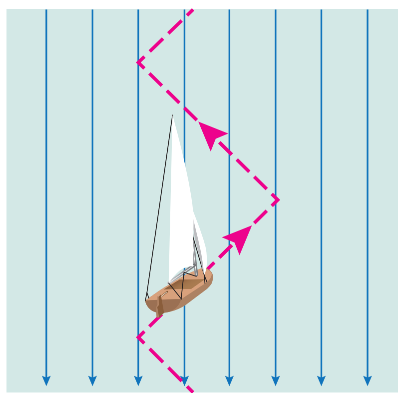
13. Perhatikan vektor **u** = $\langle \cos\alpha, \sin\alpha, 0\rangle$ dan vektor **v** = $\langle \cos\beta, \sin\beta, 0\rangle$, dengan $\alpha > \beta$. Tentukan hasil kali titik kedua vektor tersebut untuk menunjukkan identitas trigonometri berikut.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

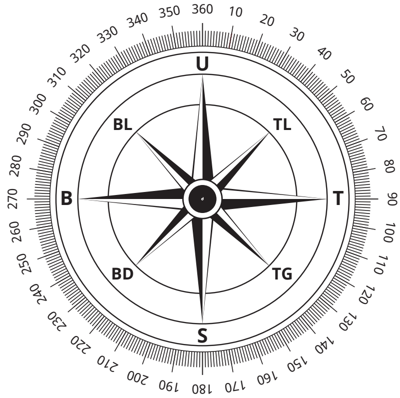
14. Diberikan jajargenjang $ABCD$. Misalkan P adalah titik tengah dari AB dan Q adalah titik potong dari AC dan DP. Buktikan bahwa $AQ = \frac{1}{3}AC$.

Proyek

Apakah mungkin seseorang berlayar melawan arah angin? Tentu saja pelayar tersebut tidak akan bisa mengarahkan kapalnya secara langsung ke arah datangnya angin. Meskipun demikian, ia masih bisa mengarahkan kapalnya berlayar dengan sudut tertentu dari arah datangnya angin. Dengan demikian, kapal tersebut dapat dibuat berlayar secara zig-zag untuk menuju arah datangnya angin. Supaya lebih jelas, perhatikan gambar di samping!



Gambar 4.28 Kapal berlayar zig-zag untuk melawan angin.

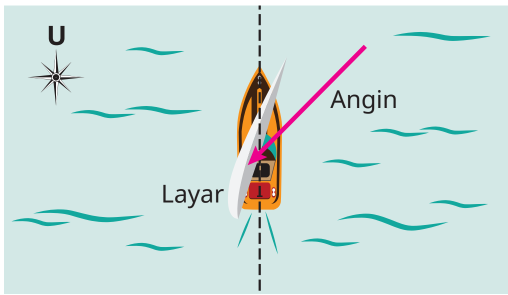


Gambar 4.29 Arah Mata Angin dan Besar Sudutnya

(Sebelum masuk ke permasalahan berikutnya, kamu perlu mengenal besar-besar sudut yang bersesuaian dengan setiap arah mata angin. Besar sudut yang bersesuaian dengan arah utara, timur laut, timur, tenggara, selatan, barat daya, barat, dan barat laut secara berturut-turut adalah 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, dan 315° [*lihat* Gambar 4.29]. Dengan kata lain, besarnya sudut untuk setiap arah mata angin diukur searah jarum jam dan dimulai dari arah utara.)

Sekarang kita akan menjawab pertanyaan berikut: *Bagaimanakah kita mengatur arah layar agar sebuah kapal dapat berlayar ke arah datangnya angin?* Untuk menjawab pertanyaan ini, kita dapat memodelkan gaya yang ditimbulkan oleh angin dalam bentuk vektor.

Misalkan sebuah kapal mengarah ke utara (0°) dan layarnya diatur pada arah 20° dari utara. Angin dari arah timur laut (45°) menerpa kapal tersebut dengan gaya **F**.



Gambar 4.30 Angin menerpa kapal dengan gaya **F**.

Berdasarkan informasi tersebut, kerjakan setiap persoalan berikut.

1. Tunjukkan bahwa gaya efektif yang diberikan oleh angin ke layar adalah $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \sin 25°$.
2. Jika badan kapal mengarah ke utara, tentukan berapa bagian dari **F** yang betul-betul mendorong kapal tersebut bergerak maju. Hanya proyeksi vektor $\mathbf{F}_1$ pada vektor yang searah dengan badan kapal yang mendorong kapal tersebut ke depan.
3. Sebuah kapal mengarah ke utara dan memiliki layar dengan arah α. Jika angin dari arah β menerpa layar tersebut (dengan $0 < \alpha < \beta < 180°$), tentukan sebuah rumus yang dapat digunakan untuk menentukan besarnya gaya yang mendorong kapal tersebut ke depan.

Pengayaan

Kamu telah mempelajari vektor pada bab ini. Untuk memperkaya atau memperdalam pengetahuan dan keterampilan yang dimiliki, kamu dapat mempelajari "Vektor dalam Ruang" melalui tautan *https://s.id/PengayaanBab4Vektor* atau dengan memindai kode respons cepat di samping.

Pindai

Refleksi

Kamu dapat mengingat kembali pengalaman ketika mempelajari "Bab 4 Vektor" ini. Selanjutnya, refleksikan pengalaman belajar kamu tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut!

1. Ceritakan sejauh mana manfaat yang dirasakan setelah kamu berdinamika pada bab ini!
2. Apa saja strategi belajar yang kamu gunakan untuk memahami bab ini? Apakah semua strateginya sudah membantu kamu untuk belajar secara optimal?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024
Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-335-1

Bab 5
TRANSFORMASI GEOMETRI

Apakah kamu pernah memikirkan bagaimana proses desain batik atau ornamen geometris di istana kerajaan ataupun di masjid bersejarah?

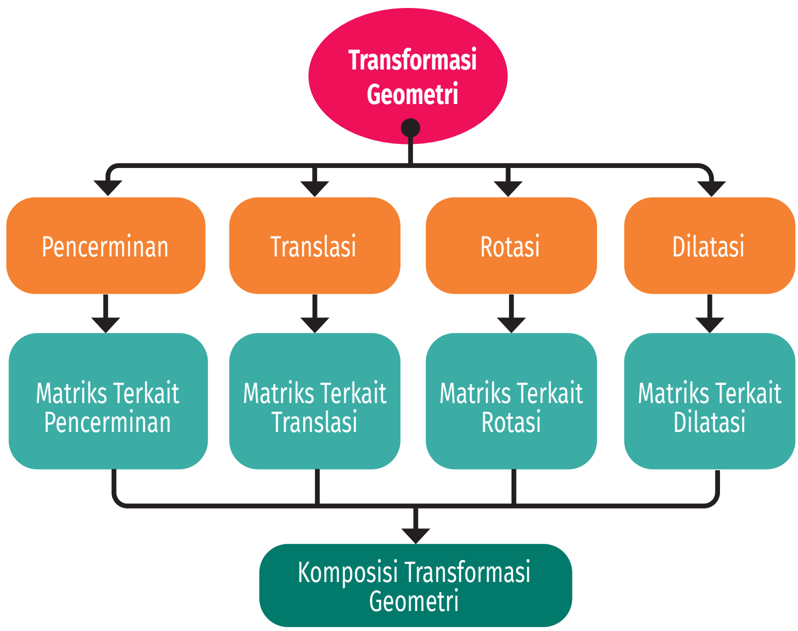
Sumber: donoem (2017)

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- menjelaskan definisi dari beberapa transformasi;
- melakukan berbagai transformasi geometri terhadap bermacam bentuk geometri;
- mengidentifikasi komposisi transformasi geometri;
- menggunakan komposisi transformasi geometri;
- mendeskripsikan transformasi menggunakan koordinat Kartesius dan matriks;
- mengoperasikan komposisi transformasi geometri dengan bantuan matriks yang merepresentasikan transformasi; dan
- menerapkan transformasi geometri dalam permasalahan nyata.

Peta Materi

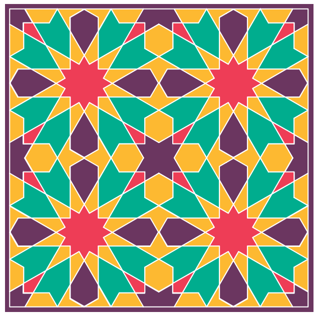


Kata Kunci

transformasi, pencerminan, translasi, rotasi, dilatasi, dan komposisi transformasi.

Transformasi Geometri dan Budaya

Transformasi geometri merupakan bagian dari matematika yang memiliki kaitan dengan budaya, arsitektur, dan banyak hal lain. Salah satunya ialah penerapan konsep transformasi geometri dalam desain arsitektur istana kerajaan dan dinding masjid.



Gambar 5.1 Pola Geometris

Sumber: Muhammad Taqiyuddin/ Facebook

Kekayaan arsitektur dan desain ini dapat dijumpai, misalnya, di situs istana-istana kerajaan Islam di Spanyol. Selain itu, di Indonesia, terdapat warisan budaya yang sampai sekarang masih dipertahankan. Warisan budaya tersebut menggunakan konsep transformasi geometri. Salah satu contoh yang paling dikenal ialah motif batik. Motif-motif batik umumnya berulang dan merupakan hasil dari komposisi berbagai transformasi dari bentuk-bentuk sederhana. Selain motif dalam dua dimensi seperti batik, kita juga memiliki warisan budaya berupa candi-candi, baik candi Hindu maupun candi Buddha, yang banyak ditemukan di Indonesia. Beberapa desain arsitektur yang terdapat pada candi dapat dipandang telah menerapkan konsep transformasi dalam tiga dimensi.

Di dalam bab ini, kita akan belajar lebih dalam tentang konsep transformasi dimulai dengan contoh sederhana sampai menggunakan matematika yang lebih canggih. Kita akan menggunakan geometri, aljabar, dan matriks untuk mempelajari konsep-konsep transformasi geometri.

A. Transformasi pada Bidang Kartesius

Pada fase D, kamu telah belajar macam-macam transformasi yang meliputi pencerminan, translasi, rotasi, dan dilatasi. Pada subbab ini, kita akan melanjutkan materi tersebut lebih jauh dan dalam.

1. Pencerminan terhadap Garis

Materi pencerminan (refleksi) sering kali dibahas dalam kerangka pembicaraan bidang Kartesius. Pada fase D, pencerminan titik A terhadap garis l didefinisikan sebagai sebuah operasi geometris yang memenuhi kondisi berikut.

- Titik A dicerminkan terhadap garis l menghasilkan bayangan B maka garis l tersebut tegak lurus terhadap ruas garis AB dan membagi ruas garis tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang.
- Untuk selanjutnya, garis l disebut *garis refleksi*.

Pada fase D, titik A disebut sebagai *titik awal* dan titik B disebut sebagai *bayangan*. Jika kita memandang operasi pencerminan sebagai sebuah relasi yang memetakan sebuah titik ke titik lain, maka kita juga dapat menyebut titik A sebagai *prapeta* dan titik B sebagai *peta*.

Secara lebih formal, operasi geometris yang bernama *pencerminan* ini juga dapat dipandang sebagai sebuah fungsi dua peubah yang memetakan dari dan ke bidang Kartesius, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Selanjutnya, kita akan menggunakan ψ_l untuk melambangkan fungsi pencerminan terhadap garis l. Fungsi $\psi_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (lambang ψ dibaca "psi") dapat dikatakan sebagai pencerminan jika memenuhi kondisi berikut.

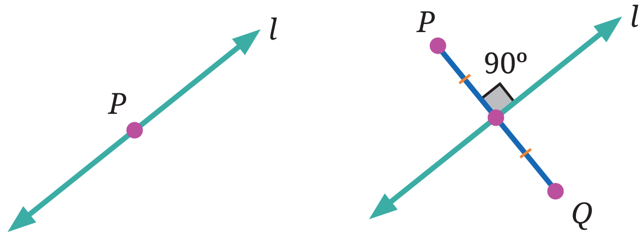
Definisi 5.1 **Pencerminan sebagai Fungsi**

Pencerminan ψ untuk sebuah titik $P(x, y)$ pada bidang Kartesius terhadap garis l, yang dinotasikan sebagai ψ_l, adalah sebuah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\Psi_l(P(x,y)) = \begin{cases} P(x,y), \text{ jika } P(x,y) \text{ terletak di } l \\ Q(x',y'), \text{ jika } P(x,y) \text{ tidak terletak di } l \\ \qquad\qquad \text{dan } l \text{ merupakan garis sumbu dari segmen } \overline{PQ} \end{cases}$$

Catatan: garis sumbu dari segmen $\overline{PQ}$ adalah garis yang tegak lurus dengan dan membagi dua segmen $\overline{PQ}$ sama panjang.

Mari, kita membedah Definisi 5.1 dengan ilustrasi pada Gambar 5.2. Gambar sebelah kiri menjelaskan bahwa bayangan dari titik yang terletak pada garis refleksi adalah dirinya sendiri. Jika titik asal tidak berada pada garis, maka titik asal dan bayangannya akan membentuk sebuah ruas garis yang tegak lurus dengan dan terbagi dua oleh garis refleksi, seperti pada gambar sebelah kanan.



Gambar 5.2 Ilustrasi Pencerminan terhadap Garis

Ingatlah bahwa kamu telah mempelajari beberapa jenis pencerminan di bidang Kartesius di kelas IX, yakni pencerminan terhadap sumbu-x, sumbu-y, garis $y = x$, garis $y = -x$, garis $x = k$, dan garis $y = h$. Selanjutnya, kamu akan belajar tentang pencerminan terhadap garis yang persamaannya memiliki bentuk aljabar $y = mx + c$ dan $ax + by + c = 0$.

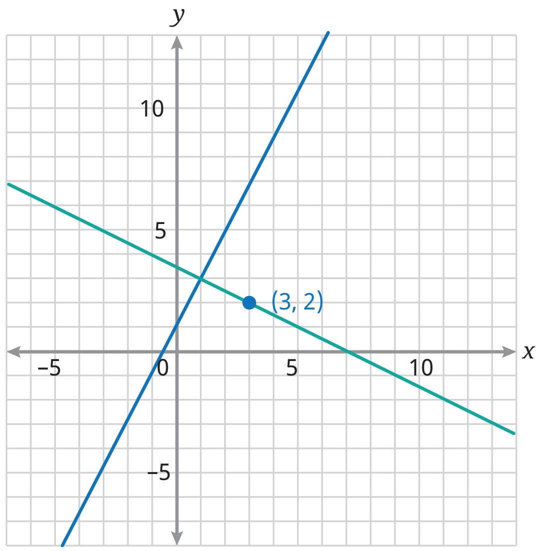
Mari, perhatikan Contoh 5.1 sebagai gambaran cara mencari bayangan dari sebuah pencerminan terhadap suatu garis yang diberikan persamaannya.

Contoh 5.1 Peta dari Pencerminan terhadap Garis

Tentukan bayangan dari titik (3, 2) yang dicerminkan terhadap garis $y = 2x + 1$.

Alternatif penyelesaian:

Kita akan mencoba menggunakan tiga langkah berikut untuk menemukan bayangan dari titik (3, 2) yang dicerminkan terhadap garis $y = 2x + 1$.



Gambar 5.3 Pencerminan terhadap Garis $y = 2x + 1$

Langkah 1: Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $y = 2x + 1$ dan melalui titik (3, 2).

Perhatikan Gambar 5.3. Misalkan garis yang kita inginkan adalah garis hijau, maka garis ini memiliki gradien $-\frac{1}{2}$ (*Ingat kembali materi kelas VIII tentang hubungan gradien dua garis yang tegak lurus*). Dengan demikian, garis hijau dengan gradien $-\frac{1}{2}$ dan melalui titik (3, 2) memiliki persamaan $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

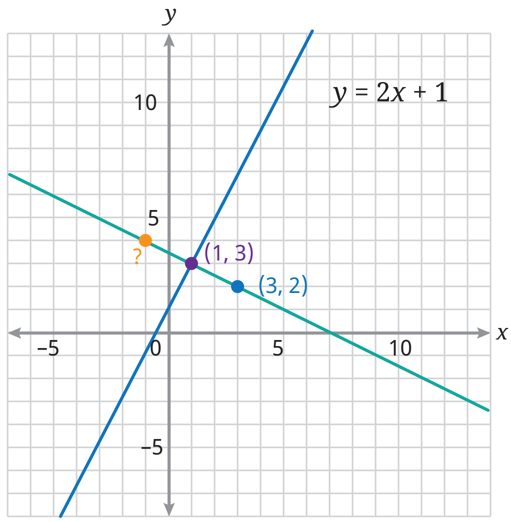
Langkah 2: Tentukan titik potong antara garis hijau $\left(y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)$ dan garis biru ($y = 2x + 1$).

Ordinat dari titik potong dapat dicari dengan uraian berikut.

$$-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} = 2x + 1 \Longleftrightarrow -x + 7 = 4x + 2 \Leftrightarrow -5x = -5 \Leftrightarrow x = 1$$

Maka, absis dari titik potong adalah $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Jadi, titik potongnya adalah (1, 3).

Langkah 3: Tentukan titik bayangan.



Gambar 5.4 Pencerminan terhadap Garis $y = 2x + 1$

Pada gambar di atas, kamu dapat mengamati bahwa titik potong merupakan titik tengah antara titik asal dan bayangan. Artinya, misal bayangan adalah (x, y), secara aljabar dapat ditulis:

$$(1, 3) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right) \Leftrightarrow x = -1 \text{ dan } y = 4$$

Berdasarkan langkah-langkah di atas, kita memperoleh bayangan (–1, 4).

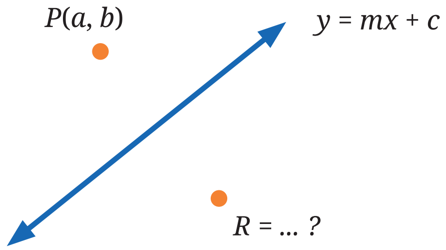
Mari Mencoba 5.1

Tentukan bayangan dari titik (5, 1) yang dicerminkan terhadap garis $y = 2x + 1$.

Kita akan mencoba perumum hasil pada Contoh 5.1. Pada eksplorasi berikut, kita akan mencari sebuah rumus umum untuk menentukan peta dari sebuah titik yang dicerminkan terhadap garis dengan persamaan $y = mx + c$. Kamu harus menguasai materi persamaan garis lurus yang telah dipelajari di kelas VIII.

Eksplorasi Mencari Peta dari Pencerminan terhadap Garis $y = mx + c$

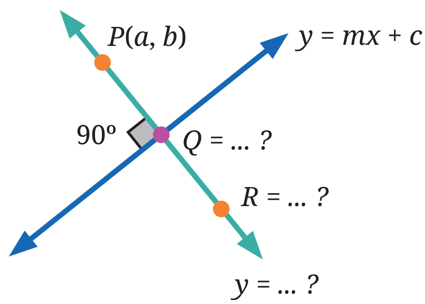
Sebuah garis dengan persamaan $y = mx + c$ secara geometris dapat dipahami sebagai garis yang memiliki kemiringan atau gradien sebesar m dan memiliki titik potong terhadap sumbu-y dengan titik $(0, c)$. Kita akan menyelesaikan beberapa langkah untuk menemukan peta dari sembarang titik $P(a, b)$ terhadap garis tersebut. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 5.5 Ilustrasi Garis $y = mx + c$

Langkah 1: Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $y = mx + c$ dan melalui titik $P(a, b)$.

a. Misalkan titik peta dari P yang dicerminkan terhadap garis biru adalah titik R. Berdasarkan Definisi 5.1, maka R dan P dapat membentuk garis hijau $\overleftrightarrow{PR}$ yang tegak lurus dengan garis biru. Tentukan gradien dari garis tersebut.



Gambar 5.6 Pencerminan terhadap Garis $y = mx + c$

b. Sekarang, kamu sudah memperoleh gradien dari garis hijau. Ingatlah bahwa garis ini melalui titik $P(a, b)$. Tentukan persamaan garis hijau.

Langkah 2: Tentukan titik potong antara dua garis yang tegak lurus tadi.

Setelah memperoleh persamaan garis hijau, kira-kira bagaimana caranya menentukan titik potong antara garis biru dan garis hijau (titik Q)? Tentukan koordinat dari titik Q.

Langkah 3: Tentukan titik peta.

a. Perhatikan ketiga titik P, Q, dan R. Titik Q adalah titik tengah dari P dan R. Tuliskan persamaan yang menggambarkan keterkaitan ketiga titik tersebut.

b. Dari keterkaitan tersebut, coba tentukan koordinat dari titik R.

Apa simpulan kamu dari semua kegiatan di atas?

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita telah mempelajari langkah demi langkah untuk mencerminkan sebuah titik terhadap sembarang garis dengan persamaan $y = mx + c$. Kita dapat menuliskan hasil eksplorasi dalam sifat berikut.

Sifat 5.1 **Pencerminan terhadap Garis $y = mx + c$**

Peta atau bayangan dari titik $P(a, b)$ yang dicerminkan terhadap garis dengan persamaan $y = mx + c$ adalah titik R dengan koordinat sebagai berikut.

$$\left(2\left(\frac{a+m(b-c)}{m^2+1}\right)-a, 2m\left(\frac{a+m(b-c)}{m^2+1}\right)+2c-b\right)$$

Untuk penulisan yang lebih ringkas, kita bisa memisalkan $d=\frac{a+m(b-c)}{m^2+1}$.

Dengan demikian, kita dapat menuliskan titik R sebagai berikut.

$$(2d - a, 2md + 2c - b)$$

Jika kita ingin menemukan rumus umum untuk pencerminan terhadap garis $y = mx$, kita dapat melakukan substitusi nilai $c = 0$ pada Sifat 5.1. Dengan demikian, kita memperoleh bahwa peta dari titik $P(a, b)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = mx$ adalah titik R dengan koordinat berikut.

$$\boxed{\left(2\left(\frac{a+mb}{m^2+1}\right)-a, 2m\left(\frac{a+mb}{m^2+1}\right)-b\right)}$$

Untuk memahami lebih lanjut hasil eksplorasi dan Sifat 5.1, kita coba perhatikan contoh dan beberapa alternatif penyelesaian berikut. Selanjutnya, kamu dapat mengasah kemampuan dengan menyelesaikan Mari Mencoba.

Contoh 5.2 Peta dari Pencerminan terhadap Garis

Tentukan bayangan dari titik (11, 4) yang dicerminkan terhadap garis $y = 3x + 1$.

Alternatif penyelesaian:

- Titik asal: (11, 4) maka $a = 11$ dan $b = 4$
- Persamaan garis: $y = 3x + 1$ maka $m = 3$ dan $c = 1$

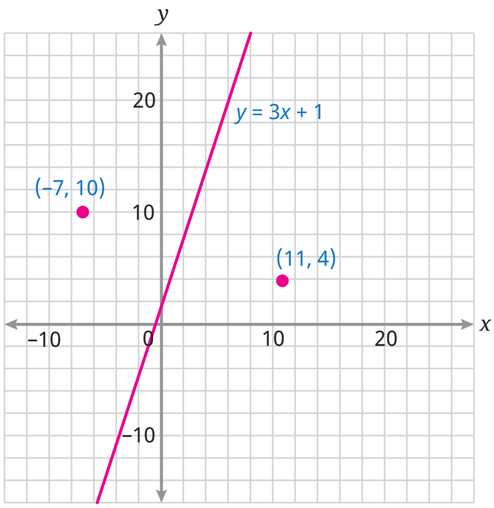
Berdasarkan Sifat 5.1, kita akan menghitung d dengan rumus:

$$d = \frac{a + m(b - c)}{m^2 + 1} = \frac{11 + 3(4 - 1)}{3^2 + 1} = 2$$

Sehingga, bayangannya dapat ditentukan dengan

$$(2d - a, 2md + 2c - b) = (2 \cdot 2 - 11, 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 4) = (-7, 10)$$

Artinya, bayangan dari titik (11, 4) yang dicerminkan terhadap garis $y = 3x + 1$ adalah (–7, 10). Agar lebih jelas secara visual, kamu dapat memperhatikan gambar berikut.



Gambar 5.7 Garis $y = 3x + 1$

Mari Mencoba 5.2

Tentukan bayangan dari titik (–3, 12) yang dicerminkan terhadap garis $y = 3x + 1$.

Dengan cara yang serupa, kamu juga dapat mencari sendiri formula untuk pencerminan terhadap sembarang garis dengan persamaan $ax + by + c = 0$. Coba kamu selesaikan kegiatan berikut!

Mari Berpikir Kritis

Buktikan bahwa pencerminan terhadap garis $ax + by + c = 0$ memetakan sembarang titik (x_0, y_0) ke

$$\left(x_0 - \frac{2a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2},\ y_0 - \frac{2b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\right)$$

Untuk memahami penerapan rumus di atas, coba kita menyimak contoh dan alternatif penyelesaian berikut.

Contoh 5.3 Peta dari Pencerminan terhadap Garis

Tentukan bayangan dari titik (3, 2) yang dicerminkan terhadap garis $2x - y + 1 = 0$.

Alternatif penyelesaian:

- Titik asal: (3, 2) maka $x_0 = 3$ dan $y_0 = 2$
- Persamaan garis: $2x - y + 1$ maka $a = 2$, $b = -1$, dan $c = 1$

Misalkan titik bayangannya adalah (x', y') maka berdasarkan Mari Berpikir Kritis, kita mendapatkan hasil berikut.

$$x' = x_0 - \frac{2a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} = 3 - \frac{2 \cdot 2(2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 1)}{2^2 + (-1)^2} = -1$$

$$y' = y_0 - \frac{2b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} = 2 - \frac{2 \cdot (-1)(2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 1)}{2^2 + (-1)^2} = 4$$

Jadi, bayangan dari titik (3, 2) yang dicerminkan terhadap garis $2x - y + 1 = 0$ adalah (–1, 4).

Mari Mencoba 5.3

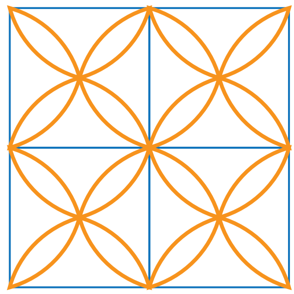
Tentukan bayangan dari titik (–2, 2) yang dicerminkan terhadap garis $2x - y + 1 = 0$.

Seperti yang sudah dipaparkan pada awal bab ini, transformasi sangat erat dengan budaya. Salah satunya, desain batik dapat dianalisis dan disimulasikan dengan konsep pencerminan. Ikuti kegiatan berikut untuk memahaminya lebih lanjut!

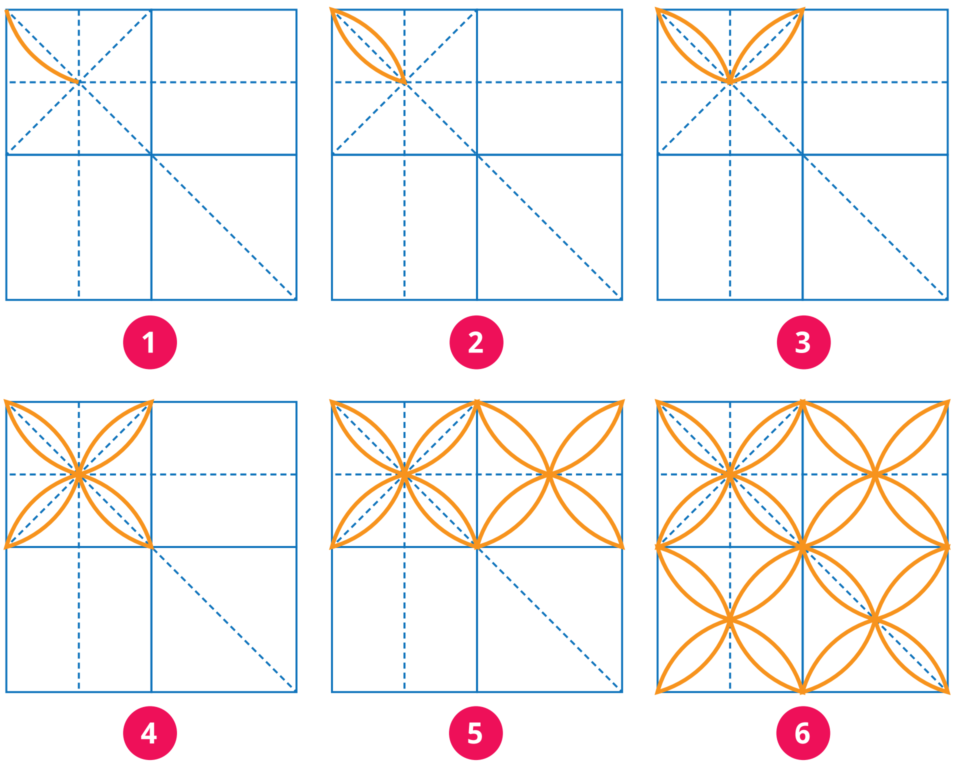
Matematika dalam Budaya Desain Batik Kawung

Salah satu motif batik yang populer adalah motif kawung. Jika kita mengkreasi sendiri berdasarkan bentuk dasarnya, kita dapat menggambarkan motif kawung seperti gambar di samping.

Jika kita menganalisis dan mencari bentuk dasarnya, kita bisa mendapatkan bentuk busur seperti pada ilustrasi 1 Gambar 5.9. Selanjutnya, dengan melakukan serangkaian pencerminan terhadap beberapa garis seperti yang tampak pada ilustrasi 1—6, kamu akan mendapatkan motif kawung seperti yang tampak pada ilustrasi 6 Gambar 5.9.



Gambar 5.8 Motif Kawung



Gambar 5.9 Analisis Motif Kawung

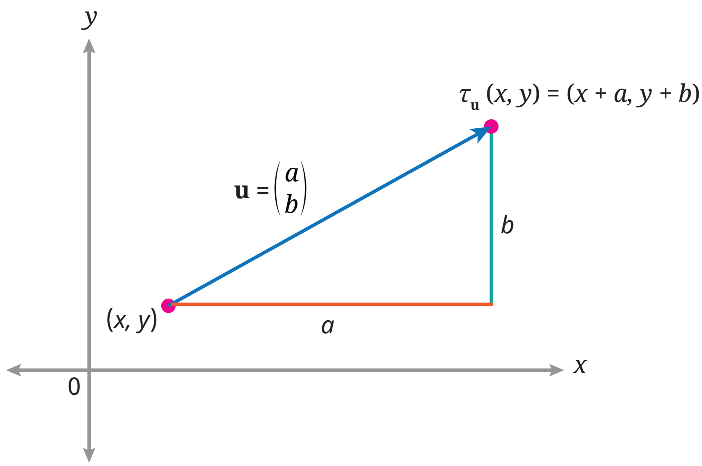
2. Translasi

Translasi disebut pula pergeseran. Transformasi ini tidak mengubah orientasi dan kekongruenan bentuk geometri. Translasi hanya menggeser suatu bentuk geometri dari suatu posisi ke posisi lain. Seperti halnya pencerminan, translasi dapat dipandang sebagai fungsi dua peubah dari dan ke bidang Kartesius, $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (lambang τ dibaca "tau"). Di bidang Kartesius, kita dapat mendefinisikan translasi sebagai berikut.

Definisi 5.2 **Translasi**

Diberikan sebuah vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Translasi berkaitan dengan vektor **u**, yang dinotasikan sebagai $\tau_{\mathbf{u}}$, untuk sembarang titik (x, y) didefinisikan sebagai $\tau_{\mathbf{u}}(x, y) = (x + a, y + b)$.

Kamu dapat membayangkan representasi definisi translasi dalam bidang Kartesius dengan memperhatikan gambar berikut.



Gambar 5.10 Ilustrasi Translasi

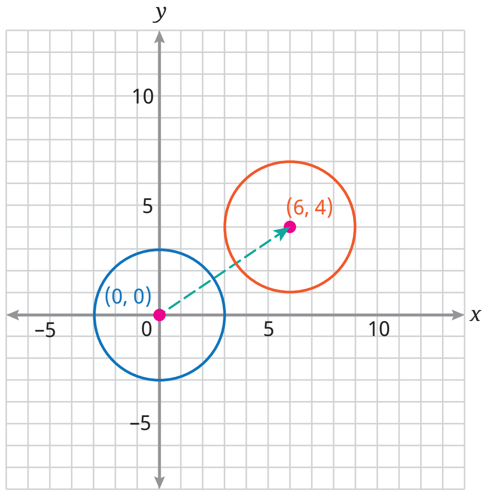
Di kelas IX, kamu telah mempelajari translasi untuk titik, bidang datar, dan garis. Kita juga dapat mentranslasikan bentuk geometris lainnya seperti lingkaran.

Contoh 5.4 Mentranslasikan Sebuah Lingkaran

Tentukan peta dari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 9$ yang ditranslasikan dengan vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Alternatif penyelesaian 1:

Pada Gambar 5.11, setiap titik (x, y) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, dipetakan ke $(x', y') = (x + 6, y + 4)$. Artinya, kita dapat menyatakan x dalam x' dan y dalam y' sebagai $x = x' - 6$ dan $y = y' + 4$. Dengan demikian, persamaan lingkaran bayangan adalah $(x' - 6)^2 + (y' - 4)^2 = 9$.



Gambar 5.11 Translasi Lingkaran

Alternatif penyelesaian 2:

Persamaan $x^2 + y^2 = 9$ merepresentasikan lingkaran dengan jari-jari 3 dan titik pusat (0, 0). Karena translasi bersifat tidak mengubah bentuk geometris dan hanya menggesernya, maka lingkaran bayangan akan tetap menjadi lingkaran dengan jari-jari 3. Namun, titik pusatnya akan bergeser dari (0, 0) ke (6, 4). Dengan demikian, persamaan lingkaran bayangan adalah $(x' - 6)^2 + (y' - 4)^2 = 9$.

Mari Mencoba 5.4

Tentukan peta dari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 25$ yang ditranslasikan dengan vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mari Berpikir Kritis

Dapatkah kamu menentukan peta dari sembarang persamaan $y = f(x)$ yang ditranslasikan oleh sembarang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

3. Rotasi

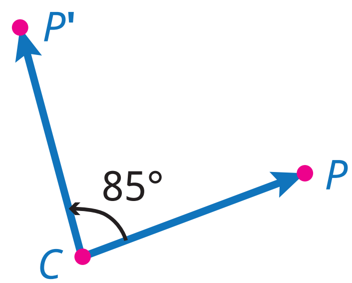
Pada fase D kamu telah mempelajari dasar dari konsep rotasi. Rotasi memiliki dua komponen penting, yakni *pusat rotasi* dan *sudut rotasi*. Kali ini, kita akan mencoba mendefinisikan rotasi secara lebih formal.

Definisi 5.3 **Rotasi**

Diketahui titik C dan sudut berarah θ (dibaca "teta"). Rotasi dengan titik pusat C sebesar θ, yang dinotasikan dengan $\rho_{c,\theta}$ (lambang ρ dibaca "rho"), didefinisikan sebagai sebuah transformasi yang memetakan titik C ke dirinya sendiri dan memetakan sembarang titik lain P ke titik P' sedemikian sehingga dua kondisi terpenuhi, antara lain:

- $CP = CP'$
- θ merupakan ukuran dari sudut berarah yang terbentuk dari sinar $\overrightarrow{CP}$ dan $\overrightarrow{CP'}$.

Untuk memahami definisi tersebut, perhatikan Gambar 5.12 yang mengilustrasikan $\rho_{c,85°}(P) = P'$. Titik P yang dirotasikan terhadap titik c sebesar 85° yang menghasilkan titik P'. Titik c disebut sebagai *pusat rotasi,* sedangkan 85° merupakan *sudut rotasi.*



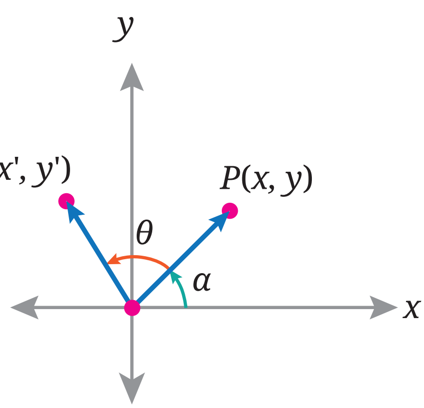
Gambar 5.12 Rotasi 85°

Pada fase D kamu telah mempelajari beberapa kasus khusus dari rotasi terhadap titik pusat (0, 0) yang melibatkan sudut-sudut khusus: 90°, 180°, 270°, –90°, –180° dan –270°. Kali ini, kita akan mencoba menemukan rumus umum untuk rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ pada bidang Kartesius.

Pada Gambar 5.13 terdapat sembarang titik $P\ (x, y)$ dan sudut rotasi θ. Misalkan sudut yang terbentuk dari $\overrightarrow{OP}$ dan sumbu-x adalah α, maka absis dan ordinat dari $P(x, y)$ dapat dinyatakan:

$$\boxed{x = r \cdot \cos \alpha \text{ dan } y = r \cdot \sin \alpha}$$

Selanjutnya, kita misalkan peta dari rotasi sebagai titik $P'(x', y')$. Dengan demikian, kita mendapatkan persamaan-persamaan berikut.



Gambar 5.13 Ilustrasi Rotasi

$$
\begin{aligned}
x' &= r \cdot \cos(\alpha + \theta) \\
&= r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\
&= (r \cdot \cos\alpha)\cos\theta - (r \cdot \sin\alpha)\sin\theta \\
&= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
y' &= r \cdot \sin(\alpha + \theta) \\
&= r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) \\
&= (r \cdot \sin\alpha)\cos\theta + (r \cdot \cos\alpha)\sin\theta \\
&= y \cdot \cos\theta + x \cdot \sin\theta \\
&= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta
\end{aligned}
$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, kita memperoleh rumus umum untuk menentukan peta dari sebuah titik yang dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan sudut rotasi θ. Perhatikan Sifat 5.2 berikut!

Sifat 5.2 **Rotasi terhadap Titik Pusat $O(0, 0)$ Sebesar θ**

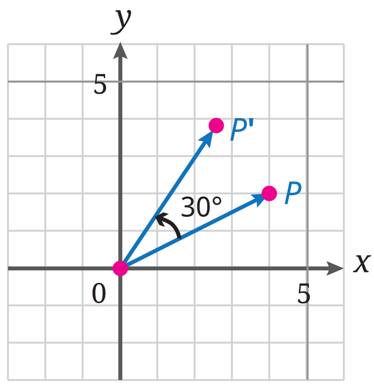
Peta dari titik (x, y) yang dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sebesar θ adalah $(x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta, x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta)$.

Mari kita mencoba rumus di atas untuk menyelesaikan beberapa permasalahan rotasi. Coba simak contoh berikut!

Contoh 5.5 Merotasikan Sebuah Titik

Tentukan peta dari titik $P(4, 2)$ yang dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sebesar 30°.

Alternatif penyelesaian:



Gambar 5.14 Rotasi 30°

Perhatikan gambar di atas! Misalkan petanya adalah $P'(x', y')$. Berikut ini penentuan koordinat titik P' berdasarkan Sifat 5.2.

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ &= 4 \cdot \cos 30° - 2 \cdot \sin 30° \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \\ &= 4 \cdot \sin 30° + 2 \cdot \cos 30° \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Jadi, petanya adalah titik $P'(2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3})$.

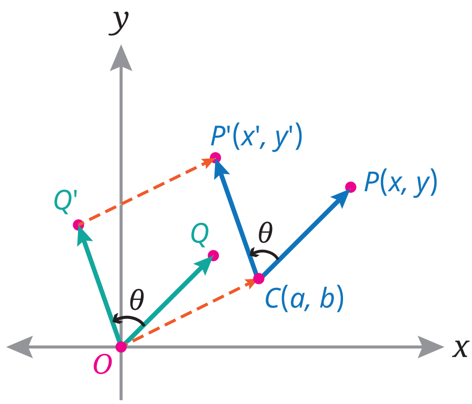
Mari Mencoba 5.5

Titik $A(3\sqrt{3}, \sqrt{3})$ dirotasikan terhadap titik asal $O(0, 0)$ sebesar 30°. Tentukan titik petanya.

Setelah mengetahui rumus rotasi dengan titik pusat, selanjutnya kita akan mengeksplorasi cara untuk menentukan hasil rotasi terhadap titik yang bukan titik pusat.

Eksplorasi **Rotasi terhadap Sembarang Titik**

Untuk menemukan peta dari rotasi yang dilakukan terhadap sembarang titik (termasuk yang bukan titik pusat), kita akan memanfaatkan Sifat 5.2 dan translasi. Kita misalkan pusat rotasi $C(a, b)$ dan sudut rotasi θ. Kita akan mencoba mencari peta dari sembarang titik $P(x, y)$ yang dirotasikan oleh $\rho_{C,\theta}$ (rotasi yang berpusat di C sebesar θ).



Gambar 5.15 Rotasi Sembarang Titik

Dengan memperhatikan Gambar 5.15, mari kita mengikuti ketiga langkah berikut untuk membantu menemukan $P' = \rho_{c,\theta}(P)$.

Langkah 1: Translasikan dengan vektor $\overrightarrow{CO}$.

Ingat bahwa translasi tidak mengubah bentuk dan orientasi dari objek geometris. Dengan menggunakan translasi oleh vektor $\overrightarrow{CO}$, kita mengubah permasalahan awal ke permasalahan rotasi dengan titik pusat di $O(0, 0)$. Untuk mendapatkan hasil yang diinginkan, pada tahap akhir, kita akan mengembalikan penyelesaiannya ke permasalahan awal dengan mentranslasikan kembali dengan kebalikan dari vektor $\overrightarrow{CO}$ yakni vektor $\overrightarrow{OC}$.

a. Tentukan vektor $\overrightarrow{CO}$.

b. Translasikan titik $P(x, y)$ dengan vektor $\overrightarrow{CO}$.

Langkah 2: Rotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$.

Misalkan titik hasil translasi dari Langkah 1 adalah Q. Apa hasil rotasi titik Q dengan titik pusat rotasi di $O(0, 0)$ sebesar θ?

Langkah 3: Translasikan dengan vektor $\overrightarrow{OC}$.

Misalkan hasil rotasi di Langkah 2 adalah Q'.

a. Tentukan vektor $\overrightarrow{OC}$.

b. Translasikan Q' dengan vektor $\overrightarrow{OC}$.

Apa simpulan kamu dari semua kegiatan di atas?

Berdasarkan eksplorasi di atas, kita menemukan rumus umum untuk menentukan peta dari rotasi terhadap sembarang titik sebagai berikut.

Sifat 5.3 Rotasi terhadap Titik Pusat Rotasi $P(a, b)$ Sebesar θ

Peta dari titik (x, y) yang dirotasikan terhadap titik pusat $P(a, b)$ sebesar θ adalah sebagai berikut.

$$((x-a)\cdot\cos\theta-(y-b)\cdot\sin\theta+a,(x-a)\cdot\sin\theta+(y-b)\cdot\cos\theta+b)$$

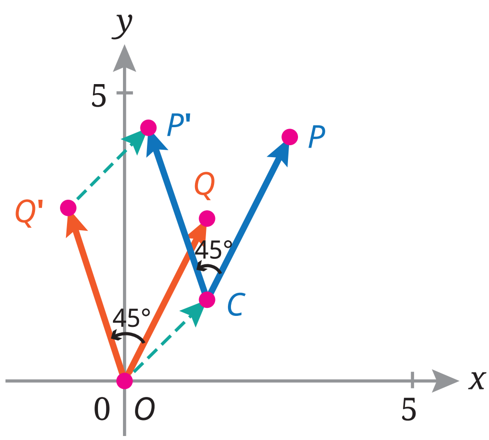
Untuk lebih memahami eksplorasi dan Sifat 5.3, mari kita menyimak Contoh 5.6, kemudian menyelesaikan Mari Mencoba 5.6 berikut!

Contoh 5.6 Merotasikan Sebuah Titik

Tentukan peta dari titik $P(2\sqrt{2},3\sqrt{2})$ yang dirotasikan terhadap titik pusat C $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ sebesar 45°.

Alternatif penyelesaian 1:

Kita akan mencoba menyelesaikan dengan mengikuti ketiga langkah pada eksplorasi sebelumnya. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 5.16 Rotasi 45°

Langkah 1: Translasikan dengan vektor $\overrightarrow{CO}$.

$P(2\sqrt{2},3\sqrt{2})$ ditranslasikan oleh vektor $\overrightarrow{CO}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ menjadi $Q(\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

Langkah 2: Rotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$.

Berdasarkan Sifat 5.2, titik $Q(\sqrt{2},2\sqrt{2})$ dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sebesar 45° menjadi Q' dengan ordinat dan absis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ &= \sqrt{2} \cdot \cos 45° - 2\sqrt{2} \cdot \sin 45° \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= -1 \\ y' &= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin 45° + 2\sqrt{2} \cdot \cos 45° \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Langkah 3: Translasikan dengan vektor $\overrightarrow{OC}$.

Titik $Q'(-1, 3)$ ditranslasikan dengan vektor $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ menjadi $P'(-1+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$.

Berdasarkan ketiga langkah di atas, kita mendapatkan peta dari titik $P(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ yang dirotasikan terhadap titik pusat $C(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sebesar 45° adalah $P'(-1+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$.

Alternatif penyelesaian 2:

- Titik asal: $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ maka $x = 2\sqrt{2}$ dan $y = 3\sqrt{2}$
- Titik pusat rotasi: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ maka $a = \sqrt{2}$ dan $b = \sqrt{2}$

Dengan menggunakan Sifat 5.3 maka petanya adalah $P'(x', y')$ dengan absis dan ordinat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x' &= (x-a) \cdot \cos\theta - (y-b) \cdot \sin\theta + a \\ &= (2\sqrt{2}-\sqrt{2}) \cdot \cos 45° - (3\sqrt{2}-\sqrt{2}) \cdot \sin 45° + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= -1+\sqrt{2} \\ y' &= (x-a) \cdot \sin\theta + (y-b) \cdot \cos\theta + b \\ &= (2\sqrt{2}-\sqrt{2}) \cdot \sin 45° + (3\sqrt{2}-\sqrt{2}) \cdot \cos 45° + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= 3+\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, petanya adalah $P'(-1+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$.

Mari Mencoba 5.6

Titik $A(4\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ dirotasikan terhadap titik asal $C(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ sebesar 30°. Tentukan titik petanya.

---

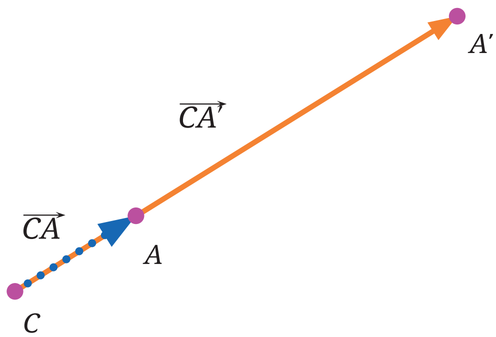
4. Dilatasi

Secara sederhana, dilatasi dapat dimaknai sebagai pembesaran. Pada fase D, kamu telah mempelajari beberapa kasus dilatasi termasuk dilatasi terhadap titik pusat dan sembarang titik. Di sini, kita akan mencoba mendefinisikan dilatasi pada bidang Kartesius untuk sembarang titik. Seperti halnya transformasi lain pada bab ini, dilatasi di sini dianggap sebagai fungsi dari dan ke bidang Kartesius.

Definisi 5.4 **Dilatasi**

Dilatasi yang berpusat di titik C dengan faktor skala $k \neq 0$ dinotasikan sebagai $D_{C,k}$. Jika sembarang titik A didilatasikan dengan $D_{C,k}$, maka akan menghasilkan A yang memenuhi $\overrightarrow{CA'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$.

Gambar berikut mengilustrasikan Definisi 5.4. Vektor $\overrightarrow{CA}$ dan vektor $\overrightarrow{CA'}$ memiliki arah yang sama, tetapi panjangnya berbeda.



Gambar 5.17 Ilustrasi Dilatasi

Untuk memahami Definisi 5.4 dalam konteks permasalahan pada bidang Kartesius, coba kamu mengamati Contoh 5.7, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 5.7 berikut!

Contoh 5.7 Mendilatasikan Sebuah Titik

Diberikan titik $C(-1, -2)$, titik $A(1, 2)$, dan $k = 3$. Tentukan $D_{C,k}(A)$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $A'(x', y') = D_{C,k}(A)$. Berdasarkan Definisi 5.4, maka $\overrightarrow{CA'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$. Dengan demikian, kita memperoleh persamaan berikut.

$$\overrightarrow{CA'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\begin{pmatrix} x' - (-1) \\ y' - (-2) \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 2 - (-2) \end{pmatrix}$$

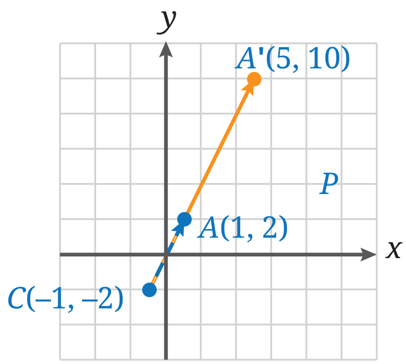
$$\begin{pmatrix} x' - (-1) \\ y' - (-2) \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' - (-1) \\ y' - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Maka

$x' = 5$ dan $y' = 10$

Jadi, $D_{C,k}(A) = A'(5, 10)$.



Gambar 5.18 Dilatasi Titik *A* yang Berpusat di Titik *C*

Gambar 5.18 menunjukkan dilatasi yang telah dilakukan.

Mari Mencoba 5.7

Diberikan titik $C(1, 2)$, titik $A(3, 5)$, dan $k = 4$. Tentukan $D_{C,k}(A)$.

Berdasarkan Definisi 5.4, contoh soal, dan alternatif penyelesaian di atas, kita menemukan rumus umum dilatasi berikut.

Sifat 5.4 Dilatasi terhadap Titik Pusat *C* Sebesar *k*

Jika diberikan titik pusat $C(a, b)$ dan faktor skala $k \neq 0$, maka

$$D_{c,k}(P(x, y)) = P'(k(x - a) + a, k(y - b) + b)$$

Jika kita ingin menemukan rumus dilatasi untuk titik pusat $O(0, 0)$, kita dapat mensubstitusikan nilai $a = 0$ dan $b = 0$ pada Sifat 5.4 sehingga diperoleh $D_{O,k}(P(x, y)) = P'(kx, ky)$.

Kita akan mencoba menerapkan rumus tersebut untuk menyelidiki apa yang terjadi jika sebuah lingkaran didilatasi. Perhatikan Contoh 5.8 dan alternatif penyelesaiannya, kemudian coba kerjakan Mari Mencoba 5.8 berikut!

Contoh 5.8 Mendilatasikan Sebuah Lingkaran

Diberikan sembarang lingkaran L: $x^2 + y^2 = r^2$, titik pusat $C(a, b)$, dan faktor skala $k \neq 0$.

1. Tentukan peta dari lingkaran L yang didilatasikan oleh $D_{C,k}$.
2. Misalkan peta dari lingkaran L adalah L'. Tentukan perbandingan berikut:
   a. antara jari-jari L dan jari-jari L'
   b. antara luas L dan luas L'

Alternatif penyelesaian:

1. Misalkan $A(x, y)$ sembarang titik di L dan $A'(x', y') = D_{C,k}(A)$. Berdasarkan Sifat 5.4, kita dapat memperoleh kedua persamaan berikut.

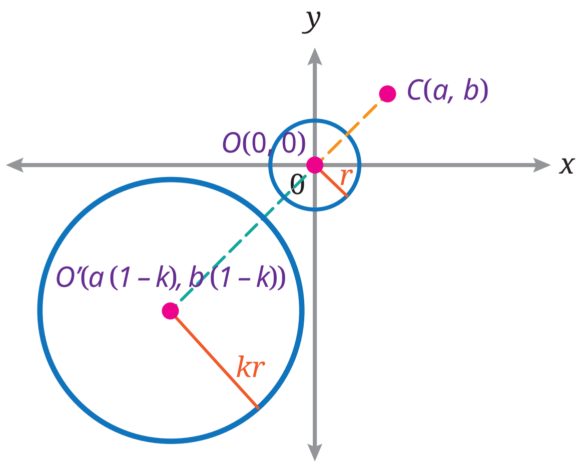
$$x' = k(x - a) + a \Leftrightarrow x = \frac{x' - a(1-k)}{k}$$

$$y' = k(y - b) + b \Leftrightarrow y = \frac{y' - b(1-k)}{k}$$

Substitusikan hasil di atas ke persamaan lingkaran L sehingga kita mendapatkan persamaan baru untuk peta dari lingkaran L yang didilatasikan oleh $D_{C,k}$ sebagai berikut.

$$L': (x' - a(1-k))^2 + (y' - b(1-k))^2 = (kr)^2$$

Berdasarkan persamaan tersebut, kita dapat mengilustrasikan dilatasi sebagaimana pada gambar berikut.



Gambar 5.19 Dilatasi Lingkaran

2. Secara geometris, kita dapat memaknai bahwa lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan berjari-jari r didilatasikan oleh $D_{C,k}$ menjadi lingkaran yang berpusat di $O(a\,(1 - k), b\,(1 - k))$ dengan jari-jari kr.

   a. Perbandingan jari-jari L dan jari-jari L' adalah $1{:}k$.
   b. Perbandingan luas L dan luas L' adalah $1{:}k^2$.

Mari Mencoba 5.8

Diberikan sembarang lingkaran L: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, titik pusat $C(a, b)$, dan faktor skala $k \neq 0$.

1. Tentukan peta dari lingkaran L yang didilatasikan oleh $D_{C,k}$.
2. Misalkan peta dari lingkaran L adalah L'. Tentukan perbandingan berikut:
   a. antara jari-jari L dan jari-jari L'
   b. antara luas L dan luas L'

Berdasarkan Contoh 5.8, silakan kamu mengikuti kegiatan berikut!

Mari Berpikir Kritis

Coba selidiki apa yang berubah pada peta dari bentuk geometris berikut jika didilatasikan dengan titik pusat $C(a, b)$ dan faktor skala $k \neq 0$.

1. Garis dengan persamaan $y = mx + c$.
2. Persegi dengan luas r^2.

Latihan A Transformasi pada Bidang Kartesius

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Transformasi dilatasi dengan faktor bukan 1 atau –1 mempertahankan kekongruenan bentuk geometris seperti segitiga dan persegi.

2. Peta dari (x, y) yang ditranslasikan dengan vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ adalah $(x + 2, y - 3)$.

3. Prapeta dari $(x + 3, y - 5)$ hasil translasi oleh vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah $(x + 5, y - 8)$.

Penerapan Konsep

4. Tentukan peta dari transformasi geometri berikut.
   a. Titik $\left(4, \frac{9}{2}\right)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = 3x$.
   b. Titik (3, 5) yang dicerminkan terhadap garis $2x + 3y + 5 = 0$.
   c. Segitiga ABC dengan $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, dan $C(-2, -3)$ yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   d. Garis $3x - 2y + 5 = 0$ yang ditransformasi oleh rotasi 180° terhadap titik asal (0, 0).
   e. Lingkaran L: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ yang didilatasikan dengan titik pusat $C(2, 3)$ dan faktor skala 3.

B. Kaitan Matriks dengan Transformasi

Setelah mempelajari beberapa transformasi geometri dalam bidang Kartesius pada subbab sebelumnya dan pada fase D, kali ini kita akan mempelajari kaitan matriks dengan transformasi. Matriks 2 × 2 dapat dikaitkan dengan operasi transformasi terhadap sembarang titik pada bidang Kartesius. Sebuah titik pada bidang Kartesius yang sering kali disimbolkan dengan pasangan terurut (x, y) dapat juga disimbolkan dengan vektor posisi $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Notasi kedua inilah yang akan digunakan dalam bab ini.

Contoh 5.9 Mengalikan Sebuah Matriks dengan Sebuah Vektor Posisi

Jika $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ merepresentasikan sembarang titik pada bidang Kartesius, carilah hasil kali dari $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Alternatif penyelesaian:

Hasil kali matriks tersebut adalah $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$. Jika diperhatikan, titik (x, y) ditransformasikan oleh matriks $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ menjadi titik $(-y, x)$.

Mari Mencoba 5.9

Carilah hasil kali dari $\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

Contoh 5.10 Mengalikan Sebuah Matriks dengan Tiga Titik Sekaligus

Carilah peta dari ΔABC dengan titik $A(1, 1)$, titik $B(4, 1)$, dan titik $C(4, 2)$ yang ditransformasikan dengan matriks $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$.

Alternatif penyelesaian:

Pertama-tama, kita dapat menuliskan koordinat ketiga titik sebagai kolom-kolom matriks, yakni $\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Selanjutnya, kalikan $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ dengan matriks tersebut.

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -4\\-1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

Jadi, petanya adalah segitiga baru $A'B'C'$ dengan titik-titik sudut $A'(-1, -1)$, $B'(-4, -1)$, dan $C'(-4, -2)$.

Mari Mencoba 5.10

Carilah peta dari suatu segitiga dengan titik sudut $A(2, 0)$, $B(2, 1)$, dan $C(0, 1)$ yang ditransformasikan dengan matriks $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$.

---

1. Matriks yang Berkaitan dengan Pencerminan

Carilah matriks 2 × 2 yang merupakan representasi matriks dari berbagai pencerminan. Pada fase D, kita telah menemukan beberapa formula aljabar untuk mencari peta dari pencerminan terhadap beberapa garis. Pada kegiatan eksplorasi berikut, kita akan mempelajari cara menemukan matriks-matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis.

Eksplorasi **Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Pencerminan**

Pada fase D, kamu telah belajar tentang pencerminan terhadap sumbu-x pada bidang Kartesius. Pada bagian ini, kamu akan belajar cara menemukan matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu-x. Pertama-tama, ingat kembali bahwa titik (x, y) dipetakan ke titik $(x, –y)$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x. Selanjutnya, ikuti kedua instruksi berikut untuk menemukan matriks yang diinginkan.

1. Misalkan matriks yang ingin kita cari adalah $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. Untuk mencari peta dari transformasi yang terkait dengan matriks ini, kalikan matriks dengan sembarang titik (x, y) dalam bentuk vektor posisi seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Kamu telah memisalkan matriks $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ sebagai representasi dari pencerminan terhadap sumbu-x. Artinya, kita mengetahui bahwa hasil akhirnya adalah $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$. Selanjutnya, berdasarkan hasil yang diperoleh pada bagian 1, selesaikan persamaan berikut dengan mencari nilai dari r, s, t, dan u.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

3. Dengan cara yang serupa, carilah matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu-y, garis $y = x$, dan garis $y = –x$.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita menemukan tiga sifat berikut ini.

Sifat 5.5 **Matriks Pencerminan (Refleksi)**

- Matriks pencerminan terhadap sumbu-x adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- Matriks pencerminan terhadap sumbu-y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Untuk lebih memahami Sifat 5.5, perhatikan beberapa contoh berikut, kemudian selesaikan soal-soal pada Mari Mencoba!

Contoh 5.11 Mencari Peta dari Sebuah Pencerminan dengan Matriks

Carilah peta dari (3, –4) yang dicerminkan terhadap sumbu-x.

Alternatif penyelesaian:

Berdasarkan Sifat 5.5, kita peroleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jadi, petanya adalah (3, 4).

Mari Mencoba 5.11

Carilah peta dari titik (3, 5) yang dicerminkan terhadap sumbu-x menggunakan perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Contoh 5.12 Mencari Peta dari Sebuah Pencerminan dengan Matriks

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan titik A(3, 1), titik B(–2, 3), dan titik C(2, –1) yang dicerminkan terhadap sumbu-y.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan matriks transformasi, kita peroleh

peta titik A atau A': $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

peta titik B atau B': $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

peta titik C atau C': $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Jadi, petanya adalah segitiga $A'B'C'$ dengan $A'(-3, 1)$, $B'(2, 3)$, dan $C'(-2, -1)$.

Mari Mencoba 5.12

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan titik $A(3, 1)$, titik $B(-2, 3)$, dan titik $C(2, -1)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = -x$.

Mari Berpikir Kritis

Dapatkah kamu menemukan operasi matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis dengan persamaan berikut?

1. $x = k$
2. $y = h$
3. $y = mx$
4. $y = mx + c$
5. $ax + by + c = 0$

Apakah kamu dapat menemukan matriks tersebut menggunakan cara yang sama dengan kegiatan "Eksplorasi: Mencari matriks yang Berkaitan dengan Pencerminan"? Carilah operasi matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $x = k$ dan $y = h$ berdasarkan materi pada kelas IX.

Petunjuk:

Operasi matriks yang terkait dengan kedua transformasi tersebut memiliki bentuk berikut.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

Kamu dapat mencoba mencari nilai dari r, s, t, u, v, dan w.

2. Matriks yang Berkaitan dengan Translasi

Pada bagian ini, kita akan mempelajari cara menemukan dan mengaplikasikan matriks yang terkait dengan translasi.

Eksplorasi Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Translasi

Pada subbab sebelumnya, kita telah belajar tentang translasi pada bidang Kartesius. Pada bagian ini, kita akan mempelajari cara menemukan operasi matriks yang berkaitan dengan operasi translasi. Kamu dapat mengerjakan instruksi berikut.

Ubahlah bentuk vektor $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$ menjadi operasi dari dua buah vektor sedemikian rupa sehingga vektor posisi titik (x, y) terpisah.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita mendapatkan sifat berikut.

Sifat 5.6 Operasi Matriks Terkait Translasi

Operasi matriks yang terkait dengan translasi oleh vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ terhadap titik (x, y) adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Catatan: vektor translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ juga dapat ditulis $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Contoh 5.13 Mencari Peta dari Sebuah Translasi dengan Bantuan Matriks

Tentukan peta dari titik (–2, 3) yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ menggunakan operasi matriks.

Alternatif penyelesaian:

Petanya dapat ditentukan dengan perhitungan berikut.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Jadi, petanya adalah (–5, 7).

Mari Mencoba 5.13

Tentukan peta dari titik (4, –5) yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ menggunakan operasi matriks.

3. Matriks yang Berkaitan dengan Rotasi

Pada bagian ini, kita akan belajar untuk menemukan matriks yang terkait dengan rotasi terhadap titik pusat. Untuk itu, kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Mencari Matriks Rotasi terhadap Titik Asal (0, 0) Sebesar θ**

Pada subbab sebelumnya, kamu telah belajar tentang rotasi yang dilakukan pada bidang Kartesius. Pada bagian ini, kita akan mempelajari cara menemukan matriks yang berkaitan dengan operasi rotasi. Ikuti penjelasan dan instruksi berikut.

Misalkan matriks yang dicari adalah $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. Berdasarkan subbab sebelumnya, peta dari titik (x, y) yang dirotasikan terhadap titik asal (0, 0) sebesar θ adalah $(x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta, x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$. Oleh karena itu, carilah nilai r, s, t, dan u sedemikian rupa sehingga memenuhi $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita mendapatkan sifat berikut.

Sifat 5.7 **Matriks Rotasi terhadap Titik Asal (0, 0)**

Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar θ radian terhadap titik pusat $O(0, 0)$ adalah $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Dengan cara yang serupa seperti eksplorasi sebelumnya dan dengan memanfaatkan Sifat 5.3, kita dapat menemukan matriks untuk rotasi terhadap sembarang titik sebagai berikut.

Sifat 5.8 **Operasi Matriks Terkait Rotasi terhadap Sembarang Titik**

Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar θ radian terhadap titik (a, b) adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Contoh 5.14 Mencari Peta dari Sebuah Rotasi dengan Bantuan Matriks

Tentukan matriks yang terkait dengan rotasi sebesar $\theta = \frac{1}{4}\pi$ radian terhadap titik pusat $O(0, 0)$.

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{4}\pi & -\sin\frac{1}{4}\pi \\ \sin\frac{1}{4}\pi & \cos\frac{1}{4}\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Mari Mencoba 5.14

Tentukan matriks yang berkaitan dengan rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sebesar $\frac{1}{6}\pi$ radian.

4. Matriks yang Berkaitan dengan Dilatasi

Pada bagian ini, kita akan mencari matriks yang terkait dengan transformasi dilatasi. Kita akan menggunakan pengetahuan tentang dilatasi yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya.

Eksplorasi **Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Dilatasi**

Pada subbab sebelumnya, kita telah belajar tentang dilatasi pada bidang Kartesius. Pada bagian ini, kita akan mempelajari cara menemukan matriks yang berkaitan dengan operasi dilatasi.

Ingat kembali bahwa titik (x, y) dipetakan oleh dilatasi dengan titik pusat O dan faktor skala $k \neq 0$ ke titik (kx, ky). Kamu dapat mengikuti instruksi berikut untuk menemukan matriks terkait.

1. Misalkan matriks yang ingin dicari adalah $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. Carilah nilai r, s, t, dan u sedemikian rupa sehingga memenuhi $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$.

   Ingat kembali bahwa titik (x, y) dipetakan oleh dilatasi dengan titik pusat (a, b) dan faktor skala $k \neq 0$ ke titik $(k(x - a) + a, k(y - b) + b)$. Kamu dapat mengikuti instruksi berikut untuk menemukan matriks terkait.

2. Temukan kombinasi operasi matriks terhadap vektor posisi $\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$ sehingga hasilnya menjadi $\begin{bmatrix} k(x-a)+a \\ k(y-b)+b \end{bmatrix}$. Gunakan hasil dari nomor 1 untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita dapat menemukan sifat berikut.

Sifat 5.9 **Matriks Dilatasi terhadap Titik Pusat**

Matriks dilatasi dengan titik pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala $k \neq 0$ adalah $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

Sifat 5.10 **Operasi Matriks terkait Dilatasi terhadap Sembarang Titik**

Matriks dilatasi dengan titik pusat (a, b) dan faktor skala $k \neq 0$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Contoh 5.15 Mencari Peta dari Sebuah Dilatasi dengan Bantuan Matriks

Tentukan peta dari titik (2, 4) yang ditransformasikan oleh dilatasi dengan titik pusat (1, 1) dan faktor skala 2.

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan Sifat 5.10, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Jadi, petanya adalah titik (3, 7).

Mari Mencoba 5.15

Carilah koordinat peta dari titik (a, b) oleh dilatasi $D_{O,3}$ (dilatasi dengan titik pusat O dan faktor skala 3).

Latihan B Kaitan Matriks dengan Transformasi

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Operasi matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sama dengan operasi perkalian skalar $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
2. Translasi dengan vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ terhadap titik (x, y) berkaitan dengan operasi matriks $\begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix}$.
3. Transformasi rotasi terhadap titik asal (0, 0) sebesar 180° terkait dengan matriks $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
4. Tuliskanlah matriks yang berkaitan dengan transformasi berikut.
   a. Identitas
   b. Pencerminan terhadap sumbu-x
   c. Pencerminan terhadap garis $y = x$
   d. Pencerminan terhadap garis $y = -x$
   e. Rotasi terhadap titik pusat O sebesar $\frac{1}{2}\pi$ (ekuivalen dengan 90°)
   f. Rotasi terhadap titik pusat O sebesar $-\frac{1}{2}\pi$ (ekuivalen dengan –90°)

Penerapan Konsep

5. Tentukan peta dari beberapa operasi transformasi berikut.
   a. Titik (3, 7) yang ditransformasikan dengan matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   b. Parabola $3x^2 - 2y + 5 = 0$ oleh transformasi dengan matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
   c. Segitiga ABC dengan titik $A(0, 2)$, titik $B(5, -1)$, dan titik $C(-7, -2)$ oleh transformasi dengan matriks $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.
   d. Garis $x - 2y + 3 = 0$ yang ditransformasikan oleh $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
   e. Kurva $y = 2x^3 - x^2 + 5x$ yang ditransformasikan oleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C. Komposisi Transformasi dengan Matriks

Pada subbab sebelumnya, kamu telah mendalami transformasi dan transformasi dengan matriks. Pada subbab kali ini, kamu akan mempelajari komposisi transformasi menggunakan matriks.

Kita akan membatasi pembahasan pada transformasi-transformasi yang dapat direpresentasikan dengan matriks berordo 2 × 2. Misalnya pencerminan terhadap sumbu-x dapat direpresentasikan oleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Dengan demikian, operasi matriks untuk menemukan peta dari titik (x, y) yang dicerminkan terhadap sumbu-x adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Untuk memahami cara menemukan operasi matriks yang terkait dengan komposisi transformasi, kerjakanlah eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Mengoperasikan Komposisi Transformasi dengan Matriks**

Misalkan kita memiliki dua buah transformasi T_1 dan T_2. Transformasi T_1 merupakan pencerminan terhadap sumbu-y, sedangkan transformasi T_2 merupakan rotasi terhadap titik pusat O sebesar $\frac{1}{2}\pi$ radian (90°).

1. Apabila kamu ingin melakukan komposisi transformasi untuk sembarang titik $P(x, y)$ yang dimulai dengan T_1 dan dilanjutkan dengan T_2 (dinotasikan $T_2 \circ T_1$), tentukan hasil transformasinya dengan dua cara berikut.
   a. Kalikan $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dengan matriks T_1, kemudian kalikan hasilnya dengan matriks T_2.
   b. Kalikan matriks T_2 dengan matriks T_1, kemudian kalikan hasilnya dengan $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
2. Bandingkan hasil perkalian pertama (a) dan kedua (b). Apakah keduanya sama? Apa kira-kira simpulanmu?
3. Secara umum, mengapa menyelesaikan perkalian matriks berikut dengan mengerjakan yang dilingkari terlebih dahulu, hasilnya sama saja?

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita memperoleh sifat berikut.

Sifat 5.11 **Matriks Komposisi Transformasi**

Misalkan matriks transformasi T_1 dan T_2 berturut-turut adalah $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}$. Dengan demikian, matriks komposisi transformasi $T_2 \circ T_1$ (transformasi T_1 dilanjutkan dengan T_2) adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

Contoh 5.16 Mencari Peta dari Komposisi Transformasi dengan Bantuan Matriks

Tentukan peta dari titik (2, 5) yang dicerminkan terhadap sumbu-x, kemudian dicerminkan terhadap sumbu-y.

Alternatif penyelesaian:

Berdasarkan Sifat 5.5:

- matriks pencerminan terhadap sumbu-x adalah $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- matriks pencerminan terhadap sumbu-y adalah $T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks komposisi pencerminan terhadap sumbu-x dilanjutkan pencerminan terhadap sumbu-y adalah

$$T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka, peta hasil pencerminan dapat dicari dengan

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jadi, petanya adalah titik (–2, –5).

Mari Mencoba 5.16

Tentukan peta dari titik (–2, 3) yang ditransformasikan oleh komposisi dari pencerminan sumbu-y yang dilanjutkan dengan rotasi 180° terhadap titik pusat O.

Contoh 5.17 Mencari Peta dari Komposisi Transformasi dengan Bantuan Matriks

Misalkan kamu ingin melakukan tiga transformasi pada titik $P(2, 5)$, yakni pencerminan terhadap sumbu-x, rotasi 90° terhadap titik pusat O, dan rotasi 180° terhadap titik pusat O. Tentukan petanya.

Alternatif penyelesaian:

Berdasarkan subbab sebelumnya, kita mengetahui bahwa matriks pencerminan terhadap sumbu-x, matriks rotasi 90° terhadap titik pusat O, dan matriks rotasi 180° terhadap titik pusat O berturut-turut adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Oleh karena itu, matriks komposisi transformasi tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan matriks komposisi, kita dapat menentukan peta dari $P(2, 5)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Jadi, petanya adalah $P'(-5, -2)$.

Mari Mencoba 5.17

Misalkan kita ingin melakukan tiga transformasi pada titik $P(2, 5)$, yakni pencerminan terhadap sumbu-y, rotasi 180° terhadap titik pusat O, dan pencerminan terhadap garis $y = x$. Tentukan petanya.

Mari Berpikir Kritis

1. Pada sifat sebelumnya, kita belum mengetahui apakah operasi perkalian yang melibatkan dua matriks komposisi dari dua transformasi adalah komutatif atau tidak. Selidikilah, kapan sifat komutatif berlaku benar.
2. Misalkan sebuah matriks M berordo 2 × 2, merepresentasikan suatu transformasi T pada bidang Kartesius. Tentukan matriks transformasi T yang diterapkan sebanyak 99 kali dan dinotasikan $\underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{99 \text{ kali}}$.

Aktivitas Interaktif

Lihatlah kembali fitur Matematika dalam Budaya berjudul “Desain Batik Kawung” pada Subbab A. Fitur ini memberikan bentuk interaktifnya. Sebelumnya, kamu dapat memindai kode respons cepat di samping atau membuka tautan *https://s.id/DesmosAnalisisMotifKawung*.

Coba kamu amati aktivitas di dalamnya. Transformasi apa saja yang terjadi di sana? Selidikilah apakah kamu dapat menyatakan komposisi transformasinya!

Pindai

Latihan C Komposisi Transformasi dengan Matriks

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—3.

1. Komposisi dari pencerminan terhadap garis $y = x$ dan pencerminan terhadap garis $y = -x$ ekuivalen dengan pencerminan terhadap sumbu-x.
2. Komposisi dari dua buah translasi adalah sebuah translasi.
3. Sebuah translasi dapat dinyatakan sebagai komposisi dari dua pencerminan.

Penerapan Konsep

4. Misalkan T_1 menyatakan operasi pencerminan terhadap sumbu-x dan T_2 menyatakan operasi pencerminan terhadap sumbu-y.
   a. Transformasi tunggal apakah yang ekuivalen dengan $T_2 \circ T_1$?
   b. Apa peta dari $P(a, b)$ dari transformasi tersebut?
5. Carilah matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu-y dilanjutkan dengan rotasi 180° terhadap titik pusat.

Ringkasan

Pindai

Kamu dapat membaca ringkasan setiap bab dengan memindai kode respons cepat di samping.

Uji Kompetensi Bab 5

Kerjakanlah soal-soal uji kompetensi berikut ini dengan benar!

Pemahaman

Tentukan apakah pernyataan nomor 1—5 berikut *Benar* atau *Salah*.

1. Dilatasi selalu mempertahankan jarak antara dua titik di prapeta dan hasil transformasinya.
2. Rotasi selalu memetakan segitiga menjadi segitiga dan petanya selalu kongruen dengan prapeta.
3. Peta dari (x, y) oleh pencerminan terhadap sumbu-x adalah $(-x, y)$.
4. $(-x, y)$ adalah peta dari titik $(-y, -x)$ yang dirotasikan sebesar 180° terhadap titik asal (0, 0).
5. Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar 45° terhadap titik pusat adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Lengkapilah pernyataan nomor 6—9 berikut dengan isian yang paling tepat.

6. Komposisi dari dua buah translasi adalah ....
7. Sebuah segitiga yang dicerminkan terhadap sumbu-y akan menjadi ....
8. Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar 270° terhadap titik pusat adalah ....
9. Matriks komposisi transformasi yang dimulai dengan rotasi sebesar 90° terhadap titik pusat dan dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x adalah ....

Penerapan

Lengkapilah pernyataan nomor 10—14 berikut dengan isian yang paling tepat.

10. Titik $M(2, -3)$ dicerminkan terhadap sumbu-x, kemudian dicerminkan terhadap sumbu-y akan menghasilkan bayangan M' = ...
11. Garis $2x + 3y = -6$ ditranslasikan dengan vektor $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan dilanjutkan dengan vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Bayangannya adalah ....
12. Titik $A(6, 4)$ dicerminkan terhadap garis $2x + y = 1$. Peta titik $A(6, 4)$ adalah ....
13. Lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ didilatasi oleh $D_{O,3}$. Luas bayangan lingkaran L sama dengan ... satuan luas. (Kinomatika 2014)
14. Bayangan titik $P(x, y)$ yang ditranslasi oleh vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ dilanjutkan dengan pencerminan terhadap $y = k$ ditentukan oleh persamaan matriks transformasi langsung berbentuk ....

Jawablah pertanyaan-pertanyaan pada soal nomor 15—25 dengan tepat.

15. Tentukan matriks-matriks yang berkaitan dengan rotasi terhadap O sebesar
    a. $\frac{1}{3}\pi$ radian
    b. $\frac{2}{3}\pi$ radian
16. Hitunglah perkalian matriks $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.
17. Tentukan peta dari transformasi geometri berikut.
    a. Garis $2x - 3y + 7 = 0$ ditransformasi oleh rotasi 180º terhadap titik asal (0, 0).
    b. Kurva $y = x^3 - 2x^2 - 4$ yang dicerminkan terhadap sumbu-y.
18. Tentukan peta dari titik (6, 5) jika dicerminkan terhadap garis $y = -x$, lalu dirotasikan sebesar 90°.
19. Tentukan peta dari titik $(x + 2, 3y)$ yang ditransformasikan dengan pencerminan terhadap sumbu-y dilanjutkan rotasi sebesar 180° terhadap titik pusat O.
20. Tentukan peta dari garis $2x + 3y - 5 = 0$ yang ditransformasikan dengan pencerminan terhadap garis $y = -x$ dilanjutkan dengan rotasi sebesar 180° terhadap titik pusat O.

21. Tentukan peta dari kurva $y = 2x^2 - 3x + 5$ yang ditransformasikan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$ dilanjutkan dengan rotasi sebesar 90° terhadap titik pusat O, kemudian ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Penalaran

22. Nyatakan persamaan sebuah parabola $y = 2x^2 - 12x + 19$ dalam bentuk $y = a(x - h)^2 + k$. Gunakan bentuk tersebut untuk menjelaskan bagaimana operasi-operasi transformasi dilakukan terhadap parabola $y = x^2$ sehingga menjadi $y = 2x^2 - 12x + 19$.
23. Buktikan dengan perkalian matriks bahwa operasi dilatasi $D_{O,2}$ (dilabeli dengan transformasi D) dan pencerminan terhadap sumbu-y (dilabeli dengan transformasi C) memenuhi $D \circ C = C \circ D$.
24. Jelaskan mengapa suatu dilatasi terhadap titik pusat selalu komutatif dengan transformasi yang dapat dinyatakan dengan matriks 2 × 2.
25. Buktikan bahwa pencerminan terhadap garis $ax + by + c = 0$ memetakan titik (x, y) ke $\left(x - \dfrac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2}, y - \dfrac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2}\right)$.

Proyek

Kamu dapat membaca proyek Bab 5 dengan memindai kode respons cepat di samping.

Pindai

Pengayaan

Matriks Pencerminan dan Vektor Searah Garis Refleksi

Kita telah belajar menemukan matriks yang terkait dengan beberapa pencerminan pada subbab B. Kali ini, kita akan mencoba menyelidiki cara menemukan matriks pencerminan yang garis refleksinya melalui titik pusat $O(0, 0)$. Akan tetapi, bukan persamaannya yang diketahui, melainkan vektor yang searah dengan garis refleksi. Mari, kita mencoba menyelesaikan sebuah kasus khusus, kemudian memperumum hasilnya.

1. Diketahui sebuah garis l melalui titik pusat $O(0, 0)$ dan vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ searah dengan garis l. Carilah matriks yang merepresentasikan pencerminan terhadap garis l menggunakan komponen dari vektor **u.**

2. Berdasarkan pengalaman pada soal 1, jika yang diketahui adalah vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ searah dengan garis k, carilah matriks yang merepresentasikan pencerminan terhadap garis k menggunakan komponen dari vektor **v**.

Ketika Komposisi Dua Pencerminan Menghasilkan Rotasi

Ikuti aktivitas interaktif berikut untuk menyelidiki bagaimana komposisi dua buah pencerminan yang dapat menghasilkan sebuah rotasi. Hal ini terjadi jika dua garis refleksi saling berpotongan. Kamu dapat memindai kode respons cepat di samping atau mengakses tautan *https://s.id/DesmosKomposisiDuaPencerminan.*

Pindai

Sumber Belajar

Geometri Transformasi yang ditulis oleh Rawuh. Buku ini dapat digunakan untuk mempelajari transformasi dengan pendekatan geometri Euclid.

Refleksi

Kamu dapat mengingat kembali pengalaman ketika mempelajari “Bab 5 Transformasi Geometri” ini. Selanjutnya, refleksikan pengalaman belajar kamu tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut!

1. Ceritakan sejauh mana manfaat yang dirasakan setelah kamu berdinamika pada bab ini!
2. Apa saja strategi belajar yang kamu gunakan untuk memahami bab ini? Apakah semua strateginya sudah membantu kamu untuk belajar secara optimal?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024
Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-335-1

Bab 6
FUNGSI DAN PEMODELANNYA

Apakah kita mampu memprediksi peristiwa di masa depan berdasarkan data-data riil dari sumber seperti Badan Pusat Statistik?

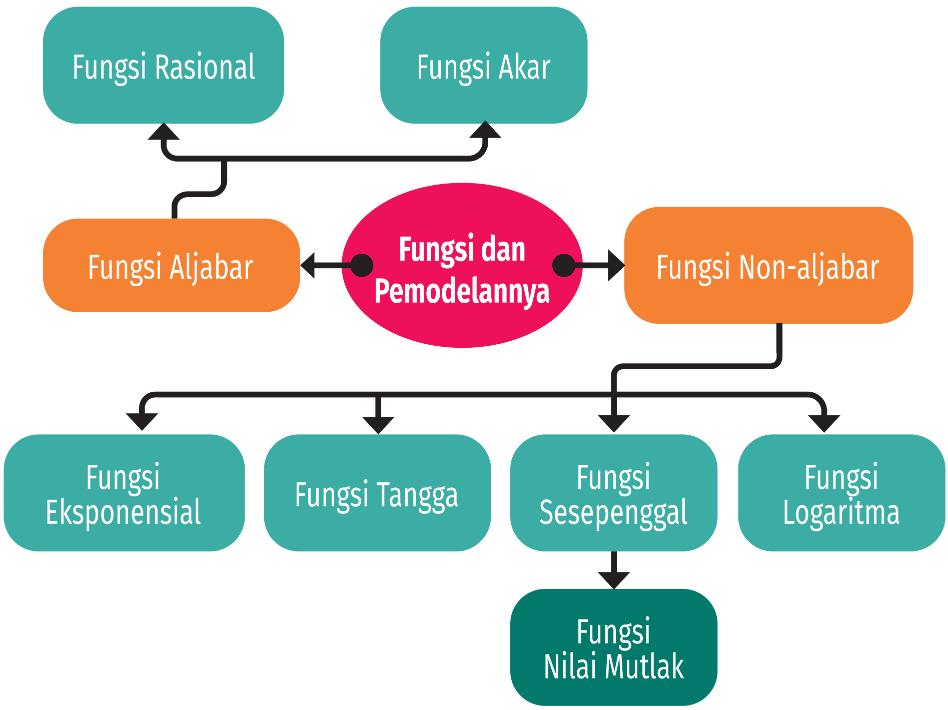
Sumber: UN Women/Ryan Brown/Flickr/CC BY-NC-ND 2.0 (2017)

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut:

- menentukan nilai fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non- aljabar, kemudian menganalisis karakteristik grafiknya.
- memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari menggunakan fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non-aljabar.

Peta Materi



Kata Kunci

fungsi aljabar, fungsi non-aljabar, fungsi rasional, fungsi akar, fungsi logaritma, fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi sesepenggal.

Memahami Dunia di Sekitar Kita

Pernahkah kamu membayangkan apa yang akan terjadi jika populasi penduduk pada suatu wilayah geografis tertentu selalu meningkat setiap tahun? Laju pertumbuhan penduduk yang sangat tinggi dalam waktu singkat akan mengakibatkan terjadinya *ledakan penduduk*. Peristiwa ledakan penduduk yang tidak diimbangi dengan kapasitas ekonomi memadai akan memberikan dampak buruk, seperti meningkatnya angka kriminalitas dan angka pengangguran.

Sebagai seorang pelajar, kamu dapat melakukan simulasi sederhana. Misalnya, kamu memodelkan populasi penduduk dalam beberapa tahun yang didata oleh Badan Pusat Statistik (BPS). Dari pemodelan ini, kamu dapat memprediksi populasi penduduk pada masa mendatang. Dengan mempertimbangkan prediksi tersebut, faktor geografis, dan faktor ekonomis, kamu dapat membuat rekomendasi langkah-langkah pencegahan terjadinya dampak buruk dari ledakan penduduk.

Banyak fenomena di sekitar yang dapat dimodelkan dengan fungsi yang akan kamu pelajari pada bab ini. Pemodelan tersebut dapat membantumu memahami dunia di sekitar kamu. Oleh karena itu, silakan mempelajari bab ini dengan penuh semangat.

A. Fungsi Logaritma

Mengapa kita harus selalu berada di rumah selama pandemi Covid-19?

Tepat tanggal 2 Maret 2020, Presiden Joko Widodo mengumumkan bahwa dua warga negara Indonesia terkonfirmasi terpapar Covid-19. Sejak saat itu, pembatasan kegiatan di luar rumah diberlakukan secara besar-besaran. Tujuannya menekan penyebaran virus Covid-19 yang berkembang pesat. Pemerintah mengimbau masyarakat untuk selalu menjaga jarak ketika berinteraksi dan menerapkan protokol kesehatan saat keluar rumah.

Gambar 6.1 Imbauan Tetap di Rumah untuk Membatasi Penyebaran Covid-19

Mengapa harus menjaga jarak saat berinteraksi dengan orang lain? Mengapa harus tetap berada di rumah dan tidak bepergian jika tidak ada keperluan penting? Bagaimana penyebaran virus Covid-19 itu sebenarnya? Fungsi logaritma dapat memberikan sebagian jawaban dari pertanyaan-pertanyaan tersebut. Oleh karena itu, mari mempelajari subbab ini dengan sungguh-sungguh!

1. Konsep Fungsi Logaritma

Kamu telah mempelajari fungsi eksponensial dan bentuk logaritma di kelas X. Logaritma dianggap sebagai invers dari bentuk eksponensial. Kamu telah mengetahui bahwa fungsi eksponensial banyak diaplikasikan dalam berbagai hal seperti pemodelan pertumbuhan bakteri. Pada subbab ini, kita akan mempelajari pemodelan dari fungsi logaritma. Pertama-tama, kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Penyebaran Virus Covid-19**

Misalkan virus Covid-19 akan menular setiap 2 orang bertemu dengan salah seorang terinfeksi virus tersebut. Pada 2 Maret 2020 terdapat 2 orang Indonesia terpapar Covid-19 dan dalam 60 hari kasus terkonfirmasi terpapar Covid-19 sebanyak 10.118 orang. Dari pemodelan menggunakan fungsi eksponensial, banyak orang yang terpapar Covid-19 setiap waktu t adalah $P(t) = 2e^{(\frac{1}{60}\ln 5.059)t}$.

Gunakan fungsi tersebut untuk menjawab kedua pertanyaan berikut.

1. Kapan perkiraan akan ada 50.000 orang yang terinfeksi virus Covid-19?
2. Dapatkah kamu membuat suatu fungsi yang memodelkan waktu yang dibutuhkan terhadap banyaknya orang terpapar Covid-19? Bagaimana fungsinya?

Pada eksplorasi sebelumnya, kamu telah mengetahui bahwa diperlukan suatu fungsi yang "membalik" fungsi eksponensial. Fungsi balikan demikian dinamakan *fungsi logaritma*. Karena bentuk logaritma merupakan balikan (invers) dari bentuk eksponensial, fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponensial. Berikut ini pendefinisian fungsi logaritma secara umum.

Definisi 6.1 **Notasi Fungsi Logaritma**

Misalkan b adalah bilangan positif dengan $b \neq 1$. Fungsi logaritma dengan basis b dinotasikan dengan ${}^{b}\log$ dan dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = {}^{b}\log x \text{ untuk setiap } x > 0$$

Pada beberapa buku lainnya, fungsi logaritma mungkin saja dinotasikan dalam bentuk $f(x) = \log_b x$. Namun, dalam buku ini kita akan menggunakan bentuk $f(x) = {}^{b}\log x$.

Fungsi logaritma yang basisnya 10 disebut *fungsi logaritma umum*. Untuk menuliskan logaritma umum, kita dapat menghilangkan basisnya, misalkan ${}^{10}\log 100 = \log 100$. Adapun logaritma dengan basis $e \approx 2{,}7183$ disebut *fungsi logaritma alami* dan dinotasikan dengan $f(x) = \ln x$, yaitu

$$\boxed{\ln x = {}^{e}\log x}$$

Di kelas X kamu telah mempelajari keterkaitan antara bentuk eksponensial dan logaritma, yakni

$$\boxed{y = {}^{b}\log x \leftrightarrow x = b^y}$$

Keterkaitan tersebut akan banyak dimanfaatkan ketika membahas hubungan antara fungsi logaritma dan fungsi eksponensial. Untuk lebih memahami fungsi logaritma, perhatikan contoh berikut!

Contoh 6.1 Fungsi Logaritma

Diberikan fungsi logaritma $f(x) = {}^{3}\log x$. Tentukan nilai dari:

1. $f(3)$
2. $f(81)$

Alternatif penyelesaian:

Kita dapat menyelesaikan soal ini menggunakan definisi fungsi logaritma, yaitu ${}^{b}\log x = y$ yang berarti $b^y = x$.

1. $f(3) = {}^{3}\log 3 = 1$ karena $3^1 = 3$
2. $f(81) = {}^{3}\log 81 = 4$ karena $3^4 = 81$

Mari Mencoba 6.1

Diberikan fungsi logaritma $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$. Tentukan nilai dari:

1. $f\left(\frac{1}{9}\right)$
2. $f\left(\frac{1}{27}\right)$

Selain bentuk, fungsi logaritma memiliki karakteristik yang dapat diketahui dengan mudah jika kamu menggambar grafiknya. Untuk itu, kerjakan eksplorasi berikut!

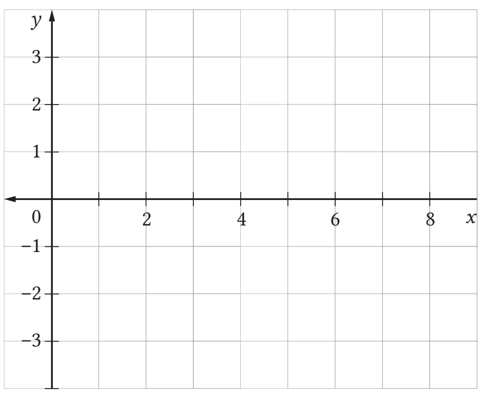
Eksplorasi Grafik Fungsi Logaritma

Diberikan fungsi $f(x) = {}^{2}\log x$. Untuk menggambar grafik fungsi tersebut, lakukan langkah-langkah berikut.

1. Lengkapi tabel di bawah dengan menentukan nilai $f(x)$ pada baris kedua untuk setiap nilai x pada baris pertama.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$							

2. Berdasarkan langkah 1, titik-titik $f(x)$ untuk nilai x yang diberikan adalah ....
3. Letakkan titik-titik tersebut pada gambar berikut.



Gambar 6.2 Bidang Koordinat

4. Berdasarkan informasi yang diperoleh pada langkah 2 dan 3, sketsalah grafik fungsi $f(x) = {}^{2}\log x$ pada gambar di atas.
5. Amati kembali grafik fungsi logaritmamu. Bagaimana karakteristiknya?

Kamu telah menggambar grafik fungsi logaritma dengan basis lebih dari 1. Selanjutnya, kamu akan berlatih menggambar grafik fungsi logaritma dengan basis antara 0 dan 1.

Contoh 6.2 Menggambar Grafik Fungsi Logaritma

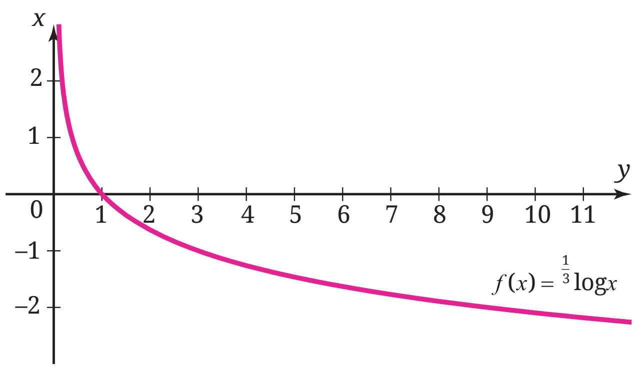
Sketsalah grafik fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$.

Alternatif penyelesaian:

Kita akan mensketsa grafik fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$ dengan terlebih dahulu membuat tabel nilai-nilai fungsi $f(x)$. Supaya lebih mudah dalam menggambar grafik fungsi logaritma, kita dapat memilih nilai-nilai x sehingga nilai dari $f(x)$ berupa bilangan bulat.

x	3^3	3^2	3	1	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Selanjutnya, gambarkan titik-titik yang dihasilkan pada tabel, kemudian hubungkan titik-titiknya dengan kurva mulus sehingga diperoleh grafik $f(x)$ berikut.



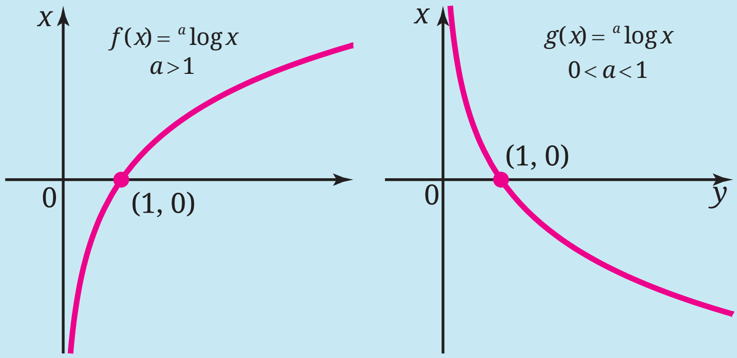
Gambar 6.3 Grafik Fungsi $f(x)$

Mari Mencoba 6.2

Sketsalah grafik fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$.

Grafik fungsi logaritma berbasis lebih dari 1 mempunyai beberapa persamaan dan perbedaan dengan grafik fungsi logaritma berbasis antara 0 dan 1. Perbedaan dan persamaan kedua grafik fungsi tersebut dinyatakan dalam sifat berikut.

Sifat 6.1 Karakteristik Fungsi Logaritma



Gambar 6.4 Grafik Fungsi Logaritma

Misalkan diberikan fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ untuk $a > 1$ dan $g(x) = {}^{a}\log x$ untuk $0 < a < 1$. Berdasarkan grafik fungsi di atas, persamaan karakteristik dari f dan g sebagai berikut.

1. Daerah asal f dan g adalah himpunan semua bilangan real positif.
2. Daerah hasil f dan g adalah himpunan semua bilangan real.
3. Grafik fungsi f dan g memotong sumbu-x di titik (1, 0), tetapi tidak memotong sumbu-y.
4. Grafik fungsi f dan g mendekati sumbu-y, tetapi tidak menyentuh sumbu-y. Dengan demikian, sumbu-y (atau $x = 0$) merupakan asimtot tegak dari f dan g.

Adapun perbedaan karakteristik fungsi f dan g yaitu fungsi f monoton naik, sedangkan fungsi g monoton turun.

Kamu telah melihat grafik fungsi logaritma dari contoh sebelumnya. Kamu dapat menyelidiki lebih jauh grafik fungsi logaritma melalui aktivitas berikut.

Aktivitas Interaktif

Pindai

Kerjakan aktivitas dengan mengunjungi *https://www.desmos.com/calculator/b88kfy2b3c* atau memindai kode respons cepat di samping.

2. Identitas Fungsi Logaritma

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mempelajari karakteristik dari fungsi logaritma. Pada bagian ini akan diulas kembali sifat-sifat logaritma yang pernah dipelajari di kelas X. Untuk lebih memahaminya, kerjakan eksplorasi berikut!

Eksplorasi **Menemukan Sifat-Sifat Logaritma**

Kerjakan langkah-langkah berikut.

1. Tuliskan bentuk yang setara ${}^{b}\log (MN)$ menggunakan identitas perkalian eksponen, yakni $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, dan definisi logaritma.
2. Tuliskan bentuk yang setara dengan ${}^{b}\log\left(\frac{M}{N}\right)$ menggunakan pembagian eksponen, yakni $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ untuk $b \neq 0$.
3. Tuliskan bentuk yang setara dengan ${}^{a}\log (M^p)$ menggunakan identitas eksponen $(b^m)^n = b^{mn}$.

Berdasarkan eksplorasi yang dilakukan, diperoleh identitas logaritma berikut.

Sifat 6.2 **Identitas Logaritma**

Misalkan b adalah bilangan positif dengan $b \neq 1$. Jika M, N, dan p sembarang bilangan real dengan $M > 0$ dan $N > 0$, maka berlaku:

- ${}^{b}\log (MN) = {}^{b}\log M + {}^{b}\log N$
- ${}^{b}\log \left(\frac{M}{N}\right) = {}^{b}\log M - {}^{b}\log N$
- ${}^{b}\log (M^p) = p\,{}^{b}\log M$

Sebagai pengingat, berikut ini beberapa identitas logaritma yang pernah dipelajari di kelas X.

Sifat 6.3 **Identitas Logaritma**

Misalkan a dan b adalah bilangan positif dengan $a, b \neq 1$. Jika M, N, dan p sembarang bilangan real dengan $M > 0$ dan $N > 0$, maka berlaku:

- ${}^{b}\log M = \frac{{}^{a}\log M}{{}^{a}\log b}$
- jika ${}^{b}\log M = {}^{b}\log N$, maka $M = N$

- jika $b > 1$ dan ${}^{b}\log M < {}^{b}\log N$, maka $M < N$
- jika $0 < b < 1$ dan ${}^{b}\log M < {}^{b}\log N$, maka $M > N$

Kamu sudah mengetahui sifat-sifat dari fungsi logaritma. Untuk memahami lebih dalam sifat-sifat tersebut, amati contoh berikut!

Contoh 6.3 Identitas Fungsi Logaritma

Dengan memanfaatkan identitas fungsi logaritma, selesaikan soal berikut.

1. Jika $f(x) = \log x$, tentukan nilai y sehingga $f(80) + f(y) = 4$.
2. Jika $f(x) = {}^{3}\log x$ dan nilai $f(5) \approx 1{,}46$, tentukan nilai $f(75)$.

Alternatif penyelesaian:

1. Karena $f(x) = \log x$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(80) + f(y) &= 4 \\ \log 80 + \log y &= 4 \\ \log 80y &= 4 && \text{Sifat 6.2 pertama} \\ 80y &= 10^4 \end{aligned}$$

Maka

$$y = \frac{10^4}{80} = 125$$

Jadi, nilai y adalah 125.

2. Karena $f(x) = {}^{3}\log x$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(75) &= {}^{3}\log 75 \\ &= {}^{3}\log (3 \times 25) \\ &= {}^{3}\log 3 + {}^{3}\log 25 && \text{Sifat 6.2 pertama} \\ &= 1 + {}^{3}\log 5^2 \\ &= 1 + 2\,{}^{3}\log 5 && \text{Sifat 6.2 ketiga} \\ &\approx 1 + 2(1{,}46) && f(5) = {}^{3}\log 5 \approx 1{,}46 \\ &\approx 3{,}92 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $f(75) \approx 3{,}92$.

Mari Mencoba 6.3

Dengan memanfaatkan identitas fungsi logaritma, selesaikan soal berikut.

1. Jika $f(x) = \ln x$, tentukan nilai y sehingga $f(80) + f(y) = 4$.
2. Jika $f(x) = {}^2\log x$ dan nilai $f(3) = 0{,}63$, tentukan nilai $f(18)$.

Mari Mengomunikasikan

Kamu telah mengetahui beberapa identitas fungsi logaritma. Bagaimana menurutmu bukti dari identitas pada Sifat 6.3?

3. Pemodelan Fungsi Logaritma

Pada awal subbab kamu telah melakukan eksplorasi menarik yang menuntunmu untuk memahami pentingnya belajar logaritma. Fungsi logaritma banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu kegunaannya ialah memprediksi penyebaran virus Covid-19 seperti pada contoh berikut.

Contoh 6.4 Penyebaran Virus Covid-19

Misalkan virus Covid-19 mampu membelah diri setiap 30 menit pada orang yang terinfeksi. Jika awalnya terdapat 2 virus Covid-19, lama waktu t (dalam jam) yang dibutuhkan virus tersebut untuk menjadi sebanyak N ditentukan dengan rumus berikut.

$$t = \frac{\log\left(\frac{N}{2}\right)^2}{\log 2}$$

Berapa lama waktu yang dibutuhkan virus Covid-19 untuk berkembang menjadi sejuta virus?

Alternatif penyelesaian:

$N = 1.000.000$

Maka

$$t = \frac{\log\left(\frac{1.000.000}{2}\right)^2}{\log 2} = \frac{\log(500.000)^2}{\log 2}$$

$$= 2\,{}^2\log 500.000 \approx 2(19) \approx 38$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan virus Covid-19 untuk berkembang menjadi sejuta virus adalah sekitar 38 jam. Oleh karena itu, ketika pandemi, kita diimbau tetap selalu berada di rumah agar dapat menekan penyebaran virus tersebut.

Mari Mencoba 6.4

Dengan memanfaatkan fungsi logaritma tentang pertumbuhan virus Covid-19 pada Contoh 6.4, berapa banyak virus Covid-19 yang tersebar dalam waktu 30 hari?

Matematika dan Sains — Kekuatan Kata Sandi

Pada Bab 1, kamu telah belajar cara membuat kata sandi dengan memanfaatkan matriks. Namun, seberapa kuatkah kata sandi yang dibuat tersebut?

Kekuatan suatu kata sandi diukur dari efektivitas kata sandi terhadap serangan tebak-tebakan atau *brute force*. *Brute force* adalah perkiraan banyak percobaan yang dibutuhkan seseorang yang tidak memiliki akses langsung ke kata sandi tersebut dan rata-rata untuk menebak kata sandi tersebut dengan benar.

Kata sandi acak terdiri atas serangkaian simbol dengan panjang tertentu. Simbol tersebut diambil dari kumpulan simbol menggunakan proses pemilihan acak dengan setiap simbol memiliki kemungkinan yang sama untuk terpilih.

Sebuah sandi dihasilkan oleh proses pemilihan *string* simbol secara acak dengan panjang L dari sekumpulan N simbol yang mungkin. Banyak kemungkinan kata sandi dapat diperoleh dengan menghitung N^L. Meningkatkan L atau N akan memperkuat kata sandi yang dihasilkan. Kekuatan kata sandi acak yang diukur dengan entropi informasi adalah logaritma basis 2 atau log 2 dari banyak kata sandi yang mungkin, dengan asumsi setiap simbol dalam kata sandi dihasilkan secara independen. Jadi, entropi informasi kata sandi acak (H) diberikan oleh rumus berikut.

$$H = {}^2\log N^L = L\,{}^2\log N = L\,\frac{\log N}{\log 2}$$

dengan:

- N adalah banyak simbol yang mungkin
- L adalah banyak simbol dalam kata sandi
- H dalam bit

Semakin besar nilai entropi (H), semakin kuat kata sandi tersebut. Misalnya, kata sandi dengan entropi 4 bit akan membutuhkan 2^4 atau 16 percobaan untuk menghabiskan semua kemungkinan tebakan kata sandi tersebut.

Sumber: Wikipedia dalam https://en.wikipedia.org/wiki/Password_strength

Contoh 6.5 Kekuatan Kata Sandi

Sebuah kata sandi yang terdiri atas 3 angka akan dibentuk dengan pilihan angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Berapa besar entropi kata sandi tersebut? Berapa banyak percobaan yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan kata sandi tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Karena simbol yang tersedia ada 10 (N = 10) dan panjang kata sandi terdiri atas 3 angka (L = 3), entropi dari kata sandi tersebut adalah $H = 2\,\frac{\log 10}{\log 2} = 6{,}644$ bit. Dengan demikian, banyaknya percobaan yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan kata sandi adalah $2^{6{,}64} = 99{,}7 \approx 100$.

Mari Mencoba 6.5

Sebuah kata sandi yang terdiri atas tiga huruf akan dibentuk. Berapa besar entropi kata sandi tersebut? Berapa banyak percobaan yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan kata sandi tersebut?

Sekarang, kita akan melihat pemodelan dari fungsi logaritma dalam bidang lainnya. Pemodelan fungsi logaritma juga dimanfaatkan untuk menentukan besarnya kekuatan suatu gempa. Besar kekuatan gempa bumi (dalam skala Richter) dengan intensitas I dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$\boxed{R = \log \frac{I}{I_0}}$$

dengan I_0 adalah intensitas dari suatu gempa yang hampir tidak terasa (tingkat nol).

Untuk lebih memahami bagaimana pemodelan suatu fungsi logaritma dalam menentukan kekuatan suatu gempa, perhatikan contoh berikut!

Contoh 6.6 Skala Richter

Gempa bumi yang terjadi di Haiti pada tahun 2010 memiliki intensitas 10^7 dibandingkan gempa bumi tingkat nol. Berapa skala Richter kekuatan gempa tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Karena intensitas gempanya 10^7 kali gempa tingkat nol, maka $I = 10^7 I_0$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} R &= \log \frac{I}{I_0} && \text{Rumus besar gempa bumi dalam skala Richter} \\ &= \log \frac{10^7 I_0}{I_0} && \text{Substitusi } I \text{ dengan } 10^7 I_0 \\ &= \log 10^7 && \text{Sederhanakan} \\ &= 7 && \text{Sifat dasar logaritma } {}^a\log a^x = x \end{aligned}$$

Jadi, kekuatan gempa bumi di Haiti tersebut sebesar 7 skala Richter.

Mari Mencoba 6.6

Gempa bumi yang mengakibatkan tsunami di Samudra Hindia pada 26 Desember 2004 memiliki intensitas $10^{9,3}$ kali dibandingkan gempa bumi tingkat nol. Berapa skala Richter besar gempa tersebut?

Fungsi logaritma dengan basis e (logaritma alami) juga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan di sekitar seperti pada pengisian daya baterai.

Misalkan C_0 adalah daya maksimum yang dapat disimpan oleh suatu baterai dan k adalah konstanta positif yang bergantung pada baterai tersebut dan pengisi dayanya. Lama waktu (dalam menit) yang diperlukan untuk mengisi daya baterai dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$\boxed{t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)}$$

Berikut ini contoh penggunaan rumus di atas untuk menyelesaikan suatu permasalahan.

Contoh 6.7 Mengisi Daya Baterai

Tentukan lama waktu untuk mengisi daya baterai yang kosong hingga menjadi 90% penuh dengan k = 0,02.

Alternatif penyelesaian:

Karena baterai tersebut akan diisi dayanya sampai 90% penuh, maka $C = 90\%C_0 = 0{,}9C_0$. Dengan demikian,

$t = -\frac{1}{k}\ln\left(1-\frac{C}{C_0}\right)$	Rumus waktu pengisian daya baterai
$= -\frac{1}{0{,}02}\ln\left(1-\frac{0{,}9C_0}{C_0}\right)$	Substitusi $C = 0{,}9C_0$ dan $k = 0{,}02$
$= -50 \ln (1 - 0{,}9)$	Sederhanakan
$= -50 \ln 0{,}1$	Sederhanakan
$\approx 115{,}13$	Hitung dengan kalkulator

Jadi, lama waktu pengisian daya baterai tersebut adalah sekitar 115 menit.

Mari Mencoba 6.7

Berapa menit lama waktu untuk mengisi daya baterai yang sepenuhnya kosong agar menjadi 80% penuh? Anggap k = 0,025.

Selain untuk pemodelan pertumbuhan, fungsi logaritma juga digunakan dalam pemodelan peluruhan/penurunan dengan rumus

$$\boxed{H(t) = ce^{kt}}$$

dengan $H(t)$ nilai pada waktu t.

Untuk lebih memahami pemodelan fungsi logaritma terhadap penurunan suatu nilai, perhatikan contoh berikut!

Contoh 6.8 Harga Jual Mobil

Harga sebuah mobil setelah digunakan tidak sebanding dengan harga pembeliannya. Jika harga mobil baru adalah Rp200 juta dan setelah 5 tahun menjadi Rp100 juta rupiah, tentukan harga mobil setelah 10 tahun digunakan.

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan bahwa $H(0)$ = Rp200 juta dan $H(5)$ = Rp100 juta sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} H(0) &= 200 \\ ce^0 &= 200 \\ c &= 200 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} H(5) &= 100 \\ 200e^{4k} &= 100 \\ e^{4k} &= \frac{1}{2} \\ 4k &= \ln \frac{1}{2} \\ k &= \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dari hasil tersebut, harga mobil setiap waktu t adalah

$$H(t) = 200e^{\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}\right)t} = 200e^{-0,173t}$$

Harga mobil setelah 10 tahun:

$$H(10) = 200e^{-0,173(10)} = 35,46$$

Jadi, harga mobil setelah 10 tahun digunakan adalah sekitar Rp35 juta.

Mari Mencoba 6.8

Berdasarkan informasi pada Contoh 6.8, berapa harga mobil setelah 20 tahun digunakan?

Latihan A Fungsi Logaritma

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

1. Fungsi $f(x) = \ln x$ memiliki daerah asal ... dan daerah hasil ....
2. Fungsi logaritma $f(x) = {}^5\log x$ memiliki basis .... Dengan demikian, $f(1)$ = ..., $f(5)$ = ..., dan $f(25)$ = ...
3. Sketsalah grafik fungsi $g(x) = ({}^5\log x) + 1$. Tentukan daerah asal, daerah hasil, dan asimtot tegaknya.

4. Logaritma hasil bagi dari dua bilangan sama dengan ... dari logaritma kedua bilangan tersebut. Oleh karena itu, ${}^{5}\log\left(\frac{2.013}{3}\right) = ...$

5. Apakah pernyataan berikut *Benar* atau *Salah*?

   Jika ${}^{b}\log M < {}^{b}\log N$, maka $M < N$.

Penerapan Konsep

6. **Membandingkan Intensitas Gempa.** Tanggal 26 Desember 2004, terjadi gempa bumi di lepas pantai Aceh dengan kekuatan 9,3 skala Richter. Sekitar 13 tahun berikutnya, Tasikmalaya juga diguncang gempa bumi dengan kekuatan 7,3 skala Richter. Berapa kali lipat intensitas gempa bumi yang terjadi di Tasikmalaya dibandingkan gempa bumi yang terjadi di Aceh?

7. **pH Jus Jeruk.** Jika segelas jus jeruk mempunyai ion hidrogen $10^{-3,15}$, tentukan nilai pH jus jeruk tersebut.

8. **Tekanan Atmosfer.** Karena pengaruh gravitasi, molekul udara lebih banyak berada di permukaan bumi daripada di tempat tinggi. Akibatnya, tekanan udara akan terus berkurang seiring makin tingginya suatu tempat. Hubungan antara tekanan udara P (dalam kPa) dan ketinggian h (dalam km) dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{h}{7}$$

   Puncak Jayawijaya memiliki ketinggian 4.884 m di atas permukaan laut. Dengan rumus tersebut, prediksilah tekanan udara di daerah tersebut.

9. **Batas Aman Tekanan Atmosfer.** Menurut Harry George Armstrong, daerah yang sesuai dengan tubuh manusia adalah daerah berketinggian maksimum 14,9 km di atas permukaan laut. Berapa tekanan atmosfer yang masih dapat diterima manusia?

10. **Perkembangbiakan Bakteri**. Suatu jenis bakteri membelah diri setiap 2 jam. Jika koloni bakteri tersebut awalnya sebanyak 50 bakteri, waktu t (dalam jam) yang diperlukan agar banyaknya bakteri tersebut menjadi N dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$t = 2\ \frac{\log\left(\frac{N}{50}\right)}{\log 2}$$

   Tentukan waktu yang diperlukan agar terdapat sejuta bakteri dalam koloni tersebut.

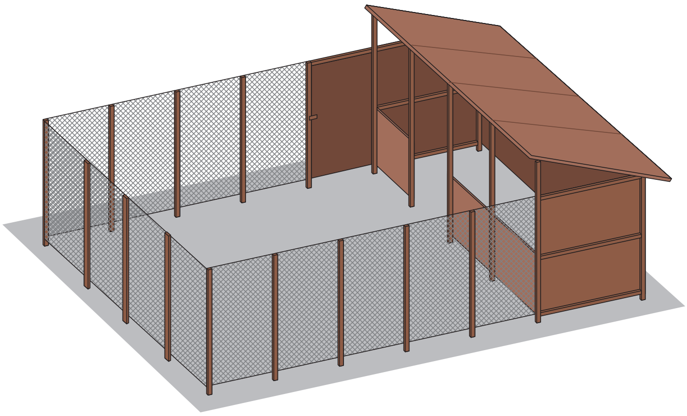
B. Fungsi Aljabar

Kamu telah mempelajari fungsi linear dan fungsi kuadrat pada kelas X. Pada subbab ini kita akan mempelajari fungsi aljabar lainnya, yaitu fungsi rasional dan fungsi akar.

1. Fungsi Rasional

Untuk memahami konsep fungsi rasional, perhatikan permasalahan berikut!

Petrus akan membuat kandang ayam berbentuk persegi panjang seluas 425 m^2. Kandang tersebut akan dipagari dengan kawat harmonika dan dipasang pintu selebar 1 m seperti pada gambar berikut.



Gambar 6.5 Desain Kandang Ayam

Karena yang diketahui adalah luas kandang, langkah awal ialah memodelkan permasalahan menggunakan rumus luas persegi panjang untuk menentukan hubungan panjang (p) dan lebar (l) kandang.

$$L = p \times l \Rightarrow l = \frac{L}{p} = \frac{425}{p}$$

Pemasangan kawat harmonika (*lihat* Gambar 6.5) hampir mengelilingi kandang berbentuk persegi panjang sehingga keliling kawat (K) dinyatakan sebagai fungsi terhadap variabel p (atau l).

$$\begin{aligned} K = K(p) &= l + 2p - 1 \\ &= \frac{425}{p} + 2p - 1 \\ &= \frac{425 + 2p^2 - p}{p} \end{aligned}$$

Fungsi $K(p)$ tersebut merupakan fungsi rasional.

Kita dapat mengungkapkan fungsi rasional sebagai hasil bagi dari dua fungsi polinomial. Secara umum, fungsi rasional didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 6.2 **Fungsi Rasional**

Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dan $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan $Q(x) \neq 0$, maka $f(x)$ merupakan *fungsi rasional*.

Catatan: Kita asumsikan bahwa $P(x)$ dan $Q(x)$ tidak memiliki faktor persekutuan.

Daerah asal fungsi rasional mencakup himpunan bilangan real yang tidak menyebabkan penyebut bernilai nol. Daerah asal sering kali disebut *domain*. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 6.9 Menentukan Daerah Asal dan Daerah Hasil Fungsi Rasional

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Alternatif penyelesaian:

Daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol. Langkah pertama menentukan daerah asal fungsi f adalah menemukan pembuat nol fungsi $x - 1$.

$x - 1 = 0$ — Pembuat nol $x - 1$

$x = 1$ — Jumlahkan kedua ruas dengan 1

Karena pembuat nol fungsi $x - 1$ adalah 1, daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real, kecuali 1 atau dapat ditulis $D_f = \{x \mid x \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$.

Cara menentukan daerah hasil fungsi f adalah dengan menuliskan $y = \frac{1}{x-1}$, kemudian menemukan x.

$y = \frac{1}{x-1}$ — Persamaan fungsi rasional

$y(x - 1) = 1$ — Kalikan dengan $x - 1$

$xy - y = 1$ — Sifat distributif

$xy = y + 1$ — Jumlahkan dengan y

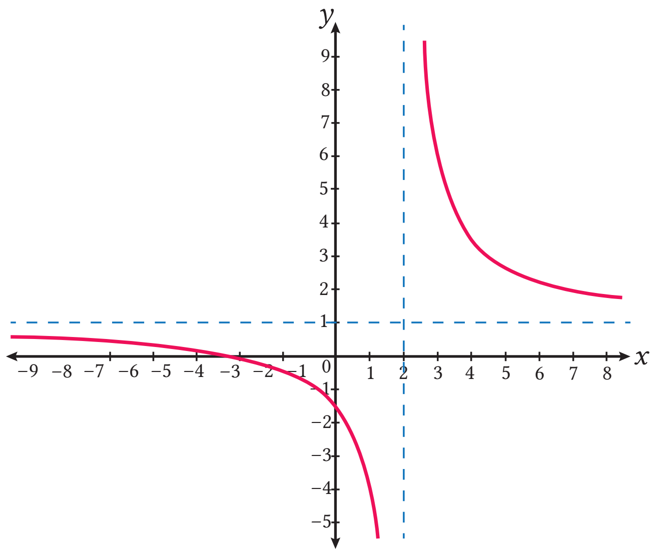
$x = \frac{y+1}{y}$ — Bagi dengan y

$x = \frac{y+1}{y}$ tidak terdefinisi ketika $y = 0$. Jadi, daerah hasil fungsi $f(x) = \frac{1}{x-1}$ adalah $R_f = \{y \mid y \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Mari Mencoba 6.9

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $g(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 1}$.

Perhatikan grafik $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ berikut!



Gambar 6.6 Grafik Fungsi $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

Dari gambar di atas, kita memperoleh beberapa informasi berikut.

- Grafik fungsi f memotong sumbu-x di (–3, 0).
- Grafik fungsi f memotong sumbu-y di $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.
- Grafik fungsi f tidak melewati $x = 2$.
- Jika nilai x mendekati 2 dari kiri ($x < 2$), diperoleh:

Tabel 6.1 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Mendekati 2 dari Kiri

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
$y = f(x)$	–49	–499	–4.999	–49.999

Dari tabel di atas dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x mendekati 2 dari kiri, nilai y semakin kecil atau mendekati negatif tak hingga.

- Jika nilai x mendekati 2 dari kanan ($x > 2$), diperoleh:

Tabel 6.2 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Mendekati 2 dari Kanan

x	2,1	2,01	2,001	2,0001
$y = f(x)$	51	501	5.001	50.001

Dari tabel di atas dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x mendekati 2 dari kanan, nilai y semakin besar atau mendekati positif tak hingga. Grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis vertikal $x = 2$ sehingga garis $x = 2$ disebut asimtot vertikal.

- Jika nilai x semakin besar, diperoleh:

Tabel 6.3 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Semakin Besar

x	100	1.000	10.000	100.000
$y = f(x)$	1,05	1,005	1,0005	1,00005

Dari tabel di atas dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x semakin besar, nilai y akan mendekati 1.

- Jika nilai x semakin kecil, diperoleh:

Tabel 6.4 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Semakin Kecil

x	–100	–1.000	–10.000	–100.000
$y = f(x)$	0,95	0,995	0,9995	0,99995

Dari tabel di atas dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x semakin kecil, nilai y akan mendekati 1. Grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis horizontal $y = 1$ sehingga garis $y = 1$ disebut asimtot horizontal.

Secara umum, definisi asimtot vertikal sebagai berikut.

Definisi 6.3 **Asimtot Vertikal**

Jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $x = a$ ketika nilai y mendekati positif tak hingga atau y mendekati negatif tak hingga, maka garis $x = a$ disebut *asimtot vertikal.*

Selain asimtot vertikal, ada pula asimtot horizontal yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 6.4 **Asimtot Horizontal**

Jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $y = b$ ketika nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, maka garis $y = b$ disebut *asimtot horizontal*.

Untuk memahami lebih baik lagi Definisi 6.3 dan 6.4, mari kita memperhatikan contoh berikut!

Contoh 6.10 Menentukan Asimtot Vertikal dan Asimtot Horizontal

Tentukan asimtot vertikal dan asimtot horizontal dari setiap fungsi berikut.

1. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ 2. $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ 3. $h(x) = \frac{x^2+5x+6}{x-1}$

Alternatif penyelesaian:

1. Penyebut $x^2 - 9$ bernilai nol ketika $x = \pm 3$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = -3$ dan $x = 3$ adalah asimtot vertikal fungsi f. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $f(x)$ mendekati nol sehingga asimtot horizontal fungsi f adalah sumbu-x.

2. Penyebut $x - 3$ bernilai nol ketika $x = 3$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = 3$ adalah asimtot vertikal fungsi g. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, maka nilai $g(x)$ tidak mendekati nol. Oleh karena itu, kita mengubah fungsi tersebut menggunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2 \\ \hline x-3 & 2x+1 \\ & \underline{2x-6}\;- \\ & \quad\;\; 7 \end{array}$$

   Dari hasil pembagian, diperoleh

$$g(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$$

   Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $\frac{7}{x-3}$ mendekati nol. Dengan demikian, fungsi $g(x)$ akan mendekati 2 sehingga garis $y = 2$ merupakan asimtot horizontal fungsi g.

3. Penyebut $x - 1$ bernilai nol ketika $x = 1$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = 1$ adalah asimtot vertikal fungsi h. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif

tak hingga, nilai $h(x)$ tidak mendekati nol. Oleh karena itu, kita mengubah fungsi tersebut menggunakan pembagian bersusun sehingga diperoleh

$$h(x) = x + 6 + \frac{12}{x-1}$$

Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $\frac{12}{x-1}$ mendekati nol. Dengan demikian, fungsi $h(x)$ akan mendekati $x + 6$. Namun, garis $y = x + 6$ bukan garis horizontal sehingga fungsi h tidak memiliki asimtot horizontal.

Mari Mencoba 6.10

Tentukan asimtot vertikal dan asimtot horizontal dari setiap fungsi berikut.

1. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 16}$
2. $g(x) = \frac{3x + 7}{x + 2}$
3. $h(x) = \frac{2x^2 + 11x + 15}{x + 1}$

Beberapa fungsi rasional tidak memiliki asimtot vertikal ataupun asimtot horizontal, tetapi memiliki asimtot miring. Asimtot miring didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 6.5 **Asimtot Miring**

Jika grafik fungsi f akan terus mendekati garis $y = mx + b$ ketika nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, maka garis $y = mx + b$ disebut *asimtot miring*.

Pada Contoh 6.10 nomor 3, garis $y = x + 6$ bukan garis horizontal. Jadi, fungsi h tidak memiliki asimtot horizontal, tetapi memiliki asimtot miring, yaitu garis $y = x + 6$.

Kamu sudah mempelajari cara menentukan asimtot. Kita akan menggunakan asimtot untuk menggambar grafik fungsi rasional.

Contoh 6.11 Menggambar Grafik Fungsi Rasional

Gambarlah grafik fungsi rasional $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

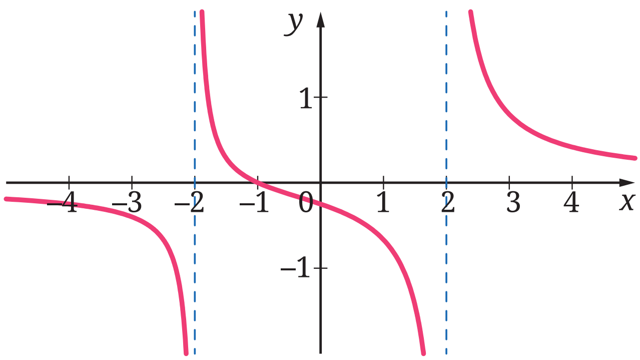
Alternatif penyelesaian:

Untuk menggambar grafik f, kita dapat melakukan langkah-langkah berikut.

1. Titik potong grafik fungsi dengan sumbu-x dapat ditentukan dengan $y = 0$. Jadi, titik potongnya adalah $(-1, 0)$.
2. Titik potong grafik fungsi dengan sumbu-y dapat ditentukan dengan $x = 0$. Jadi, titik potongnya adalah $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.
3. Penyebut $x^2 - 4$ bernilai nol ketika $x = \pm 2$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = -2$ dan $x = 2$ adalah asimtot vertikal fungsi f. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $f(x)$ mendekati nol sehingga asimtot horizontal fungsi f adalah sumbu-x. Kita gambarkan asimtot-asimtot ini dengan garis putus-putus.
4. Untuk memudahkan dalam menggambar, kita dapat menentukan titik bantu berupa pasangan berurutan yang memenuhi $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

x	–3	–1,5	–1	0	1	2,5	3	4
y = f(x)	–0,4	0,29	0	–0,25	–0,67	1,56	0,8	0,42

5. Gambar grafik fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.



Gambar 6.7 Grafik Fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

Mari Mencoba 6.11

Gambarlah grafik fungsi rasional $h(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$.

Fungsi rasional sering digunakan untuk memodelkan atau menyelesaikan permasalahan di sekitar kita. Bacalah kolom berikut!

Matematika dan Sains **Gaya**

Dalam kehidupan sehari-hari, kamu pasti pernah mengalami atau menjumpai kejadian kendaraan tiba-tiba mogok ketika akan bepergian. Tanpa berpikir panjang, upaya yang dilakukan ialah mendorong kendaraan tersebut. Mobil yang mogok mula-mula diam, kemudian ketika didorong akan mencapai kecepatan tertentu sehingga mobil mengalami percepatan atau gaya dorong.

Fungsi rasional dapat digunakan untuk memodelkan gaya. Dengan memodelkan fungsi gaya, kamu dapat mengetahui pengaruh besar gaya terhadap waktu.

Kamu dapat mengetahui salah satu penerapan fungsi rasional dengan melakukan eksplorasi berikut.

Eksplorasi **Penerapan Fungsi Rasional**

Perhatikan permasalahan berikut!

Sebuah mobil mempunyai massa 1.200 kg. Jarak perpindahan mobil adalah 30 m. Misalkan x adalah waktu (detik). Pengaruh besar gaya mobil terhadap waktu dapat diketahui dengan langkah-langkah berikut.

1. Tentukan fungsi f yang merupakan fungsi besar gaya.

   Gunakan rumus gaya:

   $F = ma$ dengan $a = \frac{v}{t}$ dan $v = \frac{s}{t}$

   Keterangan:

   F = gaya　　　　t = waktu
   a = percepatan　　m = massa
   v = kecepatan　　s = jarak perpindahan

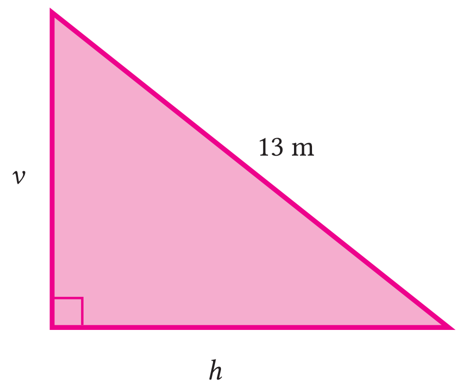
2. Tentukan daerah asal fungsi f.
3. Apakah fungsi f memiliki asimtot vertikal, asimtot horizontal, atau asimtot miring?

4. Cari pasangan berurutan yang merupakan titik bantu untuk menggambar grafik fungsi *f*.
5. Gambarlah grafik fungsi *f*.
6. Perhatikan grafik fungsi *f* tersebut, kemudian interpretasikan hasil pengamatanmu.

Dari kegiatan eksplorasi di atas, kamu dapat menginterpretasikan grafik fungsi besar gaya. Pada buku ini, selain pada bidang fisika, kita dapat menjumpai penerapan fungsi rasional pada bidang ekonomi, penerapan jarak, kecepatan dan waktu, serta bidang olahraga.

2. Fungsi Akar

Untuk memahami konsep fungsi akar, perhatikan gambar berikut!



Gambar 6.8 Segitiga Siku-Siku

Gambar di atas menunjukkan segitiga siku-siku dengan panjang sisi di depan sudut siku-siku 13 m serta sisi penyikunya v dan h. Apabila nilai h diketahui, nilai v dapat dihitung sebagai berikut.

- Jika $h = 1$, maka $v = \sqrt{13^2 - 1^2} = \sqrt{169 - 1} = \sqrt{168}$
- Jika $h = 2$, maka $v = \sqrt{13^2 - 2^2} = \sqrt{169 - 4} = \sqrt{165}$
- Jika $h = x$, maka $v = \sqrt{13^2 - x^2} = \sqrt{169 - x^2}$

Apabila v ditulis sebagai fungsi f terhadap x, diperoleh $f(x) = \sqrt{169 - x^2}$. Fungsi f merupakan contoh fungsi akar yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 6.6 **Fungsi Akar**

Jika $g(x)$ adalah suatu fungsi dan n bilangan bulat lebih dari 1, maka $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ merupakan *fungsi akar*.

Catatan: Pada pembahasan fungsi akar ini, ruang lingkup bilangan yang dibahas adalah bilangan real.

Bagaimana menentukan daerah asal fungsi akar? Untuk menjawabnya, lakukan eksplorasi berikut!

Eksplorasi Menentukan Daerah Asal Fungsi Akar

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x}$. Lakukan langkah-langkah berikut.

1. Tentukan pasangan berurutan $(x, f(x))$ yang memenuhi fungsi $f(x) = \sqrt{x}$.

x	–2	–1	0	1	2	3
$y = f(x)$	...	...	...	...	...	...

2. Dari pasangan berurutan di atas, gambarlah grafik fungsi f.
3. Dari gambar grafik, tentukan daerah asal fungsi f.

   Lakukan langkah yang sama untuk menentukan daerah asal fungsi akar $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \sqrt[4]{x}$, dan $p(x) = \sqrt[5]{x}$. Selanjutnya, jelaskan dugaanmu berdasarkan setiap hasil yang diperoleh.

Secara umum, daerah asal fungsi akar adalah sebagai berikut.

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ dengan n bilangan bulat lebih dari 1. Daerah asal fungsi f dapat diperoleh sebagai berikut.

- Jika nilai n genap ($n = 2, 4, 6, \ldots$), maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$ yang tidak menyebabkan $g(x) < 0$.
- Jika nilai n ganjil ($n = 1, 3, 5, \ldots$), maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$.

Selanjutnya, kita dapat mempelajari cara menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi akar pada contoh berikut.

Contoh 6.12 Menentukan Daerah Asal dan Daerah Hasil Fungsi Akar

Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

Alternatif penyelesaian:

Daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x - 2 < 0$. Untuk menentukannya, kita temukan terlebih dahulu penyebab $x - 2 < 0$.

$$\begin{aligned} x - 2 &< 0 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Karena $x < 2$ menyebabkan $x - 2 < 0$, daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real yang bernilai lebih dari atau sama dengan 2, atau dapat ditulis $D_f = \{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$. Adapun daerah hasil fungsi f adalah $R_f = \{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Mari Mencoba 6.12

Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi $g(x) = \sqrt{\dfrac{4}{x-2}}$.

Untuk menggambar grafik fungsi akar, kamu dapat mempelajari contoh berikut.

Contoh 6.13 Menggambar Grafik Fungsi Akar

Gambarlah grafik fungsi akar $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Alternatif penyelesaian:

Kita dapat menggambar grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x-3}$ dengan melakukan langkah-langkah berikut.

1. Menentukan daerah asal fungsi f.

   Daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x - 3 < 0$. Untuk menentukannya, kita temukan terlebih dahulu penyebab $x - 3 < 0$.

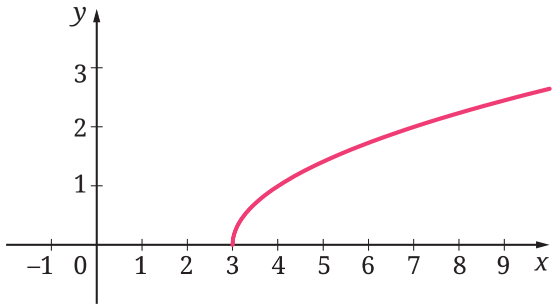
   $$\begin{aligned} x - 3 &< 0 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

   Karena $x < 3$ menyebabkan $x - 3 < 0$, daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real yang bernilai lebih dari atau sama dengan 3, atau dapat ditulis $D_f = \{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

2. Daerah asal fungsi f dapat memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(x, f(x))$ yang memenuhi $f(x) = \sqrt{x-3}$.

x	3	4	5	6	7	8	9
$y = f(x)$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45

3. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x-3}$.



Gambar 6.9 Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x-3}$

Mari Mencoba 6.13

Gambarlah grafik fungsi akar berikut.

1. $g(x) = \sqrt{x} - 5$

2. $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Fungsi akar sering digunakan untuk memodelkan atau menyelesaikan permasalahan di sekitar. Bacalah kolom berikut!

Matematika dan Sains **Tsunami**

Pada tanggal 26 Desember 2004 terjadi bencana alam tsunami di Aceh. Berdasarkan *Kontan.co.id*, gelombang tsunami menyapu pesisir Aceh pascagempa dangkal berkekuatan M 9,3 yang terjadi pada dasar Samudra Hindia. Gempa terjadi pukul 07.59 WIB. Tidak lama setelah itu, muncul gelombang tsunami yang diperkirakan memiliki ketinggian 30 meter dengan kecepatan mencapai 100 meter per detik atau 360 kilometer per jam. Kecepatan tsunami bergantung pada kedalaman laut. Fungsi akar dapat digunakan untuk memodelkan kecepatan tsunami yang melintas di lautan.

Kamu dapat mengetahui salah satu penerapan fungsi akar dengan melakukan eksplorasi berikut.

Eksplorasi Penerapan Fungsi Akar

Kamu akan memahami penerapan fungsi akar pada kecepatan gelombang tsunami melalui permasalahan berikut.

Kecepatan (m/s) tsunami yang melintas di lautan merupakan akar dari hasil kali antara percepatan gravitasi dan kedalaman laut (m). Percepatan gravitasi bumi adalah 9,8 m/s^2.

1. Buatlah fungsi untuk memodelkan kecepatan tsunami.
2. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi kecepatan tsunami.
3. Gambarlah grafik fungsi tersebut.
4. Perhatikan grafik fungsi tersebut, kemudian interpretasikan hasil pengamatanmu.
5. Tentukan kecepatan tsunami jika kedalaman laut adalah 3.000 m.

Dari kegiatan eksplorasi di atas, kamu dapat menginterpretasikan grafik fungsi kecepatan tsunami. Pada buku ini, selain pada bidang fisika, penerapan fungsi akar digunakan untuk memperkirakan jarak sebuah benda ke horizon.

Latihan B Fungsi Aljabar

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1—4.

1. Fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ merupakan fungsi rasional.

2. Misalkan $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ adalah fungsi rasional dengan derajat $q(x)$ minimal

   1. Dengan demikian, asimtot vertikal grafik f bersesuaian dengan penyelesaian persamaan $q(x) = 0$.

3. Fungsi $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 2}{x^2 + 1}}$ merupakan fungsi akar.

4. Jika daerah asal fungsi akar adalah himpunan bilangan real, daerah hasilnya juga merupakan himpunan bilangan real.

Penerapan Konsep

5. Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi-fungsi berikut.

   a. $f(x) = \dfrac{7 + x}{15 + x}$

   b. $g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

6. Tentukan asimtot miring dari fungsi $p(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 3}$.

7. **Ekonomi.** Sebuah perusahaan kue bronis membutuhkan biaya bulanan Rp7.000.000,00 dan biaya produksi Rp40.000,00 per loyang kue. Misalkan rumus fungsi biaya adalah $B(x)$ = biaya tetap + cx, dengan c adalah biaya produksi setiap kue dan x adalah banyaknya produksi kue bronis (tiap loyang).

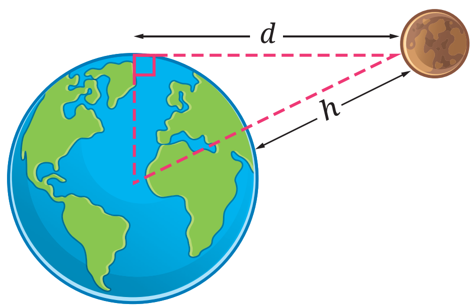
   a. Tentukan model matematika dari fungsi biaya untuk memproduksi x loyang kue bronis.

   b. Modelkan fungsi biaya rata-rata B untuk memproduksi x loyang kue bronis.

   c. Gambarlah grafik fungsi biaya rata-rata B.

8. Perhatikan gambar di samping!

   Pada ketinggian yang relatif kecil di atas bumi, fungsi akar sederhana dapat digunakan untuk memperkirakan jarak sebuah benda mendekati horizon.



   a. Jika jari-jari bumi diasumsikan 6.371 km, modelkan fungsi jarak d (dalam km) ke horizon untuk sebuah benda yang berada pada ketinggian h km di atas permukaan bumi.

   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi d.

   c. Gambarlah grafik fungsi d.

   d. Bagaimana kamu menggunakan fungsi d untuk menentukan jarak benda ke horizon pada benda yang terletak 1.000 km di atas permukaan bumi?

C. Fungsi Non-aljabar

Pada subbab ini kamu akan mempelajari fungsi non-aljabar. Secara sederhana, fungsi ini dapat dipahami sebagai sebuah fungsi yang tidak dapat dinyatakan dengan operasi aljabar yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Beberapa fungsi yang termasuk fungsi non-aljabar pada subbab ini adalah fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi sesepenggal.

1. Pemodelan Fungsi Eksponensial

Sekarang kita akan fokus pada pemodelan yang memanfaatkan fungsi eksponensial. Sebelumnya, kamu dapat menyimak definisi dari fungsi eksponensial berikut.

Definisi 6.7 **Definisi Fungsi Eksponensial**

Untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$, fungsi eksponensial didefinisikan sebagai fungsi yang memenuhi bentuk berikut:

$$f(x) = ab^x$$

dengan $a \neq 0$, $b > 0$, dan $b \neq 1$.

Untuk lebih memahami penerapan fungsi eksponensial, perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 6.14 Penerapan dalam Bidang Biologi

Misalkan setiap bakteri berkembang biak dengan mengikuti pola eksponensial $f(t) = J_0(2^t)$ dengan J_0 menyatakan banyak bakteri semula dan t menyatakan menit. Pada sebuah permukaan terdapat bakteri tersebut sebanyak 100. Tentukan banyak bakteri pada permukaan tersebut setelah 10 menit.

Alternatif penyelesaian:

Berdasarkan informasi pada soal, kita memperoleh $J_0 = 100$ dan $t = 10$ sehingga

$$f(10) = J_0(2^t) = 100(2^{10}) = 100(1.024) = 102.400$$

Jadi, banyak bakteri setelah 10 menit adalah 102.400.

Mari Mencoba 6.14

Misalkan perkembangbiakan suatu bakteri ditentukan oleh fungsi eksponensial $f(t) = J_0(3^t)$ dengan t dalam menit. Jika banyak bakteri semula pada suatu permukaan ada 50 bakteri, tentukan banyak bakteri tersebut pada menit ke-5.

Aktivitas berikut merupakan alternatif kegiatan yang dapat dikerjakan jika sarana dan prasarana internet maupun alat sudah tersedia.

Aktivitas Interaktif

Tabel berikut menunjukkan populasi di Amerika Serikat pada tahun 1900–1980. Gunakan kalkulator grafik atau aplikasi (misal Desmos) yang dapat mengaplikasikan regresi eksponensial untuk memodelkan populasi penduduk Amerika Serikat. Gunakan model tersebut untuk memperkirakan populasi pada tahun 1925 dan 2020.

Tabel 6.5 Populasi di Amerika Serikat (dalam Juta)

Tahun	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Populasi	76	92	106	123	131	150	179	203	227

2. Pemodelan Fungsi Nilai Mutlak

Pada bagian ini kita akan mempelajari pemodelan matematika yang memanfaatkan konsep nilai mutlak. Terdapat beberapa persoalan yang terkait dengan nilai mutlak termasuk yang berkaitan dengan jarak dan penerapan di bidang fisika.

Definisi 6.8 Bentuk-Bentuk Fungsi Nilai Mutlak

Untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$, *fungsi nilai mutlak* adalah fungsi yang memenuhi bentuk berikut:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

atau

$$f(x) = a|x - h| + k$$

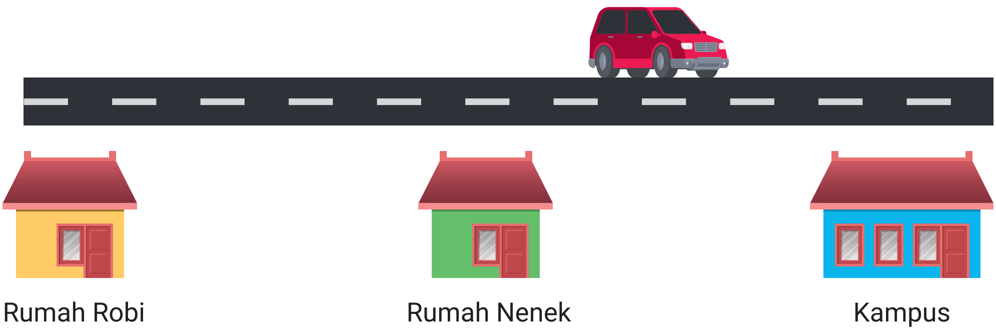
dengan:

- titik puncak = (h, k)
- a menunjukkan seberapa jauh grafik $f(x)$ membentang secara vertikal
- h menunjukkan pergeseran horizontal
- k menunjukkan pergeseran vertikal

Setelah mencermati beberapa bentuk fungsi nilai mutlak, kita akan mempelajari penerapan dari konsep fungsi nilai mutlak dalam beberapa fenomena.

Contoh 6.15 Penerapan Terkait dengan Jarak

Robi mengendarai mobil dari rumahnya yang berada di pinggir jalan raya (*lihat* Gambar 6.10). Dia mengendarai mobil menuju kampus dan melewati rumah neneknya. Jarak rumah mereka 30 km, sedangkan jarak dari kampus ke rumah nenek Robi adalah 30 km.



Gambar 6.10 Ilustrasi Perjalanan Robi

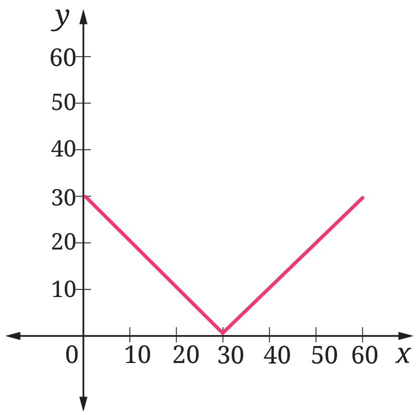
1. Buatlah tabel untuk menunjukkan seberapa jauh Robi dari rumah dan seberapa jauh Robi dari rumah nenek dimulai dari awal perjalanan hingga tiba di kampus.
2. Gambarkan grafik yang merepresentasikan hubungan antara jarak dari Robi ke rumah dan jarak dari Robi ke rumah nenek.
3. Temukan fungsi yang menyatakan jarak Robi ke rumah dalam jarak Robi ke rumah nenek.

Alternatif penyelesaian:

1. Robi menjauh dari rumah selama perjalanan. Di sisi lain, dia mendekat ke rumah nenek dan kemudian menjauh.

Jarak Robi ke rumah	0	10	20	30	40	50	60
Jarak Robi ke rumah nenek	30	20	10	0	10	20	30

2. Misalkan jarak Robi ke rumah adalah x dan jarak Robi ke rumah neneknya adalah y. Grafik dari hubungan keduanya sebagai berikut.



Gambar 6.11 Grafik Perjalanan Robi

3. Fungsi yang dapat merepresentasikan hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai $f(x) = |x - 30|$. Namun, perlu diperhatikan bahwa nilai x terbatas untuk $0 \leq x \leq 60$.

Mari Mencoba 6.15

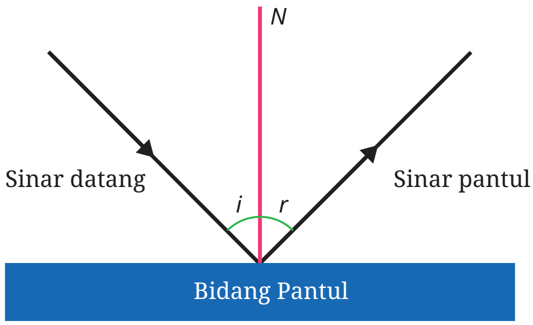
Rudi berjalan dari rumahnya yang berada di pinggir jalan raya, serupa dengan ilustrasi pada Gambar 6.10. Dia berjalan menyusuri trotoar di samping jalan raya tersebut menuju salah satu pusat perbelanjaan. Jarak rumahnya ke pusat perbelanjaan adalah 50 km. Di tengah-tengah pusat perbelanjaan dan rumah Rudi, terdapat warung Padang kesukaannya.

1. Buatlah tabel untuk menunjukkan jarak Rudi dari rumah dan seberapa jauh dia dari warung Padang dimulai dari awal perjalanan dari rumah sampai tiba di pusat perbelanjaan.
2. Gambarlah grafik yang merepresentasikan hubungan antara jarak Rudi ke rumah dan jarak Rudi ke warung Padang.
3. Temukan fungsi yang menyatakan jarak Rudi ke warung Padang dalam jarak Rudi ke rumah.

Sebelum mempelajari contoh berikutnya, kita akan menyimak penjelasan tentang suatu konsep fisika pada fitur Matematika dan Sains berikut.

Matematika dan Sains **Hukum Pemantulan Cahaya**

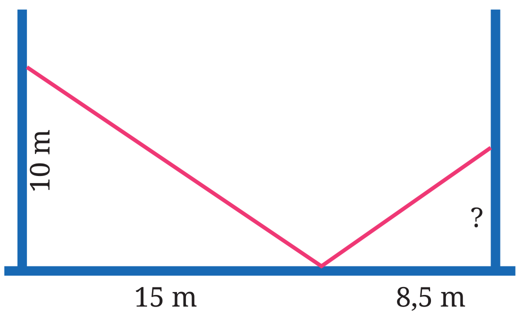
Dalam bidang fisika, kita mengenal istilah hukum pemantulan cahaya. Misalkan kita ilustrasikan peristiwa pemantulan cahaya seperti pada Gambar 6.12. Terdapat tiga buah garis yang merepresentasikan sinar datang, sinar pantul, dan garis normal. Garis normal adalah garis yang tegak lurus dengan bidang pantul. Secara singkat, hukum pemantulan cahaya berbunyi: *sudut pantul cahaya berukuran sama besar dengan sudut datang cahaya*.



Gambar 6.12 Ilustrasi Pemantulan Cahaya

Contoh 6.16 Pantulan Cahaya

Pada sebuah pameran di museum, terdapat dekorasi cahaya yang melibatkan beberapa lampu. Satu buah lampu ditempelkan pada dinding berjarak 10 m dari lantai. Cahaya lampu ini diarahkan ke sebuah cermin yang berjarak 15 m dari dinding tersebut dan memantulkan cahaya ke dinding lain yang berjarak 8,5 m dari cermin tersebut. Supaya lebih jelas, silakan melihat Gambar 6.13. Pada ketinggian berapa pantulan cahaya mencapai tembok di hadapan tembok pertama?



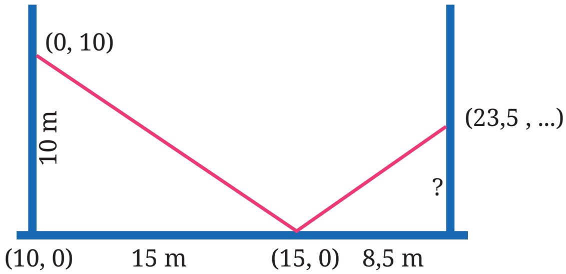
Gambar 6.13 Pemantulan Cahaya di Museum

Alternatif penyelesaian:

Kita akan menggunakan fungsi nilai mutlak dalam bentuk:

$$f(x) = a|x - h| + k$$

dengan (h, k) adalah titik puncak dari grafik fungsi nilai mutlaknya. Kita dapat menelaah masalah ini dalam koordinat Kartesius seperti pada gambar berikut.



Gambar 6.14 Pemantulan Cahaya dalam Koordinat

Karena titik puncaknya adalah $(h, k) = (15, 0)$, dengan metode substitusi, diperoleh

$f(x) = a|x - 15| + 0 = a|x - 15|$

Selanjutnya, karena (0, 10) berada pada garis, diperoleh

$10 = a|0 - 15| \leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

Dengan demikian, persamaan nilai mutlak yang diinginkan adalah $f(x) = \frac{2}{3}|x - 15|$. Berdasarkan persamaan tersebut, kita dapat menentukan ketinggian pantulan cahaya hingga mencapai tembok. Caranya adalah dengan mensubstitusikan $x = 23{,}5$ ke dalam fungsi $f(x)$.

$f(23{,}5) = \frac{2}{3}|23{,}5 - 15| = \frac{17}{3}$

Jadi, pantulan cahaya mencapai tembok di hadapan tembok pertama pada ketinggian $\frac{17}{3}$ m.

Mari Mencoba 6.16

Samosir sedang bermain senter. Dia berdiri di hadapan tembok dan cermin berada sejajar di antara dia dan tembok. Dia mengarahkan sinar senter ke cermin tersebut dan pantulan sinarnya mengenai tembok. Samosir memegang senter pada ketinggian 1 m, jarak antara dia dan cermin 5 m, dan jarak dia ke tembok 15 meter. Berapa tinggi pantulan sinar di tembok?

3. Pemodelan Fungsi Tangga

Pada bagian ini kita akan mempelajari penerapan fungsi tangga terkait beberapa permasalahan.

Definisi 6.9 **Fungsi Tangga**

Fungsi tangga adalah fungsi yang bernilai konstan pada interval-interval dimana ia didefinisikan.

Catatan: Terdapat variasi definisi dari fungsi tangga. Ada yang mensyaratkan banyak intervalnya harus berhingga. Ada pula yang mensyaratkan intervalnya harus seragam sedemikian rupa sehingga grafiknya tampak seperti tangga sungguhan. Pada buku ini, kita menggunakan definisi yang lebih umum agar kamu dapat mempelajari banyak kasus khusus dari fungsi tangga.

Contoh fungsi tangga yang memenuhi definisi tersebut adalah sebagai berikut.

- Fungsi atap dengan lambang $f(x) = \lceil x \rceil$ yang bermakna bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x.
- Fungsi lantai dengan lambang $f(x) = \lfloor x \rfloor$ yang bermakna bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x.
- Fungsi pembulatan dengan lambang $f(x) = [x]$ yang bermakna bilangan bulat terdekat ke x.

Selanjutnya, kita akan mempelajari pemodelan menggunakan fungsi tangga pada contoh berikut.

Contoh 6.17 Penerapan dalam Biaya Telepon

Budi ingin menelepon kakaknya yang sedang berada di luar kota karena kangen dan sedang momen hari raya. Namun, dia belum mengisi pulsa. Berdasarkan informasi di salah satu situs web, rincian biaya yang dibutuhkan sebagai berikut. Untuk setiap menit, dia harus membayar sebesar Rp250,00 pada penyedia jasa telepon dengan skema biaya dihitung dengan membulatkan ke menit atas. Misalkan Budi menelepon selama 1,3 menit maka dia harus membayar untuk 2 menit, yakni 500 rupiah.

1. Buat tabel yang menjelaskan hubungan antara lama menelepon dalam menit dan total biaya yang dibutuhkan.
2. Gambarkan grafiknya dalam bidang Kartesius.

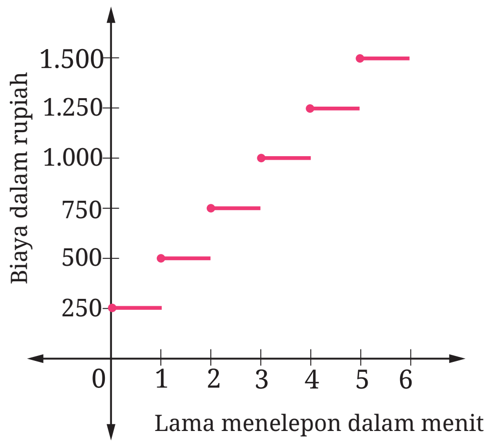
3. Tuliskan fungsi yang menyatakan total biaya yang dibutuhkan dalam lama menelepon.
4. Jika ingin menelepon selama 3 jam, apakah pulsa sebesar Rp25.000,00 cukup?

Alternatif penyelesaian:

1. Berdasarkan informasi pada soal, kita dapat membuat tabel sederhana untuk menit dan besar biaya menelepon sebagai berikut.

Menit	0	1	2	3	4	5	6	7
Biaya	0	250	500	750	1.000	1.250	1.500	1.750

2. Karena skema biaya menelepon dengan membulatkan biaya ke bilangan bulat atas, grafik dari permasalahan tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 6.15 Grafik Biaya Menelepon

3. Fungsi yang dapat merepresentasikan fenomena di atas adalah fungsi tangga dengan notasi berikut:

   $f(x) = 250k,\ k - 1 < x \leq k,\ k = 1, 2, 3, \ldots.$

   Maksud notasi tersebut adalah misalnya kita memiliki $x = 2{,}7$, karena $2 < 2{,}7 \leq 3$, maka $f(2{,}7) = 250 \times 3 = 750$. Notasi lain dari fungsi ini dapat dinyatakan dengan bantuan fungsi atap $f(x) = 250 \times \lceil x \rceil$.

4. Lama waktu 3 jam dapat dinyatakan sebagai 180 menit. Artinya, biaya yang dibutuhkan oleh Budi untuk menelepon adalah $180 \times 250 = 45.000$. Karena Budi hanya memiliki uang sebesar Rp25.000,00, uangnya tidak cukup untuk menelepon selama 3 jam.

Mari Mencoba 6.17

Sebuah tempat penyewaan konsol permainan menerapkan aturan sebagai berikut.

- Biaya sebesar 20 ribu untuk 1 jam pertama.
- Jika melebihi 1 jam sampai batas 2 jam, penyewa membayar 40 ribu.
- Jika melebihi 2 jam sampai batas 3 jam, penyewa diharuskan membayar 60 ribu. Aturan berlaku juga untuk jam-jam berikutnya.

Buatlah tabel, grafik, dan fungsi terkait permasalahan tersebut seperti pada contoh sebelumnya. Tentukan juga berapa jam maksimal Andi dapat menyewa konsol permainan di tempat tersebut jika dia memiliki uang 125 ribu rupiah.

4. Pemodelan Fungsi Sesepenggal

Pada bagian ini kita akan mempelajari pemodelan menggunakan fungsi sesepenggal atau terkadang disebut sepotong-sepotong. Definisinya sebagai berikut.

Definisi 6.10 **Fungsi Sesepenggal**

Fungsi sesepenggal adalah fungsi yang didefinisikan dengan beberapa formula pada sejumlah daerah asal.

Fungsi nilai mutlak dan fungsi tangga termasuk fungsi sesepenggal. Contoh sederhana lain adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ e^x, & 0 \leq x < \pi \\ \lceil x \rceil, & x \geq \pi \end{cases}$$

Selanjutnya, perhatikan contoh berikut, kemudian kerjakan Mari Mencoba untuk memahami pemodelan menggunakan fungsi sesepenggal.

Contoh 6.18 Penerapan Fungsi Sesepenggal

Mangiring mengikuti sebuah kompetisi yang melibatkan tiga aktivitas: kayak, bersepeda, dan berlari. Untuk kayak, dia menghabiskan 2 jam untuk menempuh jarak 20 km di sebuah danau. Selanjutnya, dia bersepeda sejauh 50 km selama 2 jam. Terakhir, dia berlari selama 1 jam sejauh 10 km.

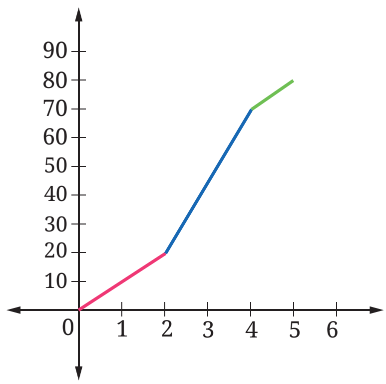
1. Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara waktu tempuh, total jarak yang ditempuh, dan kecepatan untuk ketiga jenis aktivitas.
2. Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara waktu terhitung dari awal lomba dan total jarak yang ditempuh pada bidang Kartesius.
3. Tuliskan fungsi total jarak yang ditempuh terhadap waktu tempuh.

Alternatif penyelesaian:

1. Berdasarkan informasi pada soal, kita dapat menyusun tabel berikut.

Kegiatan	Waktu Tempuh	Jarak Tempuh	Kecepatan
Kayak	2 jam	20 km	10 km/jam
Bersepeda	2 jam	50 km	25 km/jam
Berlari	1 jam	10 km	10 km/jam

2. Berdasarkan tabel yang telah dibuat, kita dapat menggambar grafik dengan memisalkan sumbu-x sebagai representasi waktu dalam jam dan sumbu-y untuk jarak tempuh dalam km.



Gambar 6.16 Grafik Perjalanan Mangiring

3. Untuk memformulasikan fungsi sesepenggal, kita meninjau satu per satu interval untuk setiap cabang lomba yang diikuti. Untuk 2 jam pertama, kecepatan Mangiring saat menggunakan kayak adalah 10 km/jam dengan titik awal (0, 0) sehingga ditulis $f(x) = 10x$, $0 \leq x \leq 2$. Selanjutnya, melewati 2 jam sampai jam keempat, kecepatan Mangiring adalah 25 km/jam dengan titik awal (2, 20) sehingga ditulis $f(x) = 25x - 30$, $2 < x \leq 4$. Terakhir, Mangiring berlari dengan kecepatan 10 km/jam dengan titik awal (4, 70) sehingga kita memperoleh fungsi $f(x) = 10x + 30$, $4 < x \leq 5$. Dengan

menggabungkan ketiga kasus tersebut, kita dapat menuliskan fungsi sesepenggalnya sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} 10x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 25x - 30, & 2 < x \leq 4 \\ 10x + 30, & 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

Mari Mencoba 6.18

Surya mengikuti sebuah kompetisi yang melibatkan tiga aktivitas: bersepeda, berenang, dan berlari. Surya menghabiskan 3 jam untuk menempuh jarak 50 km di lintasan sepeda. Selanjutnya, dia berenang sejauh 1 km selama 15 menit. Terakhir, dia berlari selama 2 jam sejauh 30 km.

1. Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara waktu tempuh, total jarak yang ditempuh, dan kecepatan untuk ketiga jenis aktivitas.
2. Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara waktu terhitung dari awal lomba dan total jarak yang ditempuh pada bidang Kartesius.
3. Tuliskan fungsi total jarak yang ditempuh terhadap waktu tempuh.

Berbagai fungsi yang telah kamu pelajari pada bab ini dapat membantumu untuk menjelajahi keanekaragaman hayati di Kepulauan Raja Ampat. Ayo, kerjakan aktivitas berikut!

Aktivitas Interaktif

Untuk mengetahui bagaimana fungsi-fungsi pada bab ini dapat digunakan untuk memodelkan keanekaragaman hayati di Kepulauan Raja Ampat, silakan mengunjungi *https://s.id/jelajah-raja-ampat* atau memindai kode respons cepat di samping!

Pindai

Tautan tersebut mengajakmu menggunakan fungsi eksponensial, fungsi logaritma, dan fungsi rasional untuk memodelkan banyaknya spesies tanaman berkayu sebagai fungsi terhadap luas wilayah tempat tinggal tanaman tersebut. Tak hanya itu, kamu juga dapat menggunakan fungsi-fungsi lainnya, seperti fungsi linear dan fungsi pangkat, serta fungsi-fungsi baru, yaitu fungsi logistik dan fungsi Weibull.

Selama menggunakan aplikasi, jawablah kedua pertanyaan berikut.

1. Menurutmu, fungsi apa yang paling baik untuk memodelkan banyaknya spesies tanaman berkayu di Kepulauan Raja Ampat? Apa persamaan fungsinya?
2. Bagaimana strategimu dalam memilih fungsi terbaik tersebut?

Latihan C Fungsi Non-aljabar

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar!

Pemahaman Konsep

Tentukan *Benar* atau *Salah* setiap pernyataan pada soal nomor 1 dan 2.

1. Fungsi konstan $f(x) = 1$ merupakan fungsi eksponensial.
2. Ada fungsi sesepenggal yang merupakan gabungan dari fungsi tangga dan fungsi eksponensial.

Penerapan Konsep

3. Sebuah koloni bakteri bermula dengan 500 bakteri. Bakteri jenis ini mampu membelah diri menjadi dua setiap setengah jam sekali.
   a. Berapa banyak bakteri setelah tiga jam?
   b. Berapa banyak bakteri setelah t jam?
   c. Berapa banyak bakteri setelah 40 menit?
   d. Gambarkan fungsi populasi dari fenomena tersebut, kemudian estimasikan kapan populasinya mencapai 100.000.
4. Made berangkat dari rumahnya yang berada di pinggir jalan raya, serupa dengan Gambar 6.10. Dia bersepeda menyusuri trotoar di samping jalan raya tersebut menuju sebuah taman bermain. Jarak rumahnya ke taman bermain adalah 10 km. Di tengah-tengah pusat perbelanjaan dan rumah Made, terdapat restoran Singkawang.
   a. Buatlah tabel untuk menunjukkan jarak Made dari rumah dan seberapa jauh dia dari restoran Singkawang dimulai dari awal perjalanan dari rumah sampai tiba di taman bermain.

b. Gambarlah grafik yang merepresentasikan hubungan antara jarak Made ke rumah dan jarak Made ke restoran Singkawang.

c. Temukan fungsi yang menyatakan jarak Made ke restoran Singkawang dalam jarak Made ke rumah.

5. Di sebuah warnet, pengaturan biaya pembayaran sewa internet dihitung dengan cara berikut. Untuk 10 menit pertama, dikenakan biaya sebesar Rp2.000,00. Artinya, jika pengguna warnet mengakses internet selama kurang dari atau sama dengan 10 menit, dia harus membayar sebesar dua ribu rupiah. Begitu juga untuk setiap 10 menit selanjutnya, dikenakan biaya sebesar Rp2.000,00.

   a. Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara lama menggunakan fasilitas warnet dan biaya pakainya.

   b. Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara lama menggunakan fasilitas warnet dan biaya pakainya.

   c. Tuliskan fungsi biaya pakai fasilitas warnet dalam satuan waktu.

   d. Apakah dengan memiliki uang 300 ribu rupiah, kita bisa menghabiskan waktu selama 5 jam di warnet?

6. Kevin mengikuti sebuah kompetisi yang melibatkan empat aktivitas: kayak, bersepeda, berenang, dan berlari. Dia menempuh jarak sejauh 20 km dengan kayak selama 3 jam. Selanjutnya, dia menghabiskan 2 jam untuk menempuh jarak 40 km di lintasan sepeda. Kemudian, dia berenang sejauh 1 km selama 20 menit. Terakhir, dia berlari selama 2,5 jam sejauh 25 km.

   a. Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara waktu tempuh, total jarak yang ditempuh, dan kecepatan untuk keempat jenis aktivitas.

   b. Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara waktu terhitung dari awal lomba dan total jarak yang ditempuh pada bidang Kartesius.

   c. Tuliskan fungsi total jarak yang ditempuh terhadap waktu tempuh.

Ringkasan

Pindai

Kamu dapat membaca ringkasan setiap bab dengan memindai kode respons cepat di samping.

Uji Kompetensi Bab 6

Kerjakanlah soal-soal uji kompetensi berikut ini dengan benar!

Pemahaman

Tentukan apakah pernyataan nomor 1—3 berikut *Benar* atau *Salah*.

1. Fungsi logaritma adalah invers dari fungsi eksponen, yaitu jika $y = {}^{a}\log x$, maka $a^y = x$. Demikian juga sebaliknya, jika $a^y = x$, maka $y = {}^{a}\log x$.
2. Misalkan $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ adalah fungsi rasional dengan derajat $P(x)$ sama dengan $Q(x)$, maka asimtot horizontal grafik f melalui rasio pangkat tertinggi.
3. Pertumbuhan yang bertambah sebanyak dua satuan untuk setiap satuan waktu merupakan pertumbuhan secara eksponensial.

Lengkapilah pernyataan nomor 4 dan 5 berikut dengan isian yang paling tepat.

4. Fungsi $f(x) = \log x^2$ memiliki daerah asal ... dan daerah hasil ....
5. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ dengan n bilangan bulat genap lebih dari 1. Daerah asal fungsi f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$ yang menyebabkan ....
6. Berikan contoh fungsi sesepenggal.
7. Tentukan daerah asal fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
8. Gambarkan fungsi nilai mutlak $h = |2x - 3|$ dalam bidang Kartesius.

Penerapan

9. **Suhu Kopi.** Segelas kopi yang suhunya 100 °C diletakkan pada sebuah ruangan bersuhu 25 °C. Waktu t (dalam menit) yang diperlukan agar suhu kopi tersebut menjadi T °C dapat ditentukan dengan rumus berikut.
$$t = 20 \log \left(\frac{75}{T - 25}\right)$$
Berapa lama waktu yang diperlukan agar suhu kopi tersebut menjadi 60 °C?
10. **Perjalanan.** Nyoman pergi ke pantai sejauh 50 km. Dia menempuh setengah perjalanan dengan kecepatan tertentu (dalam km/jam). Setengah perjalanan selanjutnya, Nyoman melakukan perjalanan dengan kecepatan 15 km/jam lebih lambat. Misalkan x mewakili kecepatan dalam km/jam dan fungsi w menyatakan waktu perjalanan.

a. Tentukan model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman dalam menempuh perjalanan pertama.

b. Tentukan model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman dalam menyelesaikan setengah perjalanan selanjutnya.

11. Aang adalah pelari 100 m. Dia mengikuti lomba dalam rangka peringatan Hari Kemerdekaan Republik Indonesia. Dia berlari pada sebuah lintasan 100 m di desanya. Untuk keperluan dokumentasi, seorang fotografer berdiri di samping tepat tengah lintasan.

    a. Buatlah tabel yang menjelaskan jarak Aang relatif terhadap awal lintasan dan jarak dia terhadap sang fotografer.

    b. Gambarkan grafik yang menyatakan jarak Aang terhadap sang fotografer dalam jarak Aang terhadap lintasan.

    c. Tuliskan fungsi yang menyatakan jarak Aang terhadap sang fotografer dalam jarak Aang terhadap lintasan.

Penalaran

12. Jika $a \geq b > 1$, tentukan nilai terbesar yang mungkin untuk ${}^{a}\log \frac{a}{b} + {}^{b}\log \frac{b}{a}$.

13. Diketahui grafik fungsi $f(x) = \dfrac{(x+2)^k(x^2-1)}{(x^2+x-2)(x^2+3x+2)}$ untuk bilangan asli k. Tentukan nilai k agar fungsi f mempunyai satu asimtot vertikal.

14. Buktikan teorema berikut.

    Sebuah fungsi eksponensial $f(x) = a^x$ merupakan fungsi naik jika $a > 1$, fungsi konstan jika $a = 1$, dan fungsi turun jika $a < 1$.

Proyek

Pindai

Kamu dapat mengerjakan proyek berjudul Prediksi Banyak Penduduk dengan memindai kode respons cepat di samping.

Pengayaan

Kamu telah mempelajari fungsi dan pemodelannya pada bab ini. Untuk memperkaya atau memperdalam pengetahuan dan keterampilan yang dimiliki, kamu dapat mempelajari fungsi rasional dengan mengunjungi *https://s.id/FungsiRasional* atau memindai kode respons cepat di samping.

Pindai

Refleksi

Pada Bab 6 ini kamu telah mempelajari berbagai fungsi, kemudian menggunakan fungsi-fungsi tersebut untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Selanjutnya, refleksikan pengalaman belajarmu dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut!

1. Ceritakan sejauh mana manfaat yang dirasakan setelah kamu berdinamika pada bab ini!
2. Apa saja strategi belajar yang kamu gunakan untuk memahami bab ini? Apakah semua strateginya sudah membantu kamu untuk belajar secara optimal?

Glosarium

amplitudo setengah kali jarak antara nilai maksimum dan minimum sebuah fungsi periodik

asimtot suatu garis lurus yang didekati oleh kurva lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di jauh tak terhingga. Asimtot juga bisa diartikan dengan sebuah garis lurus yang sangat dekat dengan kurva lengkung di titik jauh tak terhingga

bilangan real bilangan yang terdiri atas bilangan rasional atau irasional

daerah asal himpunan semua bilangan yang membuat sebuah fungsi terdefinisi

daerah hasil himpunan semua bilangan yang menjadi pasangan dari semua anggota daerah asal sebuah fungsi

derajat (satuan sudut) salah satu ukuran sudut yang menggunakan sudut dengan besar 1/360 putaran sebagai satu satuannya

determinan matriks berordo 2 × 2 jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, determinan dari matriks A dapat dinyatakan det A = $|A|$ = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

dilatasi transformasi yang mengubah jarak suatu titik terhadap suatu titik tertentu dengan faktor pengali tertentu

eksponen bilangan b yang menyatakan pangkat pada bentuk a^b

elemen matriks bilangan-bilangan penyusun suatu matriks

fungsi pemetaan setiap anggota suatu himpunan (dinamakan daerah asal) pada tepat satu anggota himpunan yang lain (dinamakan daerah kawan)

gaya dorongan atau tarikan terhadap suatu objek

geometri cabang matematika yang menerangkan sifat-sifat garis, sudut, bidang, dan ruang

grafik grafik suatu persamaan dalam x dan y merupakan himpunan semua titik (x, y) pada bidang koordinat yang memenuhi persamaan tersebut

hasil kali titik hasil kali titik antara dua vektor merupakan hasil penjumlahan dari perkalian komponen-komponen yang bersesuaian dari kedua vektor tersebut

koefisien faktor numerik dari suatu monomial

koefisien utama koefisien dari suku utama polinomial

komposisi transformasi transformasi majemuk yang memuat lebih dari satu transformasi

konstanta monomial yang tidak memuat variabel

lingkaran satuan lingkaran pada bidang koordinat yang pusatnya di titik asal (0, 0) dan berjari-jari satu satuan

logaritma komponen pangkat yang diperlukan untuk memangkatkan bilangan dasar supaya mendapatkan bilangan tertentu (jika bilangan dasarnya 10, maka log 100 = 2, artinya 10 pangkat 2 = 100)

matriks susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom. Susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan di dalam kurung biasa "$(\quad)$", kurung siku "$[\quad]$", atau "$\|\quad\|$"

metode Horner salah satu cara untuk melakukan pembagian polinomial dan merupakan bentuk penyederhanaan dari pembagian bersusun

ordo matriks ukuran dari suatu matriks yang ditentukan oleh banyak baris dan banyak kolom pada matriks itu

periode panjang interval minimum untuk sebuah fungsi periodik agar nilainya berulang

polinomial bentuk aljabar yang berupa monomial atau penjumlahan dari dua atau lebih monomial

radian salah satu ukuran sudut yang besarnya merupakan perbandingan antara panjang busur lingkaran di depan sudut tersebut dan jari-jari lingkaran tersebut

refleksi pencerminan; transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin

rotasi transformasi yang memindahkan suatu titik dengan cara memutar titik tersebut sejauh α derajat terhadap suatu titik tertentu

sudut di dalam trigonometri, sudut dapat dipandang sebagai perputaran sinar garis dari sisi awal menuju sisi akhir

suku utama suku dari fungsi polinomial yang memiliki derajat tertinggi

transformasi geometri perubahan posisi atau ukuran dari suatu objek geometri (titik, garis, kurva, dan himpunan titik-titik lain) pada bidang

translasi transformasi yang memindahkan suatu titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu

vektor besaran yang mempunyai nilai dan arah

vektor satuan baku vektor yang salah satu komponennya 1 dan komponen lainya 0

Daftar Pustaka

Abramson, Jay, Valeree Falduto, Rachael Gross, David Lippman, Rick Norwood, Melonie Rasmussen, Nicholas Belloit, Jean-Marie Magnier, Harold Whipple, and Christina Fernandez. *Algebra and trigonometry*. OpenStax, 2015.

Abubakar, A. S., & Kaisupy, R. A. *Peran Kriptografi dalam Aplikasi WhatsApp*. Yogyakarta: Universitas Amikom Yogyakarta, (2018). *https://www.academia.edu/38051131/Hubungan_whatsapp_dengan_kriptografi.*

Annur, Cindy Mutia. "Meski Trennya Turun, Media Online Tetap Jadi Sumber Berita Utama Masyarakat Indonesia." *databoks*. Diterbitkan pada 16 Juni 2023. *https://databoks.katadata.co.id/datapublish/2023/06/16/meski-trennya-turun-media-online-tetap-jadi-sumber-berita-utama-masyarakat-indonesia.*

Anton, Howard, and Chris Rorres. *Elementary linear algebra* (11th ed.). Canada: Anton Textbooks, 2014.

Aufmann, Richard N., Vernon C. Barker, and Richard D. Nation. College algebra and trigonometry. USA: Brooks/Cole Publishing Company, 2011.

Azis, Yunas S. "Suplemen, Gizi Seimbang, dan Atlet." *Kompas*. Diakses pada 2 Juli 2021. *https://interaktif.kompas.id/baca/gizi-seimbang/.*

Citizen Math. "Going Once, Going Twice: How much should you bid in an auction?" 2 Februari 2024. *https://www.citizenmath.com/lessons/going-once-going-twice.*

Desmos. "Burning Daylight". Diakses pada 13 Agustus 2021. *https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/56d8aee5637a85a2078c257d?collections=featured-collections,5e73b36a5141777627553357.*

Dumairy. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2012.

Eric Balzarini et al. *Pre-Calculus 12*. McGraw-Hill Ryerson, 2012.

"Fungsi Nilai Absolut." *CUEMATH*. Diakses pada 14 Juni 2024. *https://www-cuemath-com.translate.goog/algebra/absolute-value-function/?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=id&_x_tr_hl=id&_x_tr_pto=tc&_x_tr_hist=true*.

Goode, Stephen W., and Scott Annin. *Differential equations and linear algebra.* Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

Grove, Margaret. *Maths in Focus: Mathematics Extension 1*. Cengage Learning, 2019.

Hariyanto dan Kurniawan. "Hari ini Tsunami Aceh Pernah Terjadi 2004 Silam, ini Fakta Dahsyatnya Bencana." *Kompas TV*. Diakses pada 19 Agustus 2021. *https://www.kompas.tv/amp/article/133356/videos/hari-ini-tsunami-aceh-pernah-terjadi-2004-silam-ini-fakta-dahsyatnya-bencana?page=2*.

Holliday, Luchin, Cuevas, Carter, Marks, Day, Casey, & Hayek. *Algebra 2*. New York: Glencoe/McGraw-Hill, 2008.

Illustrative Mathematics. "Illustrative Mathematics. Trigonometric Functions." Diakses pada 5 Juli 2021. *https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/6/index.html.*

Illustrative Mathematics. “Predicting Populations.” Diakses pada 1 April 2024. *https://im.kendallhunt.com/HS/students/1/5/21/index.html*.

Illustrative Mathematics. “*Polynomial and Rational Functions*.” Diakses pada 15 Juli 2021. *https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/2/index.html*.

Istiqomah, S. Pd. “POLINOMIAL (SUKU BANYAK) MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XI.” Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2020.

Kontan.co.id. “Tsunami Aceh, Bencana Alam Terbesar & Memori Kelam Tahun 2004.” *Kontan.co.id*. Diakses pada 19 Agustus 2021. *https://nasional.kontan.co.id/news/tsunami-aceh-bencana-alam-terbesar-16-tahun-lalu*.

Kristanto, Y. D. *Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA Kelas X*. Jakarta: Grasindo, 2016.

Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. *Aljabar dan Trigonometri*. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press, 2017.

Larson, Ron, Bruce H. Edwards, and David C. Falvo. *Elementary Linear Algebra* (6th ed.). USA: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.

Margaret (Peg). Smith, and Mary Kay Stein. *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussion*. National Council of Teachers of Mathematics, 2018.

Martin-Gay, Elayn. *Beginning & intermediate algebra*. Pearson Higher Ed, 2012.

McAskill, B., Watt, W., Balzarini, E., Johnson, B., Zarski, C. *Pre-Calculus 12*. Canada: McGraw-Hill Ryerson Ltd, 2012.

Morrison, Karen, and Nick Hamshaw. *Cambridge IGCSE mathematics core and extended Coursebook with CD-ROM*. Cambridge University Press, 2015.

Nugroho, Hadi. “Pengertian Motif Batik dan Filosofinya.” *Kementerian Perindustrian Republik Indonesia*. 28 Februari 2020. *https://bbkb.kemenperin.go.id/index.php/post/read/pengertian_motif_batik_dan_filosofinya_0*.

Open Up Resources. “Polynomial Functions.” Diakses pada 15 September 2021. *https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-3/index.html.*

Open Up Resources. “Trigonometric Functions, Equations, and Identities.” Diakses pada 17 September 2021. *https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-7/index.html.*

“Password strength.” *WIKIPEDIA*. Diakses pada 13 Agustus 2021. *https://en.wikipedia.org/wiki/Password_strength*.

Pender, William, David Sadler, Derek Ward, Brian Dorofaeff, dan Julia Shea. *Cambridge MATHS Stage 6: Mathematics Advanced. Year 11*. Cambridge University Press, 2019.

Purcell, E. J., D. Varberg, and S. E. Rigdon. "Calculus (9th Edition)." (2007).

Rahmalia, Iveta. *“Apakah Filosofi Batik di Luar Pulau Jawa Sama dengan Batik yang Berasal dari Jawa?” Bobo.id*. Diakses pada 5 Juli 2021. *https://bobo.grid.id/read/082135113/apakah-filosofi-batik-di-luar-pulau-jawa-sama-dengan-batik-yang-berasal-dari-jawa-yuk-cari-tahu?page=all.*

Rawuh. *Geometri Transformasi*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 1992.

Sinaga, Bornok, dkk. *Buku Guru Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, 2019.

Sinaga, Bornok, dkk. *Buku Siswa Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, 2019.

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. *Calculus: early transcendentals, ninth edition*. Cengage Learning, 2020 .

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. *Algebra and Trigonometry* (4^{th} ed.). Boston: Cengage Learning, 2016.

Sukino. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib*. Jakarta: Erlangga, 2017.

Thomas, G.B. *Calculus Early Transcendentals: 12th Edition*. New York: Addison-Wesley, 2010.

Sumber Data:

Bab 1: https://databoks.katadata.co.id/ dan https://power.larc.nasa.gov/

Bab 2: Badan Pusat Statistik, Susenas dan BPS Kabupaten Magelang

Bab 3: https://pasanglaut.com dan https://www.timeanddate.com/

Bab 6: https://bali.bps.go.id/

Daftar Sumber Gambar

Sampul Buku: diunduh dari *https://flic.kr/p/49xhPC* pada 24 September 2024

Sampul Bab 1: diunduh dari *https://unsplash.com/photos/man-in-white-polo-shirt-sitting-in-front-of-computer-HIlhaf9MsN0* pada 24 September 2024

Gambar 1.3: diunduh dari *https://bbkb.kemenperin.go.id/index.php/post/read/pengertian_motif_batik_dan_filosofinya_0* pada 15 Juli 2021

Gambar 2.10: diunduh dari *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Borobudur,_Java,_Indonesia,_20220817_1016_8757.jpg* pada 10 Mei 2024

Sampul Bab 3: diunduh dari *https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Ever_Given_in_Suez_Canal_viewed_from_ISS.jpg* pada 20 Mei 2024

Gambar 3.37 diunduh dari *https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Ever_Given_in_Suez_Canal_viewed_from_ISS.jpg* pada 20 Mei 2024

Sampul Bab 4: diunduh dari *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Royal-clipper.jpg* pada 22 Mei 2024

Gambar 4.1: diunduh dari *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ca%C3%AFque_bora_bora_croisi%C3%A8res.jpg* pada 22 Mei 2024

Gambar 4.7: diunduh dari *https://pixabay.com/id/photos/upacara-kemerdekaan-perayaan-6517435* pada 23 April 2024

Gambar 4.15: diunduh dari *https://www.flickr.com/photos/11642572@N06/23393969440/in/album-72157662312317745/* pada 23 April 2024

Sampul Bab 6: diunduh dari *https://www.flickr.com/photos/unwomen/24572962378/* pada 24 September 2024

Indeks

Profil Pelaku Perbukuan

Profil Penulis

Nama Lengkap : Yosep Dwi Kristanto, M.Pd.
Email : yosepdwikristanto@usd.ac.id
Instansi : Universitas Sanata Dharma; Johannes Kepler University
Alamat Instansi : Jl. Affandi, Mrican, Caturtunggal, Depok, Sleman, DIY; Altenberger Str. 69, 4040 Linz
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta (2016—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-2: Program Pascasarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2013—2015)
2. S-1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Malang (2008—2012)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
3. Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
4. Buku Panduan Guru: Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Exploring Preservice Mathematics Teachers' Noticing of Students' Thinking on Probability
2. Adaptasi dan Implementasi Prinsip-Prinsip Desain Pembelajaran Jarak Jauh Daring Oleh Calon Guru Matematika (2023)
3. How More Can Be Less: Facing Kurikulum Merdeka and Its Paradox of Choice (2022)
4. Towards a mathematics textbook for supporting 21st century learning: The student perspective (2020)

Portofolio selengkapnya dapat dilihat pada laman *http://people.usd.ac.id/~ydkristanto/* dan *https://kristantomath.com/*.

Profil Penulis

Nama Lengkap : Muhammad Taqiyuddin
Email : taqimathed@gmail.com
Instansi : University of Auckland
Alamat Instansi : 38 Princes Street, Auckland CBD, Auckland 1010

Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. *Curriculum Specialist*, Sekolah.mu (2022)
2. Asisten Dosen, University of Georgia (2020—2021)
3. Guru Matematika Sekolah Menengah (2016—2019)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-3: Pendidikan Matematika, University of Auckland, Selandia Baru (2021—sekarang)
2. S-2: Pendidikan Matematika, University of Georgia, Amerika Serikat (2019—2021)
3. S-1: Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung (2012—2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
3. Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
4. Buku Panduan Guru: Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. After School Closure: How Indonesian Senior High School Responded to Students' Learning Loss (2023)
2. Stories of Our Fellow Mathematics Tutors during Covid-19 Pandemic (2022)
3. Pre-service teachers' operative and figurative actions: The case of one-variable inequality (2021)
4. Analisis buku matematika kurikulum 1975 dan kurikulum 2013 (2020)
5. Analisis Buku Matematika Sekolah Menengah Atas Pada Topik Turunan (2019)
6. Telaah buku matematika Indonesia pada topik pertidaksamaan matematika (2018)

Portofolio selengkapnya dapat dilihat pada laman
https://s.id/GoogleScholarMuhammadTaqiyuddin

Profil Penulis

Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
Email : alazhari.masta@upi.edu
Instansi : UPI
Alamat Instansi : FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No.229, Kota Bandung, Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Program Studi S-1 Program Studi Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-3: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2013—2018)
2. S-2: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2011—2013)
3. S-1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia (2007—2011)

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku Siswa dan Guru Matematika SD Kelas I, Puskurbuk (2022)
2. Buku Siswa dan Guru Matematika SD Kelas II, Puskurbuk (2022)
3. Buku Siswa dan Guru Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X, Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud (2020)
4. Buku digital Pusat Perbukuan untuk Program Kelas IV, V, VI (2019)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Siswa dan Buku Guru Matematika Peminatan SMA Kelas X, Puskurbuk (2019)
2. Math Project untuk kelas I SD, IV SD, VII SD, Penerbit Yrama Widya Bandung (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

Hasil penelitian selengkapnya dapat dilihat dengan id berikut.

Id Scopus	57189662322
Id Google Scholar	5cxkPMUAAAAJ
Id Sinta	6007709

Profil Penulis

Nama Lengkap : Elyda Yulfiana, S.Pd.
Email : elydayulfiana@gmail.com
Instansi : SMA Negeri 7 Yogyakarta
Alamat Instansi : Jl. MT. Haryono No.47, Suryodiningratan, Kec. Mantrijeron, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta
Bidang Keahlian : Guru Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Guru matematika di SMA Negeri 7 Yogyakarta (2018—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. Pendidikan Profesi Guru, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta (2018)
2. S-1: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Pendidikan Matematika, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa Yogyakarta (2012—2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
3. Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
4. Buku Panduan Guru: Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
5. Yulfiana, E. Jalan Menuju Guru yang Mencintai Anak Didik dan Murah Hati. In Eko Budi Santoso (Ed.), Jalan Menuju Guru Matematika yang Mencintai Anak Didik dan Profesinya (pp. 77-86). Yogyakarta: Sanata Dharma University Press (2018).

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Instansi : –
Alamat Instansi : FKIP Universitas Jember, Jl. Kalimantan nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Program Studi S-1, S-2, dan S-3 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (1983—sekarang)
2. Dosen Penguji Disertasi S-3 Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas Negeri Surabaya (2016–sekarang)
3. Dosen Penguji Tesis S-2 Universitas Terbuka (2012—sekarang)
4. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007—2016)
5. Guru Matematika di SMA (1981–1985)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S-3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, lulus tahun 2005
2. S-2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1996
3. S-1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1981

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas X (2022)
2. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas XI dan XII (2021)
3. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika Untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X (2019)
4. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII (2018) (Editor)
5. Matematika Fisika 1 dan Matematika Fisika 2 (2018)
6. Strategi Belajar Mengajar IPA (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Kapita Selekta: Relasi & Fungsi, Limit, Turunan, dan Integral (2022)
2. Geometri Analitik: Tinjauan pada Bidang Datar (2020)
3. Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi dan Fungsi (2018)
4. Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193683524.

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng
Email : kiki@sci.ui.ac.id
Instansi : Universitas Indonesia
Alamat Instansi : Kampus UI Depok, 16424
Bidang Keahlian : Matematika Kombinatorik

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. 1986—sekarang : Dosen Tetap Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia
2. 2018—2023 : Vice President of Institute Combinatorics and Its Application
3. 2012—2016 : Wakil Presiden Indonesian Mathematical Society (IndoMS)
4. 2016—sekarang : Chief Editor of Indonesian Journal of Combinatorics
5. 2013—sekarang : Managing Editor of Electronic Journal of Graph Theory and Applications

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. 2001—2006 : Doctor of Philosophy, University of Ballarat, Australia
2. 1985—1987 : Magister Matematika, Institut Teknologi Bandung
3. 1979—1985 : Sarjana Matematika, Universitas Indonesia

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matriks dalam Pelabelan Graf (2023), UI Publishing

Judul Buku yang Pernah Ditelaah (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika SD Kelas VI (Buku Siswa dan Buku Guru)
2. Matematika SMP Kelas VII (Buku Siswa dan Buku Guru)
3. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XI (Buku Siswa dan Buku Guru)
4. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XII (Buku Siswa dan Buku Guru)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Sugeng, K.A., John, P., Lawrence, M.L.,Anwar, L.F., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Modular irregularity strength on some flower graphs, Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 2023, 11(1), pp. 27 -38.
2. Hinding, N., Sugeng, K.A., Nurlindah, Wahyudi, T.J., Simanjuntak, R., Two types irregular labelling on dodecahedral modified generalization graph, Heliyon, 2022, 8(11), e11197
3. Judul lain dapat dilihat di: *https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=12797262400*
   https://scholar.ui.ac.id/en/persons/kiki-ariyanti

Profil Ilustrator

Nama Lengkap : Yol Yulianto
Email : yolyulianto@gmail.com
Instansi : Polkadot
Alamat Instansi : Taman Rembrandt Blok R.04 No.88
Citra Raya Tangerang
Bidang Keahlian : Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Ilustrator Majalah Anak Ina, tahun 1998-2000
2. Ilustrator Majalah Ori-Kompas Gramedia, tahun 2001-2010
3. Ilustrator Majalah Superkids Junior, tahun 2011-2014
4. Ilustrator Freelance, tahun 2015-sekarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. SD Negeri Panggung 1 Semarang tahun belajar 1979-1985
2. SMP Negeri 3 Semarang tahun belajar 1985-1988
3. SMA Negeri 1 Semarang tahun belajar 1988-1991
4. FT Arsitektur Undip Semarang tahun belajar 1991-1996

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Rumah Ajaib, Penerbit Elexmedia Komputindo, tahun 2009
2. Karnaval Loli, Penerbit Elexmedia Komputindo, tahun 2009
3. Seri Buku Stiker Kolase, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2010
4. Cerita Rakyat Nusantara. Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2012
5. Siri Cerita Berirama, Penerbit PTS Malaysia, tahun 2016
6. Seri Komilag, Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2016-2019
7. Seri Aku Anak Cerdas, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2018
8. Seri 60 Aktivitas Anak, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2019
9. Seri Tangguh Bencana, Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2019
10. Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Kelas 5, Pusmenjar, tahun 2020

Penghargaan

1. Juara Pertama Lomba Komik Departemen Agama tahun 2004
2. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Pidie Jaya tahun 2017
3. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Mamasa tahun 2017
4. Lima karya terbaik Lomba Maskot Germas tahun 2018
5. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Bitung tahun 2019
6. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Manado tahun 2019

Profil Penyunting

Nama Lengkap : Uly Amalia, S.Si.
Email : ulyaaa13@gmail.com
Instansi : -
Alamat Instansi : -
Bidang Keahlian : Matematika Sekolah Dasar

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Editor, *proofreader*, dan penulis lepas (2012–sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-1: Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor (2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas IV (2023)
2. Target Nilai 100 Ulangan Tematik SD/MI Kelas 3 (2021)

Judul Buku yang Disunting dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
2. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
3. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas II, Bukit Mas Mulia (2023)
4. Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
5. Panduan Guru Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
6. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)
7. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)

Profil Penyunting Visual

Nama Lengkap : Nadia Mahatmi
Email : nadia.mahatmi@umn.ac.id
Instansi : Universitas Multimedia Nusantara
Alamat Instansi : Jl. Scientia Boulevard, Gading Serpong, Kel. Curug Sangereng, Kec. Kelapa Dua, Kab. Tangerang, Prop. Banten 15810
Bidang Keahlian : Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Desain Komunikasi Visual – Universitas Multimedia Nusantara (2017–sekarang)
2. Dosen Desain Komunikasi Visual – Telkom University (2015–2017)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. Magister Desain – Institut Teknologi Bandung (2012–2015)
2. Sarjana Desain Komunikasi Visual – Institut Teknologi Bandung (2005–2009)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. *Board Game Design to Learn about User Persona in Entrepreneurship Programme* in Kurikulum Merdeka (2023)
2. Ujicoba Buklet Aktivitas Museum Bank Indonesia untuk Siswa Sekolah Menengah (2021)
3. Perancangan Board Game Kolaboratif. Studi Kasus: Legenda Gunung Tondoyan (2021)
4. Mascot Design for the Indonesian Pavilion at World Expo 2020 (2020)
5. Activity Booklet Design for Museum Bank Indonesia for Middle School Students (2020)

Informasi Lain

Google Scholar
https://scholar.google.com/citations?hl=en&authuser=1&user=QKx9wA4AAAAJ

Profil Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : Dono Merdiko
Email : donoem.2022@gmail.com
Instansi : Praktisi Perbukuan
Alamat Instansi : Jl. Akmaliah No. 24, 13730
Bidang Keahlian : Desain Buku

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Penata Letak Penerbit Kasyaf. 2005-Sekarang
2. Penata Letak Mizan Group. 2013-2021
3. Penata Letak Lepas Pusat Kurikulum dan Perbukuan. 2014-2019

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. Bina Sarana Informatika, Manajemen Informatika, 2002

Buku yang Pernah dibuat Ilustrasi/desain (10 tahun terakhir)

1. Buku Seri Tematik, Pusat Kurikulum dan Perbukuan (2014–2019)
2. Buku Panduan Guru Pengembangan Pembelajaran untuk Satuan PAUD, Pusat Perbukuan (2021)
3. Buku Panduan Guru Sejarah untuk SMA/SMK Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
4. Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/SMK Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
5. Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
6. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
7. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)
8. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)