

ABSTRAK

FUNGSI SINUS DAN KOSINUS DALAM METRIK- p

Franz Sebastian Soetrisno
Universitas Sanata Dharma
2026

Fungsi sinus- p ($\sin_p$) dan kosinus- p ($\cos_p$) merupakan generalisasi dari fungsi sinus ($\sin$) dan kosinus ($\cos$), yang didefinisikan sebagai pasangan solusi tunggal dari masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial nonlinier

$$x'(t) = -y^{p-1}(t), \quad y'(t) = x^{p-1}(t), \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad p \geq 2.$$

Secara geometris, pasangan fungsi $(\cos_p(t), \sin_p(t))$ membentuk suatu parametrisasi dari kurva $|x|^p + |y|^p = 1$, yang dikenal sebagai lingkaran satuan- p . Dalam skripsi ini, dikaji keterkaitan antara solusi permasalahan nilai awal tersebut dan geometri lingkaran satuan- p guna memperoleh sifat-sifat fundamental dari fungsi $\sin_p$ dan $\cos_p$, seperti simetri ganjil-genap dan relasi kofungsi yang analog dengan fungsi sinus dan kosinus klasik ($p = 2$), serta perumusan konstanta π_p sebagai perumuman dari π . Namun, adanya perubahan kerangka geometri menyebabkan sebagian sifat klasik, seperti identitas penjumlahan sudut, tidak lagi terpenuhi untuk $p > 2$. Aspek kalkulus dari fungsi $\sin_p$ dan $\cos_p$, yang mencakup turunan orde tinggi, representasi deret Maclaurin, serta kajian integral tertentu, turut dibahas dalam skripsi ini. Dalam konteks ini, relasi π_p dengan fungsi Beta dan Gamma berperan sebagai penghubung antara kajian analitik tersebut dan sisi aplikatifnya, termasuk metode alternatif dalam evaluasi fungsi Gamma pada titik rasional serta penerapan perumuman teknik substitusi trigonometri pada perhitungan volume benda putar tertentu.

Kata Kunci: $\sin_p$ dan $\cos_p$, masalah nilai awal, lingkaran satuan- p , π_p

ABSTRACT

SINE AND COSINE FUNCTIONS IN THE p -METRIC

Franz Sebastian Soetrisno
 Sanata Dharma University
 2026

The p -sine ($\sin_p$) and p -cosine ($\cos_p$) functions are generalizations of the sine ($\sin$) and cosine ($\cos$) functions, defined as the unique solution pair to the initial value problem for a nonlinear differential system:

$$x'(t) = -y^{p-1}(t), \quad y'(t) = x^{p-1}(t), \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad p \geq 2.$$

From a geometric viewpoint, the pair $(\cos_p(t), \sin_p(t))$ provides a parametrization of the curve $|x|^p + |y|^p = 1$, known as the p -unit circle. This thesis investigates the relationship between the solution of the initial value problem and the geometry of the p -unit circle in order to derive fundamental properties of $\sin_p$ and $\cos_p$, such as parity properties and cofunction relations analogous to those of the classical sine and cosine functions ($p = 2$), as well as the formulation of the constant π_p as a generalization of π . However, the change in the underlying geometric framework causes certain classical properties, including the angle addition formulas, to fail for $p > 2$. The calculus-related aspects of $\sin_p$ and $\cos_p$, encompassing higher-order derivatives, Maclaurin series representations, and selected integrals, are also examined. In this context, the relationship between π_p and the Beta and Gamma functions serves as a bridge between the analytical results and their applications, leading to alternative methods for evaluating the Gamma function at rational arguments and to applications of generalized trigonometric substitution techniques in the computation of volumes of certain solids of revolution.

Keywords: $\sin_p$ and $\cos_p$, initial value problem, p -unit circle, π_p