Geometry, Affine

TRANSFORMASI AFIN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Vincencia Yaned Dwiyanti

NIM : 91414002
NIRM : 910052010501120002

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
1997

TRANSFORMASI AFIN

Oleh

Vincencia Yaned Dwiyanti

NIM : 91414002

NIRM : 910052010501120002

telah disetujui oleh :

Pembimbing I

Prof. Dra. Moeharti Hw,M.A

tanggal ..29/4/97..

Pembimbing II

Dr. F. Susilo, S.J

tanggal ..29/4/97..

S K R I P S I

TRANSFORMASI AFIN

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Vincencia Yaned Dwiyanti

NIM : 91414002

NIRM : 910052010501120002

telah dipertahankan di depan Panitia Penguji

pada tanggal 14 Februari 1997

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	Drs. Fr. Y. Kartika Budi, M.Pd	....
Sekretaris	Dr. St. Suwarsono	....
Anggota	Prof. Dra. Moeharti Hw, M.A	....
Anggota	Dr. F. Susilo, S.J	....
Anggota	Dr. St. Suwarsono	

Yogyakarta, 14 Februari 1997

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Dekan

Priyono Marwan

Dr. A. Priyono Marwan, S.J

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Mahaesa atas rahmat dan kasih-Nya sehingga skripsi yang berjudul Transformasi Afin dapat terselesaikan. Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pendidikan Program Studi Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Pada kesempatan ini, penyusun ingin mengucapkan terima kasih kepada :

- Prof. Dra. Moeharti Hw,M.A selaku Pembimbing I yang dengan teliti membimbing dan memberikan masukan yang berguna.
- Dr. F. Susilo, S.J selaku Pembimbing II yang dengan penuh kesabaran membimbing dalam penyusunan skripsi ini.
- Drs. Fr. Y. Kartika Budi, M.Pd selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dahrma.
- Drs. 'St. Susento, M.Si selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma yang sejak awal membantu penyusunan skripsi ini.
- Bapak dan ibu dosen yang telah membimbing dan mendidik penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.
- Bapak dan ibu karyawan yang telah banyak membantu penyusunan selama kuliah dan menyelesaikan skripsi ini.

penulis selama belajar di Universitas Sanata Dharma.

- Bapak dan ibu karyawan yang telah banyak membantu penyusunan selama kuliah dan menyelesaikan skripsi ini.
- Orang tuaku yang telah dengan setia memberikan dorongan semangat serta doa.
- Rekan-rekan mahasiswi Pendidikan Matematika angkatan 1991 yang telah memberi dukungan, semangat dan doa.

Penyusun menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam skripsi ini, karenanya segala masukan dan saran yang membangun akan diterima dengan senang hati. Harapan penyusun semoga skripsi ini dapat berguna bagi para pembaca.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i

HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING ii

HALAMAN PENGESAHAN iii

KATA PENGANTAR iv

DAFTAR ISI vi

DAFTAR LAMBANG viii

ABSTRAK ix

ABSTRACT x

BAB I. PENDAHULUAN 1

A. Latar Belakang Masalah 1

B. Perumusan Masalah 3

C. Tujuan Penulisan 4

D. Pembatasan Masalah 4

E. Metode Penelitian 5

BAB II. LANDASAN TEORI 6

A. Geometri Afin 6

B. Fungsi atau Pemetaan 9

C. Grup 15

D. Transformasi dalam Geometri 18

BAB III. TRANSFORMASI dalam GEOMETRI EUCLIDES 21

A. Transformasi Kongruensi (Isometri) ... 21

B. Transformasi Kesebangunan (Similaritas) 46

BAB IV. TRANSFORMASI AFIN dalam BIDANG EUCLIDES 52

A. Persamaan Transformasi Afin dalam Bidang

Euclides 52

B. Persamaan Umum Isometri dan Similaritas 56

C. Afinitas Perspektif 64

D. Transformasi Afin Sebagai Hasil Kali

Afinitas Perspektif 69

BAB V. KESIMPULAN 80

DAFTAR PUSTAKA 83

DAFTAR LAMBANG

A, B, C, ...	:	titik-titik
a, b, c, ...	:	garis-garis
titik (g, h)	:	titik potong garis g dan h
[ABC]	:	titik-titik A, B, C segaris dan B terletak di antara A dan C
$\overleftrightarrow{AB}$	:	garis melalui A dan B
$\overline{AB}$	:	ruas garis AB
$\overrightarrow{AB}$	:	sinar garis AB dengan pangkal A
AB	:	panjang $\overline{AB}$
AB	:	ruas garis berarah dari A ke B
	:	vektor dengan pangkal A, ujung B
$\angle AOB$	:	sudut AOB
$m\angle AOB$	:	besar sudut AOB
ΔABC	:	segi tiga ABC
$>$	:	lebih besar
$<$	:	lebih kecil
$\cong$	:	kongruen
//	:	sejajar
$\perp$	:	tegak lurus
$\sim$	:	sebangun

ABSTRAK

Transformasi afin dalam bidang Euclides didefinisikan sebagai transformasi yang mempunyai persamaan sebagai berikut : $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Seperti halnya isometri dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa refleksi, transformasi afin juga dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa afinitas perspektif.

Transformasi afin adalah transformasi yang tidak mengubah garis, kesejajaran dan perbandingan dalam pembagian. Transformasi-transformasi afin membentuk grup $(\mathcal{A},\cdot)$ yang disebut grup afin penuh. Subgrup-subgrupnya antara lain $\mathcal{A}_s$ (himpunan afinitas perspektif dengan sumbu yang sama), $\mathcal{A}_{s(\alpha)}$ (himpunan afinitas perspektif dengan sumbu dan sudut afinitas yang sama), $\mathcal{A}'_s$ (himpunan afinitas perspektif dengan sumbu yang sama dan mengawetkan luas daerah) dan $\mathcal{A}''_s$ (himpunan pelingsiran).

Transformasi similaritas mengawetkan garis, kesejajaran dan besar sudut. Besar sudut tidak diawetkan oleh transformasi afin. Transformasi-transformasi similaritas membentuk grup yang disebut grup similaritas dan merupakan subgrup dari grup afin penuh.

ABSTRACT

The affine transformation in Euclidean plane is defined as a transformation that has an equation of the form : $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ where $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Like isometry which can be stated as a product of reflections, the affine transformation can also be formulated as a product of perspective affinities.

The affine transformation is a transformation that preserves lines, parallelism and ratios of division. The affine transformations form a group $(\mathcal{A}, .)$ which is called the full affine group. It's subgroups are $\mathcal{A}_s$ (the set of perspective affinities having the same axis), $\mathcal{A}_{s(O)}$ (the set of perspective affinities having the same axis and direction of affinity), $\mathcal{A}'_s$ (the set of perspective affinities having the same axis and preserving areas) and $\mathcal{A}''_s$ (the set of shears).

The similarity transformation preserves lines, paralellism and measure of angles. The measure of angles are not preserved by affine transformations. The similarity transformations form a group which is called similarity group and is a subgroup of the full affine group.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Pengertian fungsi adalah salah satu pengertian yang sangat penting dalam semua cabang matematika. Di sekolah menengah, pengertian fungsi baru diperkenalkan dalam pelajaran aljabar dan kalkulus. Konsep fungsi juga penting dalam bidang kajian geometri untuk memperkenalkan pengertian transformasi.

Fungsi atau pemetaan yang daerah asal dan daerah kawannya sama disebut transformasi. Dalam geometri, transformasi pada suatu bidang adalah suatu pemetaan bijektif yang daerah asal dan daerah kawannya berupa himpunan semua titik pada bidang itu sendiri. Transformasi demikian dinamakan transformasi geometri. Transformasi juga dapat digunakan untuk menjelaskan berbagai konsep dalam geometri murni, seperti kongruensi bangun-bangun, kesebangunan bangun-bangun dan simetri.

Definisi geometri yang digunakan di sini adalah definisi geometri menurut Felix Klein (1849-1925) dari Jerman. Felix Klein mendefinisikan geometri sebagai berikut :

> A geometry is defined by a group G of transformations when its definitions and theorems deal with properties of figures invariant under transformations of G but not invariant under transformations of any other group containing G. (Claire Fisher

Adler, Ph. D, 1967:287).

Menurut definisi Felix Klein, suatu geometri terdefinisi oleh suatu grup transformasi G apabila definisi dan teorema-teorema dalam geometri itu menyangkut sifat bangun-bangun yang invarian oleh transformasi dalam G, tetapi tidak invarian oleh transformasi dalam grup lain manapun yang memuat G. Berdasarkan grup transformasinya, grup transformasi geometri Euclides merupakan subgrup dari grup transformasi geometri afin dan hal inilah yang akan dibuktikan dalam pembahasan-pembahasan berikutnya.

Grup transformasi geometri Euclides disusun oleh transformasi kongruensi (isometri) dan transformasi kesebangunan (similaritas). Transformasi α merupakan suatu isometri bila untuk setiap pasangan titik P dan Q dipenuhi $P'Q' = PQ$ dengan $P' = \alpha(P)$ dan $Q' = \alpha(Q)$. Beberapa contoh isometri yang akan dibahas antara lain translasi, rotasi, refleksi dan refleksi geser.

Transformasi γ merupakan suatu similaritas bila dan hanya bila terdapat bilangan positif k $(k>0)$ sehingga untuk setiap pasangan titik P dan Q dipenuhi $P'Q' = k.PQ$ dengan $P' = \gamma(P)$ dan $Q' = \gamma(Q)$. Dari definisi similaritas tampak bahwa isometri merupakan kejadian khusus dari similaritas, karena isometri merupakan similaritas dengan $k = 1$.

Transformasi afin yang akan dibahas adalah transformasi afin dalam bidang Euclides. Transformasi afin dalam bidang Euclides merupakan transformasi yang mempunyai persamaan $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ $a,b,c \in \mathbb{R}$ dengan

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Dengan melihat persamaan-persamaan umum isometri dan similaritas dapat disimpulkan bahwa grup isometri dan grup similaritas merupakan subgrup dari grup transformasi afin. Konsep penting yang juga akan dibahas sebelum mempelajari transformasi afin adalah afinitas perspektif. Kedudukan afinitas perspektif dalam transformasi afin sesuai dengan kedudukan refleksi dalam isometri. Jika setiap isometri dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa refleksi, maka demikian juga transformasi afin dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa afinitas perspektif.

Berdasarkan hal-hal tersebut di atas, penulis menjadi tertarik untuk mempelajari transformasi afin di bidang Euclides. Selain itu dengan mempelajari transformasi afin penulis dapat memperluas wawasan mengenai hubungan grup transformasi geometri afin dengan grup transformasi geometri Euclides yang sudah dikenal di sekolah menengah dan diharapkan kelak dapat berguna dalam mengajarkan transformasi di sekolah menengah.

B. Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini dirumuskan sebagai berikut :

- Apakah yang dimaksud dengan transformasi afin dalam bidang Euclides ?

- Bagaimanakah sifat-sifat transformasi afin ?
- Bagaimanakah hubungan grup transformasi geometri afin dengan grup transformasi geometri Euclides ?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dari penulisan ini adalah untuk memahami pengertian transformasi afin, sifat-sifat transformasi afin dan hubungan grup transformasi geometri afin dengan grup transformasi geometri Euclides.

D. Pembatasan Masalah

Dalam pembahasan tentang transformasi afin, ada beberapa hal yang tidak akan dibahas. Masalah-masalah tersebut antara lain adalah : aksioma-aksioma dan teorema-teorema dalam geometri afin yang tidak berhubungan dengan transformasi afin, geometri terurut yang merupakan dasar geometri afin, bidang afin, koordinat afin, grup transformasi geometri hiperbolik, grup transformasi geometri eliptik yang masing-masing adalah suatu subgrup dari grup transformasi geometri proyektif dan grup transformasi proyektif yang merupakan subgrup dari grup transformasi topologi

E. Metode Penelitian

Metode yang penulis gunakan dalam membahas topik tersebut adalah metode studi pustaka dari buku-buku acuan yang digunakan, sehingga dalam tulisan ini tidak ditemukan hal-hal yang baru. Daftar buku-buku acuan tersebut dapat dilihat dalam daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Geometri Afin

Sistem geometri Euclides didasarkan pada lima buah postulat yang terkenal dengan sebutan postulat-postulat Euclides. Apabila postulat III dan IV dari kelima postulat itu ditanggalkan, maka akan terbangun sistem geometri yang lain, yang dinamakan geometri afin. Karena hanya didasarkan pada 3 postulat Euclides, maka persyaratan dalam geometri afin lebih longgar dibanding geometri Euclides. Dalam geometri afin sudut tidak pernah diukur dan lingkaran tidak pernah disebut. Kedua hal itu terjadi karena postulat III dan IV dari Euclides tidak digunakan.

Geometri afin merupakan cabang dari geometri terurut dan geometri proyektif. Pengertian-pengertian pangkal geometri afin sebagai cabang geometri terurut terdiri dari titik dan relasi keantaraan ("intermediacy"). Garis dalam geometri terurut didefinisikan. Relasi keantaraan di antara titik-titik A,B dan C ditulis dengan [ABC], yang berarti B terletak antara A dan C. Pengertian pangkal geometri afin sebagai cabang geometri proyektif terdiri dari titik, garis dan relasi insidensi ("incidence"). Suatu titik dan suatu garis dikatakan insiden, jika titik itu terletak pada garis dan garis tersebut melalui titik itu. Ada 10 buah aksioma yang berlaku dalam geometri afin bidang, yaitu :

I : Untuk sebarang dua titik terdapat tepat satu garis yang melaluinya

II : Pada sebarang garis terdapat paling sedikit dua titik.

III : Ada paling sedikit tiga titik tidak pada garis yang sama.

IV : Dari sebarang tiga titik pada satu garis, tidak lebih dari satu titik yang terletak di antara dua titik yang lain.

V : Jika titik B terletak antara titik A dan C, maka A,B,C adalah titik-titik yang berbeda pada suatu garis dan B juga terletak antara C dan A.

VI : Jika A dan B titik-titik yang berbeda pada suatu garis, maka ada paling sedikit satu titik C pada garis tersebut sedemikian hingga B terletak antara A dan C.

VII : Andaikan A,B,C tiga titik tidak pada garis yang sama dan andaikan g garis yang tidak memuat A,B atau C. Jika g memuat sebuah titik antara A dan B, g juga akan memuat sebuah titik antara A dan C atau sebuah titik antara B dan C.

VIII : Melalui sebarang titik A di luar garis g ada tepat satu garis g' yang melalui A dan sejajar g.

IX : Jika A,A',B,B',C,C',O adalah tujuh buah titik berlainan sedemikian hingga AA',BB',CC' adalah tiga buah garis berlainan melalui O dan jika garis AB sejajar dengan A′B′ dan BC sejajar dengan B′C′, maka CA juga sejajar dengan C′A′.

X : Jika titik-titik dari sebuah garis dibagi dalam dua himpunan sedemikian hingga tidak ada titik dari kedua himpunan yang terletak antara dua titik dari himpunan lainnya, maka ada satu titik dari himpunan yang pertama yang terletak antara setiap titik dari himpunan itu dan setiap titik dari himpunan kedua.

Dalam pembahasan ini definisi geometri yang digunakan bukanlah definisi yang didasarkan pada sistem aksioma, seperti yang tertera di atas, tetapi definisi geometri menurut Felix Klein (1849-1925) dari Jerman. Dalam Program Erlanger-nya yang disampaikan di Erlangen pada tahun 1872, Felix Klein mendefinisikan geometri berdasarkan grup transformasinya .

Definisi 2.1 :

Suatu geometri terdefinisi oleh suatu grup transformasi G apabila definisi dan teorema-teorema dalam geometri itu menyangkut sifat bangun-bangun yang invarian oleh trans-formasi dalam G, tetapi tidak invarian oleh transfor-masi dalam grup lain manapun yang memuat G.

Dari pandangannya itu dapat digambarkan ikhtisar geometri sebagai berikut :

TOPOLOGI

GEOMETRI PROYEKTIF

GEOMETRI AFIN GEOMETRI HIPERBOLIK GEOMETRI ELIPTIK

GEOMETRI EUCLIDES

Dari diagram tersebut tampak bahwa grup transformasi geometri Euclides merupakan subgrup dari grup transformasi geometri afin. Demikian juga grup transformasi geometri afin, grup transformasi geometri hiperbolik dan grup transformasi geometri eliptik masing-masing adalah suatu subgrup dari grup transformasi geometri proyektif. Grup transformasi geometri proyektif merupakan subgrup dari grup transformasi topologi.

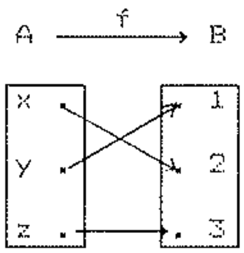
B. Fungsi atau Pemetaan

Definisi 2.2 :

Fungsi f dari A ke B (ditulis $f:A \longrightarrow B$) ialah suatu relasi dari A ke B yang memenuhi sifat : $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(y=f(x))$.

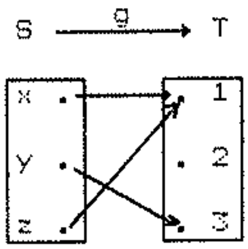
Contoh 2.1 :

a) Andaikan A = {x,y,z} dan B={1,2,3}.

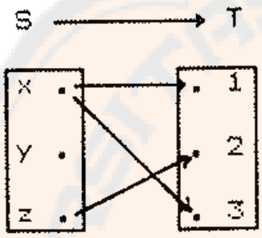


f didefinisikan sebagai f(x) = 2, f(y) = 1 dan f(z) = 3 adalah suatu fungsi dari A ke B.

b) Fungsi yang lain yaitu $g : S \longrightarrow T$ dengan $g(x)=1$, $g(y)=3$ dan $g(z)=1$.



c) Diagram berikut ini tidak mewakili sebuah fungsi dari S ke T, karena :



- kawan dari elemen x di T tidak tunggal.
- ada elemen $y \in S$ yang tidak mempunyai kawan di T.

Definisi 2.3 :

Fungsi $f : A \longrightarrow B$ disebut fungsi injektif (fungsi 1-1) bila dipenuhi : $(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$.

Contoh 2.2 :

Fungsi f pada Contoh 2.1 merupakan fungsi injektif, sedangkan fungsi g pada Contoh 2.1 bukan fungsi injektif karena $g(x) = g(z)$ tetapi $x \neq z$.

Definisi 2.4 :

Fungsi $f : A \longrightarrow B$ disebut fungsi surjektif (onto) bila dipenuhi : $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$.

Contoh 2.3 :

Fungsi f pada Contoh 2.1 merupakan fungsi surjektif, sedangkan fungsi g pada Contoh 2.1 bukan fungsi surjektif karena ada $2 \in B$ yang tidak mempunyai kawan di A.

Definisi 2.5 :

Fungsi $f:A \longrightarrow B$ disebut fungsi bijektif bila fungsi itu fungsi injektif dan surjektif.

Contoh 2.4 :

Fungsi f pada Contoh 2.1 (a) merupakan fungsi bijektif.

Definisi 2.6 :

Andaikan $f:S \longrightarrow T$ dan $g:T \longrightarrow U$, maka komposisi dari f dan g adalah suatu fungsi $g \circ f:S \longrightarrow U$ yang didefinisikan sebagai $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in S$.

Penulisan $g \circ f$ selanjutnya disingkat menjadi gf yang dapat dibaca sebagai hasil kali f dan g. Jika g=f, maka hasil kalinya ditulis f^2.

Teorema 2.1 :

Andaikan $f:S \longrightarrow T$ dan $g:T \longrightarrow U$.

(a) Jika f dan g injektif, maka $g \circ f$ injektif.

(b) Jika $g \circ f$ injektif, maka f injektif

(c) Jika f dan g surjektif, maka $g \circ f$ surjektif.

(d) Jika $g \circ f$ surjektif, maka g surjektif.

Bukti :

(a) Andaikan f dan g keduanya fungsi-fungsi injektif.

Untuk membuktikan bahwa $g \circ f$ adalah fungsi injektif harus ditunjukkan bahwa :

jika $x_1, x_2 \in S$ dan $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, maka $x_1 = x_2$.

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$f(x_1) = f(x_2)$ (karena g injektif)

$x_1 = x_2$ (karena f injektif)

$\therefore (\forall x_1, x_2 \in S)[(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$

Jadi $g \circ f$ injektif.

(b) Andaikan $g \circ f$ injektif. Jika $x_1, x_2 \in S$ dan $f(x_1) = f(x_2)$, maka $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ sehingga $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Akibatnya $x_1 = x_2$ karena $g \circ f$ injektif. Jadi f injektif

(c) Andaikan f dan g keduanya fungsi-fungsi surjektif. Untuk membuktikan $g \circ f$ fungsi surjektif harus ditunjukkan bahwa jika $z \in U$, maka ada sebuah elemen $x \in S$ sedemikian hingga $(g \circ f)(x) = z$. Misalkan $z \in U$. Karena g surjektif, maka ada $y \in T$ sedemikian hingga $g(y) = z$. Karena f juga surjektif, maka ada $x \in S$ sedemikian hingga $f(x) = y$, sehingga $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Jadi $g \circ f$ adalah fungsi surjektif.

(d) Andaikan $g \circ f$ surjektif dan $z \in U$, maka ada $x \in S$ sedemikian hingga $(g \circ f)(x) = z$. Tetapi $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$ dengan $f(x) \in T$. Karena itu g surjektif. Terbukti ∎

<u>Definisi 2.7</u> :

Diberikan sebarang himpunan $S \neq \emptyset$. Operasi biner pada S adalah fungsi dari $S \times S$ ke S.

Dari Definisi 2.7 dapat dikatakan bahwa operasi biner bersifat tertutup pada S.

Operasi "perkalian" (product) $*$ pada S dapat dinyatakan sebagai $* : SXS \longrightarrow S$ dengan $a * b = c$ bila dan hanya bila $*(a,b) = c$.

Contoh 2.5 :

Andaikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi jumlahan pada $\mathbb{Z}$ dapat didefinisikan sebagai $f : \mathbb{Z}X\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(m,n) = m+n$.

Lemma 2.1 :

Jika $f:S\longrightarrow T$, $g:T\longrightarrow U$ dan $h:U\longrightarrow V$, maka $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

Bukti :

$((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)f(x)$ (Def. 2.6)

$= h(g(f(x)))$

$= h((g\circ f)(x))$

$= (h\circ(g\circ f))(x)$ untuk sebarang elemen $x\in S$.

Jadi $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ ∎

Teorema 2.2 :

Fungsi $f:S\longrightarrow T$ adalah fungsi bijektif bila dan hanya bila ada suatu fungsi $g:T\longrightarrow S$ sedemikian hingga $g\circ f$ dan $f\circ g$ berturut-turut adalah fungsi identitas pada S dan T.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan fungsi $f:S\longrightarrow T$ fungsi bijektif. Akan dibuktikan ada suatu fungsi $g:T\longrightarrow S$ sedemikian hingga

$g \circ f$ dan $f \circ g$ berturut-turut adalah fungsi identitas pada S dan T.

Diambil sebarang elemen $t \in T$. Karena f surjektif pasti ada elemen $s \in S$ sedemikian hingga $f(s) = t$. Karena f injektif, maka s tersebut pasti tunggal. Didefinisikan fungsi $g: T \longrightarrow S$ dengan $g(t) = s$ bila dan hanya bila $f(s) = t$. Fungsi g disebut fungsi invers dari f. Diambil sebarang elemen $s \in S$. Andaikan $f(s) = t$. Dari definisi diperoleh $(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(t) = s$. Tampak bahwa $g \circ f$ adalah fungsi identitas dari S ke S. Demikian juga untuk setiap $t \in T$, $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(s) = t$, yaitu $f \circ g$ adalah fungsi identitas dari T ke T.

($\Leftarrow$) Jika $f: S \longrightarrow T$ adalah suatu fungsi sedemikian hingga ada suatu fungsi $g: T \longrightarrow S$ dengan sifat $g \circ f$ dan $f \circ g$ berturut-turut adalah fungsi-fungsi identitas pada S dan T. Akan ditunjukkan bahwa $f: S \longrightarrow T$ adalah fungsi bijektif.

- Diambil sebarang $t \in T$, maka $t = (f \circ g)(t) = f(g(t))$ karena $f \circ g$ fungsi identitas dalam T. Karena $g: T \longrightarrow S$ adalah fungsi, maka ada $s \in S$ sedemikian hingga $g(t) = s$. Jadi ada $s \in S$ sedemikian hingga $t = f(s)$. Jadi f fungsi surjektif.
- Andaikan $f(s_1) = f(s_2)$. Dengan menggunakan sifat bahwa $g \circ f$ fungsi identitas, diperoleh :

  $s_1 = (g \circ f)(s_1) = g(f(s_1)) = g(f(s_2)) = (g \circ f)(s_2) = s_2$

  Jadi f fungsi injektif.

  Terbukti $f: S \longrightarrow T$ adalah fungsi bijektif ■

C. Grup

Definisi 2.8 :

Suatu himpunan G yang tidak kosong disebut grup bila dalam G didefinisikan suatu operasi biner "*" sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1) Operasi * bersifat asosiatif, yaitu:

   $a*(b*c) = (a*b)*c, \quad \forall a,b,c \in G.$

2) Ada elemen identitas $i \in G$ sedemikian hingga berlaku :

   $i*a = a*i = a, \ \forall a \in G.$

3) Setiap elemen $a \in G$ mempunyai invers yang juga dalam G, yaitu terdapat $x \in G$ sedemikian hingga $a*x = x*a = i$. Invers dari a dilambangkan dengan a^{-1}, sehingga $x=a^{-1}$.

Definisi 2.9 :

Bila dipenuhi juga $a*b = b*a$ untuk sebarang a dan $b \in G$, maka G disebut Grup komutatif (Grup Abelian).

Teorema 2.3 :

Bila G grup, maka elemen identitas dalam G adalah tunggal.

Bukti :

Andaikan elemen identitas dalam grup G tidak tunggal, yaitu ada paling sedikit dua elemen identitas dalam G. Misalkan i dan e adalah elemen-elemen identitas dalam G, dengan $i \neq e$.

Maka berlaku $i*a = a, \ \forall a \in G$ (karena i elemen identitas).

Sehingga $i*e = e$ .....(i)

Demikian pula $a*e = a \quad \forall a \in G$ (karena e elemen identitas).

Sehingga $i*e = i$ .....(ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa $i = e$. Kontradiksi ∎

Teorema 2.4 :

Bila G grup, maka masing-masing eleman dalam G mempunyai invers yang tunggal dalam G.

Bukti :

Andaikan invers dari $a \in G$ tidak tunggal. Misalkan invers dari a adalah x dan y dengan $x \neq y$. Maka $a*x = x*a = i$ dan $a*y=y*a=i$. Padahal $x = x*i = x*(a*y) = (x*a)*y = i*y = y$. Jadi $x = y$. Kontradiksi ∎

Definisi 2.10 :

Suatu himpunan bagian $H \neq \emptyset$ dari suatu grup G disebut subgrup dari G, bila H membentuk grup terhadap operasi pada G.

Lemma 2.2 :

Misalkan $(G,*)$ grup dan H subgrup dari G.

a) Jika f elemen identitas dari H dan i elemen identitas dari G, maka $f = i$.

b) Jika $a \in H$, maka invers dari a di H sama dengan invers dari a di G

Bukti :

a) Jika f elemen identitas dari H, maka $f*f = f$. Jika f^{-1}

adalah invers dari f dalam G, maka :

$$f^{-1}*(f*f) = f^{-1}*f$$
$$(f^{-1}*f)*f = i$$
$$i * f = i$$
$$f = i$$

b) Diambil sebarang elemen $a \in H$. Misal a^{-1} adalah invers dari a di G dan c adalah invers dari a di H. Maka $a*c = c*a = f = i$. Dari Teorema 2.4, a^{-1} adalah suatu elemen tunggal dalam G yang memenuhi $a*a^{-1} = a^{-1}*a = i$. Terbukti $c = a^{-1}$ ∎

<u>Teorema 2.5</u> :

Andaikan G grup dengan operasi $*$ dan H himpunan bagian G. H subgrup dari grup G bila dan hanya bila

(a) $H \neq \emptyset$

(b) Jika $a,b \in H$, maka $a*b \in H$

(c) Jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$.

<u>Bukti</u> :

($\Rightarrow$) Andaikan H subgrup, akan dibuktikan bahwa H memenuhi syarat (a),(b) dan (c).

(a) Karena H subgrup dari grup $(G,*)$, maka $(H,*)$ juga grup. Setiap grup pasti memuat elemen identitas. Jadi H memuat paling sedikit satu elemen yaitu elemen identitas. Kesimpulan $H \neq \emptyset$.

(b) Karena H subgrup dari grup $(G,*)$, maka $(H,*)$ grup sehingga H harus tertutup terhadap $*$.

Jadi jika $a,b \in H$, maka $a*b \in H$.

(c) Jika $a \in H$, maka a harus mempunyai invers dalam H, karena (H,*) grup. Maka menurut Lemma 2.2 (b) invers dari a adalah a^{-1} yaitu invers dari a dalam G. Jadi $a^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Andaikan H himpunan bagian G yang memenuhi (a),(b) dan (c), akan dibuktikan bahwa H grup.

(1) Syarat (b) menyatakan bahwa H tertutup terhadap *

(2) Karena elemen-elemen dalam G memenuhi sifat asosiatif, maka elemen-elemen dalam H juga memenuhi sifat asosiatif, karena H adalah himpunan bagian G. Jadi hukum asosiatif dipenuhi dalam H.

(3) Karena $H \neq \emptyset$, maka dapat diambil suatu elemen $y \in H$. Menurut (c), $y^{-1} \in H$. Dengan syarat (b), $i = y * y^{-1} \in H$. Jadi H memuat elemen identitas.

(4) Syarat (c) menentukan bahwa setiap elemen $a \in H$ pasti mempunyai invers yaitu a^{-1} dan $a^{-1} \in H$.

Jadi H adalah himpunan bagian dari G yang membentuk suatu grup terhadap operasi pada G (yaitu *). Terbukti ∎

D. Transformasi dalam Geometri

<u>Definisi 2.11</u> :

Transformasi geometri adalah suatu fungsi bijektif dari himpunan semua titik pada suatu bidang ke himpunan semua titik pada bidang itu sendiri.

Dengan kata lain, jika diberikan suatu transformasi α, berlaku bahwa untuk setiap titik P terdapat dengan tunggal titik Q sedemikain hingga $\alpha(P) = Q$ dan sebaliknya untuk setiap titik R terdapat dengan tunggal titik S sedemikian hingga $\alpha(S) = R$. Bidang yang dimaksud adalah bidang Euclides. Dengan mengambil semesta bidang Euclides berarti seluruh teori geometri Euclides dianggap berlaku di dalamnya.

Teorema 2.6 :

Himpunan semua transformasi geometri $(T, \circ)$ membentuk grup.

Bukti :

(1) Operasi $\circ$ bersifat tertutup pada T.

Karena transformasi merupakan fungsi bijektif dari himpunan semua titik pada suatu bidang ke himpunan semua titik pada bidang itu sendiri, maka dari Teorema 2.1 (a) dan (c) diperoleh bahwa operasi $\circ$ bersifat tertutup pada T.

(2) Operasi $\circ$ memenuhi sifat asosiatif menurut Lemma 2.1.

(3) Ada elemen identitas terhadap operasi $\circ$ pada T, yaitu transformasi identitas ι yang memenuhi sifat $\iota(P) = P$ untuk sebarang titik P pada bidang.

(4) Invers dari setiap elemen dalam T berada dalam T, jelas dari teorema 2.2.

Dari (1) sampai (4) terbukti bahwa himpunan semua transformasi geometri membentuk grup ∎

Dalam pembahasan-pembahasan berikutnya akan dibuktikan bahwa grup transformasi geometri Euclides merupakan subgrup dari grup transformasi geometri afin.

BAB III

TRANSFORMASI dalam GEOMETRI EUCLIDES

A. Transformasi Kongruensi (Isometri)

Geometri Euclides sampai abad XVII hanya dipelajari dan dikembangkan dalam bidang-bidang non-aljabar dan yang diperhatikan hanyalah sifat-sifat metrik dari bangun-bangunnya saja. Sifat-sifat metrik adalah sifat-sifat yang berkaitan dengan pengukuran, seperti jarak dua titik, panjang sebuah ruas garis, ukuran sudut dan ukuran luas. Pada perkembangan selanjutnya digunakan metode aljabar yang berhubungan dengan sistem koordinat, juga sifat-sifat non-metrik dari bangun-bangun geometri. Pembicaraan mengenai sifat-sifat non-metrik dilakukan antara lain melalui pembahasan tentang grup transformasi.

Grup transformasi geometri Euclides disusun oleh transformasi kongruensi (isometri) dan transformasi kesebangunan (similaritas). Sebelum membahas tentang transformasi kongruensi (isometri) terlebih dahulu akan dibahas hal-hal mendasar yang mendukung pembahasan tentang isometri.

Dalam membahas transformasi perlu dipelajari unsur-unsur yang invarian (bertahan/tetap) terhadap transformasi tersebut. Suatu titik yang invarian terhadap transformasi α disebut titik invarian dan suatu garis yang invarian terhadap transformasi α disebut garis invarian, sebaliknya α dikatakan mempertahankan atau mengawetkan titik P bila hanya bila $\alpha(P) = P$. Transformasi α mengawetkan garis g bila hanya bila $\alpha(g) = g$ dan transformasi α mengawetkan himpunan titik S bila dan hanya bila $\alpha(S) = S$.

Transformasi identitas ι adalah transformasi yang memenuhi $\iota(P)=P$ untuk setiap titik P pada bidang. Tampak bahwa transformasi ι mengawetkan semua titik pada bidang. Jadi semua titik adalah titik invarian terhadap ι.

Definisi 3.1 :

Suatu transformasi γ merupakan involusi bila $\gamma \neq \iota$ dan $\gamma^2=\iota$. Ini berarti bahwa $\gamma = \gamma^{-1}$.

Definisi 3.2 :

Suatu transformasi disebut kolineasi bila bayangan sebuah garis (lurus) oleh transformasi itu akan berupa garis lagi. Jadi jika g garis lurus, maka α adalah suatu kolineasi bila dan hanya bila $\alpha(g) = g'$ dengan g' garis lurus.

Teorema 3.1 :

Himpunan semua kolineasi $(\mathcal{K}, .)$ membentuk grup.

Bukti :

Karena kolineasi adalah transformasi, maka cukup dibuktikan bahwa $\mathcal{K} \neq \emptyset$, operasi . tertutup pada $\mathcal{K}$ dan setiap elemen dalam $\mathcal{K}$ mempunyai invers dalam $\mathcal{K}$.

(1) $\mathcal{K}$ pasti memuat paling sedikit satu kolineasi, yaitu transformasi identitas ι. Jadi $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

(2) Andaikan α, β sebarang kolineasi dan g sebarang garis. $\beta\alpha(g) = \beta(\alpha(g)) = \beta(g') = g''$. Karena α kolineasi, maka g' adalah garis. Karena β kolineasi,maka g'' pun garis. Jadi $\beta\alpha$ merupakan kolineasi.

(3) Andaikan α kolineasi dan $g' = \alpha(g)$ garis. Karena α transformasi pasti ada α^{-1}, sedemikian hingga $\alpha^{-1}(g') = \alpha^{-1}(\alpha(g)) = (\alpha^{-1}\alpha)(g) = \iota(g) = g$. Ini berarti α^{-1} pun kolineasi karena membawa garis g' ke garis g.

Terbukti himpunan kolineasi membentuk grup ■

<u>Definisi 3.3</u> :

Dilatasi adalah kolineasi δ sedemikian hingga $g // \delta(g)$, untuk setiap garis g.

<u>Definisi 3.4</u> :

Transformasi α merupakan suatu isometri bila untuk setiap pasangan titik P dan Q dipenuhi $P'Q' = PQ$ dengan $P' = \alpha(P)$ dan $Q' = \alpha(Q)$.

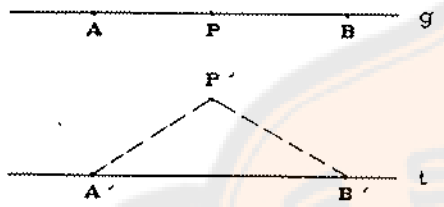
<u>Teorema 3.2</u> :

Isometri adalah suatu kolineasi

<u>Bukti</u> :

Andaikan α suatu isometri, A dan B sebarang titik pada g dengan $A' = \alpha(A)$ dan $B' = \alpha(B)$. Ditarik garis $t = \overleftrightarrow{A'B'}$. Akan dibuktikan bahwa $t = g'$.

1a) Diambil sebarang titik P pada g dengan [APB]. Misalkan $P' = \alpha(P)$. Andaikan P' di luar t, maka dalam $\Delta A'B'P'$ dipenuhi $A'P' + P'B' > A'B'$, tetapi karena α isometri, maka berlaku $A'P' + P'B' = AP + PB = AB = A'B'$. Timbul kontradiksi, maka pengandaian bahwa P' di luar t salah.

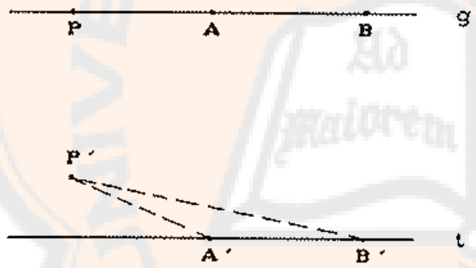


gambar 3.1

Berarti P' pada t dan memenuhi $[A'P'B']$.

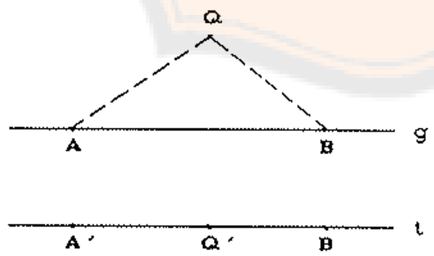
1b) Untuk [PAB] atau [ABP].

Andaikan $P' = \alpha(P)$ di luar t, maka dalam $\Delta A'B'P'$ berlaku $P'A' + A'B' > P'B'$. Karena α isometri, maka $P'A' + A'B' = PA + AB = PB = P'B'$. Timbul kontradiksi sehingga P' tidak mungkin di luar t. Jadi P' pada t. Dari (1a) dan (1b) terbukti bahwa $g' \subset t$.



gambar 3.2

(2) Andaikan Q' sebarang titik pada t. Karena α bijektif, maka terdapat Q dengan $\alpha(Q) = Q'$. Misalkan Q di luar g, maka dalam ΔAQB dipenuhi $AQ + QB > AB$. Karena α isometri, maka berlaku $AQ + QB = AB$. Timbul kontradiksi, maka pengandaian bahwa Q di luar g salah, berarti Q pada g. Karena Q pada g, maka $Q' = \alpha(Q)$ harus pada $g' = \alpha(g)$.



gambar 3.3

Jadi $t \subset g'$.

Dari 1a), 1b) dan (2) terbukti bahwa $t = g'$ ∎

Teorema 3.3 :

Himpunan semua isometri $(\mathfrak{I}, .)$ membentuk grup.

Bukti :

Karena isometri adalah transformasi, maka cukup dibuktikan bahwa $\mathfrak{I} \neq \emptyset$, operasi . tertutup pada $\mathfrak{I}$ dan setiap elemen dalam $\mathfrak{I}$ mempunyai invers dalam $\mathfrak{I}$.

(1) $\mathfrak{I}$ pasti memuat paling sedikit satu isometri, yaitu transformasi identitas ι. Jadi $\mathfrak{I} \neq \emptyset$.

(2) Andaikan α, β adalah sebarang isometri dalam $\mathfrak{I}$, dan A,B sebarang titik pada bidang. Jika $\alpha(A)=A'$, $\alpha(B)=B'$ $\beta(A') = A''$ dan $\beta(B') = B''$, maka

$(\beta\alpha)(A) = \beta(\alpha(A)) = \beta(A') = A''$ dan

$(\beta\alpha)(B) = \beta(\alpha(B)) = \beta(B') = B''$

Karena α isometri, maka $AB = A'B'$ dan karena β isometri, maka $A'B' = A''B''$. Sehingga $AB = A''B''$.

$\therefore$ $\beta\alpha$ adalah isometri. Jadi operasi . tertutup pada $\mathfrak{I}$.

(3) Andaikan α sebarang isometri dalam $\mathfrak{I}$, dan A',B' sebarang titik pada bidang . Karena α adalah transformasi tentu terdapat titik A dan B sedemikian hingga $\alpha(A) = A'$ dan $\alpha(B) = B'$. Karena α isometri, maka $A'B' = AB$.

$\alpha^{-1}(A') = \alpha^{-1}(\alpha(A)) = (\alpha^{-1}\alpha)(A) = \iota(A) = A$,

$\alpha^{-1}(B') = \alpha^{-1}(\alpha(B)) = (\alpha^{-1}\alpha)(B) = \iota(B) = B$ dan memenuhi $AB = A'B'$. Jadi α^{-1} adalah suatu isometri.

Terbukti bahwa himpunan semua isometri membentuk grup ■

Teorema 3.4 :

Isometri mengawetkan besar sudut.

Bukti :

Andaikan α suatu isometri dan A,B,C tiga titik non-kolinier dengan $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$ dan $C' = \alpha(C)$. Diperhatikan kedua gambar di bawah ini.

gambar 3.4

Karena α isometri, maka berlaku $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ dan $B'C' = BC$, sehingga $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$. Jadi $m\angle BAC = m\angle B'A'C'$. Terbukti ■

Teorema 3.5 :

Isometri mengawetkan kesejajaran.

Bukti :

Andaikan α suatu isometri, $g//h$ dan $g' = \alpha(g)$, $h' = \alpha(h)$. Akan dibuktikan bahwa $g'//h'$.

Andaikan g' tidak sejajar h', maka ada titik $P' = (g',h')$. Karena α adalah transformasi, maka terdapat P sedemikian hingga $\alpha(P) = P'$. P' pada $g' = \alpha(g)$, maka P pasti pada g karena α kolineasi. P' pada $h' = \alpha(h)$, maka P pasti pada h karena α kolineasi. Akibatnya $P = (g,h)$ yang bertentangan dengan ketentuan bahwa $g//h$, sehingga anggapan tersebut salah. Jadi $g'//h'$. Terbukti ■

Kesimpulan :

Isometri adalah suatu kolineasi yang mengawetkan keantaraan, ruas garis, sinar garis, sudut, besar sudut, ketegaklurusan dan kesejajaran.

1. Beberapa Contoh Isometri

a. Translasi (Geseran)

Definisi 3.5 :

Suatu transformasi τ merupakan translasi bila terdapat ruas garis berarah (vektor) AB sedemikian hingga untuk setiap titik P pada bidang dengan $\tau(P) = P'$ dipenuhi $PP' = AB$. Translasi ini ditulis τ_{AB}.

Definisi 3.6 :

Himpunan semua ruas garis berarah yang besar dan arahnya sama menggambarkan suatu translasi. Himpunan tersebut disebut vektor.

Berdasarkan Definisi 3.6 diperoleh bahwa $\tau_{AB} = \tau_{CD}$ bila dan hanya bila $AB = CD$.

Teorema 3.6 :

Jika diberikan titik P dan Q, ada dengan tunggal translasi yang membawa P ke Q, yaitu τ_{PQ}.

Bukti :

Andaikan translasi yang membawa P ke Q tidak tunggal, yaitu kecuali τ_{PQ} ada translasi lain τ_{AB} yang juga membawa P ke Q, sedemikian hingga $\tau_{AB}(P)=Q$ dengan $AB=PQ$. Jadi $\tau_{AB}=\tau_{PQ}$. Terbukti ∎

Teorema 3.7 :

Jika A,B,C tiga titik non-kolinear, maka $\tau_{AB} = \tau_{CD}$ bila dan hanya bila CABD merupakan jajaran genjang.

Bukti :

Andaikan A,B,C tiga titik non-kolinear.

(→) $\tau_{AB} = \tau_{CD}$. Akan dibuktikan bahwa CABD merupakan jajaran genjang. $\tau_{AB} = \tau_{CD}$, maka AB = CD.

gambar 3.5

AB = CD berarti AB = CD dan AB // CD, sehingga CABD merupakan jajaran genjang (suatu segi empat merupakan jajaran genjang bila dan hanya bila sepasang sisinya yang berhadapan sama dan sejajar).

(←) Andaikan CABD merupakan jajaran genjang, akan dibuktikan bahwa $\tau_{AB} = \tau_{CD}$. Jika CABD merupakan jajaran genjang berarti AB = CD dan AB//CD, sehingga AB = CD. Karena AB = CD, maka $\tau_{AB} = \tau_{CD}$. Terbukti ∎

Teorema 3.8 :

Translasi mengawetkan arah garis (Bayangan suatu garis akan sejajar dengan garis semula).

Bukti :

Andaikan τ_{PQ} sebarang translasi yang memetakan A ke A' dan B ke B', berarti AA' = BB' = PQ. Bila A, A', B non-kolinier, maka (Teo. 3.7) BAA'B' merupakan jajaran genjang, sehingga AB = A'B'. Jadi AB // A'B'. Dari langkah ini terbukti juga bahwa $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{A'B'}$. Terbukti ■

Karena translasi mengawetkan arah garis berarti translasi membawa suatu garis ke garis yang sejajar dengan garis semula, sehingga translasi adalah juga suatu dilatasi.

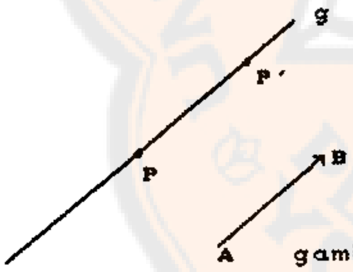
<u>Teorema 3.9 :</u>

Jika $\tau_{AB} \neq \iota$, maka tidak terdapat titik invarian. Semua garis yang sejajar AB akan menjadi garis invarian.

<u>Bukti :</u>

Untuk titik invarian sudah cukup jelas.

Untuk garis invarian, misalkan g garis yang sejajar AB.



gambar 3.6

Diambil sebarang titik P pada g, maka τ_{AB}(P) = P' dan memenuhi PP' = AB. Berarti PP' sejajar AB. Karena g sejajar AB, P pada g dan PP'// AB, maka P' pasti di g. Ini berlaku untuk setiap titik pada g. Jadi τ_{AB}(g) = g. Terbukti bahwa g garis invarian ■

<u>Teorema 3.10 :</u>

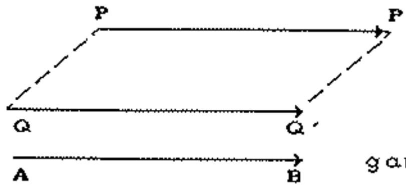
Translasi adalah suatu isometri.

<u>Bukti :</u>

Misalkan τ_{AB}(P)=P' dan τ_{AB}(Q)=Q' dan memenuhi PP'=QQ'=AB.

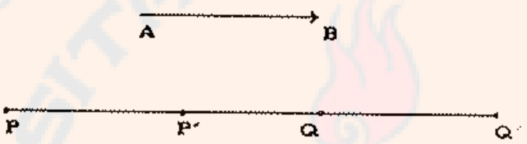
Akan dibuktikan bahwa P'Q' = PQ.

a) Jika P,P',Q titik-titik non-kolinear, maka PQQ'P' akan membentuk suatu jajaran genjang (Teo. 3.7). Sehingga berlaku P'Q'=PQ.



gambar 3.7

b) Apabila P,P',Q segaris, maka Q' akan terletak pada garis yang sama.



gambar 3.8

Dengan aljabar vektor diperoleh

P'Q' = P'P + PQ'

= Q'Q + PQ' (karena QQ' = PP')

= PQ' + Q'Q

= PQ

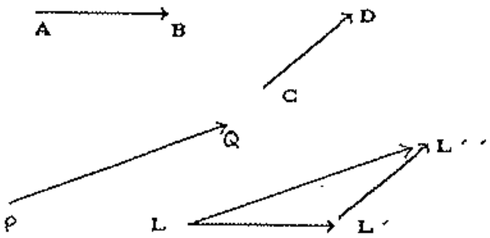
Karena P'Q' = PQ berarti P'Q' = PQ. Terbukti ∎

<u>Teorema 3.11</u> :

Hasil kali dua translasi τ_{AB} dan τ_{CD} akan berupa translasi lagi, yaitu τ_{PQ} dengan PQ = AB + CD.

<u>Bukti</u> :

Andaikan τ_{AB} dan τ_{CD} sebarang translasi dalam $\mathcal{T}$. Untuk sebarang titik L pada bidang berlaku $\tau_{AB}(L)$ = L' dengan LL'= AB dan juga $\tau_{CD}(L')$=L'' dengan L'L''= CD. Maka berlaku $\tau_{CD}\tau_{AB}(L)$= $\tau_{CD}(\tau_{AB}(L))$=



gambar 3.9

$\tau_{CD}(L') = L''$ dengan $LL'' = LL' + L'L'' = AB + CD = PQ$. Jadi $\tau_{CD}\tau_{AB}$ adalah translasi dengan vektor translasi $PQ = AB + CD$. Terbukti ∎

Teorema 3.12 :

Himpunan semua translasi $(\mathcal{T}, .)$ membentuk grup Abelian.

Bukti :

Cukup dibuktikan bahwa $\mathcal{T} \neq \emptyset$, operasi . tertutup pada $\mathcal{T}$, setiap elemen dalam $\mathcal{T}$ mempunyai invers dalam $\mathcal{T}$ dan operasi . memenuhi sifat komutatif.

(1) $\mathcal{T}$ pasti memuat paling sedikit satu translasi, yaitu transformasi identitas ι. Jadi $\mathcal{T} \neq \emptyset$.

(2) Bahwa operasi . tertutup pada $\mathcal{T}$ sudah dibuktikan dalam Teorema 3.11.

(3) Diambil sebarang elemen $\tau_{AB} \in \mathcal{T}$.

Andaikan invers dari τ_{AB} adalah τ_{CD}, sedemikian hingga $\tau_{AB}\tau_{CD} = \tau_{CD}\tau_{AB} = \iota = \tau_{AA}$

$$\tau_{AB}\tau_{CD} = \tau_{AA} \Leftrightarrow \tau_{AB+CD} = \tau_{AA}$$

$$AB + CD = AA$$

$$AB + BA = AA$$

$\therefore CD = BA$ sehingga $\tau_{CD} = \tau_{BA}$.

Jadi τ_{AB} mempunyai invers yaitu $\tau_{AB}^{-1} = \tau_{BA} \in \mathcal{T}$.

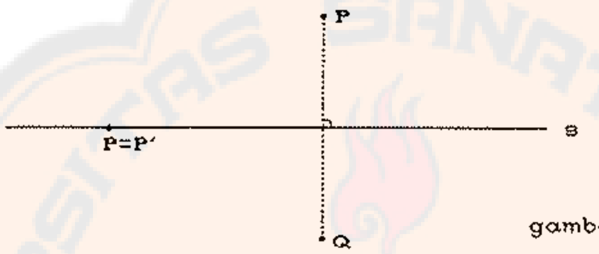
(4) Andaikan $\tau_{AB}(P) = P'$ dan $\tau_{CD}(P') = P''$ untuk sebarang titik P pada bidang. Maka $(\tau_{CD}\tau_{AB})(P) = \tau_{CD}(\tau_{AB}(P)) = \tau_{CD}(P') = P''$ dengan $PP'' = AB + CD$. Karena jumlahan 2 vektor bersifat komutatif, maka berlaku $AB+CD = CD+AB$ sehingga $\tau_{CD}\tau_{AB} = \tau_{AB}\tau_{CD}$. Terbukti ∎

b. Refleksi (Pencerminan/Simetri Garis)

Definisi 3.7 :

Refleksi σ_s pada garis s adalah suatu transformasi yang memenuhi :

$$\sigma_s(P) = \begin{cases} P, \text{ jika } P \text{ pada } s \\ Q, \text{ jika } P \text{ di luar } s \text{ dengan } s \text{ adalah sumbu } \overline{PQ} \end{cases}$$



gambar 3.10

Definisi 3.8 :

Refleksi σ_C terhadap suatu titik C adalah suatu transformasi yang memenuhi :

$$\sigma_C(P) = \begin{cases} C, \text{ jika } P \text{ berimpit dengan } C \\ Q, \text{ jika } P \text{ di luar } C \text{ dengan } C \text{ titik tengah } \overline{PQ} \end{cases}$$

Teorema 3.13 :

Refleksi σ_s adalah suatu involusi yang mempertukarkan separuh bidang yang dipisahkan oleh garis s.

Bukti :

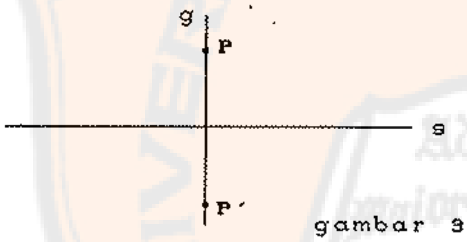
$\sigma_s \neq \iota$ tetapi $\sigma_s^2 = \iota$ dengan s adalah sumbu $\overline{PQ}$ yang juga adalah sumbu $\overline{QP}$ (tampak pada gambar 3.10). Terbukti ∎

Teorema 3.14 :

Titik invarian terhadap σ_s adalah titik-titik pada s, sedang garis invarian adalah s sendiri dan semua garis yang tegak lurus pada s.

Bukti :

Bukti untuk titik invarian diperoleh langsung dari definisi σ_s, sebagai akibatnya s akan menjadi garis invarian. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa semua garis yang tegak lurus pada s adalah garis invarian. Andaikan $g \perp s$. Diambil sebarang titik P pada g di luar s. Dari definisi refleksi diperoleh $P' = \sigma_s(P)$ dengan s sumbu $\overline{PP'}$. Karena s sumbu $\overline{PP'}$, maka $\overline{PP'} \perp s$. Titik P pada g, $g \perp s$ dan $\overline{PP'} \perp s$, maka P' pasti pada g. Hal ini berlaku untuk setiap titik pada g, sehingga $\sigma_s(g) = g$. Jadi g garis invarian. Terbukti ∎



gambar 3.11

Garis s adalah garis invarian titik per titik sedangkan garis g adalah garis invarian tetapi tidak titik per titik.

Teorema 3.15 :

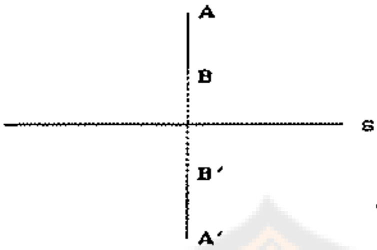
Refleksi σ_s adalah suatu isometri

Bukti :

Andaikan $A' = \sigma_s(A)$ dan $B' = \sigma_s(B)$. Untuk kejadian-kejadian khusus :

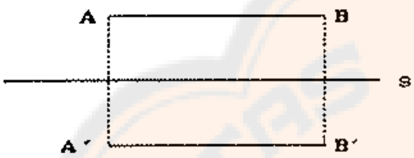
a) Bila A dan B pada s, maka $A'B' = AB$ sudah cukup jelas.

b) Untuk kejadian $AB \perp s$, dari definisi refleksi diperoleh bahwa s adalah sumbu $\overline{AA'}$ dan $\overline{BB'}$, sehingga $A'B' = AB$.



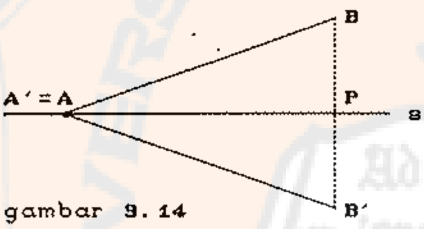
gambar 3.12

c) Untuk kejadian $AB // s$, $ABB'A'$ membentuk persegi panjang, maka $A'B' = AB$.



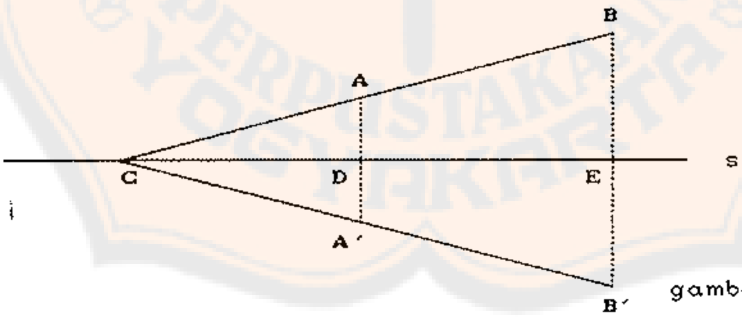
gambar 3.13

d) Untuk kejadian A pada s, maka $A' = A$. Dari definisi refleksi diperoleh bahwa s adalah sumbu $\overline{BB'}$. Diperhatikan ΔAFB dan $\Delta AFB'$. $\overline{BF} \cong \overline{B'F}$, $\overline{AF} \cong \overline{AF}$ dan $\angle BFA \cong \angle B'FA$. Jadi $\Delta AFB \cong \Delta AFB'$ sehingga $A'B' = AB$.



gambar 3.14

Untuk kejadian yang tidak khusus, dapat dilihat pada gambar berikut ini.



gambar 3.15

Andaikan $\overleftrightarrow{AB}$ memotong s di C. Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa C, A', B' segaris.

Ditarik $\overleftrightarrow{A'C}$ dan $\overleftrightarrow{B'C}$. Misalkan D adalah titik tengah $\overline{AA'}$ dan E titik tengah $\overline{BB'}$, maka D dan E pada s.

- Diperhatikan ΔCDA dan $\Delta CDA'$. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$, $\angle CDA \cong \angle CDA'$ dan $\overline{AD} \cong \overline{A'D}$. Jadi $\Delta CDA \cong \Delta CDA'$. $\therefore m\angle DCA = m\angle DCA'$ dan $AC = A'C$.

- Diperhatikan ΔCEB dan $\Delta CEB'$. $\overline{CE} \cong \overline{CE}$, $\angle CEB \cong \angle CEB'$ dan $\overline{BE} \cong \overline{B'E}$. Jadi $\Delta CEB \cong \Delta CEB'$. $\therefore m\angle ECB = m\angle ECB'$ dan $BC = B'C$.

Karena A,B,C segaris, maka $m\angle ECB = m\angle DCA$, sehingga $m\angle ECB' = m\angle DCA'$. Jadi A',B',C segaris dan karena $BC = B'C$ dan $AC = A'C$, maka $AB = A'B'$. Terbukti ∎

c. Rotasi (Putaran)

Definisi 3.9 :

Rotasi terhadap titik C dengan sudut θ ialah transformasi $\rho_{C,\theta}$ yang memenuhi :

(i) $\rho_{C,\theta}(C) = C$

(ii) $\rho_{C,\theta}(A) = A'$ dengan $CA' = CA$ dan $m\angle ACA' = \theta$.

Titik C disebut pusat rotasi dan θ disebut sudut rotasi. Sudut θ positif bila arah putarnya berlawanan dengan arah perputaran jarum jam.

Teorema 3.16 :

a. Rotasi non identitas hanya mengawetkan satu titik yaitu titik pusatnya.

b. Jika C suatu titik, θ dan ϕ sudut-sudut putar, maka

$$\rho_{C,\phi}\,\rho_{C,\theta} = \rho_{C,\theta+\phi}$$

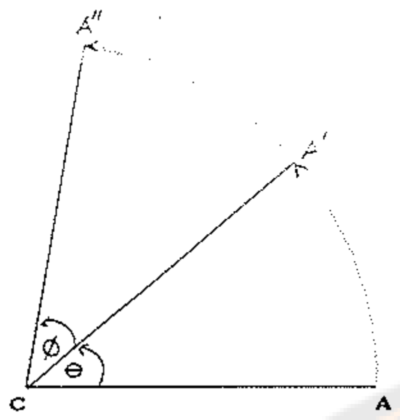
Bukti :

a. Dari definisi rotasi bagian (i) diperoleh bahwa rotasi non-identitas hanya mengawetkan titik pusatnya saja.

b. Andaikan $\rho_{C,\theta}(A) = A'$ dengan $CA' = CA$ dan $m\angle ACA' = \theta$.

$\rho_{C,\phi}(A') = A''$ dengan $CA' = CA''$ dan $m\angle A'CA'' = \phi$.

$(\rho_{C,\phi}\rho_{C,\theta})(A) = \rho_{C,\phi}(\rho_{C,\theta}(A)) = \rho_{C,\phi}(A') = A''$ dengan



gambar 3.16

CA=CA'' dan m∠ACA''=m∠ACA'+ m∠A'CA''=θ + ϕ. Dengan kata lain $\rho_{C,\phi}\rho_{C,\theta}$ adalah transformasi yang memenuhi $\rho_{C,\phi}$ $\rho_{C,\theta}$(A)=A'' dengan CA=CA'' dan m∠ACA''=$\theta+\phi$. Terbukti ■

Teorema 3.17 :

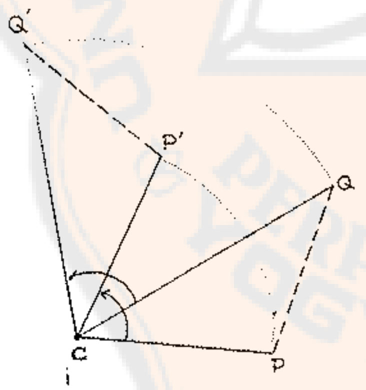
Rotasi adalah suatu isometri.

Bukti :

Misalkan $\rho_{C,\theta}$(P) = P' dan $\rho_{C,\theta}$(Q) = Q'. Jika C,P,Q kolinear, maka dari definisi rotasi PQ = P'Q'.

gambar 3.17

Jika C,P,Q non-kolinear, diperhatikan ΔPCQ dan ΔP'C'Q'.



gambar 3.18

$\overline{CP} \cong \overline{CP'}$, $\overline{CQ} \cong \overline{CQ'}$ dan ∠PCP' ≅ ∠QCQ'. Jadi ΔPCQ ≅ ΔP'C'Q' sehingga diperoleh PQ = P'Q'. Jadi $\rho_{C,\theta}$ mengawetkan jarak, dengan kata lain $\rho_{C,\theta}$ suatu isometri. Terbukti ■

Teorema 3.18 :

Himpunan semua rotasi ($\mathcal{R}$,.) dengan pusat rotasi tertentu membentuk grup Abelian.

Bukti :

Cukup dibuktikan bahwa $\mathcal{R} \neq \emptyset$, operasi . tertutup pada $\mathcal{R}$, setiap elemen dalam $\mathcal{R}$ mempunyai invers dalam $\mathcal{R}$ dan operasi . memenuhi sifat komutatif.

(1) $\mathcal{R}$ pasti memuat paling sedikit satu rotasi, yaitu transformasi identitas ι. Jadi R $\neq \emptyset$.

(2) Bahwa operasi . tertutup pada $\mathcal{R}$ sudah dibuktikan dalam Teorema 3.16 bagian b.

(3) $\rho_{P,\beta}\ \rho_{P,\alpha} = \rho_{P,\alpha+\beta} = \rho_{P,\beta+\alpha} = \rho_{P,\alpha}\ \rho_{P,\beta}$.
Jadi operasi dalam ($\mathcal{R}$, .) memenuhi sifat komutatif.

(4) Diambil sebarang elemen $\rho_{P,\Theta} \in \mathcal{R}$. Andaikan invers dari $\rho_{P,\Theta}$ adalah $\rho_{P,\phi}$ sedemikian hingga memenuhi

$$\rho_{P,\Theta}\rho_{P,\phi} = \iota$$

$$\rho_{P,\Theta}\ \rho_{P,\phi} = \iota \Leftrightarrow \rho_{P,\Theta}\ \rho_{P,\phi} = \rho_{P,0}$$

$$\rho_{P,\Theta+\phi} = \rho_{P,0}$$

$$\Theta + \phi = 0$$

$$\phi = -\Theta$$

Jadi $\rho_{P,\Theta}$ mempunyai invers yaitu $\rho^{-1}_{P,\Theta} = \rho_{P,-\Theta} \in \mathcal{R}$.

Terbukti himpunan semua rotasi membentuk grup Abelian ∎

<u>Teorema 3.19 :</u>

$\rho_{C,180} = \sigma_C$ untuk setiap titik C.

<u>Bukti :</u>

Dari definisi rotasi, diperoleh bahwa setiap transformasi yang mengawetkan titik C memetakan setiap titik P ke titik P' dengan CP = CP' dan $m\angle PCP' = 180°$. Ini berarti bahwa C merupakan titik tengah P dan P'. Jadi $\rho_{C,180}$ adalah refleksi terhadap titik C. Terbukti $\rho_{C,180} = \sigma_C$ ∎

Rotasi dalam Teorema 3.19 merupakan rotasi yang khusus, yaitu rotasi dengan sudut rotasi 180°. Rotasi khusus ini disebut setengah-rotasi ("halfturn").

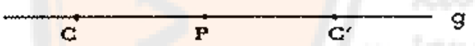
Teorema 3.20 :

Satu-satunya titik invarian dalam σ_P adalah titik P sendiri sedang garis invarian adalah garis-garis yang melalui P

Bukti :

Untuk bukti titik invarian diperoleh langsung dari definisi rotasi bagian (i).

Untuk garis invarian, misalkan garis g melalui P dan $C \in g$



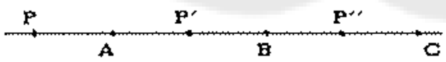
gambar 3.19

dengan $C \neq P$, maka $\sigma_P(C) = C'$ akan segaris dengan C dan P (karena P titik tengah $\overline{CC'}$). Karena itu $C' \in g$. Hal ini berlaku untuk setiap titik pada g, sehingga $\sigma_P(g) = g$. Terbukti g garis invarian ■

Teorema 3.21 :

Jika B adalah titik tengah $\overline{AC}$, maka $\sigma_B\sigma_A = \tau_{AC} = \sigma_C\sigma_B$.

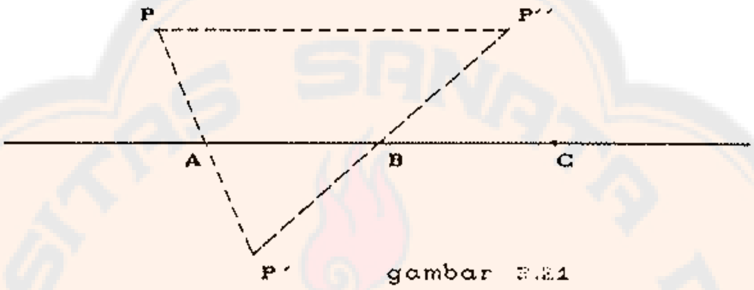
Bukti :



gambar 3.20

Andaikan $P' = \sigma_A(P)$, $P'' = \sigma_B(P')$. Dari definisi rotasi diperoleh bahwa $PA = AP'$ dan $P'B = BP''$. Untuk kejadian P,A,B titik-titik kolinear diperoleh $P'' = \sigma_B\sigma_A(P)$. sehingga $\sigma_B\sigma_A$ merupakan translasi τ_{AC} dengan $AC = 2AB$. Juga berlaku $\tau_{AC} = \sigma_C\sigma_B$ dengan $AC = 2\ BC$.

Untuk kejadian P,A,B titik-titik non-kolinear $P'' = \sigma_B\sigma_A(P)$. Dari definisi rotasi diperoleh PA = AP' dan P'B = BP''. Jadi $\overline{AB}$ adalah garis penghubung titik tengah dari $\overline{PP'}$ dan $\overline{P''P'}$ yang sejajar dengan PP''. Oleh karena itu PP''= 2AB.



gambar 3.21

Karena AB konstan, maka PP'' konstan (sama untuk semua P di luar $\overleftrightarrow{AB}$), sehingga $\sigma_B\sigma_A$ merupakan suatu translasi τ_{AC} dengan AC = 2AB. Dari penjabaran di atas juga jelas bahwa suatu translasi selalu dapat dianggap sebagai hasil kali dua buah setengah-rotasi. Jadi $\tau_{AC} = \sigma_C\sigma_B$ dengan AC = 2BC.

Terbukti $\sigma_B\sigma_A = \tau_{AC} = \sigma_C\sigma_B$ ■

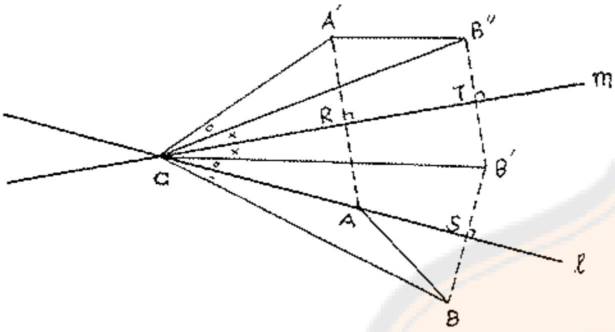
2. Hasil Kali Dua Refleksi

<u>Teorema 3.22</u> :

Jika garis l dan m berpotongan di titik C dan $m\angle(l,m) = \frac{\theta}{2}$, maka $\sigma_m\sigma_l = \rho_{C,\theta}$.

<u>Bukti</u> :

Andaikan $m\angle(l,m) = \frac{\theta}{2}$, A sebarang titik pada l dan A ≠ C, maka $\sigma_m(A) = A'$ dengan m sumbu $\overline{AA'}$. Dipandang $\Delta CRA'$ dan ΔCRA. $\overline{CR} \cong \overline{CR}$, $\overline{A'R} \cong \overline{AR}$ dan $\angle A'RC \cong \angle ARC$, maka $\Delta CRA' \cong \Delta CRA$ sehingga CA = CA' dan $m\angle A'CR = m\angle ACR = \frac{\theta}{2}$. $m\angle A'CA = 2.m\angle ACR = 2.m\angle(l,m) = 2.\frac{\theta}{2} = \theta$.



gambar 3.22

Andaikan B sebarang titik di luar l dan m. $\sigma_l(B) = B'$ dengan l sumbu $\overline{BB'}$ dan $\sigma_m(B') = B''$ dengan m sumbu $\overline{B'B''}$.

- Dipandang $\Delta CSB'$ dan ΔCSB. $\overline{CS} \cong \overline{CS}$, $\overline{B'S} \cong \overline{BS}$ dan $\angle B'SC \cong \angle BSC$, maka $\Delta CSB' \cong \Delta CSB$ sehingga $CB = CB'$ dan $m\angle B'CS = m\angle BCS$.
- Dipandang $\Delta CTB''$ dan $\Delta CTB'$. $\overline{CT} \cong \overline{CT}$, $\overline{B''T} \cong \overline{B'T}$ dan $\angle B''TC \cong \angle B'TC$, maka $\Delta CTB'' \cong \Delta CTB'$ sehingga $CB' = CB''$ dan $m\angle B''CT = m\angle B'CT$. $m\angle B''CB = 2.m\angle(l,m) = 2.\frac{\theta}{2} = \theta$.

$CA' = CA$, $m\angle A'CA = \theta$, maka $\sigma_m\sigma_l(A) = \rho_{C,\theta}(A)$. $CB'' = CB$, $m\angle B''CB' = \theta$, maka $\sigma_m\sigma_l(B) = \rho_{C,\theta}(B)$. Karena $A'C = AC$, $B''C = BC$ dan $m\angle A'CB'' = m\angle ACB$, maka $\Delta A'CB'' \cong \Delta ACB$ dan arah perputaran sudut-sudutnya pun searah. Terbukti ∎

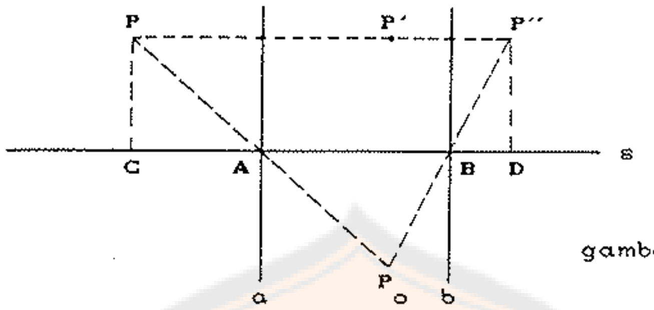
Jika $l \perp m$, maka $m\angle(l,m) = 90^\circ$ sehingga $\sigma_m\sigma_l = \rho_{P,180} = \sigma_P$.

<u>Teorema 3.23 :</u>

Jika a//b, maka $\sigma_b\sigma_a$ adalah suatu translasi dengan vektor translasi yang besarnya dua kali jarak a ke b.

<u>Bukti :</u>

Ditarik sebarang garis $s \perp a$. Misalkan A = titik (a,s), B = titik (b,s). Dari Teo. 3.22 (kejadian khusus) diperoleh bahwa $\sigma_s\sigma_a = \sigma_A$ dan $\sigma_b\sigma_s = \sigma_B$.



gambar3. 23

Sehingga $\sigma_b \sigma_s \sigma_s \sigma_a = \sigma_B \sigma_A$

$\sigma_b \; \iota \; \sigma_a = \sigma_B \sigma_A$

$\sigma_b \sigma_a = \sigma_B \sigma_A$

$\sigma_b \sigma_a = \tau_{CD}$ (Teo. 3.21) dengan CD = 2 AB.

Jadi $\sigma_b \sigma_a = \tau_{CD}$ dengan CD = 2 x AB. Terbukti ∎

3. Hasil Kali Dua Isometri

Teorema 3.24 :

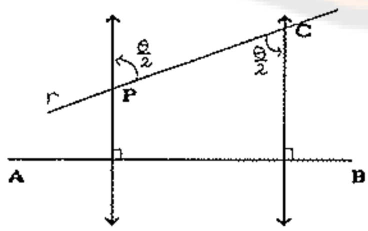
Untuk sebarang titik A,B,P dan bilangan real θ ukuran sudut, selalu dapat ditemukan titik C dan D sedemikian hingga :

a) $\tau_{AB} \; \rho_{P,\theta} = \rho_{C,\theta}$

b) $\rho_{P,\theta} \; \tau_{AB} = \rho_{D,\theta}$

Bukti :

a) Diketahui titik-titik A,B,P dan bilangan real θ ukuran sudut. Ditarik garis p melalui P, p $\perp$ $\overline{AB}$.



Ditarik garis q // p dengan jarak $\frac{1}{2}\overline{AB}$. Ditarik garis r melalui P dengan $m\angle(r,p) = \frac{\theta}{2}$

gambar 3. 24

$\tau_{AB} \; \rho_{P,\theta} = (\sigma_q \sigma_p)(\sigma_p \sigma_r)$ (Teo. 3.23 & 3.22)

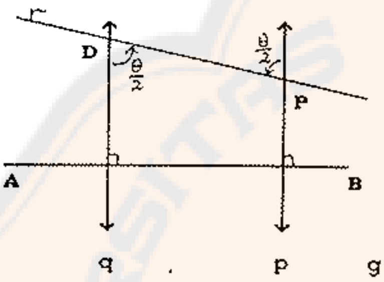
$= \sigma_q (\sigma_p \sigma_p) \sigma_r$ (sifat asosiatif)

$$= \sigma_q \ \iota \ \sigma_r$$

$$= \sigma_q \sigma_r$$

$$= \rho_{C,\theta} \qquad \text{(Teo. 3.22)}$$

b) Diketahui titik-titik A,B,P dan bilangan real θ ukuran sudut. Ditarik garis p melalui P, $p \perp \overline{AB}$.



Ditarik garis q // p dengan jarak $\frac{1}{2}\overline{AB}$. Ditarik garis r melalui P dengan $m\angle(r,p) = \frac{\theta}{2}$

gambar 3.25

$$\rho_{P,\theta}\,\tau_{AB} = (\sigma_r\sigma_p)(\sigma_p\sigma_q) \qquad \text{(Teo. 3.23 \& 3.22)}$$

$$= \sigma_r(\sigma_p\sigma_p)\sigma_q \qquad \text{(sifat asosiatif)}$$

$$= \sigma_r \ \iota \ \sigma_q$$

$$= \sigma_r\sigma_q$$

$$= \rho_{D,\theta} \ ■ \qquad \text{(Teo. 3.22)}$$

Definisi 3.10 :

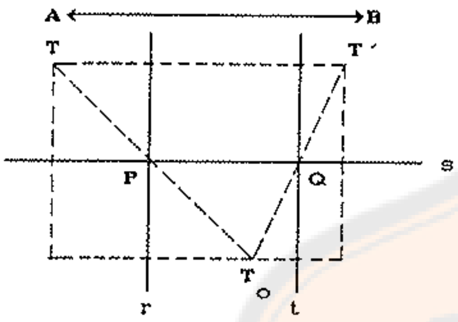
Transformasi γ disebut refleksi geser bila terdapat garis s dan $\overline{AB}$ dengan $s // \overleftrightarrow{AB}$ sehingga $\gamma = \sigma_s \tau_{AB}$.

Jadi refleksi geser adalah translasi non-identitas dilanjutkan oleh refleksi terhadap sumbu yang sejajar arah translasi. Garis s disebut sumbu refleksi geser.

Teorema 3.25 :

Jika $s // \overleftrightarrow{AB}$, maka $\sigma_s \tau_{AB} = \tau_{AB}\, \sigma_s$.

Bukti :



gambar 3.26

Ditarik garis r dan t, keduanya tegak lurus s dengan jarak $(r,t)=\frac{1}{2}AB$. P=titik (r,s) , Q=titik (t,s), maka diperoleh

$$\sigma_s \tau_{AB} = \sigma_s \sigma_Q \sigma_P \qquad \text{(Teo. 3.21)}$$

$$= \sigma_s(\sigma_s \sigma_t)(\sigma_r \sigma_s) \qquad \text{(Teo. 3.22, kej. khusus)}$$

$$= (\sigma_s \sigma_s)\ (\sigma_t \sigma_r)\ \sigma_s \qquad \text{(sifat asosiatif)}$$

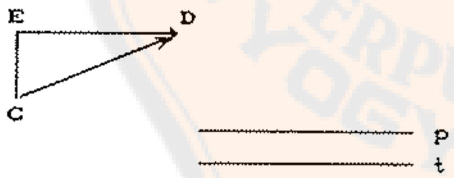
$$= \iota\ \tau_{AB}\ \sigma_s$$

Jadi $\sigma_s \tau_{AB} = \tau_{AB}\ \sigma_s = \gamma$. Terbukti ∎

Teorema 3.26 :

Untuk sebarang CD dan garis t dengan CD tidak tegak lurus t, terdapat γ sehingga $\tau_{CD}\ \sigma_t = \gamma$.

Bukti :



gambar 3. 27

Ditentukan titik E sedemikian hingga CE ⊥ t dan ED // t, maka CD = CE + ED.

$$\tau_{CD}\ \sigma_t = \tau_{ED}\ \tau_{CE}\ \sigma_t \qquad \text{(Teo. 3.8)}$$

$$= \tau_{ED}\ (\sigma_p\ \sigma_t)\ \sigma_t \qquad \text{(Teo. 3.23)}$$

$$= \tau_{ED}\ \sigma_p\ (\sigma_t\ \sigma_t) \qquad \text{(sifat asosiatif)}$$

$$= \tau_{ED}\ \sigma_p\ \iota$$

$$= \tau_{ED}\ \sigma_p$$

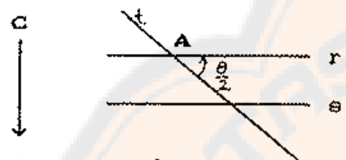
$$= \gamma \qquad \text{(karena p//ED)}$$ ∎

Teorema 3.27 :

Untuk sebarang garis s, titik A di luar s dan sudut θ yang diketahui terdapat γ_1 dan γ_2 sedemikian hingga $\sigma_s \rho_{A,\theta} = \gamma_1$ dan $\rho_{A,\theta}\sigma_s = \gamma_2$.

Bukti :

Diketahui garis s dan A di luar s. Ditarik garis r melalui A dan r//s. Ditarik garis t melalui A sedemikian hingga berlaku $m\angle(t,r) = \frac{\theta}{2}$.



gambar 3.28

$$\sigma_s \rho_{A,\theta} = \sigma_s(\sigma_r \sigma_t) \quad \text{(Teo. 3.22)}$$
$$= (\sigma_s \sigma_r)\,\sigma_t \quad \text{(sifat asosiatif)}$$
$$= \tau_{CD}\,\sigma_t \quad \text{dengan } CD = 2 \times \text{jarak } (s,r) \text{ dan } CD \perp s$$
$$= \gamma_1 \quad \text{(Teo. 3.26)}$$

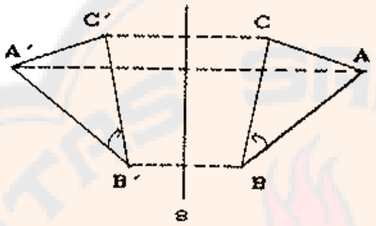
Sebaliknya, $\rho_{A,\theta}\sigma_s = (\sigma_t \sigma_r)\sigma_s = \sigma_t(\sigma_r \sigma_s) = \sigma_t \tau_{DC} = \gamma_2$ ∎

Dari teorema-teorema di atas diketahui bahwa translasi τ dan rotasi ρ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dua refleksi, termasuk juga setengah-rotasi sebagai kejadian khusus rotasi. Juga sudah dibuktikan bahwa refleksi geser γ merupakan hasil kali translasi dan refleksi, yang berarti juga merupakan hasil kali tiga refleksi.

Jadi semua isometri yang telah dibahas dapat dinyatakan sebagai hasil kali beberapa refleksi. Secara umum, setiap hasil kali antara τ, ρ, γ dan σ selalu dapat dinyatakan sebagai rangkaian refleksi. Sebagai contoh diambil $\tau\rho\gamma = (\sigma_7\sigma_6)(\sigma_5\sigma_4)(\sigma_3\sigma_2\sigma_1) = \sigma_7\sigma_6\sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1$.

4. Isometri Searah dan Isometri Berlawanan Arah

Sebelum membahas tentang isometri searah dan isometri berlawanan arah, terlebih dahulu kita perhatikan gambar berikut ini.



gambar 3.29

Oleh suatu refleksi σ_s, $\angle ABC$ dibawa ke $\angle A'B'C'$ dan arah perputaran sudut tersebut dibalik dari arah semula. Jadi jika semula $m\angle ABC > 0$ (positif), maka hasilnya $m\angle A'B'C' < 0$ (negatif) dan sebaliknya.

Isometri yang tidak mengubah arah sudut disebut isometri searah, sedangkan isometri yang mengubah arah sudut seperti di atas disebut isometri berlawanan arah. Contoh isometri searah antara lain translasi, rotasi atau hasil kali keduanya. Hal ini dimungkinkan karena suatu translasi dapat dinyatakan sebagai hasil kali dua refleksi. Hasil kali dua refleksi akan membawa bangun bayangannya menjadi searah dengan bangun semula, sehingga arah sudutnya pun akan searah dengan arah sudut semula. Demikian juga dengan rotasi serta hasil kali translasi dan rotasi. Contoh isometri berlawanan arah antara lain refleksi geser, karena suatu refleksi geser dapat dinyatakan sebagai hasil kali tiga refleksi.

Akhirnya dapat disimpulkan bahwa suatu rangkaian refleksi $\sigma_n\sigma_{n-1}\ldots\sigma_1$ akan berupa isometri searah bila n genap dan akan berupa isometri berlawanan arah bila n gasal. Isometri searah dapat disebut isometri genap, isometri berlawanan arah dapat disebut isometri gasal.

B. Transformasi Kesebangunan (Similaritas)

Definisi 3.11 :

Transformasi α merupakan suatu similaritas bila dan hanya bila terdapat bilangan positif k $(k>0)$ sehingga untuk setiap pasangan titik P dan Q dipenuhi $P'Q'=k.PQ$ dengan $P' = \alpha(P)$ dan $Q' = \alpha(Q)$.

Similaritas di atas disebut similaritas dengan faktor k dan dilambangkan dengan α_k. Bilangan k disebut faktor similaritas.

Dengan perkataan lain similaritas adalah suatu transformasi yang membawa suatu bangun geometri ke bangun geometri lain yang sebangun (similar). Untuk $k = 1$ similaritas tersebut akan berupa isometri. Jadi isometri merupakan kejadian khusus dari similaritas.

Teorema 3.28 :

Himpunan semua similaritas $(\mathscr{S},.)$ membentuk grup.

Bukti :

Cukup dibuktikan bahwa $\mathscr{S} \neq \emptyset$, operasi . tertutup pada $\mathscr{S}$ dan setiap elemen dalam $\mathscr{S}$ mempunyai invers dalam $\mathscr{S}$.

(1) $\mathscr{S}$ pasti memuat paling sedikit satu similaritas, yaitu transformasi identitas ι. Jadi $\mathscr{S} \neq \emptyset$

(2) Andaikan α_m dan α_k sebarang similaritas dalam $\mathscr{S}$. Jika $\alpha_m(P) = P'$, $\alpha_m(Q) = Q'$, $\alpha_k(P') = P''$, $\alpha_k(Q') = Q''$, maka $\alpha_k\alpha_m(P) = \alpha_k(\alpha_m(P)) = \alpha_k(P') = P''$ dan

$\alpha_k\alpha_m(Q) = \alpha_k(\alpha_m(Q)) = \alpha_k(Q') = Q''$.

Karena α_m similaritas, maka $P'Q' = m.PQ$.

Karena α_k similaritas, maka $P''Q'' = k.P'Q' = km.PQ$

$\therefore\ \alpha_k\alpha_m = \alpha_{km}$. Jadi operasi . tertutup pada $\mathscr{S}$.

(3) Andaikan α_m sebarang similaritas dalam $\mathscr{S}$ dan α_k invers dari α_m sehingga berlaku $\alpha_m\alpha_k = \alpha_k\alpha_m = \iota = \alpha_1$.

Maka $\alpha_m\alpha_k = \alpha_1$

$\alpha_{mk} = \alpha_1$

$mk = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{m}$

Jadi α_m mempunyai invers yaitu $\alpha_m^{-1} = \alpha_{\frac{1}{m}} \in \mathscr{S}$.

Terbukti himpunan semua similaritas membentuk grup ∎

Teorema 3.29 :

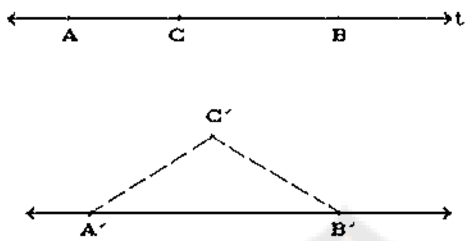
Similaritas adalah suatu kolineasi

Bukti :

Andaikan α suatu similaritas.

Diambil sebarang garis t dengan dua titik A dan B padanya. Jika $A' = \alpha_m(A)$ dan $B' = \alpha_m(B)$, maka harus dibuktikan bahwa $\alpha_m(t) = \overleftrightarrow{A'B'}$. Karena α_m similaritas, maka berlaku $A'B' = m.AB$.

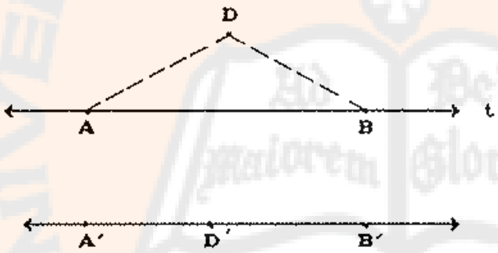
a) Andaikan C sebarang titik pada t dengan $\alpha_m(C) = C'$.



gambar 3.30

Andaikan C' tidak pada $\overleftrightarrow{A'B'}$, maka berlaku $A'C' + C'B' > A'B'$. Karena α_m similaritas, maka $A'C' = m.AC$ dan $C'B' = m.CB$, sehingga $A'C' + C'B' = m.AC + m.CB = m(AC+CB) = m.AB = A'B'$. Muncul kontradiksi dengan pengandaian bahwa C' tidak pada $\overleftrightarrow{A'B'}$. Jadi C' pada $\overleftrightarrow{A'B'}$ sehingga $\alpha_m(t) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$.

b) Andaikan D' sebarang titik pada $\overleftrightarrow{A'B'}$.



gambar 3.31

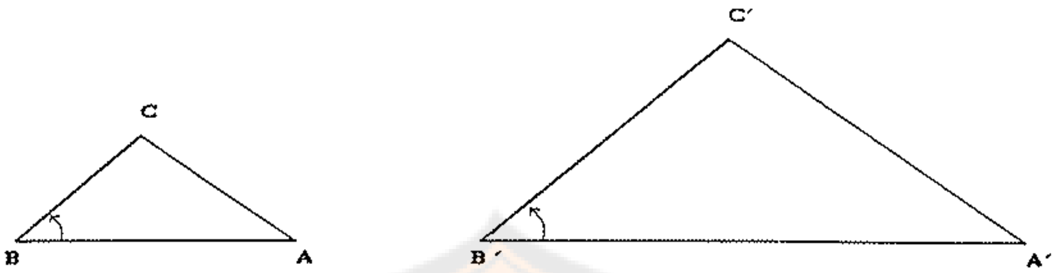
Karena α_m suatu transformasi, pasti ada D dengan $D' = \alpha_m(D)$. Andaikan D tidak pada t, maka berlakulah $AD + DB > AB$. Karena α_m similaritas, maka $A'D' = m.AD$ dan $D'B' = m.DB$, atau $AD = \frac{1}{m}.A'D'$ dan $DB = \frac{1}{m}.D'B'$. $AD+DB = \frac{1}{m}.A'D' + \frac{1}{m}.D'B' = \frac{1}{m}(A'D' + D'B') = \frac{1}{m}.A'B' = AB$. Muncul kontradiksi dengan pengandaian bahwa D tidak pada t. Jadi D pada t sehingga $\overleftrightarrow{A'B'} \subset \alpha_m(t)$ sehingga terbukti bahwa $\alpha_m(t) = \overleftrightarrow{A'B'}$ ∎

<u>Teorema 3.30</u> :

Similaritas mengawetkan besar sudut.

<u>Bukti</u> :

Ditentukan $\angle ABC$. Misalkan $A' = \alpha_k(A)$, $B' = \alpha_k(B)$, $C' = \alpha_k(C)$



gambar 3.32

Maka $A'B' = k.AB$, $B'C' = k.BC$, $C'A' = k.CA$.

Dari sifat kesebangunan dua segitiga diperoleh bahwa $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$ sehingga $m\angle A'B'C' = m\angle ABC$. Terbukti ∎

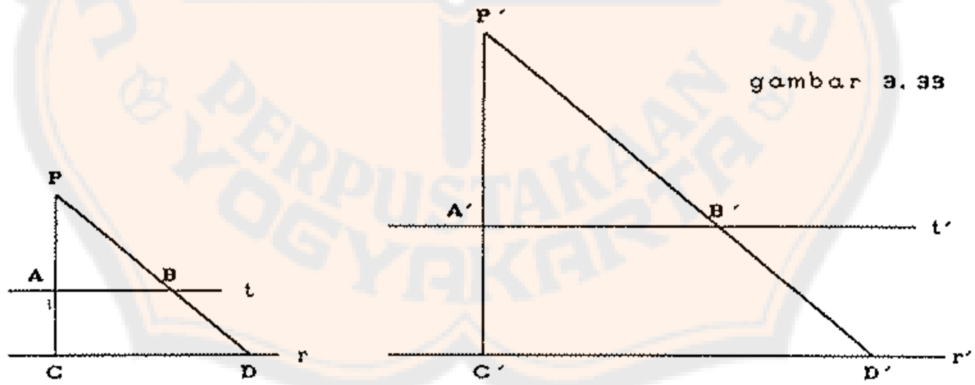
Akibat Teorema 3.30 : similaritas mengawetkan ketegaklurusan.

<u>Teorema 3.31</u> :

Similaritas mengawetkan kesejajaran.

<u>Bukti</u> :

Diambil dua garis t dan r dengan t//r.



gambar 3.33

Titik P di luar t dan dan r. Ditarik dua garis melalui P yang memotong t di A dan di B, juga memotong r di C dan D. Andaikan α_k membawa bangun ini menjadi bangun lain dengan $A'=\alpha_k(A)$, $B'=\alpha_k(B)$ $C'=\alpha_k(C)$, $D'=\alpha_k(D)$ dan $P'=\alpha_k(P)$. Karena α kolineasi, P',A',C' akan segaris, P',B',D' akan segaris, $\overleftrightarrow{A'B'} = t'$, $\overleftrightarrow{C'D'} = r'$.

Karena r // t, maka $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$. $\frac{P'A'}{P'C'} = \frac{kPA}{kPC} = \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{kPB}{kPC}$ $= \frac{P'B'}{P'C'}$. Jadi $\frac{P'A'}{P'C'} = \frac{P'B'}{P'D'}$ sehingga t'//r'. Terbukti ∎

Definisi 3.12 :

Untuk suatu titik P dan bilangan positif k, transformasi $\delta_{P,k}$ disebut dilatasi sentral terhadap P dengan faktor k bila :

(i) $\delta_{P,k}(P) = P$

(ii) untuk $Q \neq P$, $\delta_{P,k}(Q) = Q'$ dengan $PQ' = k.PQ$.

Bilangan k disebut faktor dilatasi sentral dan P disebut pusat dilatasi sentral.

Teorema 3.32 :

Hasil kali isometri dan dilatasi sentral adalah suatu similaritas.

Bukti :

Suatu isometri $\mathfrak{I}$ akan mengawetkan jarak, sedangkan suatu dilatasi sentral $\delta_{P,k}$ akan mengalikan jarak tersebut menjadi k kali, sehingga hasil kalinya merupakan similaritas α_k . Terbukti ∎

Hasil kali dilatasi sentral terhadap titik P diikuti oleh isometri genap disebut similaritas searah, sedangkan hasil kali dilatasi sentral terhadap titik P diikuti oleh isometri gasal disebut similaritas berlawanan arah. Contohnya, hasil kali dilatasi sentral diikuti oleh rotasi dengan titik pusat rotasi sama dengan titik pusat dilatasi disebut similaritas spiral (rotasi dilatif) dan hasil kali dilatasi sentral diikuti oleh refleksi dengan titik pusat dilatasi pada cermin disebut refleksi dilatif.

BAB IV

TRANSFORMASI AFIN dalam BIDANG EUCLIDES

A. Persamaan Transformasi Afin dalam Bidang Euclides

Definisi 4.1 :

Transformasi afin adalah suatu transformasi yang mempunyai persamaan $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Persamaan transformasi ini adalah juga persamaan transformasi linear (Gans, David, 1969 : 83).

Teorema 4.1 :

Transformasi linear memetakan himpunan titik pada suatu bidang secara bijektif ke himpunan titik pada bidang itu sendiri.

Bukti :

Diperhatikan persamaan $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Nilai-nilai x' dan y' tertentu dengan tunggal untuk setiap pasangan titik x dan y yang diberikan. Karena itu setiap titik pada bidang mempunyai bayangan yang tunggal.

Demikian juga sebaliknya, persamaan $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ mempunyai penyelesaian untuk tiap nilai x' dan y' yang diberikan yaitu :

Andaikan bayangan (x_1,y_1) sama dengan bayangan (x_2,y_2). Akan ditunjukkan bahwa $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. Bayangan dari (x_1,y_1) adalah $\begin{cases} x_1' = ax_1 + by_1 + m \\ y_1' = cx_1 + dy_1 + n \end{cases}$ dan bayangan (x_2,y_2) adalah $\begin{cases} x_2' = ax_2 + by_2 + m \\ y_2' = cx_2 + dy_2 + n \end{cases}$. Jika bayangan (x_1,y_1) sama dengan bayangan (x_2,y_2), maka $(x_1',y_1') = (x_2',y_2')$. Diperoleh $x_1' = x_2'$ yang berarti $ax_1 + by_1 + m = ax_2 + by_2 + m \Leftrightarrow$

$a(x_1-x_2) - b(y_1-y_2) = 0,$ (1)

dan $y_1' = y_2'$ yang berarti $cx_1 + dy_2 + n = cx_2 + dy_2 + n \Leftrightarrow$

$c(x_1-x_2) - d(y_1-y_2) = 0$ (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$\begin{array}{l|l|l} a(x_1-x_2) - b(y_1-y_2) = 0 & \times\ d & ad(x_1-x_2) - bd(y_1-y_2) = 0 \\ c(x_1-x_2) - d(y_1-y_2) = 0 & \times\ b & bc(x_1-x_2) - bd(y_1-y_2) = 0 \\ \hline & & (ad-bc)(x_1 - x_2) = 0 \\ & & x_1 - x_2 = 0 \\ & & x_1 = x_2 \end{array}$$

Substitusi $x_1 = x_2$ ke persamaan (1) diperoleh :

$-d(y_1-y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$. Jadi diperoleh $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. Terbukti ∎

Teorema 4.2 :

Himpunan semua transformasi afin $(\mathscr{A},.)$ membentuk grup.

Bukti :

Cukup dibuktikan bahwa $\mathscr{A} \neq \emptyset$, operasi . tertutup pada $\mathscr{A}$ dan setiap elemen dalam $\mathscr{A}$ mempunyai invers dalam $\mathscr{A}$.

(1) $\mathscr{A}$ pasti memuat paling sedikit satu transformasi afin, yaitu transformasi identitas ι. Jadi $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

(2) Andaikan $A_1 : \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ $A_2 : \begin{cases} x' = px + qy + u \\ y' = rx + sy + v \end{cases}$

$A_2 : \begin{cases} x'' = px' + qy' + u \\ y'' = rx' + sy' + v \end{cases}$, maka :

$A_2A_1 : \begin{cases} x'' = p(ax + by + m) + q(cx + dy + n) + u \\ y'' = r(ax + by + m) + s(cx + dy + n) + v \end{cases}$

$A_2A_1 : \begin{cases} x'' = (ap + cq)x + (bp + dq)y + (mp + nq + u) \\ y'' = (ar + cs)x + (br + ds)y + (mr + ns + v) \end{cases}$

dengan $\begin{vmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{vmatrix} \neq 0$, sebab $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ dan $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0$ sedangkan $\begin{vmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$

Jadi operasi . bersifat tertutup pada $\mathscr{A}$.

(3) Diambil $A : \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ sebarang transformasi afin. Andaikan $B : \begin{cases} x' = px + qy + u \\ y' = rx + sy + v \end{cases}$ adalah invers dari A dengan $AB = BA = \iota$. Kedua persamaan tersebut dinyatakan dalam bentuk matriks. Persamaan A adalah

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ dan persamaan B adalah

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Persamaan AB yaitu :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} au + bv + m \\ cu + dv + n \end{pmatrix}$$

Jika $AB = \iota$, maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan

$\begin{pmatrix} au + bv + m \\ cu + dv + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ dan $u = -\frac{md-nb}{ad-bc}$, $v = \frac{mc-na}{ad-bc}$.

Persamaan BA yaitu :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} pm + qn + u \\ rm + sn + v \end{pmatrix}$$

Jika $BA = \iota$, maka $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan

$\begin{pmatrix} pm + qn + u \\ rm + sn + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diperoleh $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

$u = -(pm + qn)$ dan $v = -(rm + sn)$

$= -\frac{md-nb}{ad-bc}$ $\qquad v = \frac{mc-na}{ad-bc}$

Jadi B: $\begin{cases} x' = px + qy + u \\ y' = rx + sy + v \end{cases}$ adalah invers dari A dengan

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \text{ yang berarti } \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq \emptyset,$$

$p = \dfrac{d}{ad-bc}$, $q = \dfrac{-b}{ad-bc}$, $r = \dfrac{-c}{ad-bc}$, $s = \dfrac{a}{ad-bc}$ dan

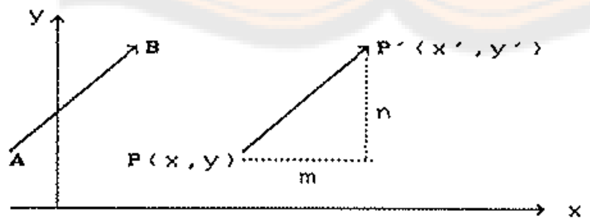
$u = -\dfrac{md - nb}{ad - bc}$, $v = \dfrac{mc - na}{ad - bc}$. Terbukti ∎

B. Persamaan Umum Isometri dan Similaritas

Sebelum membahas persamaan umum transformasi isometri dan similaritas terlebih dahulu diperhatikan persamaan transformasi afin berikut $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ dengan $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$ dan $ad - bc \neq 0$.

1. Persamaan Translasi

Andaikan diketahui vektor posisi $AB = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. Andaikan $P(x,y)$ sebarang titik pada bidang, $\tau_{AB}(P) = P'(x',y')$ dengan $PP' = AB$. Dari gambar 4.1 tampak bahwa $x' = x + m$ dan $y' = y + n$.

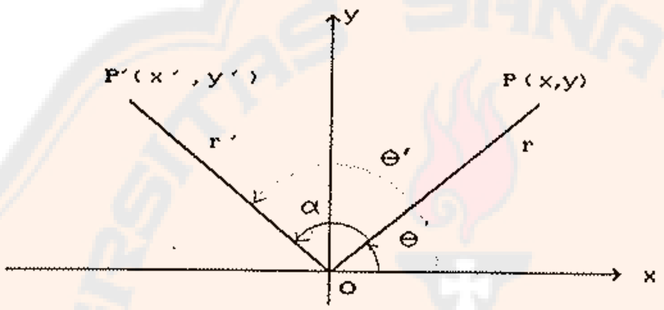


gambar 4.1

Jadi persamaan translasi yaitu $\begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases}$.

2. Persamaan Rotasi

Andaikan α adalah sudut rotasi dan O(0,0) adalah pusat rotasi. Diambil sebarang titik P pada bidang, maka dari Definisi 3.9 berlaku $\rho_{O,\alpha}(P) = P'$ dengan $OP' = OP$ dan $m\angle POP' = \alpha$. Andaikan $OP = r$ dan $m\angle POX = \theta$. Maka $r' = r$ dan $\theta' = \theta + \alpha$. Jika $P(x,y)$ dan $P'(x',y')$, maka diperoleh :



gambar 4.2

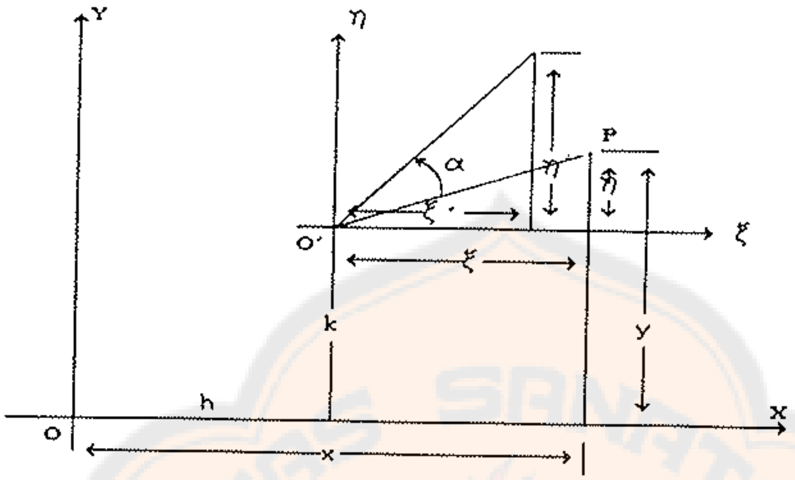
$$x' = r'\cos\theta' = r\cos(\theta+\alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha$$
$$= x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = r'\sin\theta' = r\sin(\theta+\alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha$$
$$= y\cos\alpha + x\sin\alpha$$

Jadi persamaan rotasi dengan titik pusat O(0,0) dan sudut rotasi α mempunyai persamaan $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$

Andaikan $O'(h,k)$ sebarang titik pusat rotasi, α sudut rotasi dan $P'(x',y')$ adalah bayangan titik $P(x,y)$, ξ dan η adalah sumbu-sumbu koordinat yang sejajar dengan sumbu x dan sumbu y. Jika titik P (ξ,η) dan $P'(\xi',\eta')$,

maka diperoleh $\begin{cases} \xi' = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha \\ \eta' = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \end{cases}$ (1)

sehingga $\begin{cases} x = \xi + h \\ y = \xi + k \end{cases}$ dan $\begin{cases} x' = \xi' + h \\ y' = \eta' + k \end{cases}$ (2)



gambar 4.3

Persamaan (2) disubstitusikan ke persamaan (1), diperoleh

$$\begin{cases} x' - h = (x-h)\ \mathrm{Cos}\ \alpha - (y-k)\ \mathrm{Sin}\ \alpha \\ y' - k = (x-h)\ \mathrm{Sin}\ \alpha + (y-k)\ \mathrm{Cos}\ \alpha \end{cases} \quad (3)$$

Teorema 4.3 :

Sebarang rotasi non-identitas dengan sudut rotasi α, dan titik pusat bukan O adalah hasil kali rotasi dengan sudut rotasi α dan titik pusat O dan translasi.

Bukti :

Persamaan (3) di atas ditulis sebagai :

$$\begin{cases} x' = x\ \mathrm{Cos}\ \alpha - y\ \mathrm{Sin}\ \alpha + (h - h\ \mathrm{Cos}\ \alpha + k\ \mathrm{Sin}\ \alpha) \\ y' = x\ \mathrm{Sin}\ \alpha + y\ \mathrm{Cos}\ \alpha + (k - k\ \mathrm{Cos}\ \alpha - h\ \mathrm{Sin}\ \alpha) \end{cases} \quad (4)$$

atau $$\begin{cases} x' = x\ \mathrm{Cos}\ \alpha - y\ \mathrm{Sin}\ \alpha + m \\ y' = x\ \mathrm{Sin}\ \alpha + y\ \mathrm{Cos}\ \alpha + n \end{cases} \quad (5)$$

dengan $m = h - h\mathrm{Cos}\ \alpha + k\mathrm{Sin}\alpha$ dan $n = k - k\mathrm{Cos}\alpha - h\mathrm{Sin}\alpha$. Persamaan (5) dipandang sebagai hasil kali translasi dan rotasi dengan titik pusat O sebagai berikut :

$$\begin{cases} x' = x\ \mathrm{Cos}\ \alpha - y\ \mathrm{Sin}\ \alpha \\ y' = x\ \mathrm{Sin}\ \alpha + y\ \mathrm{Cos}\ \alpha \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases} \quad \blacksquare$$

Teorema 4.4 :

Translasi dan rotasi membentuk grup dan mempunyai persamaan berbentuk

$$\begin{cases} x' = x \text{ Cos } \alpha - y \text{ Sin } \alpha + m \\ y' = x \text{ Sin } \alpha + y \text{ Cos } \alpha + n \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

Bukti :

Translasi dan rotasi membentuk grup sudah dibuktikan dalam pembahasan di Bab III. Persamaan (i) akan menjadi persamaan translasi jika $\alpha = 0$ dan m,n sebarang. Persamaan (i) akan menjadi persamaan rotasi dengan titik pusat O jika $m = n = 0$ dan α sebarang. Selanjutnya rotasi dengan titik pusat bukan O merupakan hasil kali rotasi dengan titik pusat O dan translasi (Teorema 4.3) ∎

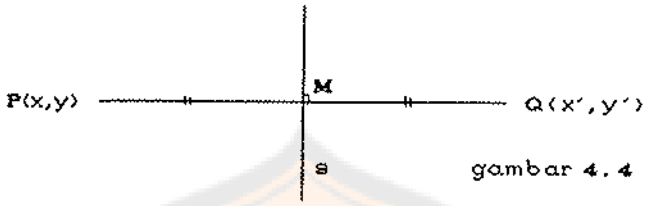
Untuk lebih sederhana persamaan (i) dapat diubah dalam notasi yang berbeda. Andaikan $a = \text{Cos } \alpha$, $b = -\text{Sin } \alpha$ sedangkan $a^2 + b^2 = 1$. Persamaan translasi dan rotasi berbentuk :

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = -bx + ay + n \end{cases} \quad \text{dengan } a^2 + b^2 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

Translasi dan rotasi merupakan isometri searah, oleh karena itu persamaan (ii) merupakan persamaan isometri searah. Tampak bahwa persamaan (ii) merupakan persamaan linear dengan $c = -b$, $d = a$ dan $a^2 + b^2 = 1$.

3. Persamaan Refleksi

Misalkan persamaan sumbu s adalah $s: pX + qY + r = 0$, $P(x,y)$, P di luar s dan $\sigma_m(P) = Q(x',y')$. Garis yang melalui (x,y) dan (x',y') pasti tegak lurus s (dari Definisi 3.7), sehingga $q(x'-x) = p(y'-y)$ (1)



gambar 4.4

Titik $M((x+x')/2,(y+y')/2)$ adalah titik tengah $\overline{PQ}$ dan terletak pada garis s, sehingga titik M memenuhi persamaan garis s yaitu : $p\left(\dfrac{x + x'}{2}\right) + q\left(\dfrac{y + y'}{2}\right) + r = 0$ (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh sistem persamaan berikut $\begin{cases} qx' - py' = qx - py \\ px' + qy' = -2r - px - qy \end{cases}$ .Dari sistem persamaan tersebut diperoleh nilai-nilai x' dan y', yaitu :

$$x' = \frac{q(qx - py) + p(-2r - px - qy)}{q^2 + p^2}$$

$$= \frac{q^2x + p^2x - 2p^2x - 2pqy - 2pr}{p^2 + q^2} \qquad (3)$$

$$y' = \frac{q(-2r - px - qy) - p(qx - py)}{q^2 + p^2}$$

$$= \frac{p^2y + q^2y - 2q^2y - 2pqx - 2qr}{p^2 + q^2} \qquad (4)$$

Dengan sedikit mengubah persamaan (3) dan (4) diperoleh persamaan I untuk refleksi :

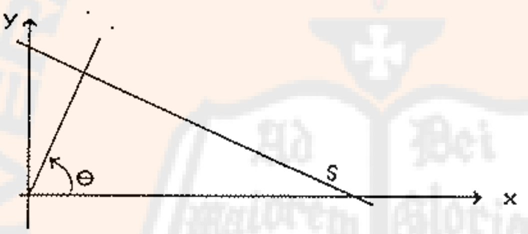
$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2p(px + qy + r)}{p^2 + q^2} \\[2ex] y' = y - \dfrac{2q(px + qy + r)}{p^2 + q^2} \end{cases}$$

atau $\begin{cases} x' = x - 2p(px + qy + r)/(p^2 + q^2) \\ y' = y - 2q(px + qy + r)/(p^2 + q^2) \end{cases}$

Jika s dinyatakan dengan persamaan bentuk normal, yaitu : s : $x \cos \theta + y \sin \theta - n = 0$ dengan $p = \cos \theta$, $q = \sin \theta$ dan $r = -n$, maka akan diperoleh persamaan II untuk refleksi yaitu :

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2\cos \theta\,(x\cos \theta + y\sin \theta - n)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\[2ex] y' = y - \dfrac{2\sin \theta\,(x\cos \theta + y\sin \theta - n)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \end{cases} \qquad \text{atau}$$

$$\begin{cases} x' = -x \cos 2\theta - y \sin 2\theta + 2p \cos \theta \\ y' = -x \sin 2\theta + y \cos 2\theta + 2p \sin \theta \end{cases}$$



gambar 4.5

$$\text{Persamaan refleksi } \sigma_s : \begin{cases} x' = x - 2p(px+qy+r)/(p^2+q^2) \\ y' = y - 2q(px+qy+r)/(p^2+q^2) \end{cases}$$

dapat ditulis secara lain, yaitu :

$$x' = -\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2}\,x - \frac{2pq}{p^2 + q^2}\,y - \frac{2pr}{p^2 + q^2} \quad \text{dan}$$

$$y' = -\frac{2pq}{p^2 + q^2}\,x + \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}\,y - \frac{2qr}{p^2 + q^2}.$$

Andaikan $a = -\dfrac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2}$, $b = \dfrac{2pq}{p^2 + q^2}$, $m = -\dfrac{2pr}{p^2 + q^2}$ dan $n = -\dfrac{2qr}{p^2 + q^2}$, maka diperoleh sistem persamaan baru

$$\begin{cases} x' = ax - by + m \\ y' = -bx - ay + n \end{cases}$$

dengan $a^2 + b^2 = 1$. Karena refleksi merupakan isometri berlawanan arah, maka persamaan di atas adalah juga persamaan isometri berlawanan arah. Tampak bahwa persamaan di atas merupakan persamaan linear dengan $c = -b$, $d = -a$ dan $a^2 + b^2 = 1$.Sebagai contoh akan diberikan hasil kali translasi dan refleksi terhadap sumbu x.

$\tau : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \end{cases}$ dan $\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ hasil kalinya yaitu :

$\tau\sigma_x : \begin{cases} x'' = x + 1 \\ y'' = -y \end{cases}$ dengan $a = 1$, $b = 0$, $m = 1$, $n = 0$ dan $a^2 + b^2 = 1$.

<u>Kesimpulan</u> :

Semua isometri mempunyai persamaan $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n \end{cases}$ dengan $a^2 + b^2 = 1$, tanda + untuk menyatakan isometri searah, tanda − untuk menyatakan isometri berlawanan arah. Sebaliknya setiap transformasi yang mempunyai persamaan seperti di atas, dengan $a^2 + b^2 = 1$ adalah isometri. Dari persamaan isometri di atas tampak bahwa isometri merupakan transformasi linear dengan $a^2 + b^2 = 1$.

<u>Definisi 4.2</u> :

Untuk suatu titik A dan bilangan positif k, transformasi $\delta_{A,k}$ disebut dilatasi sentral bila dipenuhi $\delta_{A,k}(B) = B'$, $B \neq A$ dan $AB' = k.AB$.

A disebut pusat dilatasi dan k faktor dilatasi. $k<0$ dapat dianggap sebagai hasil kali dilatasi sentral dilanjutkan dengan setengah rotasi. Jika $k>0$ titik B dan B' terletak pada sisi yang sama dari A. Sebaliknya jika $k<0$, A terletak di antara B dan B'.

Hasil kali isometri searah dengan dilatasi sentral, dengan urutan tertentu adalah suatu similaritas searah.

Persamaan isometri searah yaitu :

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = -bx + ay + n \end{cases} \quad \text{dengan } a^2+b^2 = 1 \qquad (1)$$

persamaan dilatasi sentral dengan pusat titik O yaitu :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \quad \text{dengan } k>0 \qquad (2)$$

Hasil kalinya adalah suatu persamaan berbentuk :

$$\begin{cases} x' = k(ax + by + m) & a^2+b^2 = 1 \\ y' = k(-bx + ay + n), & k > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

yang merupakan persamaan similaritas searah.

Andaikan $ka = A$, $kb = B$, $km = M$ dan $kn = N$ (4)

maka persamaan (3) dapat ditulis sebagai :

$$\begin{cases} x' = Ax + By + M \\ y' = -Bx + Ay + N \end{cases} \qquad (5)$$

Persamaan ini mempunyai bentuk yang sama dengan isometri searah, tetapi A^2+B^2 dapat memiliki beberapa nilai positif sebab $A^2+B^2 = (ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2+b^2) = k^2$. Dengan cara yang sama, persamaan untuk similaritas berlawanan arah diperoleh dari hasil kali isometri berlawanan arah dan dilatasi sentral.

<u>Kesimpulan :</u>

Setiap similaritas dengan rasio k mempunyai persamaan :

$$\begin{cases} x' = Ax + By + M \\ y' = \pm(-Bx + Ay) + N \end{cases} \quad \text{dengan } A^2 + B^2 = k^2 \neq 0.$$

Sebaliknya sebarang persamaan dengan bentuk seperti di atas dengan A dan B tidak sama dengan nol merupakan similaritas. Tanda + untuk similaritas searah dan tanda − untuk similaritas berlawanan arah. Tampak bahwa similaritas merupakan transformasi linear dengan $A^2+B^2 \neq 0$. Dari persamaan isometri dan similaritas di atas dapat disimpulkan bahwa grup isometri merupakan subgrup dari grup similaritas, sedangkan grup similaritas merupakan subgrup dari grup transformasi afin.

C. Afinitas Perspektif

Dipilih sebarang garis s dalam bidang (Euclides) dan sebuah arah yang ditunjukkan oleh sudut α, yang diapitnya dengan s. Dipilih pula suatu bilangan nyata μ, positif atau negatif tetapi tidak sama dengan nol. Didefinisikan suatu pemetaan dengan hukum korespondensi, sebagai berikut :

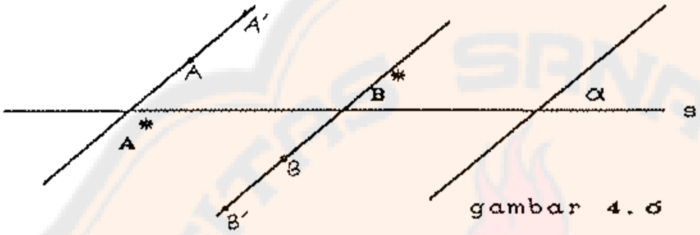
a. Garis-garis yang menghubungkan pasangan dua titik P dan P' yang berkorespondensi, sejajar dengan arah yang diketahui.

b. Untuk setiap pasangan titik P dan P' diperoleh :

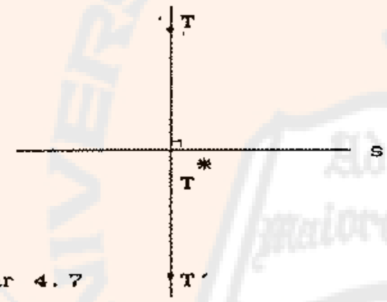
$\dfrac{P'P^*}{PP^*} = \mu$, dengan P^* titik potong PP' dengan s.

Transformasi ini disebut afinitas perspektif , s sumbu afinitas , μ faktor skala afinitas dan α sudut afinitas. Transformasi ini secara lengkap dilambangkan/dinyatakan dengan : $\phi(s,\alpha,\mu)$.

<u>Contoh 4.1</u> : $\phi(s,\alpha,2)$



gambar 4.6



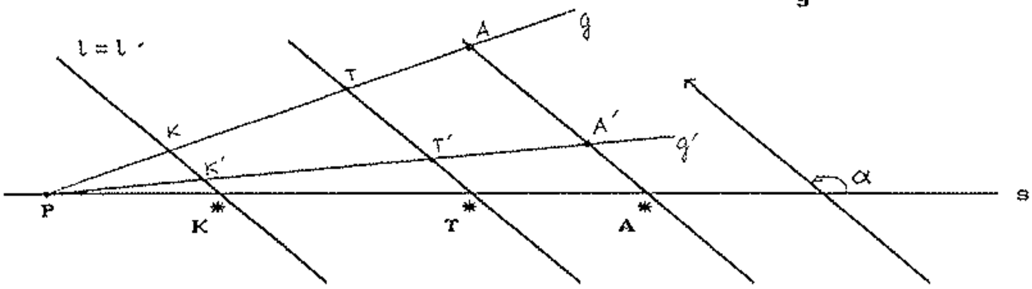
gambar 4.7

Refleksi terhadap garis s yaitu $\sigma_s = \phi(s,90^\circ,-1)$. Jika $\alpha = 90^\circ$ maka afinitas perspektif itu disebut afinitas normal.

Beberapa sifat afinitas perspektif yaitu :

1) Suatu afinitas perspektif adalah suatu transformasi yang tidak mengubah garis. Garis-garis yang berkorespondensi berpotongan pada sumbu afinitas.

   Setiap titik pada sumbu afinitas adalah titik invarian. Garis-garis yang sejajar dengan arah afinitas adalah garis tetap. Pada gambar 4.8, $\mu = \frac{1}{3}$.

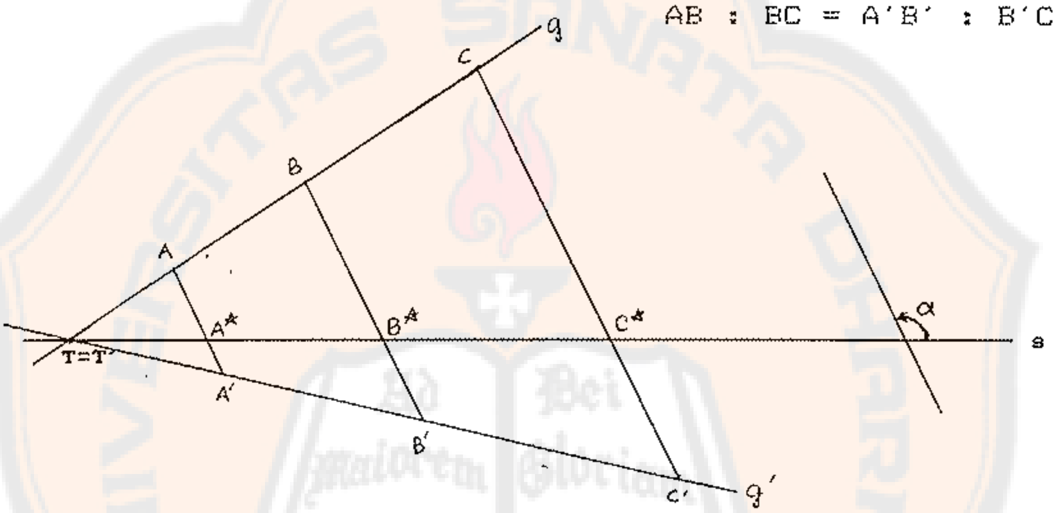


gambar 4.8

2) Suatu afinitas perspektif memetakan garis-garis sejajar kepada (onto) garis-garis sejajar.

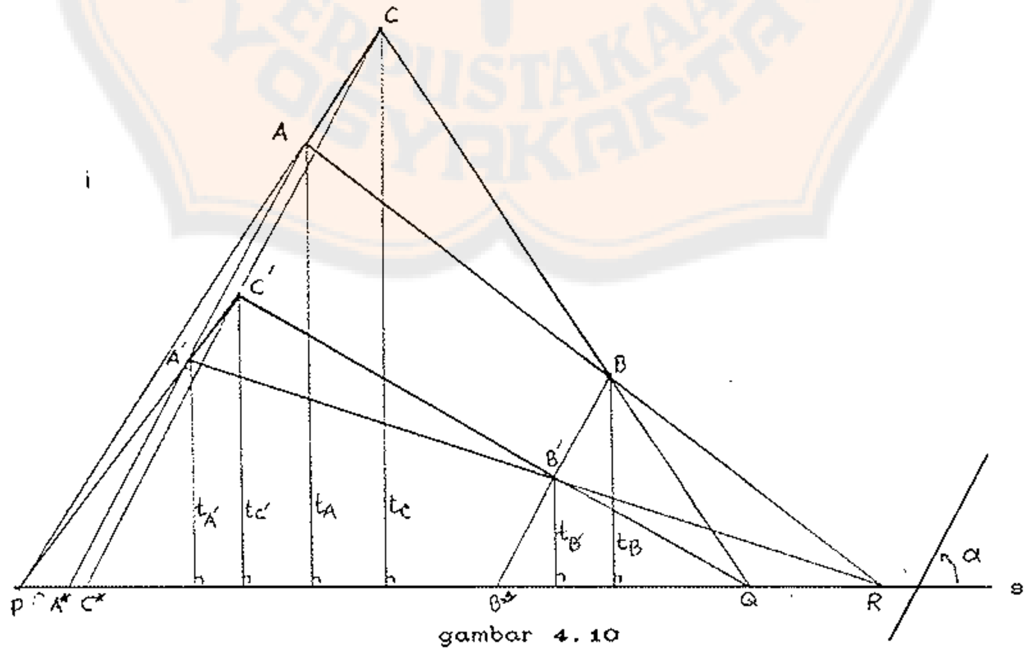
3) Transformasi afin tidak mengubah perbandingan dalam pembagian, perbandingan jarak tiga titik pada sebuah garis g sama dengan perbandingan jarak titik-titik bayangan pada garis g'. Pada gambar 4.9, $\mu = -\frac{1}{2}$.

AB : BC = A'B' : B'C'



gambar 4.9

4) Perbandingan luas daerah poligon dengan luas daerah bayangannya oleh afinitas perspektif adalah 1 : μ.



gambar 4.10

Bukti :

Luas daerah poligon dapat dipandang sebagai jumlah luas daerah segi tiga-segi tiga. $\phi(s,\alpha,\mu):\Delta ABC \longrightarrow \Delta A'B'C'$

Luas daerah ΔABC = luas daerah ΔPQC - luas daerah PQBA

= luas daerah ΔPQC- (luas daerah ΔPRA

- luas daerah ΔQRB).

$= \frac{1}{2}\, PQ\ t_c - (\frac{1}{2}\, PR\ t_a - \frac{1}{2}\, QR\ t_b)$.

$t_c : t_{c'} = CC^* : C'C^* = 1:\mu$, $t_a : t_{a'} = AA^* : A'A^* = 1:\mu$ dan $t_b : t_{b'} = BB^* : B'B^* = 1:\mu$.

Luas daerah $\Delta A'B'C'$= luas daerah $\Delta PQC'$- (luas daerah $\Delta PRA'$-luas daerah $\Delta QRB'$).

$= \frac{1}{2}\, PQ\ t_{c'} - (\frac{1}{2}\, PR\ t_{a'} - \frac{1}{2}\, QR\ t_{b'})$

$= \frac{1}{2}\, PQ\ \mu t_c - (\frac{1}{2}\, PR\ \mu t_a - \frac{1}{2}\, QR\ \mu t_b)$

$= \mu\{\frac{1}{2}\, PQ\ t_c - (\frac{1}{2}\, PR\ t_a - \frac{1}{2}\, QR\ t_b)\}$

$= \mu$.luas daerah ΔABC

Jadi luas daerah ΔABC : luas daerah $\Delta A'B'C'$ = $1 : \mu$.

5) Afinitas perspektif adalah suatu pemetaan bijektif. Invers afinitas perspektif mempunyai sumbu yang sama dan arah yang sama, tetapi mempunyai faktor skala $\mu' = \frac{1}{\mu}$

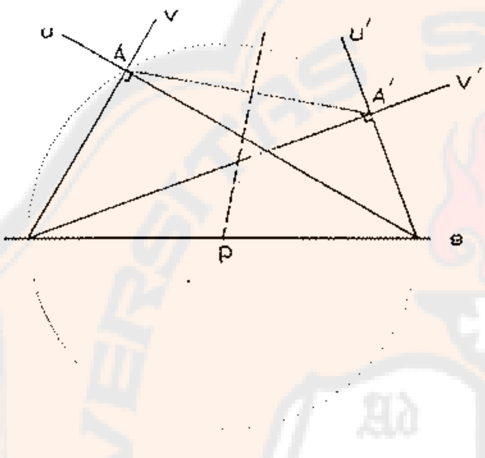
$\phi_1(s,\alpha,\mu) \quad : A \longrightarrow A'$

$\phi_2(s,\alpha,\frac{1}{\mu}) \quad : A' \longrightarrow A$

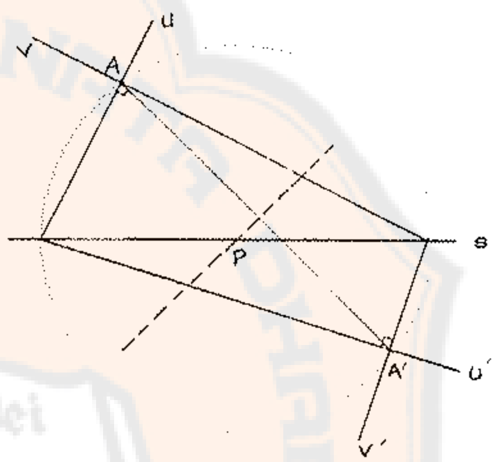
Jadi $\phi_2\phi_1 = \phi_1\phi_2 = \iota$ yang berarti $\phi_2 = \phi_1^{-1}$

6) Setiap afinitas perspektif yang bukan refleksi hanya mempunyai satu pasang garis tegak lurus sesamanya yang invarian.

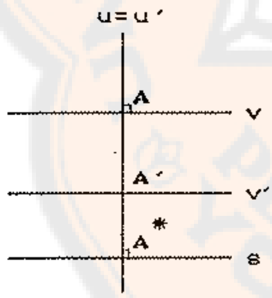
Dengan sifat ini refleksi dipandang sebagai hal yang istimewa, yaitu oleh refleksi setiap pasang garis tegak lurus sesamanya adalah invarian. Sifat ini dinyatakan sebagai berikut : diketahui sumbu afinitas perspektif dan sepasang titik A dan A' yang berkores-pondensi. Dilukis dua garis tegak lurus u dan v yang berpotongan di A dan bayangannya juga tegak lurus. Dilukis untuk bermacam-macam letak A dan A'.



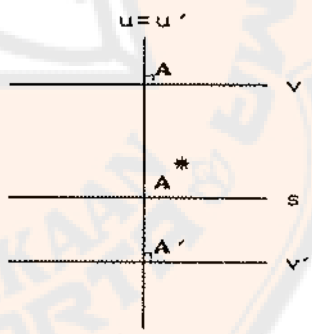
gambar 4.11a



gambar 4.11b

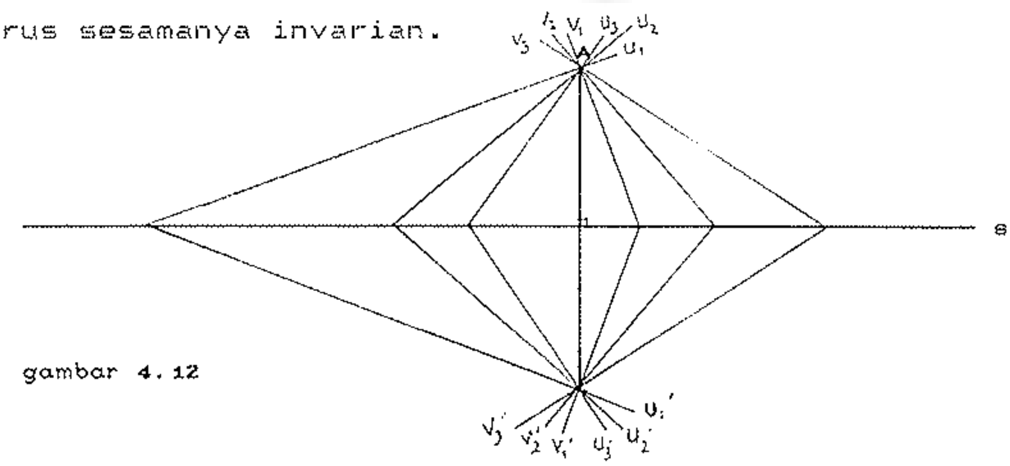


gambar 4.11c



gambar 4.11d

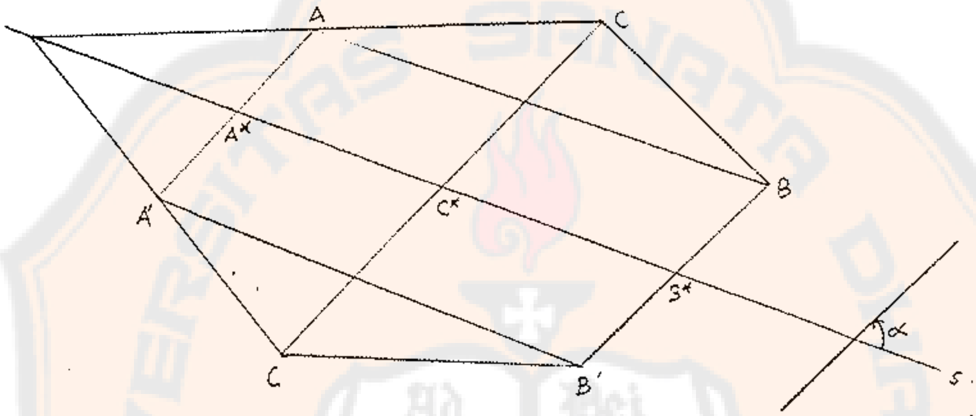
Pada refleksi atau $\phi(s,90^\circ,-1)$ setiap pasang garis tegak lurus sesamanya invarian.



gambar 4.12

Pada gambar 4.12, $u_1 \perp v_1$, $u_2 \perp v_2$, $u_3 \perp v_3$ dan $u_1' \perp v_1'$, $u_2' \perp v_2'$, $u_3' \perp v_3'$

Jika suatu afinitas perspektif tidak mengubah luas, maka $\mu = 1$ atau $\mu = -1$. Jika $\mu = -1$ terdapat refleksi miring, seperti tampak pada gambar 4.13.



gambar 4.13

$\phi(s,\alpha,1)$ adalah identitas $(\alpha \neq 0)$. Identitas termasuk dalam afinitas perspektif dengan $\mu = 1$. Jika $\mu = 1$ tetapi $\phi \neq \iota$, maka terdapat suatu pelingsirian ("shear") dengan sumbu s. Pelingsiran adalah suatu afinitas perspektif yang tidak sebenarnya sebab transformasi tersebut tidak tertentu oleh s, α dan μ karena $\alpha = 0°$ dan $\mu = 1$.

D. Transformasi Afin Sebagai Hasil Kali Afinitas Perspektif

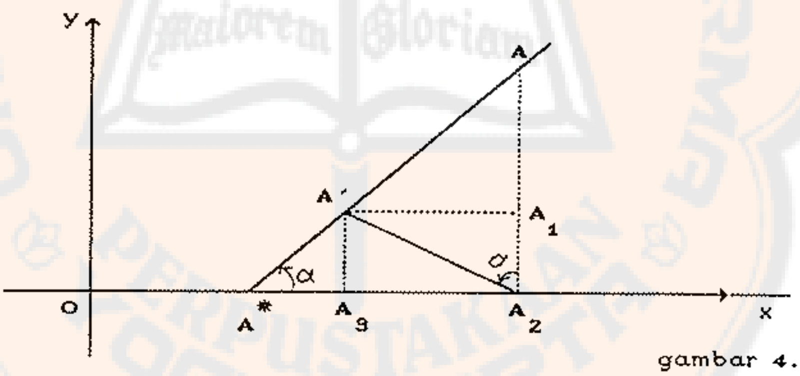
Dalam BAB II telah dibahas bahwa setiap isometri dapat dinyatakan sebagai hasil kali refleksi, misalnya : transformasi identitas : $\iota = \sigma_m^2$

rotasi : $\rho_{C,\Theta} = \sigma_m \sigma_l$ dengan l dan m berpotongan di C dan mengapit sudut $\frac{\Theta}{2}$

translasi : $\tau_{AB} = \sigma_m \sigma_l$ dengan l//m dan berjarak $\frac{1}{2}$ AB.

refleksi geser : $\gamma = \sigma_n \sigma_m \sigma_l$ dengan l//m dan n⊥m

Transformasi afin dapat juga dinyatakan sebagai hasil kali afinitas perspektif. Untuk dapat mencari hasil kali afinitas perspektif, digunakan cara berikut : diketahui afinitas perspektif $\phi(s,\alpha,\mu)$, dibuat susunan sumbu siku-siku sedemikian hingga sumbu x berimpit dengan sumbu afinitas s.



gambar 4.14

ϕ : $A(x,y) \longrightarrow A'(x',y')$ dan $\mu = \dfrac{A'A^*}{AA^*}$

$$OA_3 = OA_2 - A'A_1$$
$$= OA_2 - AA_1 \text{Cotg } \alpha$$
$$= OA_2 - (AA_2 - A_1A_2)\text{Cotg } \alpha$$
$$= OA_2 - (AA_2 - A'A_3)\text{Cotg } \alpha$$

sehingga : $x' = x - (y - y')$ Cotg α

$$x' = x - (y - \mu y) \text{ Cotg } \alpha$$
$$= x + (\mu - 1)y \text{ Cotg } \alpha$$

Jadi $\phi(s,\alpha,\mu)$ dapat dinyatakan dengan rumus transformasi:

$$\phi : \begin{cases} x' = x + (\mu - 1)y \text{ Cotg}\alpha \\ y' = \mu y \end{cases}$$

Pelingsiran masih belum dapat dinyatakan dengan rumus transformasi ini, sebab untuk $\mu = 1$ dan $\alpha = 0°$ letak $A'(x',y')$ belum dapat ditentukan. Agar setiap afinitas perspektif dapat dinyatakan dengan suatu rumus transformasi, dicari parameter lain. Karena afinitas perspektif tidak mengubah kesejajaran, maka sudut antara AA_2 dan A_2A' tidak tergantung dari letak titik A. Jadi untuk setiap afinitas perspektif didefinisikan suatu sudut σ. Diperhatikan kembali gambar 4.14 , maka :

$$\begin{aligned} OA_3 &= OA_2 - A'A_1 \\ &= OA_2 - A_1A_2 \text{ Tg } \sigma \\ &= OA_2 - A'A_3 \text{ Tg } \sigma \\ x' &= x - \mu y \text{ Tg } \sigma \end{aligned}$$

sehingga rumus transformasi tersebut menjadi

$$\phi : \begin{cases} x' = x - \mu y \text{ Tg } \sigma \\ y' = \mu y \end{cases}$$

Rumus transformasi ini berlaku juga untuk pelingsiran. Tg σ selalu mempunyai harga berhingga. Sudut σ dihitung dari AA_2, positif jika arahnya berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dan negatif jika searah dengan perputaran jarum jam.

<u>Teorema 4.5 :</u>

Afinitas Perspektif $(\mathcal{A}_{s,.})$ dengan sumbu yang sama membentuk grup.

Bukti :

Cukup dibuktikan bahwa operasi dalam $(\mathscr{A}_s, \cdot)$ bersifat tertutup dan setiap elemen dalam $\mathscr{A}_s$ mempunyai invers.

1) Andaikan ϕ_1 dan ϕ_2 sebarang afinitas perspektif yang dengan sumbu afinitas yang sama.

$A(x,y) \xrightarrow{\phi_1} A'(x',y') \xrightarrow{\phi_2} A''(x'',y'')$. Persamaan transformasinya menjadi :

$$\phi_1 : \begin{cases} x' = x - \mu_1 y \text{ Tg } \sigma_1 \\ y' = \mu_1 y \end{cases} \qquad \phi_2 : \begin{cases} x' = x - \mu_2 y \text{ Tg } \sigma_2 \\ y' = \mu_2 y \end{cases}$$

$$\phi_2 : \begin{cases} x'' = x' - \mu_2 y' \text{ Tg } \sigma_2 \\ y'' = \mu_2 y' \end{cases}$$

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1 y \text{ Tg } \sigma_1 - \mu_2(\mu_1 y) \text{ Tg } \sigma_2 \\ y'' = \mu_2(\mu_1 y) \end{cases}$$

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - (\mu_1 \text{Tg } \sigma_1 + \mu_1\mu_2 \text{Tg } \sigma_2) y \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

Persamaan ini juga membentuk persamaan transformasi untuk afinitas perspektif dengan sumbu x (sumbu s). Jika persamaan transformasi di atas kita tulis sebagai

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - \mu y \text{ Tg } \sigma \\ y'' = \mu y \end{cases}$$

maka $\mu = \mu_1\mu_2$ dan $\mu \text{ Tg } \sigma = \mu_1 \text{Tg } \sigma_1 \cdot \mu_1\mu_2 \text{ Tg } \sigma_2$, sehingga $\text{Tg } \sigma = \frac{1}{\mu_2} \text{ Tg } \sigma_1 + \text{Tg } \sigma_2$. Persamaan transformasi di atas dapat ditulis secara lain, yaitu

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1\mu_2 y(\frac{1}{\mu_2} \text{Tg } \sigma_1 + \text{Tg } \sigma_2) \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

Jadi hasil kali dua afinitas perspektif dengan sumbu yang sama adalah juga afinitas perspektif dengan sumbu yang sama. Dengan kata lain operasi dalam $(\mathscr{A}_s, .)$ bersifat tertutup.

2) Andaikan ϕ_1 sebarang afinitas perspektif dan $\phi_2 = \phi_1^{-1}$ adalah invers ϕ_1, maka berlaku $\phi_2\phi_1 = \phi_1\phi_2 = \iota$.

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1\mu_2 y\ (\frac{1}{\mu_2}\ \mathrm{Tg}\ \sigma_1 + \mathrm{Tg}\ \sigma_2) \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$ sedangkan

transformasi identitasnya adalah $\iota : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Jadi $\mu_1\mu_2 = 1$ atau $\mu_2 = \frac{1}{\mu_1}$ dan $\frac{1}{\mu_2}\ \mathrm{Tg}\ \sigma_1 + \mathrm{Tg}\ \sigma_2 = 0$ atau $\mathrm{Tg}\ \sigma_2 = -\frac{1}{\mu_2}\mathrm{Tg}\ \sigma_1 = -\mu_1\ \mathrm{Tg}\ \sigma_1$.

$$\phi_1\phi_2 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1\mu_2 y\ (\frac{1}{\mu_1}\mathrm{Tg}\ \sigma_2 + \mathrm{Tg}\ \sigma_1) \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

$\frac{1}{\mu_1}\ \mathrm{Tg}\ \sigma_2 + \mathrm{Tg}\ \sigma_1 = 0$ atau $\mathrm{Tg}\ \sigma_2 = -\mu_1\ \mathrm{Tg}\ \sigma_1$, sehingga

diperoleh $\phi_1^{-1} : \begin{cases} x' = x + y\ \mathrm{Tg}\ \sigma_1 \\ y' = \frac{1}{\mu_1} y \end{cases}$. Terbukti ∎

Contoh 4.2 :

Tunjukkan bahwa dua transformasi ϕ_1 dan $\phi_2 \in \mathscr{A}_s$ komutatif bila dan hanya bila sudut-sudut afinitasnya sama, dengan kata lain $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Andaikan $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_1$, akan ditunjukkan bahwa $\alpha_1 = \alpha_2$.

Misalkan $\phi_1 : \begin{cases} x' = x - \mu_1 y\ \mathrm{Tg}\ \sigma_1 \\ y' = \mu_1 y \end{cases}$ dan $\phi_2 : \begin{cases} x' = x - \mu_2 y\ \mathrm{Tg}\ \sigma_2 \\ y' = \mu_2 y \end{cases}$

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1 y\ \mathrm{Tg}\ \sigma_1 - \mu_2\mu_1 y\ \mathrm{Tg}\ \sigma_2 \\ y'' = \mu_2\mu_1 y \end{cases}$$

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1\mu_2 y \left(\frac{1}{\mu_2} \text{Tg } \sigma_1 + \text{Tg } \sigma_2\right) \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

$$\phi_1\phi_2 : \begin{cases} x'' = x - \mu_2 y \text{ Tg } \sigma_2 - \mu_1\mu_2 y \text{ Tg } \sigma_1 \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

$$\phi_1\phi_2 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1\mu_2 y \left(\frac{1}{\mu_1} \text{Tg } \sigma_2 + \text{Tg } \sigma_1\right) \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

$\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_1$, maka $\frac{1}{\mu_2}\text{Tg } \sigma_1 + \text{Tg } \sigma_2 = \frac{1}{\mu_1}\text{Tg } \sigma_2 + \text{Tg } \sigma_1$.

$$\frac{1}{\mu_2}\text{Tg } \sigma_1 - \text{Tg } \sigma_1 = \frac{1}{\mu_1}\text{Tg } \sigma_2 - \text{Tg } \sigma_2$$

$$\frac{1 - \mu_2}{\mu_2}\text{ Tg } \sigma_1 = \frac{1 - \mu_1}{\mu_1}\text{ Tg } \sigma_2$$

$$\frac{\mu_1}{1 - \mu_1}\text{ Tg } \sigma_1 = \frac{\mu_2}{1 - \mu_2}\text{ Tg } \sigma_2$$

Mengingat Cotg $\alpha = \frac{\mu}{1 - \mu}$ Tg σ, maka Cotg α_1 = Cotg α_2.

Jadi $\alpha_1 = \alpha_2$.

($\Leftarrow$) Diketahui $\alpha_1 = \alpha_2$. Akan dibuktikan $\phi_1\phi_2 = \phi_2\phi_1$.

$$\text{Cotg } \alpha_1 = \text{Cotg } \alpha_2$$

$$\frac{\mu_1}{1 - \mu_1}\text{ Tg } \sigma_1 = \frac{\mu_2}{1 - \mu_2}\text{ Tg } \sigma_2$$

$$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1\mu_2 y \left(\frac{1}{\mu_2} \text{ Tg } \sigma_1 + \text{Tg } \sigma_2\right) \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mu_2}\text{Tg } \sigma_1 + \text{Tg } \sigma_2 = \frac{1}{\mu_2}\text{Tg } \sigma_1 + \frac{1 - \mu_2}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{1 - \mu_1}\text{ Tg } \sigma_1$$

$$= \frac{1 - \mu_1 + \mu_1(1 - \mu_2)}{\mu_2(1 - \mu_1)}\text{ Tg } \sigma_1$$

$$= \frac{1 - \mu_1\mu_2}{\mu_2(1 - \mu_1)}\text{ Tg } \sigma_1$$

$$\phi_1\phi_2 : \begin{cases} x'' = x - \mu_1\mu_2 y \left(\frac{1}{\mu_1}\text{Tg } \sigma_2 + \text{Tg } \sigma_1\right) \\ y'' = \mu_1\mu_2 y \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\,\mathrm{Tg}\ \alpha_2 + \mathrm{Tg}\ \alpha_1 = \frac{1}{\mu_1}\,\frac{1-\mu_2}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{1-\mu_1}\,\mathrm{Tg}\ \alpha_1 + \mathrm{Tg}\ \alpha_1$$

$$= \frac{1-\mu_2}{\mu_2(1-\mu_1)}\,\mathrm{Tg}\ \alpha_1 + \mathrm{Tg}\ \alpha_1$$

$$= \frac{1-\mu_2+\mu_2(1-\mu_1)}{\mu_2(1-\mu_1)}\,\mathrm{Tg}\ \alpha_1$$

$$= \frac{1-\mu_1\mu_2}{\mu_2(1-\mu_1)}\,\mathrm{Tg}\ \alpha_1$$

Tampak bahwa $\phi_2\phi_1 = \phi_1\phi_2$.

Berikut ini akan ditentukan subgrup-subgrup dari $\mathcal{A}_s$. Sumbu s adalah garis invarian untuk setiap $\phi \in \mathcal{A}_s$. Jika disyaratkan lagi :

a) sudut arahnya sama, diperoleh subgrup $\mathcal{A}_{s(\alpha)}$ yang merupakan transformasi dengan sudut afinitas yang sama.

b) mengawetkan luas daerah, diperoleh subgrup $\mathcal{A}'_s \subset \mathcal{A}_s$. $\mathcal{A}'_s$ memuat afinitas perspektif dengan $\mu = \pm 1$, yaitu pelingsiran (shear) dan refleksi miring. Pelingsiran sendiri membentuk grup $\mathcal{A}''_s \subset \mathcal{A}'_s$.

Jadi subgrup-subgrup dari $\mathcal{A}_s$ adalah $\mathcal{A}_{s(\alpha)}$, $\mathcal{A}'_s$ dan $\mathcal{A}''_s$.

<u>Contoh 4.3</u> :

Tunjukkan bahwa hasil kali dua pelingsiran dapat ditentukan oleh hubungan $\mathrm{Tg}\ \alpha = \mathrm{Tg}\ \alpha_1 + \mathrm{Tg}\ \alpha_2$.

<u>Bukti</u> :

Diketahui dua pelingsiran, jadi $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

$\phi_1 : \begin{cases} x' = x - y \text{ Tg } \alpha_1 \\ y' = y \end{cases}$ $\phi_2 : \begin{cases} x' = x - y \text{ Tg } \alpha_2 \\ y' = y \end{cases}$

$\phi_2 \phi_1 : \begin{cases} x'' = x - y \text{ Tg } \alpha_1 - y \text{ Tg } \alpha_2 \\ y'' = y \end{cases}$

$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - y(\text{Tg } \alpha_1 + \text{Tg } \alpha_2) \\ y'' = y \end{cases}$ atau $\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - y\text{Tg } \alpha \\ y'' = y \end{cases}$

dengan $\text{Tg } \alpha = \text{Tg } \alpha_1 + \text{Tg } \alpha_2$.

Contoh 4.4 :

Tunjukkan bahwa pelingsiran dengan sumbu s yang sama, sedemikian hingga $\text{Tg } \alpha = na$ dengan n suatu bilangan bulat dan a suatu konstanta, membentuk grup $(\mathcal{A}'_s, \cdot)$.

Bukti :

Diketahui pelingsiran dengan $\text{Tg } \alpha = na$, n bilangan bulat, a konstanta dan sumbu s.

(1) Andaikan $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{A}'_s$ dengan

$\phi_1 : \begin{cases} x' = x - y\, n_1\, a \\ y' = y \end{cases}$, $\phi_2 : \begin{cases} x' = x - y\, n_2\, a \\ y' = y \end{cases}$

$\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - yn_1a - yn_2a \\ y'' = y \end{cases}$ atau $\phi_2\phi_1 : \begin{cases} x'' = x - ay(n_1 + n_2) \\ y'' = y \end{cases}$

$\therefore$ $\phi_2\phi_1$ suatu pelingsiran.

Jadi operasi dalam $(\mathcal{A}'_s, \cdot)$ bersifat tertutup.

(2) Andaikan $\phi_3 : \begin{cases} x' = x - y\, n_3\, a \\ y' = y \end{cases}$, maka

$\phi_3(\phi_2\phi_1) : \begin{cases} x''' = x - y(n_1 + n_2 + n_3)a \\ y''' = y \end{cases}$

$$\phi_3\phi_2 : \begin{cases} x'' = x - y(n_2 + n_3)a \\ y'' = y \end{cases}$$

$$(\phi_3\phi_2)\phi_1 : \begin{cases} x''' = x - y(n_1 + n_2 + n_3)a \\ y''' = y \end{cases}$$

Jadi operasi dalam $(\mathscr{A}'_s, .)$ bersifat asosiatif, yaitu $\phi_3(\phi_2\phi_1) = (\phi_3\phi_2)\phi_1$.

(3) Transformasi identitasnya adalah $\iota : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

(4) Andaikan $\phi_2 = \phi_1^{-1}$, maka $\phi_2\phi_1 = \phi_1\phi_2 = \iota$

$\therefore n_1 + n_2 = 0$, terdapat $n_2 = -n_1$ sehingga diperoleh

$\phi_1^{-1} : \begin{cases} x' = x - y(-n_1)a \\ y' = y \end{cases}$ atau $\phi_1^{-1} : \begin{cases} x' = x + y\, n_1 a \\ y' = y \end{cases}$

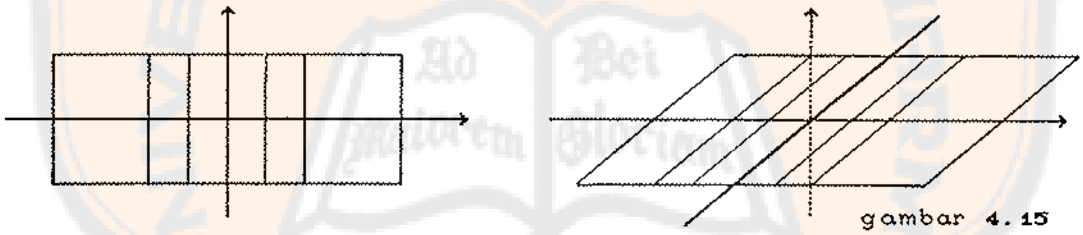
Jadi setiap $\phi_1 \in \mathscr{A}'_s$ mempunyai invers $\phi_1^{-1} \in \mathscr{A}'_s$.

Definisi 4.3 :

Setiap hasil kali berhingga dari afinitas perspektif disebut transformasi afin atau secara singkat disebut afinitas.

Menurut definisi ini, afinitas adalah transformasi yang tidak mengubah garis, kesejajaran dan perbandingan dalam pembagian. Afinitas membentuk grup $\mathscr{A}$, yaitu grup afin penuh. Grup $\mathscr{A}_s$ adalah subgrup dari grup $\mathscr{A}$.

Beberapa transformasi afin dasar akan diberikan disini. Jika untuk sebarang bilangan $k \neq 0$, transformasi linear α dan β mempunyai persamaan $\alpha : \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$ dan persamaan β : $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$, maka α disebut peregangan (strain) dengan rasio k terhadap sumbu X dan β disebut peregangan dengan rasio k terhadap sumbu Y. Hasil kalinya yaitu $\beta\alpha$ adalah suatu dilatasi sentral dengan rasio k dan pusat titik O. $\beta\alpha$ mempunyai persamaan $x' = kx$ dan $y' = ky$. Transformasi afin dasar lainnya adalah pelingsiran (shear). Pelingsiran terhadap sumbu X mempunyai persamaan $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$. Pada pelingsiran ini sumbu X diawetkan titik demi titik dan setiap titik bergerak secara horisontal.



gambar 4.15

Teorema 4.6 :

Transformasi afin adalah hasil kali dari pelingsiran, peregangan dan similaritas.

Bukti :

Persamaan transformasi $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ dengan $ad - bc \neq 0$ merupakan hasil kali dari similaritas :

$\begin{cases} x' = ax - cy + m \\ y' = cx + ay + n \end{cases}$ dengan $a^2 + c^2 \neq 0$ diikuti oleh peregangan dengan persamaan $\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{ad - bc}{a^2 + c^2}\, y \end{cases}$ dilanjutkan dengan pelingsiran dengan persamaan $\begin{cases} x' = x + \dfrac{ab + cd}{a^2 + c^2}\, y \\ y' = \qquad\qquad\qquad y \end{cases}$ ∎

Dari keterangan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa pelingsiran merupakan subgrup dari grup afin penuh.

Contoh 4.5 :

Suatu afinitas perspektif ϕ mempunyai sumbu s, sudut $\alpha = 45^\circ$ dan faktor skala $\mu = \frac{1}{3}$. Jika diketahui suatu titik T, lukislah titik T'.

Pembahasan :

Diketahui : s, $\alpha = 45^\circ$, $\mu = \frac{1}{3}$ dan titik T. Akan dilukis titik T'.

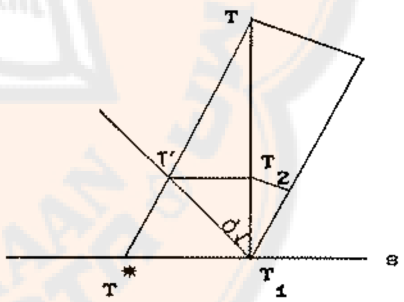
a) $T_2T_1 : TT_1 = 1 : 3$

b) Dilukis $\alpha = 45^\circ$

c) Melalui T_2 dilukis garis yang sejajar s.

d) Diperoleh T' dengan

$$\frac{T'T^*}{TT^*} = \frac{1}{3}$$



BAB V

KESIMPULAN

Pengertian transformasi dalam bidang kajian geometri dapat diperkenalkan melalui konsep fungsi, karena transformasi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari himpunan semua titik pada suatu bidang ke himpunan semua titik pada bidang itu sendiri. Pembicaraan tentang grup juga mempermudah pembahasan tentang transformasi, baik transformasi dalam geometri Euclides maupun transformasi afin dalam bidang Euclides.

Grup transformasi dari geometri Euclides disebut grup transformasi kesebangunan (similaritas). Grup transformasi kongruensi (isometri) merupakan subgrup dari grup transformasi kesebangunan (similaritas), karena isometri merupakan similaritas dengan faktor similaritas k = 1. Isometri adalah suatu kolineasi yang mengawetkan keantaraan, ruas garis, sinar garis, sudut, besar sudut, ketegaklurusan dan kesejajaran. Similaritas adalah suatu kolineasi yang mengawetkan besar sudut, ketegaklurusan dan kesejajaran. Angota-anggota grup transformasi kesebangunan (similaritas) antara lain adalah translasi, rotasi, refleksi, transformasi identitas, refleksi geser, dilatasi, similaritas spiral dan refleksi dilatif.

Afinitas atau transformasi afin adalah transformasi yang tidak mengubah garis, kesejajaran dan perbandingan dalam pembagian. Afinitas membentuk grup $(\mathscr{A}, .)$ yaitu grup afin penuh. Subgrup-subgrupnya antara lain $\mathscr{A}_s$

(himpunan afinitas perspektif dengan sumbu yang sama), $\mathscr{A}_{s(\alpha)}$ (himpunan afinitas perspektif dengan sumbu dan sudut afinitas yang sama), $\mathscr{A}'_s$ (himpunan afinitas perspektif dengan sumbu yang sama dan mengawetkan luas daerah) dan $\mathscr{A}''_s$ (himpunan pelingsiran).

Transformasi similaritas mengawetkan besar sudut dan ketegaklurusan yang tidak diawetkan oleh transformasi afin. Transformasi-transformasi similaritas membentuk grup similaritas. Grup similaritas merupakan subgrup dari grup afin penuh.

Cara lain untuk menunjukkan bahwa grup similaritas merupakan subgrup dari grup afin penuh dapat dilihat dari persamaan-persamaan transformasinya. Transformasi afin dalam bidang Euclides didefinisikan sebagai transformasi yang mempunyai persamaan $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Transfomasi isometri mempunyai persamaan :

$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = \pm(-bx + ay) + n \end{cases}$ dengan $a^2 + b^2 = 1$, tanda + untuk menyatakan isometri searah dan tanda - untuk menyatakan isometri berlawanan arah. Transformasi similaritas mempunyai persamaan : $\begin{cases} x' = Ax + By + M \\ y' = \pm(-Bx + Ay) + N \end{cases}$ dengan $A^2+B^2 \neq 0$, tanda + untuk similaritas searah dan tanda - untuk similaritas berlawanan arah.

Dari persamaan-persamaan di atas tampak bahwa persamaan isometri adalah persamaan transformasi afin dengan $c=\pm b$;

$d = \pm a$ dan $a^2 + b^2 = 1$, sedangkan persamaan similaritas adalah persamaan transformasi afin dengan $c = \pm B$; $d = \pm A$ dan $A^2 + B^2 \neq 0$. Grup isometri merupakan subgrup dari grup transformasi similaritas. Grup transformasi similaritas merupakan subgrup dari grup afin penuh. Karena grup transformasi similaritas merupakan grup transformasi dari geometri Euclides dan grup afin penuh merupakan grup transformasi dari geometri afin, maka grup transformasi geometri Euclides merupakan subgrup dari grup transformasi geometri afin.

DAFTAR PUSTAKA

Coxeter, H.S.M.
1969 *Introduction to Geometry.* New York : John Wiley and Sons, Inc.

Eccles, F.M.
1971 *An Introduction to Transformational Geometry.* Phi : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Gans, David.
1969 *Transformations and Geometries.* Appleton Century Crofts, Meredith Corporation.

Jeger, Max.
1956 *Transformation Geometry.* London : Redwood Press Limited.

Martin, George E.
1982 *Transformation Geometry : An Introduction to Symmetry.* New York : Springer-Verlag New York, Inc.

Moeharti, Hw.
1986 *Sistem-sistem Geometri.* Jakarta : Karunika UT.

Susanta, B.
1990 *Geometri Transformasi.* Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan.