TEOREMA-TEOREMA HAHN-BANACH TENTANG FUNGSIONAL LINEAR PADA RUANG VEKTOR DAN PADA RUANG BERNORMA

Skripsi

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan
pada Program Studi Pendidikan Matematika

Oleh :

Triyatiningsih

NIM : 951414010
NIRM : 950051120501120010

Program Studi Pendidikan Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sanata Dharma

Yogyakarta

2001

SKRIPSI

TEOREMA-TEOREMA HAHN-BANACH
TENTANG FUNGSIONAL LINEAR
PADA RUANG VEKTOR DAN PADA RUANG BERNORMA

Oleh :

Triyatiningsih

NIM : 951414010

NIRM : 950051120501120010

Telah disetujui oleh :

Pembimbing

Drs. St. Susento, M.Si.

Tanggal : 23 Agustus 2001

SKRIPSI

TEOREMA-TEOREMA HAHN-BANACH TENTANG FUNGSIONAL LINEAR PADA RUANG VEKTOR DAN PADA RUANG BERNORMA

Ditulis oleh :
Triyatiningsih
NIM : 951414010
NIRM : 950051120501120010

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 23 Agustus 2001
dan dinyatakan memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

		Nama lengkap	Tanda tangan
Ketua	:	Drs. R. Rohandi, M.Ed.	
Sekretaris	:	Drs. Th. Sugiarto, M.T.	
Penguji	: 1.	Drs. St. Susento, M.Si.	
	2.	Prof. Drs. R. Soemantri	

Yogyakarta, 23 Agustus 2001
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Dekan

Dr. A.M. Slamet Soewandi, M. Pd.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, Agustus 2001

Penulis

Triyatmingsih

ABSTRAK

TEOREMA-TEOREMA HAHN-BANACH
TENTANG FUNGSIONAL LINEAR
PADA RUANG VEKTOR DAN RUANG BERNORMA

Oleh:
Triyatinigsih

Fungsional Linear merupakan pemetaan dengan daerah asal ruang vektor dan daerah kawan medan skalarnya. Teorema Hahn-Banach I dan Terema Hahn-Banach II menjamin adanya perluasan linear dari suatu fungsional linear . Teorema Hahn-Banach III menjamin adanya perluasan linear dari suatu fungsional linear terbatas dengan norma fungsional yang sama. Akibat yang muncul adalah jika diambil sembarang elemen dalam ruang bernorma maka ada fungsional linear dengan norma yang khas berkaitan dengan elemen yang telah diambil.

KATA PENGANTAR

Puji syukur dan terima kasih penulis panjatkan kehadirat Tuhan YME, atas segala rahmat dan hikmat yang telah dilimpahkan sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **TEOREMA-TEOREMA HAHN-BANACH TENTANG FUNGSIONAL LINEAR PADA RUANG VEKTOR DAN PADA RUANG BERNORMA.**

Skripsi ini disusun guna melengkapi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam , Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Dalam proses penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bantuan dari banyak pihak yang berupa bimbingan, didikan dan dorongan semangat. Untuk itu pada kesempatan ini, secara khusus penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak St. Susento, selaku pembimbing yang telah memberikan masukan dan bimbingan selama penyusunan skripsi ini.
2. Seluruh keluarga yang telah memberikan dukungan selama penyusunan skripsi ini.
3. Mas Tono yang selalu mendukung, menemani dan setia menerima segala keluhan dalam penulisan skripsi ini.
4. Wuri, Endang dan seluruh rekan-rekan di PMat yang selalu mendukung dan memberi semangat dalam penulisan skripsi ini.
5. Bapak Sunarjo dan seluruh karyawan Sekretariat JPMIPA yang telah banyak membantu kelancaran penyusunan skripsi ini.
6. Seluruh pihak yang telah ikut membantu penulis dalam penulisan skripsi ini.

Akhirnya , penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, Agustus 2001

Penulis

Daftar Isi

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Dalam analisis fungsional ada beberapa konsep yang dapat kita pelajari, diantaranya adalah konsep tentang fungsional linear. Fungsional linear merupakan pemetaan dengan sifat khusus yang dimiliki oleh daerah asal dan daerah kawannya, yaitu daerah asalnya berupa ruang vektor sedangkan daerah kawannya berupa medan skalar dari daerah asalnya.

Ada beberapa teorema-teorema yang berkaitan dengan fungsional linear. Beberapa diantaranya pertama kali dikemukakan oleh Hahn-Banach dan yang kemudian disebut dengan nama Teorema Hahn-Banach. Oleh karena itu pada kesempatan kali ini penulis akan membahas teorema--teorema yang dikemukakan oleh Hahn-Banach berkaitan dengan fungsional linear. Penulis juga membahas akibat-akibat dari Teorema Hahn-Banach ini.

1.2 . Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Apakah isi , bukti dan contoh pemakaian Teorema Hahn-Banach yang berlaku pada ruang vektor real dan yang berlaku pada ruang vektor komplek?
2. Apakah isi , bukti dan contoh pemakaian Teorema Hahn-Banach yang berlaku pada ruang bernorma?
3. Apakah akibat yang muncul dari Teorema-teorema Hahn-Banach itu?

1.3. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mendeskripsikan isi, buti dan contoh pemakaian Teorema-teorema Hahn-Banach yang berkaitan dengan fungsional linear, serta akibat-akibat dari Teorema-teorema Hahn-Banach ini.

1.4. Ruang Lingkup Pembahasan

Penulis akan membatasi pembahasan ruang vektor dengan medan skalar real dan medan skalar komplek. Selain itu, untuk konsep-konsep yang akan digunakan sebagai dasar pembahasan Teorema Hahn-Banach hanya penulis bahas secara umum. Hal-hal yang lebih mendetail tentang konsep-konsep ini dapat kita pelajari dalam buku-buku yang berkaitan dengan materi ini. Sedangkan untuk Teorema Hahn-Banach sendiri, kita akan batasi masalah untuk Teorema Hahn-Banach yang berlaku pada fungsional linear.

1.5. Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Penulis dan pembaca menjadi mengerti konsep-konsep tentang fungsional linear, fungsional linear terbatas dan perluasan linear yang akan dipakai dalam pembahasan Teorema Hahn-Banach.
2. Penulis dan pembaca menjadi mengerti akan isi, bukti dan contoh pemakaian Teorema-teorema Hahn-Banach dalam pembahasan tentang fungsional linear.
3. Penulis dan pembaca menjadi mengerti akibat-akibat yang muncul dari Teorema –teorema Hahn-Banach.
4. Penulis menjadi lebih mengerti tentang arti belajar matematika yang sesungguhnya
5. Penulis merasa mempunyai keberanian untuk melakukan penelitian lebih lanjut dengan dasar pengalaman yang telah penulis dapat selama penyusunan skripsi ini.

1.6. Metode Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan metode studi pustaka.

1.7. Sistematika Pembahasan

Bab II berisi beberapa materi yang akan menjadi dasar pada pembahasan Teorema-teorema Hahn-Banach, diantaranya adalah ruang vektor, ruang bernorma dan fungsional linear. Bab III membahas Teorema-teorema Hahn-Banach yang berlaku pada ruang vektor real maupun komplek. Juga ditampilkan contoh-contoh yang memperlihatkan kehebatan-kehebatan Teorema Hahn-Banach ini. Bab IV membahas Teorema Hahn-Banach yang berlaku pada ruang bernorma dan akibat yang muncul karena Teorema Hahn-Banach ini.

BAB II

FUNGSIONAL LINIER

Bab ini berisi konsep-konsep yang akan menjadi dasar bagi pembahasan teorema-teorema Hanh – Banach tentang fungsional linier. Diantaranya adalah ruang vektor, ruang bernorma dan fungsional linier. Ruang vektor merupakan himpunan yang dilengkapi dengan dua macam operasi dan yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Ruang bernorma merupakan suatu ruang vektor dengan suatu norma di dalamnya. Fungsional linier merupakan suatu pemetaan dari suatu ruang vektor ke **R** atau **C**.

2.1. Ruang Vektor

Konsep ruang vektor yang akan didefinisikan di bawah ini, tidak hanya terbatas pada konsep yang dikenal sebelumnya, yaitu ruang vektor dibidang atau diruang.

Definisi 2.1. (Ruang Vektor). Misalkan **V** adalah sebarang himpunan tak kosong dan **K** menyatakan medan **R** atau **C**. Pada **V** ditetapkan dua macam operasi, sebutlah operasi penjumlahan (yang ditulis "+") dan operasi perkalian dengan skalar (yang ditulis "."), yaitu untuk sembarang u, v$\in$V dan skalar $\alpha\in$**K** maka **u** + v $\in$V dan $\alpha\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. **V** disebut ruang vektor atas **K**, ditulis (**V**,**K**), jika untuk sembarang $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ dipenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(ii) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(iii) $(\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V}) (\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V})\ \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(iv) $(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}) (\exists -\mathbf{u} \in \mathbf{V})\ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$

(v) $\alpha . (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha . \mathbf{u} + \alpha . \mathbf{v}$

(vi) $(\alpha + \beta) . \mathbf{u} = \alpha . \mathbf{u} + \beta . \mathbf{u}$

(vii) $\alpha . (\beta . \mathbf{u}) = (\alpha . \beta) . \mathbf{u}$

(viii) $1 . \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Tiap-tiap anggota dari ruang vektor **V** diatas disebut vektor. Vektor **0** disebut vektor nol dan vektor (**-u**) pada (iv) disebut negatif dari vektor **u**. untuk selanjutnya kita tidak akan menggunakan notasi "." untuk perkalian skalar.

<u>**Contoh 2.1.**</u> Perhatikan himpunan $\mathbf{R}^n$ dengan operasi penjumlahan $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2+\mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{u}_n+\mathbf{v}_n)$ dan operasi perkalian skalar $\alpha\mathbf{u} = (\alpha\mathbf{u}_1, \alpha\mathbf{u}_2, \ldots, \alpha\mathbf{u}_n)$ dalam $\mathbf{R}^n$, dimana $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbf{R}$. Untuk membuktikan bahwa $\mathbf{R}^n$ merupakan ruang vektor, kita harus menunjukkan bahwa kedelapan aksioma diatas dipenuhi oleh $\mathbf{R}^n$.

Untuk sembarang $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ berlaku

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) = \mathbf{v} + \mathbf{u},$

$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1 + (v_1 + w_1), \ldots, u_n + (v_n + w_n))$

$= ((u_1 + v_1) + w_1, \ldots, (u_n + v_n) + w_n) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.$

Tampak bahwa aksioma (i) dan (ii) telah terpenuhi.

Sekarang kita pandang pasangan terurut $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. untuk sembarang $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ ternyata pasangan terurut yang pertama memenuhi

$(0, 0, \ldots, 0) + (u_1, u_2, \ldots, u_n) = (0 + u_1, 0 + u_2, \ldots, 0 + u_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathbf{u}.$

Hal ini memperlihatkan bahwa $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ memenuhi aksioma (iii) pada definisi 2.1 dan menyatakan $(0, 0, \ldots, 0)$ adalah vektor nol dalam $\mathbf{R}^n$.

Jika ditentukan sembarang $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ maka pasangan terurut $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ memenuhi

$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n) = (u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2) \ldots, u_n + (-u_n)) = (0, 0, \ldots, 0).$

Jadi vektor $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ memenuhi aksioma (iv) dan kita dapat menyebut $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ adalah negatif dari vektor **u**.

Selanjutnya kita akan menunjukkan bahwa aksioma (v), (vi) dan (vii) juga dipenuhi oleh $\mathbf{R}^n$. Untuk sembarang $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ dan $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ berlaku

$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(u_1 + v_1, u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) = [\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2), \ldots, \alpha(u_n + v_n)]$

$= (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2, \ldots, \alpha u_n + \alpha v_n)$

$= (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n) + (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$

$= \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v},$

$$(\alpha + \beta)\,\mathbf{u} = ((\alpha + \beta)\,u_1, \ldots, (\alpha + \beta)\,u_n) = (\alpha\, u_1 + \beta\, u_1, \ldots, \alpha\, u_n + \beta\, u_n)$$

$$= (\alpha\, u_1, \ldots, \alpha\, u_n) + (\beta\, u_1, \ldots, \beta\, u_n) = \alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{u},$$

$$\alpha\,(\beta\,\mathbf{u}) = \alpha\,(\beta\, u_1, \ldots, \beta\, u_n) = (\alpha\,\beta\, u_1, \ldots, \alpha\,\beta\, u_n) = (\alpha\,\beta)\,\mathbf{u}.$$

Untuk selanjutnya kita pandang perkalian skalar $1 \in R$ dengan sembarang vektor tampak bahwa

$$1\,\mathbf{u} = (1\,u_1, \ldots, 1\,u_n) = (u_1, \ldots, u_n) = \mathbf{u},$$

yang memperlihatkan berlakunya aksioma (viii).

Contoh 2.2. Perhatikan himpunan C[a,b] yaitu himpunan semua fungsi kontinu bernilai real pada interval tertutup [a, b]. untuk sembarang **u**, **v** $\in$ C[a, b] dan skalar $\alpha \in \mathbf{R}$, didefinisikan operasi-operasi :

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \text{ dan } (\alpha\,\mathbf{u})(t) = \alpha\,\mathbf{u}(t),$$

untuk semua $t \in [a, b]$. Jelas bahwa **u** + **v** dan α**u** merupakan unsur-unsur di **C**[a,b] juga. Kita akan perlihatkan bahwa **C**[a, b] merupakan ruang vektor terhadap kedua macam operasi tersebut.

Ambil sembarang **u, v, w** $\in$ **C**[a, b], maka berlaku

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) = (\mathbf{v} + \mathbf{u})(t),$$

$$[\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})](t) = \mathbf{u}(t) + (\mathbf{v} + \mathbf{w})(t) = \mathbf{u}(t) + (\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t))$$

$$= (\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) + \mathbf{w}(t) = [(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}](t).$$

Tampak bahwa aksioma (i) dan (ii) telah dipenuhi oleh **C**[a, b]. Kemudian perhatikan fungsi konstan $\mathbf{0}(t) = 0$, untuk setiap $t \in [a, b]$ berlaku

$$(\mathbf{0}+\mathbf{u})(t) = \mathbf{0}(t)+\mathbf{u}(t) = 0+\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t).$$

Hal ini memperlihatkan bahwa fungsi **0** merupakan vektor nol yang dimaksud dalam aksioma (iii). Sedangkan untuk sembarang $\mathbf{u} \in C[a, b]$, fungsi $\mathbf{v} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, yang didefinisikan dengan $\mathbf{v}(t) = -\mathbf{u}(t)$ memenuhi

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})(t) = \mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t)-\mathbf{u}(t) = 0 = \mathbf{0}(t).$$

Ini memperlihatkan bahwa aksioma (iv) telah dipenuhi.

Aksioma (v) sampai aksioma (viii) juga dipenuhi, karena untuk sembarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, dan fungsi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in C[a, b]$, $\forall\, t \in [a,b]$ berlaku

$$\begin{aligned}
[\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})](t) &= \alpha[(\mathbf{u}+\mathbf{v})(t)] = \alpha[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)] \\
&= \alpha\,\mathbf{u}(t)+\alpha\,\mathbf{v}(t) = (\alpha\,\mathbf{u})(t)+(\alpha\,\mathbf{v})(t), \\
[(\alpha+\beta)\mathbf{u}](t) &= (\alpha+\beta)\,\mathbf{u}(t) = \alpha\,\mathbf{u}(t)+\beta\,\mathbf{u}(t) \\
&= (\alpha\,\mathbf{u})(t)+(\beta\mathbf{u})(t), \\
[\alpha(\beta\,\mathbf{u})](t) &= \alpha[(\beta\,\mathbf{u})(t)] = \alpha[\beta\,\mathbf{u}(t)] = (\alpha\beta)\,\mathbf{u}(t), \\
(1\,\mathbf{u})(t) &= 1\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t).
\end{aligned}$$

Kita perlu mengenal pengertian subruang dari suatu ruang vektor. Konsep ini berkaitan erat dengan konsep sub himpunan.

Definisi 2.2 (Sub Ruang). Andaikan **V** adalah suatu ruang vektor dan **W** adalah subhimpunan tak kosong dari **V**, **W** disebut subruang dari **V** jika **W** merupakan ruang vektor terhadap dua operasi yang didefinisikan dalam **V**.

Perhatikan bahwa untuk dapat mengatakan bahwa **W** suatu subruang dari ruang vektor **V**, kita harus menunjukkan bahwa kedelapan aksioma dalam definisi 2.1. juga dipenuhi oleh **W**. Dengan bantuan teorema 2.1. berikut ini, kita dengan mudah akan dapat menyelidiki apakah suatu sub himpunan dari **V** merupakan suatu sub ruang atau bukan sub ruang dari **V.** bukti teorema ini dapat kita lihat dalam buku (Bernard Kolman, 1996 : 99).

Teorema 2.1. Misalkan **V** suatu ruang vektor, dan $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$. **W** disebut subruang dari **V** bila dan hanya bila untuk setiap $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, dan untuk setiap $\alpha \in \mathbf{K}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ dan $\alpha\, \mathbf{u} \in \mathbf{W}$.

Contoh 2.3. Sekarang kita perhatikan himpunan **K**[a, b] yang terdiri dari semua fungsi konstan pada [a, b]. Jelas bahwa semua fungsi konstan pada **K**[a, b] yang merupakan fungsi yang kontinu, sehingga **K**[a, b] ⊂ **C**[a, b]. Jika f, g keduanya fungsi konstan, jelas bahwa f + g juga fungsi konstan. Disamping itu, untuk sembarang skalar $\alpha \in \mathbf{R}$, maka jelas αf juga fungsi konstan. Dengan demikian **K**[a, b] memenuhi kedua syarat pada Teorema 2.1 sehingga kita dapat mengatakan bahwa **K**[a, b] adalah subruang dari **C**[a, b].

Contoh 2.4. Bentuklah himpunan $\mathbf{K}^+$ yang merupakan himpunan dari semua fungsi konstan bernilai positif pada [a, b]. jika kita ambil sembarang $f \in \mathbf{K}^+$ maka untuk suatu skalar $\alpha < 0$, $\alpha f \notin \mathbf{K}^+$. Dengan demikian $\mathbf{K}^+$ bukan merupakan subruang dari $\mathbf{C}[a, b]$.

2.2. Ruang Bernorma

Berkaitan dengan pembahasan ruang vektor di atas, kita akan mencoba membahas ruang bernorma berikut ini. Pembahasan akan kita mulai dengan pembahasan norma berikut ini.

Definisi 2.3 (Norma). Andaikan $\mathbf{V}$ adalah suatu ruang vektor. Norma adalah suatu fungsi dari $\mathbf{V}$ ke $\mathbf{R}$ yang nilai fungsinya di $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ ditulis sebagai $\|\mathbf{u}\|$ dan memenuhi sifat-sifat berikut, bahwa untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ dan $\alpha \in \mathbf{R}$ berlaku :

(i) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$

(ii) $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(iii) $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha|\, \|\mathbf{u}\|$

(iv) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Jika dalam suatu ruang vektor $\mathbf{V}$ dapat kita temukan suatu norma yang didefinisikan dalam $\mathbf{V}$ maka kita bisa mendefinisikan ruang bernorma berikut ini.

Definisi 2.4 (Ruang Bernorma). Andaikan **V** adalah suatu ruang vektor. Jika pada **V** dapat didefinisikan suatu norma maka **V** disebut ruang bernorma.

Contoh 2.5. Perhatikan himpunan **C**[a,b] pada contoh 2.2. Dengan mengambil suatu bentuk

$$\|\mathbf{u}\| = \max |\mathbf{u}(t)|,\ \mathbf{u} \in \mathbf{C}[a, b],\ t \in [a, b]. \tag{1}$$

Akan diperlihatkan bahwa **C**[a,b] merupakan suatu ruang bernorma dengan norma pada persamaan (1). Nilai maksimum pada (1) dijamin adanya karena **u** merupakan fungsi kontinu pada interval tertutup [a, b] (Purcell, 1984 : 540). Perhatikan bahwa dari (1) jelas $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{C}[a, b]$. Sekarang andaikan $\|\mathbf{u}\| = 0$, akibatnya $|\mathbf{u}(t)| = 0$, $\forall\, t \in [a, b]$. Padahal $|\mathbf{u}(t)|$ tidak mungkin negatif. Satu-satunya kemungkinan tinggal $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, $\forall t \in [a, b]$. Sebaliknya jika diasumsikan $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ maka $|\mathbf{u}(t)| = 0$, $\forall t \in [a, b]$. Dari pengerjaan diatas, kita dapatkan bahwa $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ambil sembarang **u**, **v** ∈ **C**[a, b] dan skalar α ∈ **R** maka berlaku

$$\|\alpha\mathbf{u}\| = \max_{t \in [a, b]} |\alpha\mathbf{u}(t)| = |\alpha| \max_{t \in [a, b]} |\mathbf{u}(t)| = |\alpha|\, \|\mathbf{u}\|,$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \max_{t \in [a, b]} |\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} (|\mathbf{u}(t)| + |\mathbf{v}(t)|)$$

$$\leq \max_{t \in [a, b]} |\mathbf{u}(t)| + \max_{t \in [a, b]} |\mathbf{v}(t)| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Ternyata aksioma (i) sampai (iv) dipenuhi oleh (1) dan hal ini menunjukkan bahwa (1) merupakan suatu norma.

2.3. Fungsional Linear

Pada subbab ini kita akan memperkenalkan konsep pemetaan dengan daerah asal berupa ruang vektor dan daerah kawan berupa medan dari ruang vektor ini. Beberapa hal yang akan kita bahas disini berkaitan dengan fungsional linear adalah fungsional sublinear, fungsional linear terbatas dan perluasan fungsional linear.

Definisi 2.5 (Fungsional). Jika V ruang vektor atas medan $\mathbf{K}$, maka pemetaan dari V ke $\mathbf{K}$ disebut Fungsional.

Definisi 2.6 (Fungsional Linear). Fungsional $f : \mathbf{V} \to \mathbf{K}$ dikatakan linear, jika

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}),\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V} \text{ dan } \forall \alpha,\beta\in\mathbf{K}. \tag{2}$$

Contoh 2.6. Tetapkan $\mathbf{a} = (a_1,a_2, \ldots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ dan andaikan $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dengan

$$f(\mathbf{v}) = v_1a_1 + v_2a_2 + \ \ldots + v_na_n,\ \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, , \ldots, v_n)\in\mathbf{R}^n.$$

f merupakan fungsional linear jika persamaan (2) dipenuhi oleh f. Untuk sembarang $\mathbf{u},\mathbf{v}\in \mathbf{R}^n$ dan $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ tampak

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = (\alpha u_1 + \beta v_1)\, a_1 + (\alpha u_2 + \beta v_2)\, a_2 + \ldots + (\alpha u_n + \beta u_n)\, a_n.$$

$$= (\alpha u_1a_1 + \alpha u_2a_2 + \ \ldots + \alpha u_na_n) + (\beta v_1a_1 + \beta v_2a_2 + \ldots + \beta v_na_n)$$

$= \alpha\,(u_1a_1 + u_2a_2 + \ldots + u_na_n) + \beta\,(v_1a_1 + v_2a_2 + \ldots + v_na_n)$

$= \alpha\, f(\mathbf{u}) + \beta\, f(\mathbf{v})$.

Definisi 2.7 (Fungsional Sublinear). Fungsional $f : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ yang memenuhi :

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),\ \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

$$f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}),\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V},\ \forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ dengan } \alpha \geq 0,$$

disebut Fungsional Sublinear.

Pandang sembarang fungsional linear $f : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$. Untuk $\alpha = \beta = 1$ berlaku

$$\alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Dilain pihak untuk $\beta = 0$ berlaku

$$f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}),\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V},\ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}.$$

Dengan demikian kita dapat mengatakan bahwa untuk sembarang fungsional linear $f : \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ merupakan fungsional sub linear.

Definisi 2.8 (Fungsional Linear Terbatas). Pandang suatu fungsional linear f pada suatu ruang bernorma $\mathbf{X}$. Jika ada suatu bilangan real c sedemikian hingga $\forall x \in \mathbf{X}$ berlaku

$$|f(\mathbf{x})| \leq c\|\, \mathbf{x}\, \|, \tag{3}$$

maka f disebut fungsional linear terbatas.

Dari persamaan (3) kita mendapatkan suatu bentuk $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leq c$.

Untuk $x \neq \mathbf{0}$. Kemungkinan nilai c yang bisa kita dapatkan adalah c merupakan

supremum dari $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$, untuk $x \neq \mathbf{0}$. Kita notasikan hasil terakhir

ini dengan $|||f|||$. Jadi

$$|||f|||_X = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{4}$$

Pandang himpunan $Y=\{\, y \in \mathbf{X} \mid y = 1/a\, x,\ x \neq 0,\ x \in \mathbf{X} \,\}$, maka akan kita dapatkan

norma dari $y \in Y$:

$$\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$$

dan karena f merupakan fungsional liner maka

$$|||f||| = \sup_{x \in D(f),\ \|x\| = a} 1/a\, |f(x)| = \sup_{x \in D(f),\ \|x\| = a} |f(1/a\, x)| = \sup_{y \in D(f),\ \|y\| = 1} |f(x)|$$

Demikianlah kita dapatkan

$$|||f|||_X = \sup_{x \in D(f),\ \|x\| = 1} |f(x)| \tag{5}$$

Kita sebut $|||f|||_X$ adalah norma dari suatu fungsional linear f. Perhatikanlah persamaan (4) dan (5) yang ada di atas. Tampak bahwa $|||f|||$ untuk persamaan (4) disyaratkan untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in D(f)$, sedangkan persamaan (5) disyaratkan untuk $\|\mathbf{x}\| = 1$, $\forall \mathbf{x} \in D(f)$. Sehingga jika kita menemukan suatu ruang bernorma **X** dengan norma $\|\mathbf{x}\| = 1$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ maka norma $|||f|||$ dari suatu fungsional linear f pada **X** kita menggunakan persamaan (5).

<u>Contoh 2.7.</u> Misalkan p, q$\in\mathbf{R}$. Perhatikanlah pemetaan F : C[a, b] $\rightarrow \mathbf{R}$, dengan

$$F(\mathbf{x}) = p\,\mathbf{x}(a) + q\,\mathbf{x}(b),\ \forall \mathbf{x} \in C[a, b].$$

Untuk sembarang $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ dan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C[a, b]$ berlaku :

$$\begin{aligned} F(\alpha x_1 + \beta x_2) &= p\,[\,\alpha\, x_1(a) + \beta\, x_2(a)\,] + q\,[\,\alpha\, x_1(b) + \beta\, x_2(b)\,] \\ &= \alpha\,[\,p\, x_1(a) + q\, x_1(b)\,] + \beta\,[\,p\, x_2(a) + q\, x_2(b)\,] \\ &= \alpha\, F(x_1) + \beta\, F(x_2), \end{aligned}$$

yang menunjukkan kelinearan fungsional F. Sekarang kita akan tunjukkan bahwa persamaan (3) dipenuhi oleh $\forall \mathbf{x} \in C[a, b]$. Dengan memperhatikan definisi norma pada C[a, b] dalam persamaan (1), kita mempunyai hubungan

$$\begin{aligned} |\,p\,x(a) + q\,x(b)\,| &\leq |\,p\,x(a)\,| + |\,q\,x(b)\,| \\ &= |\,p\,|\,|x(a)\,| + |\,q\,|\,|\,x(b)\,| \\ &\leq |\,p\,| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + |\,q\,| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \end{aligned}$$

$$= (|p| + |q|) \max_{t \in [a, b]} |x(t)|,$$

yang memperlihatkan dipenuhinya pertidaksamaan (3). Jadi F suatu fungsional linear terbatas.

Definisi 2.9 (Perluasan Linear). Andaikan $F : \mathbf{V} \to \mathbf{K}$ suatu fungsional linear dan $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{X}$ Jika $G : \mathbf{X} \to \mathbf{K}$,

$$G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

suatu fungsional linear maka G disebut perluasan fungsional linear dari F.

Contoh 2.8. Andaikan $F: \mathbf{C} \to \mathbf{K}$ suatu fungsional linear dan $\forall \mathbf{x} = x_1 + ix_2 \in \mathbf{C}$; $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ berlaku

$$F(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Andaikan $G: \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ suatu fungsional linear dan $\forall x \in \mathbf{R}$ berlaku

$$G(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|.$$

Perhatikanlah bahwa,

$$F(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}^2)} = \sqrt{(\mathbf{x}^2 + 0)} = G(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{i}\, 0 \in C.$$

Tampak bahwa F merupakan perluasan fungsional linear dari G.

BAB III

TEOREMA TEOREMA HAHN – BANACH PADA RUANG VEKTOR

Teorema-teorema Hahn – Banach (THB) semuanya menyoroti tentang perluasan fungsional linear. Pembahasan THB akan kita bagi menjadi dua bagian yaitu THB yang berlaku pada ruang vektor dan THB yng berlaku pada ruang bernorma. THB pada ruang vektor akan kita bahas dalam bab ini, yang terdiri dari dua teorema yaitu THB pada ruang vektor real yang akan kita sebut THB I dan THB pada ruang vektor komplek yang akan kita sebut THB II. THB I akan menjadi dasar bagi pembuktian THB II. Demikian juga THB II akan menjdi dasar bagi pembuktian THB di bagian ke dua, yang akan kita bahas pada bab IV.

3.1. Teorema Hahn – Banach I

Dalam pembuktian THB I kita akan menggunakan Lemma Zorn yang berkaitan dengan suatu himpunan terurut parsial dan himpunan terurut total. Oleh karena itu, kita akan mengawali pembahasan THB I ini dengan pembahasan tentang himpunan terurut tersebut.

Definisi 3.10 (Himpunan Terurut Parsial / Total). Misalkan **M** suatu himpunan tak kosong yang didalamnya didefinisikan "$\angle$" dengan syarat :

(i) $\forall$ a $\in$ **M**, a $\angle$ a,

(ii) $\forall$a, b $\in$ **M**, jika a $\angle$ b dan b $\angle$ a maka a = b,

(iii) $\forall$ a, b, c $\in$ **M**, jika a $\angle$ b dan b $\angle$ c maka a $\angle$ c.

Maka **M** disebut himpunan terurut parsial. Jika disamping ketiga syarat tersebut masih diberikan syarat tambahan

(iv) $\forall$ a, b$\in$**M**, jika a $\angle$ b atau b $\angle$ a atau a = b,

maka **M** disebut himpunan terurut total.

Contoh 3.9. Jelas bahwa himpunan semua bilangan real **R** merupakan himpunan terurut total dengan relasi "kurang dari atau sama dengan". Sekarang perhatikanlah $\mathbf{R}^n$ dengan relasi yang didefinisikan berdasarkan pada relasi "kurang dari atau sama dengan "pada **R** itu sebagai berikut :

$\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, a $\angle$ b jika $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $\ldots$, $a_n \leq b_n$.

Dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa $\mathbf{R}^n$ terhadap relasi tersebut merupakan himpunan terurut total.

Definisi 3.11 (Batas Atas). Andaikan **M** himpunan terurut parsial dan andaikan **W** subhimpunan dari **M**. Suatu batas atas dari **W** adalah elemen u$\in$**M** sedemikian hingga

$$x \angle u \,,\ \forall x \in \mathbf{W}.$$

<u>Contoh 3.10.</u> Dalam **R** kita mengenal relasi "kurang dari atau sama dengan ", yang menjadikan **R** himpunan terurut total. 4 merupakan batas atas dari himpunan bilangan real dalam interval [1, 3] karena $\forall x \in [1, 3]$, $x \leq 4$.

<u>**Definisi 3.12 (Elemen Maksimal).**</u> Misalkan **M** suatu himpunan terurut parsial. Elemen $a \in \mathbf{M}$ disebut elemen maksimal dalam **M** jika $\forall x \in \mathbf{M}$, berlaku

$$\text{jika} \quad a \angle x \text{ maka } a = x.$$

<u>Contoh 3.11.</u> Perhatikanlah himpunan semua bilangan asli **N** dengan relasi " $x \angle y$ " yaitu x kelipatan bulat dari y. Setiap bilangan prima p dalam **N** merupakan elemen maksimal dalam $\mathbf{N} - \{1\}$.

<u>**Lemma Zorn.**</u> Misalkan **M** suatu himpunan terurut parsial, dan andaikan bahwa setiap subhimpunan terurut total dalam **M** mempunyai batas atas maka **M** mempunyai paling sedikit satu elemen maksimal.

Lemma Zorn ekuivalen dengan Teorema Pengordean Baik dan Aksioma Pilihan, sehingga untuk melihat kebenaran Lemma Zorn kita cukup melihat kebenaran mereka. Hal ini dapat kita pelajari dalam Lipschutz (1989 : 195 – 196).

Teorema Hahn – Banach I. Andaikan $\mathbf{X}$ ruang vektor real dan p suatu fungsional sublinear pada $\mathbf{X}$. Misalkan $\mathbf{Z}$ suatu subruang dari $\mathbf{X}$ dan $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ suatu fungsional linear yang memenuhi

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in \mathbf{Z},$$

Maka ada suatu perluasan fungsional linear $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ dari f yang memenuhi

$$\mathbf{f}(x) \leq p(x),\ \forall x \in \mathbf{X},$$

Bukti : Kita akan membuktikan melalui dua langkah yaitu menunjukkan bahwa himpunan semua perluasan linear g dari f yang memenuhi

$$g(x) \leq p(x),\ \forall x \in D(g),$$

mempunyai elemen maksimal m, dan menunjukkan bahwa m tersebut adalah $\mathbf{f}$ yang dicari.

Mula - mula andaikan $\mathbf{E}$ adalah himpunan semua perluasan linear g dari f yang memenuhi

$$g(x) \leq p(x),\ \forall x \in D(g). \qquad (6)$$

Karena $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ dapat dipandang sebagai perluasan dari dirinya sendiri, maka $\mathbf{E} \neq \emptyset$. Dalam $\mathbf{E}$ kita definisikan relasi $g \angle h$ yang berarti h perluasan dari g. Untuk setiap $g \in \mathbf{E}$ pastilah merupakan perluasan dari dirinya sendiri sehingga berlaku $g \angle g$.

Ambil sembarang $g, h \in \mathbf{E}$ sedemikian hingga $g \angle h$ dan $h \angle g$. Berdasarkan definisi perluasan linear kita dapatkan bahwa

$$D(g) \subset D(h) \text{ dan } D(h) \subset D(g),\ g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in D(g) = D(h);$$

sehingga $g = h$. Sekarang jika kita ambil sembarang $g, h, j \in \mathbf{E}$ sedemikian hingga $g \angle h$ dan $h \angle j$ maka dengan definisi perluasan fungsional linear, kita akan memperoleh hasil bahwa

$$D(g) \subset D(h) \subset D(j) \text{ dan } g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = j(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in D(g);$$

yang berarti bahwa $g \angle j$. Jadi dengan relasi "$\angle$" tersebut E merupakan himpunan terurut parsial. Pandang suatu subhimpunan terurut total C dalam E. Dalam C kita definisikan fungsional linear

$$b : \bigcup_{g \in C} D(g) \to \mathbf{R},\ b(x) = g(x),\ \forall x \in D(g).$$

Jelas bahwa $g \angle b$, $\forall\ g \in C$,Sehingga b merupakan batas atas dari C. Dengan Lemma Zorn maka disimpulkan bahwa E mempunyai elemen maksimal, kita sebut saja m.

Tinggal kita tunjukkan bahwa m tersebut adalah **f** yang dimaksud dalam teorema. Dari definisi m diatas telah jelas bahwa m merupakan perluasan dari f dan juga

$$m\ (\mathbf{x}) \leq p\ (\mathbf{x}),\ \forall\ \mathbf{x} \in D(m),$$

sehingga cukup kita tunjukkan bahwa $D(m) = \mathbf{X}$. Hal ini dilakukan dengan Reductio Ad Absurdum (RAA). Andaikan $D(m) \subset \mathbf{X}$. Ambillah $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{X} - D(m)$. Misalkan $\mathbf{Y}_1 = \{\ \mathbf{y} + \alpha\, \mathbf{y}_1 \mid \mathbf{y} \in D(m), \alpha \in \mathbf{R}\ \}$, yang jelas merupakan sub ruang dari $\mathbf{X}$.

Misalkan c suatu konstanta dalam **R**. Definisikan fungsional $g_1 : \mathbf{Y_1} \to \mathbf{R}$ dengan rumus $\forall(\mathbf{y} + \alpha\, \mathbf{y_1}) \in \mathbf{Y_1}$ berlaku

$$g_1 (\mathbf{y} + \alpha\, \mathbf{y_1}) = m (\mathbf{y}) + \alpha\, c. \qquad (7)$$

Perhatikanlah bahwa g_1 linear karena jika diambil sembarang $\mathbf{y} + \alpha_1 \mathbf{y_1}$, $\mathbf{z} + \alpha_2 \mathbf{y_1}$ dalam $\mathbf{Y_1}$ dan sembarang skalar $\gamma, \eta \in$ **R**, berlaku

$$\begin{aligned} g_1 (\gamma (\mathbf{y} + \alpha_1 \mathbf{y_1}) + \eta (\mathbf{z} + \alpha_2 \mathbf{y_1})) &= g_1 ((\gamma\, \mathbf{y} + \eta\, \mathbf{z} + (\gamma\, \alpha_1 + \eta\, \alpha_2)\, \mathbf{y_1}) \\ &= m (\gamma\, \mathbf{y} + \eta\, \mathbf{z}) + (\gamma\, \alpha_1 + \eta\, \alpha_2)\, c \\ &= \gamma\, m (\mathbf{y}) + \gamma\, \alpha_1\, c + \eta\, m(\mathbf{z}) + \eta\, \alpha_2\, c \\ &= \gamma\, g_1 (\mathbf{y} + \alpha_1 \mathbf{y_1}) + \eta\, g_1 (\mathbf{z} + \alpha_2 \mathbf{y_1}) \end{aligned}$$

Disamping itu ternyata g_1 merupakan perluasan dari m karena untuk sembarang $\mathbf{u} \in D(m)$ berlaku

$$g_1 (\mathbf{u}) = g_1 (\mathbf{u} + 0\, \mathbf{y_1}) = m (\mathbf{u}).$$

Akan ditunjukkan bahwa g_1 memenuhi (6). Ambil sembarang $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in D(m)$, maka dengan mengingat p adalah suatu fungsional sub linear, kita peroleh

$$\begin{aligned} m(\mathbf{y}) - m(\mathbf{z}) = m(\mathbf{y} - \mathbf{z}) &\le p (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = p (\mathbf{y} + \mathbf{y_1} - \mathbf{y_1} - \mathbf{z}) \\ &\le p (\mathbf{y} + \mathbf{y_1}) + p (-\mathbf{y_1} - \mathbf{z}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad -p (- \mathbf{y_1} - \mathbf{z}) - m (\mathbf{z}) \le p (\mathbf{y} + \mathbf{y_1}) - m (\mathbf{y}). \qquad (8)$$

Karena (8) berlaku untuk $\forall\, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in D(m)$, maka

$$\sup_{\mathbf{z} \in D(m)} (-p (- \mathbf{y_1} - \mathbf{z}) - m (\mathbf{z})) \le \inf_{\mathbf{y} \in D(m)} (p (\mathbf{y} + \mathbf{y_1}) - m (\mathbf{y})).$$

Kita namakan saja harga supremum itu φ dan harga infimum itu ϖ sehingga berlaku

$\varphi \leq \varpi$. Untuk suatu bilangan real $c \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $\varphi \leq c \leq \varpi$ maka berlaku

$$-p(-y_1 - z) - m(z) \leq c, \forall z \in D(m), \tag{9}$$

dan

$$c \leq p(y + y_1) - m(y), \forall y \in D(m) \tag{10}$$

Untuk sembarang $\alpha < 0$, kita ganti z dengan y/α dalam pertidaksamaan (9), maka kita akan peroleh pertidaksamaan

$$\alpha p(-y_1 - y/\alpha) + m(y) \leq -\alpha c, \forall y \in D(m)$$

$$\Leftrightarrow m(y) + \alpha c \leq -\alpha p(-y_1 - y/\alpha), \forall y \in D(m)$$

Dari pertidaksamaan terakhir ini dan bentuk (7) kita akan mempuyai pertidaksamaan

$$g_1(y + \alpha y_1) \leq -\alpha p(-y_1 - y/\alpha) = p(y + \alpha y_1), \forall y \in D(m).$$

Untuk semabarang $\alpha > 0$, kita ganti y dengan y/α dalam pertidaksamaan (10) maka kita akan peroleh pertidaksamaan

$$\alpha c \leq p(y + \alpha y_1) - m(y), \forall y \in D(m)$$

$$\Leftrightarrow m(y) + \alpha c \leq p(y + \alpha y_1), \forall y \in D(m)$$

$$g_1(y + \alpha y_1) \leq p(y + \alpha y_1), \forall y \in D(m).$$

Sedangkan untuk $\alpha = 0$ maka $g_1(y + \alpha y_1) = m(y)$ dan juga g_1 memenuhi

$$g_1(y + \alpha y_1) = m(y) \leq p(y) = p(y + 0\, y_1) = p(y + \alpha y_1), \forall y \in D(m).$$

Dengan demikian tampaklah bahwa $g_1 \in \mathbf{E}$ dan g_1 merupakan perluasan dari m. Hal ini bertentangan dengan fakta sebelumnya bahwa m merupakan elemen maksimal. Jadi yang benar seharusnya $D(m) = \mathbf{X}$. Bukti selesai.

Contoh 3.12 Pandanglah $\mathbf{X} = \mathbf{R}^n$ dan suatu subruang $\mathbf{Z} = \{(0, x_2, \ldots, x_n) \mid x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$ dari $\mathbf{X}$. Misalkan $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Fungsional $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ didefinisikan dengan rumus

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_n a_n,\ \forall (0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z}.$$

Dengan memperhatikan contoh 2.6 kita ketahui bahwa f suatu fungsional linear. Kemudian kita memandang suatu fungsional $p : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ dengan aturan

$$p(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = |x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_n a_n|,$$

$\forall (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}$ Untuk sembarang $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots v_n) \in \mathbf{X}$ dan untuk sembarang $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \geq 0$ berlaku :

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= p((u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)) \\
&= |(u_1 + v_1) a_1 + (u_2 + v_2) a_2 + (u_3 + v_3) a_3 + \ldots + (u_n + v_n) a_n| \\
&\leq |(u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + \ldots + u_n a_n)| + |v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 + \ldots + v_n a_n| \\
&= p(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + p(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v}),
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
p(\alpha (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)) &= |\alpha u_1 a_1 + \alpha u_2 a_2 + \alpha u_3 a_3 + \ldots + \alpha u_n a_n| \\
&\leq \alpha |u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + \ldots + u_n a_n| \\
&= \alpha p(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) = \alpha p(\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa p suatu fungsional sublinier. Disamping itu, untuk sembarang $(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_n a_n$$

$\leq |0\, a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + xn\, a_n|$

$= p(0, x_2, x_3, \ldots x_n)$.

Menurut THB I ada jaminan bahwa f tersebut mempunyai perluasan linier **f** yang memenuhi **f** (**x**) $\leq$ p(**x**), $\forall$**x**$\in$ **X**. Salah satu perluasan itu adalah **f** : **X**$\to$**R** dengan rumus

f $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_n a_n$, $\forall (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in$ **X**.

<u>**Contoh 3.13.**</u> Perhatikanlah himpunan semua fungsi kontinu pada internal tertutup C[a,b] dan himpunan semua fungsi konstan pada interval tertutup **K**[a,b]. Telah ditunjukkan dalam contoh 2.3 bahwa **K**[a,b] merupakan subruang C[a,b]. Fungsional p : C[a,b] $\to$**R** dengan rumus p(**x**) = | **x** (a) + **x** (b) |, bersifat sublinier, karena untuk sembarang **x** , **y** $\in$C[a,b] dan untuk sembarang $\alpha \in$ **R** , $\alpha \geq 0$ berlaku :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= |(\mathbf{x}+\mathbf{y})(a)| + |(\mathbf{x}+\mathbf{y})(b)| \\ &\leq |\mathbf{x}(a)| + |\mathbf{x}(b)| + |\mathbf{y}(a)| + |\mathbf{y}(b)| \\ &= p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

dan

$$p(\alpha + \mathbf{x}) = |\alpha\mathbf{x}(a)| + |\alpha\mathbf{x}(b)| = \alpha\, p(\mathbf{x}).$$

Kemudian kita definisikan fungsional f : **K** [a,b] $\to$ **R** dengan

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a)}{2}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}[a,b],$$

yang jelas linier. Sedangkan untuk sembarang $\mathbf{x} \in K[a,b]$ berlaku

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a)}{2} \leq |x(a)| + |x(b)| = p(x).$$

THB I menjamin adanya suatu perluasan linier $\mathbf{f}$ bagi f tersebut yang memenuhi

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$, $\forall\, \mathbf{x} \in C[a,b]$. Fungsional

$$\mathbf{f}(x) = \frac{x(b) - x(a)}{2}, \forall x \in C[a,b],$$

merupakan salah satu perluasan yang demikian.

<u>**Contoh3.14.**</u> Andaikan $\mathbf{X}$ suatu ruang vektor real dan $p : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ suatu fungsional sublinier. Ambilah sembarang $x_0 \in \mathbf{X}$ dan bentuklah subruang $\mathbf{Z} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha x_0 ,\ \alpha \in \mathbf{R} \,\}$. Jika suatu fungsional $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ mempunyai rumus

$$f(\mathbf{x}) = \alpha\, p(\mathbf{x}_0),\ \forall\, \mathbf{x} = \alpha\, \mathbf{x}_0 \in \mathbf{Z}$$

maka f mempunyai perluasan $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ dan $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Untuk membuktikan hal ini, kita akan menggunakan THB I, sehingga harus ditunjukkan bahwa f linier dan $f(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{Z}$. Ambilah sembarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}$ dan sembarang $\beta, \delta \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} = \alpha_2 \mathbf{x}_0$. Maka berlaku

$$f(\beta\mathbf{x} + \delta\, \mathbf{y}) = f(\beta\, \alpha_1\ \mathbf{x}_0 + \delta\ \alpha_2\, \mathbf{x}_0) = (\beta\, \alpha_1 + \delta\, \alpha_2)\, p(\mathbf{x}_0)$$

$$= \beta\, \alpha_1\, p(\mathbf{x}_0) + \delta\, \alpha_2\, p(\mathbf{x}_0) = \beta\, f(\mathbf{x}) + \delta\, f(\mathbf{y}),$$

yang memperlihatkan kelinieran f. Kemudian ambil sembarang $\mathbf{x} = \alpha\, \mathbf{x}_0 \in \mathbf{Z}$.

Untuk $\alpha \geq 0$ berlaku

$$f(\mathbf{x}) = \alpha\, p(\mathbf{x}_0) = p(\alpha\, \mathbf{x}_0) = p(\mathbf{x}).$$

Sedangkan untuk $\alpha < 0$ berlaku

$$0 \leq p(\mathbf{0}) = p(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0) \leq p(\mathbf{x}_0) + p(-\mathbf{x}_0)$$

$$\Leftrightarrow -p(\mathbf{x}_0) - p(-\mathbf{x}_0) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -p(\mathbf{x}_0) - p(-1/\alpha\ \alpha.(\mathbf{x}_0)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (-1/\alpha)\, \alpha\, p(\mathbf{x}_0) - (-1/\alpha)\ p(\alpha\, \mathbf{x}_0) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\, p(\mathbf{x}_0) - p(\alpha\, \mathbf{x}_0) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x})$$

Dengan demikian berlaku $f(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{Z}$. Jadi f mempunyai perluasan linier $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ sedemikian hingga $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

3.2. Teorema Hahn-Banach II

Setelah membahas THB I yang berlaku pada ruang vektor real, kita akan mengembangkan teorema serupa yang berlaku pada ruang vektor kompleks. Teorema ini disebut Teorema Hahn-Banach II (THB II), sedangkan Kreyzig (1989:219) menyebutnya generalisasi THB. Tetapi sebelumnya perhatikanlah lema berikut ini.

Lema 3.1. Jika (**X**,**C**) ruang vektor komplek maka **X** yang dilengkapi dengan medan **R** merupakan ruang vektor real.

Bukti : Misalkan (**X**, **C**) ruang vektor komplek. Berarti semua aksioma ruang vektor (i - viii) dipenuhi oleh (**X**,**C**). Tinggal ditunjukkan berlakunya aksioma itu $\forall$**x, y, z**$\in$**X** dan$\forall \alpha,\beta \in$**R**. Jelas bahwa **x+y**$\in$**X**. Disamping itu, α **x** = $(\alpha+i.0)x\in$**X**. Selanjutnya aksioma (i,ii,iii,iv,viii) terpenuhi berkat dipenuhinya aksioma tersebut oleh (**X**,**C**). Sedangkan aksioma-aksioma (v,vi,vii) terpenuhi didasarkan pada hubungan $\alpha = \alpha+i.0$ atau $\beta = \beta+i.0$.

Bukti selesai.

Teorema Hahn-Banach II. Misalkan **X** suatu ruang vektor real atau kompleks dan **Z** subruang dari **X**. Andaikan p : **X**$\to$**K** suatu fungsional bernilai real yang memenuhi :

(i) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$, $\forall$**x,y**$\in$**X** dan

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$, $\forall x\in$**X**, $\alpha\in$**K**,

dan f : **Z**$\to$**K** suatu fungsional linear yang memenuhi

$$|f(x)| \le p(x),\ \forall x\in \mathbf{Z}.$$

Maka ada suatu perluasan linear $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ dari f yang memenuhi

$$|\mathbf{f}(x)| \leq p(x),\ \forall x \in \mathbf{X}.$$

Bukti: a. Andaikan $\mathbf{X}$ adalah ruang vektor real, $\mathbf{Z}$ subruang dari $\mathbf{X}$, dan andaikan $p : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ fungsional bernilai real yang memenuhi

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x,y \in \mathbf{X}$, dan

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$, $\forall x \in \mathbf{X}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Dengan demikian, $\forall \alpha \geq 0$ berlaku

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) = \alpha\, p(x),$$

yang menunjukkan p suatu fungsional sublinear.

Karena $|f(x)| \leq p(x)$ maka $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbf{Z}$. Menurut THB I pasti ada perluasan linear $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ dari f yang memenuhi $\mathbf{f}(x) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbf{X}$. Selain itu juga $\forall x \in \mathbf{X}$ berlaku

$$-\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|\, p(x) = p(x)$$

$$\Leftrightarrow -p(x) \leq \mathbf{f}(x).$$

Terbukti bahwa $\forall x \in \mathbf{X}$, $|\mathbf{f}(x)| \leq p(x)$.

b. Andaikan $\mathbf{X}$ adalah ruang vektor kompleks, maka $\mathbf{Z}$ juga merupakan ruang vektor kompleks. Nyatakan $f(x)$ sebagai jumlahan $f_1(x) + if_2(x)$ dengan $f_1 : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ dan

$f_2 : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ fungsional-fungsional bernilai real. Perhatikanlah bahwa f_1 dan f_2 linear, karena $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ dan $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$f_1(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) + \mathbf{i}\, f_2(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha\, (f_1(\mathbf{x}) + \mathbf{i} f_2(\mathbf{x})) + \beta\, (f_1(\mathbf{y}) + \mathbf{i}\, f_2(\mathbf{y}))$$

$$\Leftrightarrow f_1(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) + \mathbf{i}\, f_2(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha\, f_1(\mathbf{x}) + \mathbf{i}\, \alpha\, f_2(\mathbf{x}) + \beta\, f_1(\mathbf{y}) + \mathbf{i}\, \beta\, f_2(\mathbf{y})$$

$$\Leftrightarrow f_1(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) + \mathbf{i}\, f_2(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha\, f_1(\mathbf{x}) + \beta\, f_1(\mathbf{y}) + \mathbf{i}\, (\alpha\, f_2(\mathbf{x}) + \beta\, f_2(\mathbf{y}))$$

$$\Leftrightarrow f_1(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha\, f_1(\mathbf{x}) + \beta\, f_1(\mathbf{y}) \text{ dan } f_2(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha\, f_2(\mathbf{x}) + \beta\, f_2(\mathbf{y}).$$

Menurut lema 3.1., $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Z}$ juga merupakan ruang-ruang vektor real, yang akan kita notasikan dengan $\mathbf{X_R}$ dan $\mathbf{Z_R}$. Sehingga f_1 dan f_2 dapat dipandang sebagai fungsional-fungsional $f_1 : \mathbf{Z_R} \to \mathbf{R}$ dan $f_2 : \mathbf{Z_R} \to \mathbf{R}$. Jika diambil sembarang $x \in \mathbf{Z_R}$ maka berlaku

$$f_1(\mathbf{x}) \leq \sqrt{[\, f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2]} = |f(\mathbf{x})| \leq p(\mathbf{x}).$$

Dengan THB I kita dapat katakan bahwa f_1 mempunyai perluasan linear $\mathbf{f}_1 : \mathbf{X_R} \to \mathbf{R}$ yang memenuhi

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X_R}.$$

Selain itu $\mathbf{f}_1$ dapat dinyatakan sebagai fungsional $\mathbf{f}_1 : \mathbf{X} \to \mathbf{C}$ yang memenuhi

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Sifat linear f menunjukkan bahwa $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$\mathbf{i}(f_1(\mathbf{x}) + \mathbf{i}\, f_2(\mathbf{x})) = \mathbf{i}\, f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{ix}) = f_1(\mathbf{ix}) + \mathbf{i}\, f_2(\mathbf{ix})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{i}\, f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{ix}) + \mathbf{i}\, f_2(\mathbf{ix})$$

$$\Leftrightarrow f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{ix}) \text{ dan } - f_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{ix}).$$

Dengan persamaan yang terakhir ini kita definisikan fungsional g : $\mathbf{X} \to \mathbf{C}$ dengan aturan

$$g(x) = \mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_1(ix), \forall x \in \mathbf{X}.$$

Kita akan perlihatkan bahwa g merupakan **f** yang dimaksud dalam teorema dengan memperlihatkan g perluasan dari f, g linear dan $|g(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbf{X}$. Ambillah sembarang $x \in \mathbf{Z}$.

$$g(x) = \mathbf{f}_1(x) - i\,\mathbf{f}_1(ix) = f_1(x) - i\, f_1(ix) = f_1(ix) + i\, f_2(ix) = f(x),$$

yang memperlihatkan g merupakan perluasan dari f. Kemudian ambillah sembarang $x,y \in \mathbf{X}$ dan sembarang $\alpha,\beta \in \mathbf{C}$, berlaku :

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= \mathbf{f}_1(\alpha x + \beta y) - i\,\mathbf{f}_1(i(\alpha x + \beta y)) \\ &= \alpha\,\mathbf{f}_1(x) + \beta\,\mathbf{f}_1(y) - i\,\mathbf{f}_1(\alpha(ix) + \beta(iy)) \\ &= \alpha\,\mathbf{f}_1(x) + \beta\,\mathbf{f}_1(y) - i\,\alpha\,\mathbf{f}_1(ix) - i\,\beta\,\mathbf{f}_1(iy) \\ &= \alpha\,(\mathbf{f}_1(x) - i\,\mathbf{f}_1(ix)) + \beta\,(\mathbf{f}_1(y) - i\,\mathbf{f}_1(iy)) \\ &= \alpha\, g(x) + \beta\, g(y). \end{aligned}$$

Kemudian ambillah sembarang $x \in \mathbf{X}$ sedemikian hingga $g(x) = 0$,

$$|g(x)| = |f(x)| \leq p(x)$$

Namun jika diambil sembarang $x \in \mathbf{X}$ sedemikian hingga $g(x) \neq 0$, kita dapat nyatakan g(x) dalam bentuk polar sebagai $|g(x)|e^{i\theta}$. Karena g linear maka $\forall x \in \mathbf{X}$ berlaku

$$|g(x)| = g(x)\, e^{-i\theta} = g(e^{-i\theta}\; x).$$

Perhatikan bahwa $|g(\mathbf{x})|$ bernilai real, maka $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ berlaku

$|g(\mathbf{x})| = g(e^{-i\theta}\ \mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(e^{-i\theta}\ \mathbf{x}) \leq p(e^{-i\theta}\ \mathbf{x}) = |e^{-i\theta}|\ p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$.

Bukti selesai.

Contoh 3.15. Perhatikanlah ruang vektor $\mathbf{R}^3$ dan subruang

$\mathbf{Z} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | \ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$. Kemudian definisikan fungsional

$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ dengan rumus

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3\ ,\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}.$$

Tampak bahwa f linear karena $\forall (x_1, x_2, x_3),(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{Z}$ dan $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)) &= f(\alpha x_1 + \beta y_1\ , \alpha x_2 + \beta y_2\ , \alpha x_3 + \beta y_3) \\ &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 \\ &= \alpha f(x_1, x_2, x_3) + \beta f(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Lalu definisikan fungsional $p : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ dengan rumus

$$p(x_1, x_2, x_3) = |\ x_1| + |\ x_2| + |\ x_3|,\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{X}.$$

Perhatikanlah, ternyata p memenuhi (i) dan (ii) pada THB II karena $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ dan $\forall (x_1, x_2, x_3),(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{X}$ berlaku

$$\begin{aligned} p((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) &= |\ x_1 + y_1| + |\ x_2 + y_2| + |\ x_3 + y_3| \\ &\leq |\ x_1| + |y_1| + |\ x_2| + |y_2| + |\ x_3| + |\ y_3| \end{aligned}$$

$$= p((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)),$$

dan

$$p(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + |\alpha x_3| = |\alpha|\,|x_1| + |\alpha|\,|x_2| + |\alpha|\,|x_3|$$

$$= |\alpha|\, p(x_1, x_2, x_3).$$

Selain itu, $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}$ kita mempunyai hubungan

$$|f(x_1, x_2, x_3)| = |x_1 + x_2 + x_3| \le |x_1| + |x_2| + |x_3| = p(x_1, x_2, x_3).$$

Dengan demikian menurut THB II ada perluasan linear $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sedemikian hingga $|\mathbf{f}(x)| \le p(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^3$.

<u>Contoh 3.16.</u> Perhatikanlah ruang vektor $\mathbf{C}^n$ dan fungsional $p : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ dengan aturan

$$p(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|, \ \forall (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n .$$

Terlebih dahulu kita perlihatkan bahwa p memenuhi (i) dan (ii) pada THB II. Ambil sembarang $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) \in \mathbf{C}^n$ dan ambil sembarang $\alpha \in \mathbf{C}$ maka berlaku

$$P((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)) = |\xi_1 + \psi_1| + |\xi_2 + \psi_2| + \ldots + |\xi_n + \psi_n|$$

$$\le |\xi_1| + |\psi_1| + |\xi_2| + |\psi_2| + \ldots + |\xi_n| + |\psi_n|$$

$$= p((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)),$$

dan

$$p(\alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) = |\alpha\xi_1| + |\alpha\xi_2| + \ldots + |\alpha\xi_n|$$

$$= |\alpha||\xi_1| + |\alpha||\xi_2| + \ldots + |\alpha||\xi_n|$$

$$= |\alpha|\, p(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Kemudian perhatikan subruang $\mathbf{Z} = \{(\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n) | \xi_1, \xi_n \in \mathbf{C}\}$ dari $\mathbf{C}^n$ dan definisikan fungsional $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ dengan aturan

$$f(\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n) = \xi_1 + \xi_n,\ \forall(\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n) \in \mathbf{Z}.$$

f linear karena $\forall \mathbf{x} = (\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n)$, $\mathbf{y} = (\psi_1, 0, 0, \ldots, 0, \psi_n) \in \mathbf{Z}$ dan $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ berlaku

$$f(\alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{y}) = f(\alpha(\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n) + \beta(\psi_1, 0, 0, \ldots, 0, \psi_n))$$

$$= \alpha\, \xi_1 + \beta\, \psi_1 + \alpha\, \xi_n + \beta\, \psi_n$$

$$= \alpha\, f(\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n) + \beta\, f(\psi_1, 0, 0, \ldots, 0, \psi_n)$$

$$= \alpha\, f(x) + \beta\, f(y).$$

Selain itu berlaku pula,

$$|f(\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n)| = |\xi_1 + \xi_n| \le |\xi_1| + |\xi_n|$$

$$= p(\xi_1, 0, 0, \ldots, 0, \xi_n).$$

Dengan demikian, f dan p memenuhi asumsi-asumsi dalam THB II. Oleh karena itu ada perluasan linear $\mathbf{f} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ dari f dan memenuhi $|\mathbf{f}(x)| \le p(x)\ \forall x \in \mathbf{C}$.

BAB IV

TEOREMA HAHN-BANACH PADA RUANG BERNORMA

Pada Bab III kita telah membahas Teorema-teorema Hahn-Banach yang berlaku pada ruang vektor real maupun ruang vektor kompleks. Pada bab ini kita akan membahas Teorema Hahn-Banach yang berlaku pada ruang bernorma. Kita akan menyebut teorema ini dengan Teorema Hahn-Banach III (THB III), sedangkan Brown dan Page (1970 : 187) menyebutnya sebagai Teorema Dasar Perluasan untuk Fungsional Linear Terbatas. Disamping itu juga akan disajikan dua akibat dari THB III ini, yang akan kita sajikan dalam subbab 4.2 sebagai Teorema 4.2 dan Teorema4.3.

4.1. Teorema Hahn-Banach III

Pada pembahasan THB III ini, kita akan menggunakan konsep norma dari suatu fungsional linear , yang telah didefinisikan dalam subbab 2.3.

Teorema Hahn-Banach III. Andaikan **X** suatu ruang bernorma. Kemudian misalkan **Z** suatu subruang dari **X** dan f : **Z**$\to$**K** suatu fungsional linear terbatas .

Maka ada suatu fungsional linear terbatas $\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ sedemikian hingga $\mathbf{f}$ merupakan perluasan dari f dan

$$|||\mathbf{f}|||_X = |||f|||_Z .$$

Bukti: Kita akan menggunakan THB II, yang menjamin adanya perluasan dari f. Sehingga terlebih dahulu kita harus dapat mememukan suatu fungsional p yang memenuhi asumsi-asumsi dalam THB II. Pandang fungsional $p: \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ dengan aturan

$$p(x) = |||f|||_Z \, ||x|| , \forall x \in \mathbf{X}.$$

Ternyata p memenuhi syarat (i) dan (ii) dalam THB II karena untuk sembarang $x,y \in \mathbf{X}$ dan untuk sembarang $\alpha \in \mathbf{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} p(x+y) &= |||f|||_Z \, ||x+y|| \le |||f|||_Z (||x|| + ||y||) \\ &= |||f|||_Z \, ||x|| + |||f|||_Z \, ||y|| = p(x) + p(y), \end{aligned}$$

dan

$$p(\alpha x) = |||f|||_Z \, ||\alpha x|| = |\alpha| \, |||f|||_Z \, ||x|| = |\alpha| \, p(x).$$

Selain itu,dari rumus $|||f|||_Z = \sup\limits_{x \in \mathbf{Z}, x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{||x||}$, dapat disimpulkan bahwa $\forall x \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$|f(x)| \le |||f|||_Z \, ||x|| = p(x).$$

Dengan demikian berdasarkan THB II kita simpulkan adanya perluasan linear $\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ dari f sedemikian hingga

$$|\mathbf{f}(x)| \le p(x), \forall x \in \mathbf{X} \qquad (6)$$

Perhatikanlah bahwa pertidaksamaan (6) memperlihatkan kepada kita bahwa **f** merupakan fungsional linear terbatas . Disamping itu, dari pertidaksamaan (6) dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{|\mathbf{f}(x)|}{\| x \|} \leq |||\mathbf{f}|||_Z, \forall x \in Z, x \neq 0,$$

sehingga,

$$|||\mathbf{f}|||_Z = \operatorname{Sup} \frac{|\mathbf{f}(x)|}{\| x \|} \leq |||f|||_Z.$$

Dilain pihak,

$$|||f|||_Z = \sup_{x \in Z, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in Z, x \neq 0} \frac{|\mathbf{f}(x)|}{\|x\|} = |||\mathbf{f}|||_X.$$

Jadi $|||f|||_Z = |||\mathbf{f}|||_X$.

Bukti selesai.

__Contoh 4.17.__ Pandanglah ruang bernorma $\mathbf{X} = \mathbf{R}^2$ dengan norma

$$\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2|, \forall (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$$

dan bentuklah subruang $\mathbf{Z} = \{(\alpha x_1, \beta x_2) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Kemudian definisikan fungsional $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ dengan rumus

$$f(\alpha x_1, \beta x_2) = 5\alpha + 2\beta, \forall (\alpha x_1, \beta x_2) \in \mathbf{Z}.$$

Terlebih dahulu akan kita perlihatkan bahwa f merupakan fungsional terbatas. Ambil sembarang $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ dan sembarang $(\alpha_1 a_1, \beta_1 a_2), (\alpha_2 a_2, \beta_2 a_2) \in \mathbf{Z}$ maka

$$\begin{aligned} f\{\gamma(\alpha_1 a_1, \beta_1 a_2) + \delta(\alpha_2 a_1, \beta_2 a_2)\} &= f(\gamma\alpha_1 a_1 + \delta\alpha_2 a_1, \gamma\beta_1 a_2 + \delta\beta_2 a_2) \\ &= f((\gamma\alpha_1 + \delta\alpha_2)a_1, (\gamma\beta_1 + \delta\beta_2)a_2) \\ &= 5(\gamma\alpha_1 + \delta\alpha_2) + 2(\gamma\beta_1 + \delta\beta_2) \\ &= 5\gamma\alpha_1 + 2\gamma\beta_1 + 5\delta\alpha_2 + 2\delta\beta_2 \\ &= \gamma f(\alpha_1 a_1, \beta_1 a_2) + \delta f(\alpha_2 a_1, \beta_2 a_2), \end{aligned}$$

yang menunjukkan f linear. Selain itu, jika diambil sembarang $k>0$ sedemikian hingga $5 \le k|a_1|$ dan $2 \le k|a_2|$, maka $5|\alpha_1| \le k|a_1||\alpha_1|$ dan $2|\beta_1| \le k|a_2||\beta_1|$. Dengan demikian $\forall(\alpha a_1, \beta a_2) \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(\alpha a_1, \beta a_2)| \le |5\alpha| + |2\beta| &\le k|a_1||\alpha| + k|a_2||\beta| \\ &= k(|\alpha a_1| + |\beta a_2|) = k\|(\alpha a_1, \beta a_2)\|, \end{aligned}$$

yang memperlihatkan f terbatas. Menurut THB III, ada suatu fungsional linear terbatas $\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ yang merupakan perluasan dari f dan $|||f|||_Z = |||\mathbf{f}|||_X$.

Contoh 4.18. Perhatikanlah ruang bernorma $\mathbf{C}$ dengan norma

$$\|a+\mathbf{i}b\| = \sqrt{(a^2 + b^2)}, \qquad \forall a+\mathbf{i}b \in \mathbf{C}.$$

Bentuk subruang $\mathbf{Z} = \{(3+\mathbf{i}2)\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{C}\}$ dari $\mathbf{C}$. Kemudian kita definisikan fungsional $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ dengan rumus

$$f\{(3+\mathbf{i}2)\mathbf{u}\} = \mathbf{u},\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{C}.$$

f linear karena untuk sembarang skalar $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ dan untuk sembarang $\mathbf{x} = (3+\mathbf{i}2)\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = (3+\mathbf{i}2)\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = f[(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(3+\mathbf{i}2)] = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}).$$

Selain itu, $\forall \mathbf{x} = (3+\mathbf{i}2)\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$ dengan $\mathbf{u} = a+\mathbf{i}b$, norma $\mathbf{x}$ memenuhi

$$\|\mathbf{x}\| = \|3a - 2b + \mathbf{i}(2a + 3b)\| = \sqrt{[(3a-2b)^2 + (2a+3b)^2]}$$
$$= \sqrt{[9a^2 + 4a^2 + 4b^2 + 9b^2 - 12ab + 12ab]} = \sqrt{[13(a^2 + b^2)]} \geq |f(\mathbf{x})|,$$

Yang memperlihatkan bahwa f merupakan fungsional terbatas. THB III menjamin adanya perluasan linear terbatas $\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ dari f dan memenuhi $|||f|||_Z = |||\mathbf{f}|||_{\mathbf{C}}$. Salah satu fungsional ini mempunyai rumus $\mathbf{f} = (1/\sqrt{13})\|z\|,\ \forall z \in \mathbf{C}$.

4.2. Akibat-akibat dari THB III

Pada subbab ini, kita akan membahas akibat dari THB III yang menyoroti tentang keberadaan fungsional linear terbatas dalam ruang bernorma dengan norma fungsionalnya yang khas. Kreyszig (1989 : 223) menyabut teorema 4.2 berikut ini dengan Teorema Fungsional linear Terbatas.

Teorema 4.2. Andaikan **X** suatu ruang bernorma. Jika diambil sembarang $x_0 \in \mathbf{X}$, $x_0 \neq 0$ maka ada suatu fungsional linear terbatas $f: \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ sedemikian hingga

$$|||\mathbf{f}|||_X = 1 \text{ dan } \mathbf{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Bukti: Bentuklah subruang $\mathbf{Z} = \{x = \alpha x_0 | \alpha \in \mathbf{K}\}$ dari $\mathbf{X}$ Kemudian definisikan fungsional $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{K}$ dengan aturan

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|, \forall x = \alpha x_0 \in \mathbf{Z}$$

f linear karena untuk sembarang $x = \alpha x_0$, $y = \beta x_0 \in \mathbf{C}$ dan untuk sembarang $\delta, \gamma \in \mathbf{K}$ berlaku

$$f(\gamma x + \delta y) = f(\gamma\alpha x_0 + \delta\beta x_0) = f\{(\gamma\alpha + \delta\beta)\, x_0\} = (\gamma\alpha + \delta\beta)\,\|x_0\|$$

$$= \gamma f(\alpha x_0) + \delta f(\beta x_0) = \gamma f(x) + \delta f(y).$$

Selain itu untuk sembarang $x = \alpha x_0 \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha|\, \|x_0\| = \|x\|,$$

yang memeperlihatkan f fungsional linear terbatas. Sedangkan untuk sembarang $x \in \mathbf{Z}$ berlaku

$$|||f||| = \sup_{x \in \mathbf{Z},\, \|x\| = 1} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbf{Z},\, \|x\| = 1} \|x\| = \sup_{x \in \mathbf{Z},\, \|x\| = 1} 1 = 1.$$

Menurut THB III , ada perluasan linear $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ dari f dan $|||\mathbf{f}|||_X = |||f|||_Z$. Berarti ada fungsional linear terbatas $\mathbf{f}$ dan $|||\mathbf{f}|||_X = 1$. Karena $x_0 \in \mathbf{Z}$ dan $\mathbf{f}$ perluasan dari f maka

$$\mathbf{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|.$$

Bukti selesai.

Contoh 4.19. Perhatikanlah ruang bernorma $\mathbf{R}^2$ dengan norma $\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2|$, $\forall(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$. Jika diambil vektor $(1,0)\in\mathbf{R}^2$, maka menurut teorema 4.1 ada suatu fungsional linear terbatas $f : \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ sedemikian hingga $\|\|f\|\| = 1$ dan $f(1,0) = \|(1,0)\|$. Salah satu fungsional ini adalah $f : \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ dengan rumus

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2, \ \forall(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2.$$

Contoh 4.20. Dengan mendefinisikan norma

$$\|(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\| = |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|, \ \forall(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\in\mathbf{C}^n$$

maka $\mathbf{C}^n$ merupakan suatu ruang bernorma. Jika kita mengambil vektor $(2+\mathbf{i}, 2+2\mathbf{i}, \ldots, 2+n\mathbf{i})\in\mathbf{C}^n$ maka menurut teorema 4.2 ada fungsional linear terbatas $f : \mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ sedemikian hingga $\|\|f\|\| = 1$ dan

$$f(2+\mathbf{i}, 2+2\mathbf{i}, \ldots, 2+n\mathbf{i}) = \|(2+\mathbf{i}, 2+2\mathbf{i}, \ldots, 2+n\mathbf{i})\|.$$

Salah satu fungsional ini adalah $f : \mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ dengan rumus

$$f[(\eta_1, \eta_2, \ldots,\eta_n)(2+\mathbf{i}, 2+2\mathbf{i}, \ldots, 2+n\mathbf{i})] = (\eta_1, \eta_2, \ldots,\eta_n)\,\|(2+\mathbf{i}, 2+2\mathbf{i}, \ldots, 2+n\mathbf{i})\|,$$

$$\forall(\eta_1, \eta_2, \ldots,\eta_n)(2+\mathbf{i}, 2+2\mathbf{i}, \ldots, 2+n\mathbf{i}) \in \mathbf{C}^n.$$

Akibat dari THB III yang kedua akan kita sajikan dalam teorema 4.3 berikut ini.

Teorema 4.3. Andaikan **X** suatu ruang bernorma . jika diambil sembarang $x_0 \in \mathbf{X}$, $x_0 \neq 0$ maka ada suatu fungsional linear terbatas $\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ sedemikian hingga

$$|||\mathbf{f}|||_X = ||x_0|| \text{ dan } \mathbf{f}(x_0) = 1.$$

Bukti: Mula-mula bentuklah subruang $\mathbf{Z} = \{x = \alpha x_0 | \alpha \in \mathbf{K}\}$ dan kemudian definisikan fungsional $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{K}$ dengan rumus

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha, \forall x = \alpha x_0 \in \mathbf{Z}.$$

Jika diambil sembarang $x = \alpha x_0$, $y = \beta x_0 \in \mathbf{C}$ dan untuk sembarang $\delta, \gamma \in \mathbf{K}$ berlaku

$$f(\gamma x + \delta y) = f(\gamma\alpha x_0 + \delta\beta x_0) = \gamma\alpha + \delta\beta$$

$$= \gamma f(\alpha x_0) + \delta f(\beta x_0) = \gamma f(x) + \delta f(y).$$

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| = \frac{||x||}{||x_0||}$$

Tampak bahwa f fungsional linear terbatas. Selain itu, $\forall x \neq 0$, dan $x \in \mathbf{Z}$ memenuhi

$$|||f|||_z = \text{Sup} \frac{|f(x)|}{||x||} = \text{Sup} \frac{|\alpha|}{|\alpha|\,||x_0||} = ||x_0||^{-1}.$$

Menurut THB III , ada perluasan linear $\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ dari f dan

$$|||\mathbf{f}|||_X = |||f|||_Z = ||x_0||^{-1}.$$

Perhatikan , $x_0 \in \mathbf{Z}$ dan karena **f** perluasan dari f maka $\mathbf{f}(x_0) = f(x_0) = 1$.

Bukti selesai.

Contoh 4.21. Dengan mendefinisikan norma dalam $X = \mathbf{R}^n$,

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

menjadikan $\mathbf{R}^n$ suatu ruang bernorma. Karena $(1,2,\ldots,n) \in \mathbf{R}^n$ maka setiap vektor $u \in \mathbf{R}^n$ dapat dinyatakan sebagai

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, n\alpha_n)\ ,\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n .$$

Dengan mengambil $(1,2,\ldots,n) \in \mathbf{R}^n$ maka menurut teorema 4.3 ada perluasan fungsional linear terbatas $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sedemikian hingga

$$|||\mathbf{f}|||_{\mathbf{R}} = \|(1,2,\ldots,n)\|^{-1} \text{ dan } \mathbf{f}(1,2,\ldots,n) = 1.$$

Salah satu fungsional itu adalah g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ddengan rumus

$$g(\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, n\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \forall(\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, n\alpha_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Contoh 4.22. Kita perhatikan ruang bernorma $\mathbf{C}$ dngan norma $\|a+\mathbf{i}b\| = |a+\mathbf{i}b|$, $\forall a+\mathbf{i}b \in \mathbf{C}$. Jika kita ambil $\mathbf{i} \in \mathbf{C}$maka menurut teorema 4.3 ada fungsional linear terbatas $\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, sedemikian hingga $|||\mathbf{f}|||_{\mathbf{C}} = \|\ a+\mathbf{i}b\ \|^{-1}$ dan $\mathbf{f}(a+\mathbf{i}b) = 1$. salah satu fungsional tersebut adalah $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, dengan rumus

$$f(a+\mathbf{i}b) = b - \mathbf{i}a,\ \ \forall (a+\mathbf{i}b) \in \mathbf{C}.$$

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Dari penulisan skripsi ini, dapat disimpulkan beberapa hal pokok sebagai berikut :

1. Fungsional merupakan pemetaan dengan daerah asal berupa ruang vektor dan daerah kawan berupa medan skalar dari daerah asal.
2. Menurut THB I dan THB II, jika ada fungsional f dan p yang memenuhi syarat-syarat tertentu maka ada perluasan dari f yang memenuhi sifat tertentu pula.
3. Menurut THB III, jika ada fungsionsl linear terbatas f, maka ada perluasan linear terbatas dari f dengan norma yang sama dengan norma f.
4. Jika diambil sembarang elemen tak nol dalam suatu ruang barnorma maka menurut akibat dari THB III, ada fungsional linear terbatas yang mempunyai norma yang khas.

5.2. Saran

Beberapa saran yang dapat penulis berikan bagi penelitian lebih lanjut adalah :

1. Karena keterbatasan penulis, akibat THB III yang dibahas dalam skripsi ini hanya dua. Penelitian selanjutnya perlu mendalami THB I, THB II dan THB III ini lebih jauh lagi sehingga ditemukan akibat-akibat yang lain.
2. Menarik untuk diteliti lebih jauh , bagaimanakah kesinpulan yang akan terjadi jika asumsi-asumsi dalam Teorema Hahn-Banach dikurangi.
3. Teorema Hahn-Banach yang dibahas dalam skripsi ini berlaku pada ruang vektor real dan kompleks. Menarik untuk dijadikan penelitian selanjutnya, apakah Teorema-teorema Hahn-Banach ini juga berlaku untuk ruang vektor dengan medan skalar selain medan skalar real dan kompleks.
4. Perlu untuk dikaji lebih jauh lagi , adakah Teorema Hahn-Banach yang bukan membahas tentang fungsional linear.
5. Penting untuk dikaji lebih jauh lagi tentang keberadaan Teorema Hahn-Banach pada ruang bernorma yang lain.

Daftar Pustaka

Bagett, Lawrence.W. 1992. Functional Analysis a Primer. New York : Marcel Dekker. Inc.

Brown, Al dan Page.A. 1970. Element of Functional Analysis. London : Van Nostrand Reinhold Company.

Kolman, Bernard. 1996. Elementary Linear Algebra. Edisi keenam. New Jersey : Prentice Hall International.

Kreyszyg, Erwin. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. Florida: Robert. E. Krieger.

Nanda, Sudarsan and B. Choundhary. 1989. Functional Analysis with Applications. New York : John Willey & Sons, Inc .

Purcell, E. (Terjemahan oleh I Nyoman Susila, dkk.). 1984. Kalkulus dan Geometri Analitis. Edisi ketiga. Bandung : Erlangga.

Rudin, Walter. 1991. Functional Analysis. New York : Mc. Graw. Hill. Inc.

Seymour, Lipshutz(Terjemahan oleh Pantur Silaban). 1984. Teori Himpunan. Bandung : Erlangga.