FUNGSI-FUNGSI ORTHOGONAL DALAM PENYELESAIAN MASALAH STURM-LIOUVILLE

S K R I P S I

Diajukan untuk memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

Disusun oleh:

PAULINA KRISTIN APRIYANI

NIM: 003114029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA

2005

S K R I P S I

FUNGSI-FUNGSI ORTHOGONAL DALAM PENYELESAIAN MASALAH STURM-LIOUVILLE

Disusun oleh:

PAULINA KRISTIN APRIYANI

NIM: 003114029

Telah disetujui Oleh:

Pembimbing

Y.G. Hartono, S.Si, M.Sc

Tanggal 21-2-2005

S K R I P S I

FUNGSI-FUNGSI ORTHOGONAL DALAM PENYELESAIAN MASALAH STURM-LIOUVILLE

Disusun oleh:

PAULINA KRISTIN APRIYANI
NIM : 003114029

Telah dipertahankan didepan panitia penguji
Pada tanggal : 4 Februari 2005
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

SUSUNAN PANITIA

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	: Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc	....
Sekretaris	: Y.G. Hartono, S.Si, M.Sc	....
Anggota	: 1. Y.G. Hartono, S.Si, M.Sc.	....
	2. Drs. A. Tutoyo, M.Sc.	....
	3. Drs. B. Susanta	....

Yogyakarta, 21/02/2005

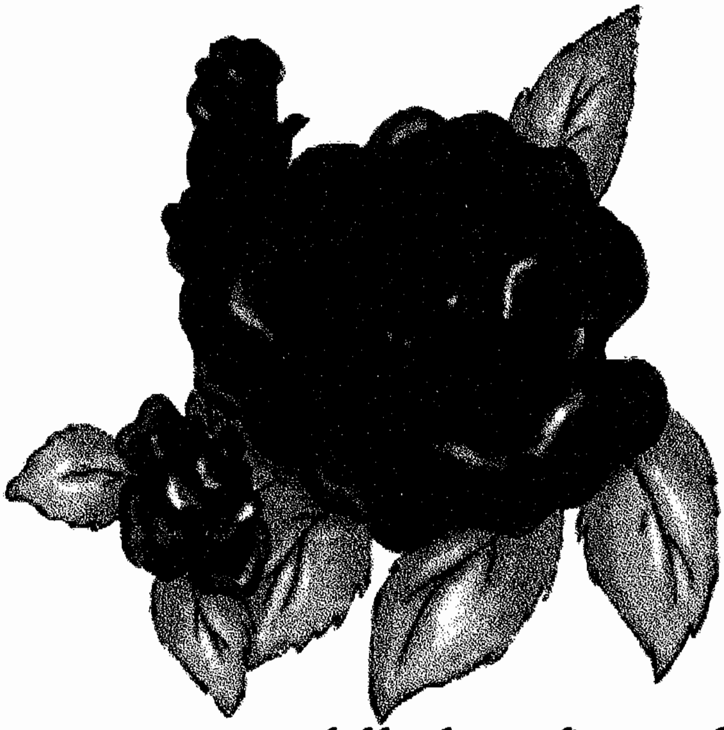
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sanata Dharma
Dekan FMIPA

Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc.

PERSEMBAHAN

Hanya dia yang mempunyai keberanian yang sesungguhnya, yang mampu menanggung beban dari pengalaman yang seburuk-buruknya yang bisa dialami manusia dengan sikap bijaksana. (William Shakespeare)

Cinta bukanlah cinta, bila engkau tidak memberikannya



Kupersembahkan karya tulis yang sederhana ini untuk orang tuaku, saudara-saudaraku, kekasihku serta teman-teman seperjuanganku

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tugas akhir yang saya buat ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, Februari 2005

Paulina Kristin Apriyani

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan YME karena atas rahmat dan karunia-Nya penulisan Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik.

Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sanata Dharma Yogyakarta. Tugas Akhir ini membahas mengenai fungsi-fungsi orthogonal dalam penyelesaian masalah nilai batas yaitu masalah Sturm-Liouville. Penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Tuhan Yesus Kristus yang selalu menyertai hidupku dan menjadi pedoman hidupku,
2. Bapak Y.G. Hartono, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Tugas Akhir yang telah membimbingku,
3. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Sanata Dharma Yogyakarta,
4. Bapak dan Ibu Marsudi selaku orangtua yang telah membimbing dan membesarkanku dengan penuh perhatian dan kasih sayang,
5. Adik-adikku Gitta dan Ian yang telah menjadi motivasi hidupku,
6. Mbah, Pakde dan Bude Widodo sekeluarga yang telah memberiku tempat berteduh,
7. Mbak Heti, Mas Koko, Mas Hudi dan sepupu-sepupu yang lainnya yang telah mendukungku,

8. Teman-teman seperjuangan Ayu, Tatik, Bunga, Meggi, Wiwid, Pras, Heru, Wanto, Feri, Lia, Vincent, Pri, Lisa, Mira, Nisa, Tanti, Dwi, Paula, Sinta, Wahyu, Willy, Tildi, mas Adi, mas Mul, teman-teman angkatan 2000, angkatan 1998, angkatan 1999, dan angkatan 2001, terima kasih atas bantuan dan kerjasamanya selama kuliah,
9. Agustinus Adi Nugroho yang telah mendukung setiap langkahku, dan memberikan cinta kasihnya untukku,
10. Bapak dan Ibu Herman yang mendukungku dan membantuku dengan kasih sayang,
11. Bu Warni dan Pak Tukijo serta semua pihak yang telah membantuku dalam menyusun karya tulis ini.

Penulis juga menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik dari semua pihak.

Akhirnya penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi seluruh pembaca.

Yogyakarta, Februari 2005

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang berada pada selang $a \leq x \leq b$ disebut ortogonal jika fungsi-fungsi tersebut bernilai nyata , sedemikian hingga integral hasil kalinya $f(x)\,.\,g(x)$ pada selang tersebut bernilai nol, dengan kata lain

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0\,.$$

Masalah Strum-Liouville berbentuk:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[Q(x) + \lambda R(x)\right]y = 0$$

pada selang $a \leq x \leq b$ tertentu yang memenuhi syarat :

1. $k_1 y(a) + k_2 y`(a) = 0$
2. $l_1 y(b) + l_2 y`(b) = 0$

dengan k_1, k_2, l_1, l_2 adalah konstanta, λ adalah parameter, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ adalah fungsi yang bernilai real dan kontinu, $P(x) > 0$, $R(x) > 0$ dan $P(x)$ bisa didifferensialkan. Masalah Sturm-Liouville ini dalam penyelesaiannya menghasilkan fungsi-fungsi orthogonal.

Dibahas mengenai penerapan masalah Sturm-Liouville dalam masalah vibrasi seutas dawai dan pada masalah konduksi panas.

ABSTRACT

Two functions $f(x)$ and $g(x)$ on the interval $a \le x \le b$ are called orthogonal if that functions are real, so that integral of the product $f(x)\ .\ g(x)$ on that interval is zero, in other words

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Sturm-Liouville problems has a form of

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [Q(x) + \lambda R(x)]y = 0$$

on the interval $a \le x \le b$, with supplementary conditions

1. $k_1 y(a) + k_2 y`(a) = 0$
2. $l_1 y(b) + l_2 y`(b) = 0$

where k_1, k_2, l_1, l_2 are constants, λ is parameter, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ are real functions and continous, $P(x) > 0$, $R(x) > 0$, and $P(x)$ to be continuously differentiable. Solutions of Sturm-Liouville problem is orthogonal functions.

We discuss the application of Sturm-Liouville problem in vibrations of a bar, and in heat conduction.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Di bidang matematika rekayasa, banyak dijumpai masalah yang membutuhkan fungsi-fungsi orthogonal sebagai solusinya. Sebagai ilustrasi sederhana adalah masalah vibrasi dawai elastis yang memiliki kondisi atau syarat yang mengacu pada titik-titik ujung. Masalah tersebut dikenal sebagai masalah nilai batas atau masalah Sturm-Liouville yang solusinya berupa fungsi-fungsi orthogonal.

Masalah Sturm-Liouville berbentuk :

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[Q(x)+\lambda R(x)\right]y=0$$

pada interval $a \leq x \leq b$ tertentu yang memenuhi kondisi :

$$\begin{aligned} k_1 y(a)+k_2 y'(a)&=0 \\ l_1 y(b)+l_2 y'(b)&=0 \end{aligned}$$

dengan k_1, k_2, l_1, dan l_2 adalah konstanta yang diketahui, λ adalah parameter, $P(x)$, $Q(x)$, dan $R(x)$ adalah fungsi yang diketahui dan diasumsikan fungsi-fungsi tersebut bisa didefferensialkan.

Yang dimaksud dengan masalah nilai batas atau masalah Sturm-Liouville adalah masalah persamaan differensial yang memuat syarat batas yang menyusun persamaan differensial tersebut. Dalam menyelesaikan masalah nilai batas atau masalah Sturm-Liouville untuk persamaan differensial homogen ordo kedua yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu, dibutuhkan solusi yang membentuk fungsi-fungsi orthogonal.

Dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang berada pada interval $a \leq x \leq b$ disebut orthogonal jika fungsi-fungsi tersebut bernilai nyata, sedemikian hingga integral hasil kalinya $f(x) \cdot g(x)$ pada interval tersebut bernilai nol, dengan kata lain :

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

Sekumpulan fungsi bernilai real $f_1(x), f_2(x), \ldots$ dikatakan himpunan fungsi-fungsi orthogonal pada interval $a \leq x \leq b$ jika fungsi-fungsi tersebut terdefinisikan pada interval tersebut dan jika semua integral $\langle f_i, f_j \rangle = \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx$ ada dan bernilai nol untuk semua pasangan fungsi yang berbeda di dalam himpunan itu.

Dalam menyelesaikan masalah Sturm-Liouville, harus ditentukan nilai eigen. Yang dimaksud nilai eigen adalah suatu bilangan λ yang menyebabkan masalah Sturm-Liouville memiliki penyelesaian nontrivial $y \neq 0$. Solusi dari y ini dinamakan fungsi eigen. Fungsi eigen ini dapat membentuk sebuah himpunan orthogonal pada kondisi tertentu.

B. Rumusan Masalah

Pokok-pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah :

1. Apa yang dimaksud dengan fungsi-fungsi orthogonal dan himpunan orthogonal?
2. Apa yang dimaksud dengan Masalah Sturm-Liouville?
3. Bagaimana mencari penyelesaian dari masalah Sturm-Liouville yang membentuk himpunan orthogonal?

C. Pembatasan Masalah

Batasan masalah dalam tulisan ini adalah bagaimana mencari penyelesaian masalah Sturm-Liouville yang membutuhkan fungsi-fungsi orthogonal.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan ini adalah untuk memberikan penyelesaian masalah nilai batas atau masalah Sturm-Liouville yang merupakan persamaan differensial ordo kedua.

E. Tujuan Penulisan

Tujuan yang dicapai dalam penulisan ini adalah memahami fungsi-fungsi orthogonal dan mengaplikasikannya dalam masalah Sturm-Liouville.

F. Metode Penulisan

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan membaca buku-buku yang berkaitan dengan fungsi-fungsi orthogonal yang berguna dalam menyelesaikan masalah Sturm-Liouville.

G. Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

B. Rumusan Masalah

C. Pembatasan Masalah

BAB II

RUANG VEKTOR UMUM

Definisi 2.1

Misalkan V adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar dengan elemen suatu lapangan $\boldsymbol{F}$ (*field*) dan operasi jumlah diantara elemen himpunan V. Untuk setiap dua elemen $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di V dan skalar s, jumlah $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dan perkalian skalar s$\boldsymbol{u}$ didefinisikan dan terletak di V juga. Terhadap kedua operasi ini, V disebut ruang vektor jika dipenuhi sifat:

Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ dan $\mathrm{r}, \mathrm{s} \in \boldsymbol{F}$

(a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(b) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

(c) ada elemen $\boldsymbol{0}$ di V sehingga $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$

(d) ada elemen $-\boldsymbol{u} \in V$ sehingga $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$

(e) $\mathrm{r}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathrm{r}\boldsymbol{u} + \mathrm{r}\boldsymbol{v}$

(f) $(\mathrm{r} + \mathrm{s})\boldsymbol{u} = \mathrm{r}\boldsymbol{u} + \mathrm{s}\boldsymbol{u}$

(g) $\mathrm{r}(\mathrm{s}\boldsymbol{u}) = (\mathrm{rs})\boldsymbol{u}$

(h) $1(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$

Apabila skalar-skalarnya diambil dari himpunan bilangan real, maka V disebut ruang vektor real. Sedangkan apabila skalar-skalarnya diambil dari himpunan bilangan kompleks, maka V disebut ruang vektor kompleks. Selanjutnya, elemen-elemen dari V disebut vektor.

Contoh 2.1

Misalkan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor-vektor di $\mathbf{R}^n$, didefinisikan operasi penjumlahan dari vektor-vektor tersebut :

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

dan perkalian dari vektor $\boldsymbol{u}$ dengan skalar $s \in \mathbf{R}$:

$$s\boldsymbol{u} = (su_1, su_2, \ldots, su_n)$$

Terhadap operasi ini dapat dibuktikan bahwa $\mathbf{R}^n$ merupakan ruang vektor.

Bukti :

(a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$

$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n)$ (Sifat komutatif di $\mathbf{R}^n$)

$= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(b) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n))$

$= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \ldots, (u_n + v_n) + w_n)$

$= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

(c) $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (0, 0, \ldots, 0)$

$= (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0)$

$= (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= \boldsymbol{u}$

(d) $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

$= (u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2), \ldots, u_n + (-u_n))$

$= (0, 0, \ldots, 0)$

(e) $r(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = r(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$

$= (r(u_1 + v_1), r(u_2 + v_2), \ldots, r(u_n + v_n))$

$= (r\,u_1 + r\,v_1, r\,u_2 + r\,v_2, \ldots, r\,u_n + r\,v_n)$

$= (r\,u_1, r\,u_2, \ldots, r\,u_n) + (r\,v_1, r\,v_2, \ldots, r\,v_n)$

$= r\,(u_1, u_2, \ldots, u_n) + r\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$= r\,\boldsymbol{u} + r\,\boldsymbol{v}$

(f) $(r + s)\,\boldsymbol{u} = (r + s)\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= ((r + s)\,u_1, (r + s)u_2, \ldots, (r + s)\,u_n)$

$= (ru_1 + su_1, ru_2 + su_2, \ldots, ru_n + su_n)$

$= (ru_1, ru_2, \ldots, ru_n) + (su_1, su_2, \ldots, su_n)$

$= r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{u}$

(g) $r\,(s\,\boldsymbol{u}) = r\,(su_1, su_2, \ldots, su_n)$

$= (rsu_1, rsu_2, \ldots, rsu_n)$

$= rs\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= (rs)\,\boldsymbol{u}$

(h) $1\,(\boldsymbol{u}) = 1\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= (1u_1, 1u_2, \ldots, 1u_n)$

$= (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= \boldsymbol{u}$

Jadi, $\mathbf{R}^n$ merupakan ruang vektor. □

Contoh 2.2

Misalkan V menyatakan himpunan semua fungsi bernilai real yang kontinu. Penjumlahan dari dua fungsi pada V didefinisikan oleh:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

untuk semua $x \in \mathbf{R}$ dan perkalian fungsi dengan α suatu bilangan real didefinisikan sebagai :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Terhadap operasi ini dapat dibuktikan bahwa V merupakan ruang vektor.

Bukti :

(a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= g(x) + f(x)$

$= (g+f)(x)$

(b) $(f+(g+h))(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$

$= (f(x) + g(x)) + h(x)$

$= ((f+g)+h)(x)$

(c) $(f+0)(x) = f(x) + 0(x)$

$= f(x) + 0$

$= f(x)$

(d) $(f+(-f))(x) = f(x) + (-f(x))$

$= f(x) - f(x)$

$= 0$

(e) $(\alpha(f+g))(x) = \alpha\ ((f+g)(x))$

$= \alpha(f(x) + g(x))$

$= \alpha f(x) + \alpha g(x)$

(f) $((\alpha + \beta) f)(x) \quad = (\alpha + \beta) f(x)$

$= \alpha f(x) + \beta f(x)$

(g) $(\alpha (\beta f))(x) = \alpha ((\beta f)(x))$

$= \alpha (\beta f(x))$

$= (\alpha \beta) f(x)$

(h) $(1 f)(x) \quad = 1 f(x)$

$= f(x)$

Jadi, V merupakan ruang vektor. □

Teorema 2.1

Misalkan **V** adalah suatu ruang vektor, $\boldsymbol{u}$ suatu vektor pada **V**, dan k sebuah skalar, maka:

a) $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

c) $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$

Bukti :

a) $0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u} = (0 + 0)\,\boldsymbol{u}$ (Sifat f)

$= 0\boldsymbol{u}$ (Sifat bilangan 0)

Menurut sifat (d) maka terhadap vektor $0\boldsymbol{u}$ di dalam V ada lawan vektor, yakni $-0\boldsymbol{u}$ di V. Dengan menambahkan $-0\boldsymbol{u}$ ini pada kedua ruas tersebut, akan menghasilkan:

$[0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u}] + (-0\boldsymbol{u}) = 0\boldsymbol{u} + (-0\boldsymbol{u})$

$0\boldsymbol{u} + [\, 0\boldsymbol{u} + (-0\boldsymbol{u})\,] = 0\boldsymbol{u} + (-0\boldsymbol{u})$ (Sifat b)

$0\boldsymbol{u} + \mathbf{0} \quad = \mathbf{0}$ (Sifat d)

$0\boldsymbol{u} \quad = \mathbf{0}$ (Sifat c)

b) $k\mathbf{0} + k\mathbf{0} \quad = k\,(\,\mathbf{0} + \mathbf{0}\,)$ (Sifat c)

$= k\mathbf{0}$

Menurut sifat (d) maka terdapat vektor $-k\mathbf{0}$. Dengan menambahkan $-k\mathbf{0}$ ini pada kedua ruas tersebut akan menghasilkan:

$[k\mathbf{0} + k\mathbf{0}] + (-k\mathbf{0}) = k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0})$

$k\mathbf{0} + [k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0})] = k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0})$ (Sifat b)

$k\mathbf{0} + \mathbf{0} \quad = \mathbf{0}$ (Sifat d)

$k\mathbf{0} \quad = \mathbf{0}$ (Sifat c)

c) Untuk membuktikan bahwa $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, maka harus diperlihatkan bahwa $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, yaitu :

$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \quad = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}$ (Sifat h)

$= (1+(-1))\mathbf{u}$ (Sifat f)

$= 0\mathbf{u}$ (Sifat bilangan)

$= \mathbf{0}$ (Bagian a))

■

2.1 Ruang Bagian

Definisi 2.2

Misalkan W himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor V. Himpunan W disebut **ruang bagian** dari V jika W terhadap operasi yang sama dengan yang didefinisikan di V membentuk ruang vektor.

Teorema 2.2 Syarat untuk ruang bagian

Himpunan bagian tak kosong W merupakan ruang bagian dari ruang vektor V jika dan hanya jika :

(i) $\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$

(ii) $\forall\ \boldsymbol{u} \in W$, $\forall s \in \boldsymbol{F}$, $s\boldsymbol{u} \in W$

Bukti:

$(\rightarrow)$

Karena W merupakan ruang bagian dari ruang vektor V, maka menurut *Definisi 2.2*, W juga tertutup terhadap operasi jumlah dan perkalian skalar.

$(\leftarrow)$

Akan dibuktikan bahwa W adalah ruang vektor.

Sifat-sifat yang terdapat dalam *Definisi 2.1* yaitu sifat (a), (b), (e), (f), (g), (h) secara otomatis diwarisi oleh elemen-elemen dalam W karena W adalah himpunan bagian dari V.

Akan dibuktikan sifat (c) :

Ambil skalar s = 0, maka menurut syarat (ii) $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \in W$ sehingga $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$. Maka sifat (c) dipenuhi.

Akan dibuktikan sifat (d):

Ambil skalar s = - 1 , maka menurut syarat (ii) $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \in W$ sehingga $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = 0$. Maka sifat (d) dipenuhi.

Jadi, W merupakan ruang vektor. ■

Contoh 2.3

(i) $C[a,b]$ adalah himpunan semua fungsi bernilai real yang kontinu pada interval $[a,b]$.

Berdasarkan *Contoh 2.2,* maka $C[a,b]$ merupakan himpunan bagian dari ruang fungsi V. Ambil sembarang fungsi $f(x)$ dan $g(x) \in C[a,b]$, maka

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu, maka $f(x) + g(x)$ juga kontinu pada interval $[a,b]$. Jadi, $f(x) + g(x) \in C[a,b]$.

Ambil sembarang fungsi $f(x) \in C[a,b]$, dan α suatu bilangan real, maka :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Jadi, $\alpha f(x) \in C[a,b]$.

Dengan demikian, dapat disimpulkan himpunan bagian $C[a,b]$ memenuhi syarat ruang bagian dari ruang vektor V. Jadi, $C[a,b]$ adalah ruang bagian dari ruang vektor V.

(ii) $P_n = \{ a_0+a_1x+a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, 2, \ldots \}$ adalah himpunan semua suku banyak (polinomial) berderajat lebih kecil atau sama dengan n.

Ambil sembarang polinom-polinom P dan Q dalam P_n maka :

$$P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

dan

$$Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

Penjumlahan dua polinom tersebut adalah :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

Karena $(a_i + b_i) \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, maka $P(x) + Q(x) \in P_n$.

Ambil sembarang polinomial P dan suatu bilangan real α, maka :

$(\alpha P)(x) = \alpha P(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \ldots + (\alpha a_n)x^n$.

Karena $(\alpha a_i) \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, maka $\alpha P(x) \in P_n$.

Jadi P_n adalah ruang bagian dari ruang vektor V. □

2.2 Kombinasi Linear dan Bebas Linear

Definisi 2.3

Vektor $\boldsymbol{a}$ disebut **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ jika ada skalar $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sehingga :

$$\boldsymbol{a} = s_1\boldsymbol{u_1} + s_2\boldsymbol{u_2} + \ldots + s_n\boldsymbol{u_n}$$

Teorema 2.3

Misalkan $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ merupakan vektor-vektor di ruang vektor V, maka himpunan W yang terdiri dari semua kombinasi linear dari vektor-vektor $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ merupakan ruang bagian dari V.

Bukti:

Akan diperlihatkan bahwa W tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Misalkan $\boldsymbol{a_1}$ dan $\boldsymbol{a_2}$ terletak pada W. Ini berarti ada skalar $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dan $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sehingga

$$\boldsymbol{a_1} = r_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + r_n\boldsymbol{u_n} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{a_2} = s_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + s_n\boldsymbol{u_n}$$

maka

(i) $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} = (r_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + r_n\boldsymbol{u_n}) + (s_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + s_n\boldsymbol{u_n})$

$= (r_1\boldsymbol{u_1} + s_1\boldsymbol{u_1}) + \ldots + (r_n\boldsymbol{u_n} + s_n\boldsymbol{u_n})$

$= (r_1 + s_1)\,\boldsymbol{u_1} + \ldots + (r_n + s_n)\,\boldsymbol{u_n}$

(ii) $t\,\boldsymbol{a_1}$ $= t(r_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + r_n\boldsymbol{u_n})$

$= (tr_1)\,\boldsymbol{u_1} + \ldots + (tr_n)\,\boldsymbol{u_n}$

Ini berarti bahwa vektor $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$ dan t $\boldsymbol{a_1}$ terletak pada *W*, karena merupakan kombinasi linear dari vektor $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ atau *W* merupakan ruang bagian.

■

Definisi 2.4 (Himpunan Perentang)

Jika $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor *V* dan jika setiap vektor pada *V* dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ maka dikatakan bahwa vektor-vektor ini merentang *V*.

Definisi 2.5 (Kumpulan vektor bebas linear)

Himpunan vektor $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ di ruang vektor *V* disebut **bebas linear** jika persamaan

$$s_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + s_n\boldsymbol{u_n} = \mathbf{0}$$

hanya dipenuhi oleh $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = \mathbf{0}$.

Kebalikan dari sifat bebas linear ini adalah bergantung linear. Jadi, $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ merupakan himpunan vektor yang bergantung linear, jika ada skalar $s_1, s_2, \ldots, s_n$ yang tidak semuanya 0, sehingga :

$$s_1\boldsymbol{u_1} + \ldots + s_n\boldsymbol{u_n} = \mathbf{0}.$$

Contoh 2.4

Misalkan V adalah ruang vektor yang terdiri dari semua fungsi bernilai real yang kontinu pada interval $[a, b]$ atau $V = C[a,b]$.

Fungsi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ di $C[a, b]$ disebut bergantung linier jika ada skalar $s_1,\ldots,s_n$ yang tidak semuanya bernilai nol sehingga berlaku:

$$s_1 f_1(x) + s_2 f_2(x) + \ldots + s_n f_n(x) = 0$$

untuk semua $x \in [a, b]$. □

2.3 Basis untuk Ruang Vektor

Definisi 2.6

Jika V adalah suatu ruang vektor dan $\mathbf{S} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V, maka **S** disebut basis untuk V jika:

a) **S** bebas linear

b) **S** merentang V

Contoh 2.5

Tunjukkan bahwa $S = \{ 1, x, x^2, \ldots, x^n \}$ merupakan basis untuk ruang vektor $P_n = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n \}$.

Bukti :

a) Akan ditunjukkan bahwa S bebas linier.

Anggap bahwa kombinasi linier dari vektor-vektor S adalah vektor nol, yaitu

$$c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x^n = \mathbf{0}, \qquad \text{untuk semua } x.$$

Harus diperlihatkan bahwa $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. Diketahui bahwa polinom tak nol berderajat n mempunyai paling banyak n akar yang berbeda. Karena kombinasi linier tersebut memenuhi untuk semua x, maka setiap nilai x adalah sebuah akar. Berarti $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. Jadi, S bebas linier.

b) Akan ditunjukkan S merentang P_n.

Misalkan polinom **p** berada pada P_n. Setiap polinom **p** dapat ditulis sebagai :

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linier dari $S = \{ 1, x, x^2, \ldots, x^n \}$.

Jadi, S merentang P_n.

Berdasarkan a) dan b), maka S merupakan basis untuk ruang vektor P_n.

□

2.4 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.7 (Hasil kali dalam pada ruang vektor Real)

Hasil kali dalam pada ruang vektor real V adalah fungsi yang mengasosiasikan setiap pasangan vektor **a** dan **b** di V dengan bilangan real $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, sedemikian hingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor **a, b** dan **c** $\in V$, dan untuk semua skalar $\alpha \in \mathbf{R}$:

1. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ bila hanya bila $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, *(Positifitas)*
2. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$, *(Simetri)*
3. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$, *(Additivitas)*
4. $\langle \alpha\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. *(Homogenitas)*

Selanjutnya, suatu ruang vektor real yang dilengkapi dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan **ruang hasil kali dalam real**.

Contoh 2.6

Misalkan $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ adalah vektor-vektor di $\mathbf{R}^n$. untuk setiap pasangan vektor di $\mathbf{R}^n$ didefinisikan suatu fungsi:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

Buktikan bahwa $\mathbf{R}^n$ terhadap fungsi yang didefinisikan tersebut merupakan ruang hasil kali dalam real.

Bukti:

1. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$ dan $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle &= a_1a_1 + a_2a_2 + \ldots + a_na_n \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

2. $$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\ &= b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n \\ &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \ldots + a_n(b_n + c_n) \\ &= (a_1b_1 + a_1c_1) + (a_2b_2 + a_2c_2) \ldots + (a_nb_n + a_nc_n) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) + (a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n) \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\langle \alpha\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \alpha\, a_1b_1 + \alpha\, a_2b_2 + \ldots + \alpha\, a_nb_n \\ &= \alpha\,(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\end{aligned}$$

$= \alpha \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

Jadi, $\mathbf{R}^n$ merupakan ruang hasil kali dalam. □

Secara khusus, hasil kali dalam yang didefinisikan pada *Contoh 2.4.2* disebut **hasil kali dalam Euclides.**

Contoh 2.7

Diketahui vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dalam $V = \mathbf{R}^2$, untuk setiap pasangan vektor **u**, **v** di V, didefinisikan fungsi:

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2\, u_1 v_1 + 3\, u_2 v_2$

Apakah pasangan vektor **u** dan **v** memenuhi syarat-syarat ruang hasil kali dalam.

Penyelesaian :

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \quad = 2u_1^2 + 3u_2^2 \geq 0$

   dan satu-satunya jawaban yang menyebabkan hasil penjumlahannya 0 adalah $u_1 = u_2 = 0$. Jadi, (1) dipenuhi.

2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad = 2\, u_1 v_1 + 3\, u_2 v_2$

   $= 2\, v_1 u_1 + 3\, v_2 u_2$

   $= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

3. jika $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, maka :

   $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \quad = 2\, u_1(v_1 + w_1) + 3\, u_2(v_2 + w_2)$

   $= 2\, u_1v_1 + 2\, u_1w_1 + 3\, u_2v_2 + 3\, u_2w_2$

   $= (2\, u_1v_1 + 3\, u_2v_2) + (2\, u_1w_1 + 3\, u_2w_2)$

   $= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

4. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad = 2\, c\, u_1 v_1 + 3\, c\, u_2 v_2$

$= c\ (2\ u_1v_1 + 3\ u_2v_2)$

$= c\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ □

Contoh 2.8

Di dalam ruang vektor $C[a,b]$, untuk setiap pasangan vector $f(x)$ dan $g(x)$ didefinisikan fungsi:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

dimana a dan b adalah sebarang bilangan real.

Apakah pasangan fungsi **f** dan **g** memenuhi syarat-syarat ruang hasil kali dalam?

Bukti:

1. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \int_a^b f^2(x)dx$

   Karena $f^2(x) \geq 0$ dan merupakan fungsi yang kontinu, maka $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$.

   Sehingga $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \geq 0$, $\forall f \in C[a,b]$. Dan $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ jika dan hanya jika $f(x)=0$ untuk semua $x \in [a,b]$. Jadi, $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \int_a^b f^2(x)dx = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$.

2. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

   $= \int_a^b g(x)f(x)dx$

$$= \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$$

3. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} + \mathbf{h} \rangle = \int_a^b f(x)(g(x) + h(x))dx$

$$= \int_a^b (f(x)g(x)) + (f(x)h(x))dx$$

$$= \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)h(x)dx$$

$$= \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle$$

4. $\langle \alpha\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b \alpha f(x)g(x)dx$

$$= \alpha \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$= \alpha \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \qquad \square$$

Contoh 2.9

Di dalam ruang vektor $C[a,b]$, untuk setiap pasangan vektor dapat didefinisikan fungsi:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\, dx$$

dimana a dan b adalah sebarang bilangan real, dan $\omega(x)$ adalah suatu fungsi yang kontinu positif.

Apakah pasangan fungsi **f** dan **g** memenuhi syarat-syarat ruang hasil kali dalam.

Bukti:

1. $\langle \mathbf{f},\mathbf{f} \rangle = \int_a^b f^2(x)\omega(x)\, dx$

Karena $f^2(x) \geq 0$, $f(x)$ merupakan fungsi yang kontinu dan $\omega(x)$ adalah fungsi yang kontinu positif, maka $\int_a^b f^2(x)\omega(x)\, dx \geq 0$. Sehingga $\langle \mathbf{f},\mathbf{f} \rangle \geq 0$, $\forall f \in C[a,b]$. Dan $\int_a^b f^2(x)\omega(x)dx = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$ untuk semua $x \in [a,b]$. Jadi, $\langle \mathbf{f},\mathbf{f} \rangle = \int_a^b f^2(x)\omega(x)dx = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$.

2. $$\begin{aligned} \langle \mathbf{f},\mathbf{g} \rangle &= \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx \\ &= \int_a^b g(x)f(x)\omega(x)dx \\ &= \langle \mathbf{g},\mathbf{f} \rangle \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \langle \mathbf{f},\mathbf{g}+\mathbf{h} \rangle &= \int_a^b f(x)(g(x)+h(x))\omega(x)dx \\ &= \int_a^b (f(x)g(x)) + (f(x)h(x))\omega(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx + \int_a^b f(x)h(x)\omega(x)dx \\ &= \langle \mathbf{f},\mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f},\mathbf{h} \rangle \end{aligned}$$

4. $$\langle \alpha\mathbf{f},\mathbf{g} \rangle = \int_a^b \alpha\, f(x)g(x)\omega(x)\, dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,dx$$

$$= \alpha \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \qquad \square$$

Teorema 2.4

Jika V adalah ruang hasil kali dalam real, maka untuk setiap vektor **u, v, w** $\in V$ dan scalar α berlaku:

1. $\langle 0, \mathbf{u} \rangle = 0$
2. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

Bukti:

1. $\langle 0, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, 0 \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 2*)

   $= \langle \mathbf{u}, 0+0 \rangle$ (*Sifat Bilangan Nol*)

   $= \langle \mathbf{u}, 0 \rangle + \langle \mathbf{u}, 0 \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 3*)

   $\langle 0, \mathbf{u} \rangle - \langle 0, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, 0 \rangle + \langle \mathbf{u}, 0 \rangle - \langle 0, \mathbf{u} \rangle$

   $0 = \langle 0, \mathbf{u} \rangle + \langle 0, \mathbf{u} \rangle - \langle 0, \mathbf{u} \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 2*)

   $0 = \langle 0, \mathbf{u} \rangle$

2. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 2*)

   $= \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 3*)

   $= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 2*)

3. $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle = \langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 2*)

   $= \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 4*)

$= \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (*definisi 2.4.1 sifat 2*)

■

2.5 Norm dan Ortogonalitas dalam Ruang Hasil Kali dalam

Definisi 2.8

Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam dan vektor **u** di V, maka **norm** (atau panjang) vektor **u** dinyatakan oleh $\|\mathbf{u}\|$ dan didefinisikan dengan:

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$$

Definisi 2.9

Dalam ruang hasil kali dalam V, dua vektor **u** dan **v** dinamakan *orthogonal* jika

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 .$$

Dua vektor **u** dan **v** yang orthogonal dinotasikan dengan $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Berdasarkan *Contoh 2.8* dan *Contoh 2.9*, di dalam ruang $C[a,b]$, dapat didefinisikan hasil kali dalam :

1. $$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

   maka

   (i) **f** dan **g** dikatakan orthogonal jika:

   $$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

   dimana a dan b adalah sebarang bilangan real.

   (ii) ***Norm*** fungsi $f(x)$ adalah akar kuadrat $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$, yaitu :

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

2. $$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

dengan $\omega(x)$ adalah fungsi kontinu positif pada $[a,b]$. Fungsi $\omega(x)$disebut *fungsi pembobot.*

(i) **f** dan **g** dikatakan orthogonal relatif terhadap fungsi pembobot jika:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,dx = 0$$

(ii) ***Norm*** fungsi $g(x)$ adalah:

$$\|\mathbf{g}\| = \sqrt{\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle} = \sqrt{\int_a^b \omega(x)g^2(x)dx}$$

Contoh 2.10

Untuk ruang $C\,[-\pi, \pi\,]$ dengan menggunakan sebuah fungsi pembobot $\omega(x) = 1/\pi$, maka hasil kali dalamnya adalah:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

dan misalkan $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, maka:

$$\langle \cos x, \sin x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx = 0$$

$$\|\cos x\|^2 = \langle \cos x, \cos x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos x dx = 1$$

$$\|\sin x\|^2 = \langle \sin x, \sin x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin x dx = 1$$

Jadi, cos x dan sin x adalah fungsi-fungsi yang orthogonal relatif terhadap fungsi pembobot $\frac{1}{\pi}$, dengan norm sama dengan 1. □

Contoh 2.11

Misalkan $P_2 = \{\, a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R} \,\}$ mempunyai hasil kali dalam:

$$\langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

dan misalkan : $\mathbf{p} = x$, $\mathbf{q} = x^2$, maka

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p},\mathbf{p}\rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} xxdx\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|\mathbf{q}\| = \langle \mathbf{q},\mathbf{q}\rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2x^2dx\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^4dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle = \int_{-1}^{1} xx^2dx = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

Karena $\langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle = 0$, maka fungsi $\mathbf{p} = x$, $\mathbf{q} = x^2$ adalah orthogonal terhadap hasil kali dalam yang diberikan. □

Selanjutnya, jika $\mathbf{u}$ orthogonal terhadap setiap vektor pada himpunan W, maka dikatakan bahwa $\mathbf{u}$ ***orthogonal terhadap W.***

Definisi 2.10

Misalkan V adalah ruang vektor dan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah himpunan vektor di V, maka $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dikatakan himpunan orthogonal jika $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \forall\, i \neq j$.

Pada kasus khusus yaitu jika V adalah ruang fungsi yang bernilai real dan kontinu pada interval $a \leq x \leq b$, himpunan fungsi bernilai real $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x), \ldots$ yang terdefinisi dan kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dikatakan ***himpunan orthogonal*** jika semua $\langle g_i, g_j \rangle$ ada dan bernilai nol untuk semua pasangan fungsi yang berbeda di dalam himpunan itu.

Definisi 2.11

Himpunan orthogonal g_1, g_2, ... pada suatu interval $a \leq x \leq b$, dikatakan himpunan ortonormal jika setiap fungsi mempunyai norm 1, dengan kata lain :

$$\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{, dengan } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & jika \quad i \neq j \\ 1 & jika \quad i = j \end{cases}$$

dengan $i = 1, 2, \ldots$ dan $j = 1, 2, \ldots$.

Jika diberikan himpunan orthogonal dari vektor-vektor tak nol $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, maka untuk membentuk himpunan ortonormal :

$$\mathbf{u}_i = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|} \right) \mathbf{v}_i \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, n$$

Contoh 2.12

Fungsi-fungsi

$$\{1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \ldots\}$$

membentuk sebuah himpunan orthogonal pada interval $-\pi \leq x \leq \pi$, karena :

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} 1.\cos nx dx = 0$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} 1.\sin nx dx = 0$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x\, dx = 0$

(iv) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx = 0$

(v) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx = 0$

untuk setiap $m, n = 1, 2, \ldots$ dan himpunan ortonormalnya adalah

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \qquad \square$$

Teorema 2.5 (Hubungan antara vektor orthogonal dan bebas linier)

Jika $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ vector-vektor tak nol yang saling orthogonal (yaitu setiap dua dari vektor-vektor tersebut saling orthogonal), maka vektor-vektor tersebut bebas linier.

Bukti :

Diketahui himpunan vektor $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ adalah saling orthogonal, maka :

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \ , \forall i \neq j, \ i=1, 2, \ldots, n \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Akan dibuktikan bahwa jika $k_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{u}_n = 0$ maka $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Berdasarkan *Teorema 2.4*, berlaku $\langle 0, \mathbf{u}_j \rangle = 0$.

Misalkan $u_j = u_1$, maka berlaku:

$\langle 0, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$

$\langle k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \ldots + k_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$

$k_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \ldots + k_n\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$

$k_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \rightarrow k_1 = 0$ (karena $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$)

Demikian juga jika u_j diganti dengan $u_2, \ldots, u_n$ akan mengakibatkan

$$k_2 = \ldots = k_n = 0$$

Jadi, vektor-vektor $u_1, \ldots, u_n$ bebas linier. ■

BAB III

MASALAH STURM-LIOUVILLE

A. Pendahuluan

Masalah Sturm-Liouville merupakan masalah nilai batas yang disusun oleh persamaan differensial ordo kedua linear dan memiliki solusi berupa himpunan fungsi-fungsi orthogonal.

Definisi 3.1

Persamaan differensial ordo kedua linear yang berbentuk :

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[Q(x)+\lambda R(x)\right]y=0 \tag{3.1}$$

dengan P, Q, dan R adalah fungsi bernilai real yang kontinu, P mempunyai turunan, $P(x) > 0$ dan $R(x) > 0$ yang berada pada interval $a \leq x \leq b$ dan λ adalah parameter.

Persamaan tersebut harus memenuhi syarat :

$$\begin{aligned} k_1 y(a) + k_2 y'(a) &= 0 \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan k_1, k_2, l_1, dan l_2 adalah konstanta bilangan real, dan k_1, k_2 yang tidak nol atau keduanya tidak nol, l_1, l_2 juga tidak nol atau keduanya tidak nol.

Masalah nilai batas seperti ini disebut ***Masalah Sturm-Liouville***.

Contoh 3.1

Masalah nilai batas

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+\left[2x^2+\lambda x^3\right]y=0$$

dengan syarat

$$3y(1)+4y'(1)=0$$
$$5y(2)-3y'(2)=0$$

adalah masalah Sturm-Liouville dengan $P(x) = x$, $Q(x) = 2x^2$, dan $R(x) = x^3$, dengan konstanta-konstanta $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $l_1 = 5$, dan $l_2 = -3$ pada interval $1 \le x \le 2$. □

Masalah Sturm-Liouville yang adalah persamaan differensial ordo kedua dengan kondisi tertentu dapat memiliki nilai parameter λ yang menyebabkan masalah ini memiliki penyelesaian trivial $y = 0$. Namun λ dapat juga menyebabkan masalah tersebut mempunyai penyelesaian nontrivial. Penyelesaian nontrivial tersebut dinamakan ***fungsi eigen*** dan λ yang berkaitan dengan fungsi eigen y disebut ***nilai eigen***.

Contoh 3.2

Cari penyelesaian nontrivial, nilai eigen dan fungsi eigen dari masalah Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0$$

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0$$

Penyelesaian:

Masalah di atas adalah masalah Sturm-Liouville dengan $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$, $R(x) = 1$ dan berada pada interval $0 \leq x \leq \pi$.

Dalam mencari penyelesaian nontrivial, terdapat beberapa kasus nilai λ, yaitu $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, dan $\lambda > 0$. Dalam setiap kasus akan didapat penyelesaian umum dari persamaan differensial.

Kasus 1 : $\lambda = 0$

Dalam kasus ini, persamaan differensial menjadi:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

dan penyelesaian umumnya adalah :

$$y = c_1 + c_2 x$$

Penyelesaian umum tersebut harus memenuhi kondisi syarat batas. Dari kondisi yang pertama $y(0) = 0$, maka didapat :

$$0 = c_1 + c_2 \,.\, 0$$

$$c_1 = 0$$

Dari kondisi yang kedua, yaitu $y(\pi) = 0$, dan karena $c_1 = 0$, maka didapat :

$$0 = 0 + c_2 \,.\, \pi$$

$$c_2 = 0$$

Jadi, $c_1 = c_2 = 0$. Substitusikan nilai tersebut ke dalam penyelesaian umum, maka menghasilkan :

$$y = 0 + 0.\,x$$

$$y = 0$$

Karena menghasilkan penyelesaian $y(x) = 0$ untuk setiap nilai x, maka jika parameter $\lambda = 0$ penyelesaiannya akan trivial.

Kasus 2 : $\lambda < 0$

Persamaan bantu dari persamaan differensial adalah :

$$m^2 + \lambda = 0$$

Nilai akarnya adalah $m = \pm\sqrt{-\lambda}$. Karena $\lambda < 0$, maka akarnya bernilai real. Anggap $\sqrt{-\lambda}$ adalah α, maka penyelesaian umumnya adalah :

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

Dari kondisi $y(0) = 0$, didapat :

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

Dan dari kondisi $y(\pi) = 0$, didapat :

$$0 = c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} \qquad \text{(ii)}$$

Nilai $c_1 = c_2 = 0$ dapat merupakan penyelesaian, namun ini akan memberikan penyelesaian trivial. Kedua persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tidak nol jika determinan dari koefisien persamaan (i) dan (ii) bernilai nol. Oleh karena itu, haruslah :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha\pi} & e^{-\alpha\pi} \end{vmatrix} = 0$$

Nilai determinan itu menyebabkan $e^{\alpha\pi} = e^{-\alpha\pi}$ sehingga nilai $\alpha = 0$. Karena $\alpha = \sqrt{-\lambda}$, maka $\lambda = 0$. Namun dalam kasus ini $\lambda < 0$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi, tidak ada penyelesaian nontrivial yang diberikan dalam kasus $\lambda < 0$.

Kasus 3 : $\lambda > 0$

Karena $\lambda > 0$, maka akar-akar $m = \pm\sqrt{-\lambda}$ dalam persamaan bantu adalah bilangan imajinair (kompleks) yaitu $\pm\sqrt{\lambda}i$. Penyelesaian umumnya adalah :

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

Untuk memenuhi kondisi $y(0) = 0$, didapat :

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$$

sehingga $c_2 = 0$. Dari kondisi $y(\pi) = 0$, menghasilkan :

$$c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

Karena $c_2 = 0$, maka didapat :

$$c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

Ada dua kemungkinan penyelesaian dari persamaan tersebut, yaitu $c_1 = 0$ atau $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Jika $c_1 = 0$, dan $c_2 = 0$ maka penyelesaiannya adalah penyelesaian trivial. Untuk mendapatkan penyelesaian nontrivial, maka $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ dan $c_2 = 0$.

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka sin $n\pi$ = 0. Oleh karena itu, untuk memenuhi persamaan $\sin\sqrt{\lambda}x = 0$, maka haruslah $\sqrt{\lambda} = n$, dengan n = 1, 2, 3, ... Dengan demikian, masalah Sturm-Liouville mempunyai penyelesaian nontrivial, dengan nilai eigen :

$$\lambda = n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dengan kata lain, nilai parameter λ ini harus merupakan anggota dari barisan tak hingga :

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$$

Fungsi eigen yang berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = n^2$ adalah :

$$y = c_n \sin nx$$

dengan c_n (n = 1, 2, 3, ...) adalah konstanta yang tidak nol. □

B. Teorema -Teorema Dasar Sturm

Sebelum dibuktikan Teorema Eksistensi dari penyelesaian masalah Sturm-Liouville, terlebih dahulu akan dibahas mengenai Teorema Eksistensi persamaan differensial ordo kedua secara umum.

Teorema 3.1 (**Teorema Eksistensi**)

Suatu persamaan differensial ordo kedua didefinisikan dengan :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0. \qquad y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_0' \qquad (3.3)$$

Hipotesis : Asumsikan bahwa f dan $\partial f / \partial y$ didefinisikan dan kontinu pada :

$$R : |x - x_0| \le s, \qquad |y - y_0| \le t, \quad s, t > 0.$$

Fungsi y dikatakan penyelesaian dari $y' = f(x,y)$, jika memenuhi kondisi $y(x_0) = y_0$ sedemikian hingga

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))du.$$

Terdapat d adalah bilangan positif, sehingga $d \le s$, $d \le t / M$, dan $d \le 1 / K$, dengan $M \le |\, f(x,y) \,|$, dan $K > \left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$. Penyelesaian y_1 adalah fungsi kontinu yang didefinisikan dalam interval I : $|\, x - x_0 \,| \le d$, sedemikian hingga $|\, y_1(x) - y_0 \,| \le t$. Maka barisan $\{ y_n \}$ didefinisikan pada I dengan

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y_n(u))du, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergen secara uniform ke fungsi y, dan

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))du.$$

Bukti :

Akan dimulai dengan memperkirakan $\|y_n + y_{n+1}\|$. Karena

$$y_n(x) - y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} [f(u, y_{n-1}(u) - f(u, y_n(u)]du$$

dan berdasarkan kondisi *Lipschitz* diperoleh :

$$|y_n(x) - y_{n+1}(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} K|y_{n-1}(u) - y_n(u)|du\right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} K \| y_{n-1} - y_n \| du \right|$$

$$\leq Kd \| y_{n-1} - y_n \| ,$$

Dari ini, didapat :

$$\| y_n - y_{n+1} \| \leq Kd \| y_{n-1} - y_n \| .$$

Andaikan $c = Kd$. Karena $d < 1/K$, maka $c < 1$. Jika $n = 1$, maka :

$$\| y_1 - y_2 \| \leq c \| y_0 - y_1 \| .$$

Jika $n = 2$, maka :

$$\| y_2 - y_3 \| \leq c \| y_1 - y_2 \| \leq c^2 \| y_0 - y_1 \| .$$

Jika $n = 3$, maka :

$$\| y_3 - y_4 \| \leq c^3 \| y_0 - y_1 \| ,$$

dan dengan menggunakan induksi diperoleh

$$\| y_n - y_{n+1} \| \leq c^n \| y_0 - y_1 \| .$$

untuk semua x.

$$\| y_n - y_{n+k} \| \leq \| y_n - y_{n+1} \| + \| y_{n+1} - y_{n+2} \| + \ldots + \| y_{n+k-1} - y_{n+k} \|$$

$$\leq c^n \| y_0 - y_1 \| + c^{n+1} \| y_0 - y_1 \| + \ldots + c^{n+k-1} \| y_0 - y_1 \|$$

$$= c^n (1 + c + \ldots + c^{k-1}) \| y_0 - y_1 \|$$

$$\leq \frac{c^n}{1-c} \| y_0 - y_1 \| .$$

Karena $c < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$. Ruas kanan pada persamaan tersebut mendekati nol jika $n \to \infty$. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat m sedemikian hingga $n > m$, maka $\|y_n - y_{n+k}\| < \varepsilon$, untuk setiap k. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\{ y_n \}$ konvergen secara uniform ke suatu fungsi y.

Akan diperlihatkan bahwa untuk setiap x pada I,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(u, y_n(u))du = \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))du .$$

Pada faktanya,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))du - \int_{x_0}^{x} f(u, y_n(u))du \right| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(u, y(u)) - f(u, y_n(u))]du \right| \\
&\le \left| \int_{x_0}^{x} K|y(u) - y_n(u)|du \right| \\
&\le \left| \int_{x_0}^{x} K\|y - y_n\|du \right| \\
&\le Kd\|y - y_n\|
\end{aligned}$$

dan karena $\| y - y_n \| \to 0$, maka

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(u, y_n(u))du = \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))du .$$

Jadi, $\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = y(x)$, sehingga

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y_n(u))du, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergen secara uniform ke fungsi y, dan

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))du. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2 (**Teorema Ketunggalan**)

Suatu persamaan differensial ordo kedua didefinisikan dengan :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0. \qquad y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_0' \qquad (3.3)$$

Misalkan $P(x)$, dan $Q(x)$ adalah fungsi kontinu dalam interval tertutup $[a, b]$. Jika x_0 adalah sembarang titik dalam $[a, b]$ dan jika y_0 dan y_0' adalah suatu bilangan, maka persamaan (3.3) hanya memiliki satu penyelesaian $y(x)$ dalam interval tersebut.

Bukti :

Andaikan terdapat dua buah penyelesaian $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ pada interval $[a, b]$. Selisihnya adalah $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Karena $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ memenuhi kondisi awal yang sama, maka y memenuhi

$$y(x_0) = 0 \qquad \text{dan} \qquad y'(x_0) = 0$$

Ditinjau fungsi :

$$z(x) = y(x)^2 + y'(x)^2 \qquad (3.3a)$$

dan turunannya adalah

$$z'(x) = 2y(x)y'(x) + 2\,y'(x)y''(x). \qquad (3.3b)$$

Berdasarkan persamaan (3.3) didapat :

$$y''(x) = -P(x)y'(x) - Q(x)y(x). \tag{3.3c}$$

Substitusikan persamaan (3.3c) ke dalam (3.3b), maka diperoleh

$$z' = 2yy' - 2\,Py'^{\,2} - 2Qyy' \tag{3.3d}$$

Karena y dan y' adalah fungsi yang bernilai real, maka :

$$(y \pm y')^2 = y^2 \pm 2yy' + y'^2 \geq 0$$

dan didapat dua persamaan :

$$2yy' \leq y^2 + y'^2 = z \tag{3.3e}$$

$$-2yy' \leq y^2 + y'^2 = z \tag{3.3f}$$

Dari (3.3f) didapat $2yy' \geq -z$, maka $|2yy'| \leq z$. Untuk suku terakhir dalam persamaan (3.3d), berlaku:

$$-2Qyy' \leq |-2Qyy'| = |Q||2yy'| \leq |Q|z$$

Berdasarkan hasil tersebut, juga bahwa $-P \leq |P|$ dan dengan mensubstitusikan persamaan (3.3e) dalam persamaan (3.3d) diperoleh

$$z' \leq z + 2|P|y'^2 + |Q|z\,.$$

Karena $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$, didapat

$$z' \leq (1 + 2|P| + |Q|)z$$

dengan menganggap $1 + 2|P| + |Q| = h$, maka

$$z' \leq hz \quad \text{, untuk semua } x \text{ dalam } [a, b] \tag{3.3g}$$

Dari persamaan (3.3d), (3.3e) dan (3.3f) didapat

$$
\begin{aligned}
-z' &= -2yy' + 2Py'^2 + 2Qyy' \\
&\le z + 2|P|z + |Q|z = hz
\end{aligned}
\tag{3.3h}
$$

Pertidaksamaan (3.3g) dan (3.3h) ekuivalen dengan

$$z' - hz \le 0 \qquad \text{dan} \qquad z' + hz \ge 0 \tag{3.3i}$$

Dengan menggunakan faktor pengintegralan didapat:

$$F_1 = e^{-\int h(x)dx} \quad \text{dan} \quad F_2 = e^{\int h(x)dx}$$

dengan $h(x)$ bersifat kontinu. Karena F_1 dan F_2 bernilai positif, maka jika dikalikan dengan persamaan (3.3i) didapat

$$F_1\,(z' - hz) = (F_1 z)' \le 0 \qquad \text{dan} \qquad F_2\,(z' + hz) = (F_2 z)' \ge 0$$

yang berarti $F_1 z$ adalah fungsi yang turun dan $F_2 z$ adalah fungsi yang naik dalam interval $[a, b]$. Fungsi z harus memenuhi kondisi awal, yaitu $z(x_0) = 0$, maka

$$F_1 z \ge F_1 z\big|_{x_0} = 0 \qquad \text{dan} \qquad F_2 z \le F_2 z\big|_{x_0} = 0 \qquad \text{, jika } x \le x_0$$

Kemudian jika $x \ge x_0$,

$$F_1 z \le 0 \qquad \text{dan} \qquad F_2 z \ge 0.$$

Masing-masing dibagi dengan F_1 dan F_2, maka diperoleh

$$z \le 0 \qquad \text{dan} \qquad z \ge 0, \qquad \text{untuk semua } x \text{ pada } [a,b].$$

Ini menyebabkan $z(x) = y(x)^2 + y'(x)^2 = 0$, maka $y = 0$ atau $y_1(x) = y_2(x)$ dalam interval $[a, b]$. Jadi, hanya ada satu penyelesaian dalam persamaan (3.3).

■

Supaya *Teorema 3.1* (Teorema Eksistensi) dan *Teorema 3.2* (Teorema Ketunggalan) berlaku pada teorema-teorema yang akan dibahas pada subbab ini, maka persamaan (3.3) perlu diubah ke dalam bentuk :

$$\frac{d}{dx}\left[P^*(x)\frac{dy}{dx}\right]+Q^*(x)y=0$$

Oleh karena itu kalikan kedua ruas pada persamaan (3.3) dengan $\exp\left[\int P(x)dx\right]$, sehingga diperoleh :

$$\exp\left[\int P(x)dx\right]\frac{d^2y}{dx^2}+\exp\left[\int P(x)dx\right]P(x)\frac{dy}{dx}+\exp\left[\int P(x)dx\right]Q(x)y=0$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\exp\left[\int P(x)dx\right]\frac{dy}{dx}\right\}+Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]y=0$$

Jadi,

$$\frac{d}{dx}\left[P^*(x)\frac{dy}{dx}\right]+Q^*(x)y=0$$

dengan $P^*(x)=\exp\left[\int P(x)dx\right]$ dan $Q^*(x)=Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]$.

Teorema 3.3

Jika y adalah penyelesaian dari persamaan

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+Q(x)y=0 \tag{3.4}$$

yang memiliki turunan pertama y' dalam interval $[a, b]$, dan y mempunyai pembuat nol yang tak hingga banyaknya dalam interval tersebut, maka $y(x) = 0$ untuk semua $a \leq x \leq b$.

Bukti :

Karena y memiliki tak hingga banyaknya pembuat nol pada $[a, b]$, dengan *Teorema Bolzano Weierstrass* tentang himpunan pembuat nol yang memiliki sebuah titik limit x_0, dengan x_0 pada $[a, b]$, maka terdapat suatu barisan pembuat nol $\{x_n\}$ yang konvergen ke x_0 ($x_n \neq x_0$). Karena y kontinu, maka $\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0)$.

Andaikan $[a,b]$ memuat barisan pembuat nol $\{x_n\}$, maka

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = 0 = y(x_0).$$

Karena terdapat $y'(x_0)$, maka

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \tag{3.5}$$

dimana $x \to x_0$ memuat barisan $\{x_n\}$. Untuk titik-titik tersebut

$$\frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ dan mengakibatkan } y'(x_0) = 0.$$

Dengan demikian y adalah penyelesaian persamaan (3.4), sedemikian hingga $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ dan berdasarkan *Teorema 3.1* dan *Teorema 3.2* didapat $y(x) = 0$ untuk setiap x pada $[a, b]$.

■

Jadi, dapat disimpulkan bahwa jika $y(x) \neq 0$, maka y hanya memiliki pembuat nol yang berhingga banyaknya.

Lemma 3.1 (**Abel's Formula**)

Jika f dan g adalah dua penyelesaian dari :

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+Q(x)y=0 \tag{3.6}$$

dalam interval $[a, b]$, maka untuk setiap x dalam $[a, b]$, berlaku :

$$P(x)[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]=k \tag{3.7}$$

dengan k adalah konstanta.

Bukti :

Karena f dan g adalah penyelesaian dari (3.6) dalam interval $[a, b]$, maka diperoleh ;

$$\frac{d}{dx}[P(x)f'(x)]+Q(x)f(x)=0 \tag{3.8}$$

dan

$$\frac{d}{dx}[P(x)g'(x)]+Q(x)g(x)=0 \tag{3.9}$$

untuk semua $x \in [a, b]$. Kalikan persamaan (3.8) dengan $-g(x)$ dan persamaan (3.9) dengan $f(x)$, dan jumlahkan, sehingga diperoleh :

$$f(x)\frac{d}{dx}[P(x)g'(x)]-g(x)\frac{d}{dx}[P(x)f'(x)]=0$$

Integralkan kedua ruas dari a ke x, diperoleh:

$$f(s)P(s)g'(s)\Big|_a^x - \int_a^x P(s)g'(s)f'(s)ds - g(s)P(s)f'(s)\Big|_a^x + \int_a^x P(s)f'(s)g'(s)ds = 0$$

$$[P(x)f(x)g'(x) - P(a)f(a)g'(a)] - [P(x)g(x)f'(x) - P(a)g(a)f'(a)] = 0$$

$$P(x)[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)] = P(a)[f(a)g'(a) - g(a)f'(a)]$$

Ruas kanan adalah konstanta, yaitu $P(a)[f(a)g'(a) - g(a)f'(a)] = k$, sehingga diperoleh Formula Abel. ■

Teorema 3.4

Jika f dan g adalah dua penyelesaian dari

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + Q(x)y = 0 \qquad (3.10)$$

sedemikian hingga f dan g memiliki pembuat nol yang sama pada $[a, b]$, maka f dan g tidak bebas linear dalam $[a, b]$.

Bukti :

Berdasarkan *Lemma 3.1* (Formula Abel), f dan g memenuhi :

$$P(x)[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)] = k \quad , \forall\ x \in [a, b] \qquad (3.11)$$

dengan k suatu konstanta.

Andaikan $x_0 \in [a, b]$ adalah pembuat nol dari f dan g dan dengan mengambil $x = x_0$ pada (3.10), diperoleh $k = 0$, sehingga :

$$P(x)[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)] = 0, \qquad \forall\ x \in [a, b]$$

Asumsikan $P(x) > 0$ dalam interval $[a, b]$, maka $[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)] = 0$, untuk setiap $x \in [a, b]$. Di lain pihak $[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)]$ adalah *Wronskian* dari f dan g atau $W(f, g)(x)$, sehingga penyelesaian f dan g tidak bebas linier dalam interval $[a, b]$. ■

Kesimpulannya adalah jika f dan g bebas linear, maka f dan g tidak mungkin mempunyai pembuat nol yang sama.

Teorema 3.5

Jika f dan g adalah penyelesaian nontrivial yang tidak bebas linear dari persamaan (3.10) dalam interval $[a, b]$, dan $f(x_0) = 0$, untuk suatu $x_0 \in [a, b]$, maka $g(x_0) = 0$.

Bukti :

Karena f dan g tidak bebas linear dalam interval $[a, b]$, maka terdapat konstanta-konstanta c_1 dan c_2, yang tidak semuanya nol, sedemikian hingga :

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \tag{3.12}$$

untuk setiap $x \in [a, b]$. Diketahui bahwa f dan g adalah penyelesaian nontrivial untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika $c_1 = 0$, maka $c_2 g(x) = 0$. Karena g penyelesaian nontrivial, maka haruslah $c_2 = 0$, ini menyebabkan kontradiksi, sehingga $c_1 \neq 0$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $c_2 \neq 0$. Dengan demikian tidak ada satu pun c_1 maupun c_2 yang bernilai nol. Dengan mengambil $x = x_0$ pada persamaan (3.12) dan karena $f(x_0) = 0$, didapat $c_2 g(x_0) = 0$, maka $g(x_0) = 0$. ■

Teorema 3.4 dan *Teorema 3.5* merupakan biimplikasi, sehingga dapat disimpulkan bahwa dua penyelesaian f dan g mempunyai pembuat nol yang sama pada interval $[a,b]$ jika dan hanya jika f dan g tidak bebas linear pada interval tersebut.

Contoh 3.3

Suatu persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

dengan $P(x) = Q(x) = 1$ pada interval $a \leq x \leq b$. Penyelesaian yang tidak bebas linear A sin x dan B sin x memiliki pembuat nol yang sama $x = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ dan tidak ada pembuat nol yang lain. □

Teorema 3.6(**Sturm's Separation Theorem**)

Jika f dan g adalah penyelesaian yang bebas linear dari

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + Q(x)y = 0 \qquad (3.13)$$

dalam interval $[a, b]$., maka antara dua pembuat nol f yang berurutan, terdapat tepat satu pembuat nol g.

Bukti :

Andaikan x_1 dan x_2 secara berurutan adalah pembuat nol f dalam interval $[a, b]$. Berdasarkan *Teorema 3.4*, didapat $g(x_1) \neq 0$ dan $g(x_2) \neq 0$. Asumsikan g tidak memiliki pembuat nol dalam interval $x_1 < x < x_2$. Karena penyelesaian-penyelesaian f

dan g mempunyai turunan yang kontinu dalam interval $x_1 < x < x_2$, maka hasil bagi $f(x)/g(x)$ memiliki turunan yang kontinu dalam interval $x_1 < x < x_2$. Dalam interval tersebut, $f(x)/g(x)$ bernilai nol pada titik ujung interval. Menurut *Teorema Rolle*, terdapat ξ, dengan $x_1 < \xi < x_2$, sedemikian hingga :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\Bigg|_{t=\xi} = 0$$

Namun

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{W(g,f)(x)}{[g(x)]^2},$$

dan karena f dan g bebas linear dalam interval $x_1 < x < x_2$,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \neq 0 \qquad \text{dalam } x_1 < x < x_2.$$

Kontradiksi menunjukkan bahwa g memiliki suatu pembuat nol dalam $x_1 < x < x_2$.

Andaikan g memiliki lebih dari satu pembuat nol pada $x_1 < x < x_2$, dan andaikan x_3 dan x_4 secara berturut-turut adalah dua pembuat nol g. Dengan menukar f dengan g, dan berdasarkan argumen sebelumnya, maka f harus memiliki suatu pembuat nol x_5 dalam interval terbuka $x_3 < x < x_4$. Ini mengakibatkan $x_1 < x_5 < x_2$, dan x_1 dan x_2 tidak secara berurutan menjadi pembuat nol f, yang kontradiksi dengan asumsi mengenai x_1 dan x_2. Dengan demikian, g hanya memiliki tepat satu pembuat nol dalam interval terbuka $x_1 < x < x_2$. ∎

Contoh 3.4

Terdapat persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

dengan fungsi-fungsi f dan g adalah penyelesaian yang bebas linear, yaitu $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$. Antara dua pembuat nol yang berurutan dari salah satu penyelesaian-penyelesaian yang bebas linear tersebut (misalnya f), terdapat tepat satu pembuat nol dari penyelesaian yang lain (misalnya g). Dua pembuat nol $f(x)$ secara berturutan adalah 0 dan π, dan $g(x)$ memiliki tepat satu pembuat nol dalam interval $0 < x < \pi$, yaitu $\pi/2$. □

Teorema 3.7 (**Sturm's Comparison Theorem**)

Jika $\Phi_1(x)$ dan $\Phi_2(x)$ secara berturut-turut adalah penyelesaian yang kontinu dari :

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + Q_1(x)y = 0 \tag{3.14}$$

dan

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + Q_2(x)y = 0 \tag{3.15}$$

dengan $P(x)$ adalah fungsi yang memiliki turunan yang kontinu, sehingga $P(x) > 0$, dan $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu, sedemikian hingga $Q_2(x) > Q_1(x)$. Jika x_1 dan x_2 adalah pembuat nol yang berturutan dari $\Phi_1(x)$, maka $\Phi_2(x)$ hanya memiliki satu pembuat nol pada suatu titik dalam interval terbuka $x_1 < x < x_2$.

Bukti :

Andaikan $\Phi_2(x)$ tidak memiliki pembuat nol pada interval terbuka $x_1 < x < x_2$. Tanpa mengurangi makna pembuktian, dapat diasumsikan $\Phi_1(x) > 0$ dan $\Phi_2(x) > 0$ dalam $x_1 < x < x_2$. Substitusikan $\Phi_1(x)$ dan $\Phi_2(x)$ dalam persamaan (3.14) dan (3.15), sehingga didapat

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\Phi_1'(x)\right] + Q_1(x)\Phi_1(x) = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\Phi_2'(x)\right] + Q_2(x)\Phi_2(x) = 0 \tag{3.17}$$

untuk semua x pada $x_1 < x < x_2$. Kalikan (3.16) dengan $\Phi_2(x)$ dan (3.17) dengan $\Phi_1(x)$, kemudian selisihnya menjadi :

$$\Phi_2(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\Phi_1'(x)\right] - \Phi_1(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\Phi_2'(x)\right] = \left[Q_2(x) - Q_1(x)\right]\Phi_1(x)\Phi_2(x) \tag{3.18}$$

Pada ruas kiri menghasilkan :

$$\Phi_2(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\Phi_1'(x)\right] - \Phi_1(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\Phi_2'(x)\right] = \frac{d}{dx}\left\{P(x)\left[\Phi_1'(x)\Phi_2(x) - \Phi_2'(x)\Phi_1(x)\right]\right\}$$

Berdasarkan persamaan (3.18), maka :

$$\frac{d}{dx}\left\{P(x)\left[\Phi_1'(x)\Phi_2(x) - \Phi_2'(x)\Phi_1(x)\right]\right\} = \left[Q_2(x) - Q_1(x)\right]\Phi_1(x)\Phi_2(x) \tag{3.19}$$

Integralkan (3.19) dari x_1 ke x_2, sehingga didapat :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left\{P(x)\left[\Phi_1'(x)\Phi_2(x) - \Phi_2'(x)\Phi_1(x)\right]\right\}dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[Q_2(x) - Q_1(x)\right]\Phi_1(x)\Phi_2(x)\,dx$$

atau

$$\left\{P(x)\left[\Phi_1'(x)\Phi_2(x)-\Phi_2'(x)\Phi_1(x)\right]\right\}\Big|_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}\left[Q_2(x)-Q_1(x)\right]\Phi_1(x)\Phi_2(x)dx \qquad (3.20)$$

Karena $\Phi_1(x_1)=\Phi_1(x_2)=0$, persamaan (3.20) menjadi :

$$\left\{P(x_2)\Phi_1'(x_2)\Phi_2(x_2)-P(x_1)\Phi_1'(x_1)\Phi_2(x_1)\right\}=\int_{x_1}^{x_2}\left[Q_2(x)-Q_1(x)\right]\Phi_1(x)\Phi_2(x)dx \qquad (3.21)$$

Diketahui bahwa $\Phi_1(x_2)=0$ dan $\Phi_1(x)>0$ pada $x_1<x<x_2$, didapat $\Phi'_1(x_2)<0$. Karena $\Phi_2(x)>0$ pada $x_1<x<x_2$ dan karena $\Phi_2(x)$ adalah fungsi yang kontinu, maka didapat $\Phi_2(x_2)\geq 0$. Dan karena $P(x_2)>0$, maka $P(x_2)\,\Phi'_1(x_2)\,\Phi_2(x_2)\leq 0$.

Diketahui bahwa $\Phi_1(x_1)=0$ dan $\Phi_1(x)>0$ pada $x_1<x<x_2$, didapat $\Phi'_1(x_1)>0$. Karena $\Phi_2(x)>0$ pada $x_1<x<x_2$ dan karena $\Phi_2(x)$ adalah fungsi yang kontinu, maka didapat $\Phi_2(x_1)\geq 0$. Dan karena $P(x_1)>0$, maka $P(x_1)\,\Phi'_1(x_1)\,\Phi_2(x_1)\geq 0$.

Sehingga ruas kiri dari persamaan (3.21) tidak positif. Namun berdasarkan yang diketahui bahwa $Q_2(x)$ - $Q_1(x)>0$ pada $x_1<x<x_2$, maka ruas kanan dari (3.21) positif. Karena pada persamaan (3.21) ruas kiri bernilai negatif dan pada ruas kanan bernilai positif, maka ini menimbulkan kontradiksi. Jadi, asumsi bahwa Φ_2 tidak memiliki pembuat nol dalam interval $x_1<x<x_2$ harus disangkal. Jadi, Φ_2 memiliki suatu pembuat nol pada interval terbuka $x_1<x<x_2$. ■

Contoh 3.5

Terdapat suatu persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A^2y=0$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + B^2 y = 0$$

dengan A dan B adalah konstanta, sedemikian hingga $B > A > 0$. Fungsi Φ_1 dan Φ_2 didefinisikan dengan $\Phi_1(x)$ = sin Ax dan $\Phi_2(x)$ = sin Bx adalah penyelesaian real. Secara berurutan pembuat nol dari sin Ax adalah

$$\frac{n\pi}{A} \quad \text{dan} \quad \frac{(n+1)\pi}{A} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Berdasarkan *Teorema 3.7*, maka sin Bx memiliki pembuat nol ξ_n sedemikian hingga

$$\frac{n\pi}{A} < \xi_n < \frac{(n+1)\pi}{A} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Pada kenyataannya, $x = 0$ adalah suatu pembuat nol dari sin Ax dan sin Bx. Pembuat nol yang berikutnya dari sin Ax adalah π/A, dan pembuat nol berikutnya dari sin Bx adalah π/B. Karena $B > A$, maka $\pi/B < \pi/A$. □

C. Eksistensi Penyelesaian Masalah Sturm-Liouville

Pada subbab ini akan dibahas mengenai eksistensi penyelesaian masalah Sturm-Liouville dan sifat yang dimiliki nilai eigen dan fungsi eigen.

Lemma 3.2

Jika $y(x)$ dan $z(x)$ adalah penyelesaian nontrivial dari

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)y = 0$$

dan

$$\frac{d^2z}{dx^2}+R(x)z=0$$

dengan $Q(x)$ dan $R(x)$ adalah fungsi positif sedemikian hingga $Q(x) > R(x)$. Jika $y(x)$ dan $z(x)$ keduanya memiliki pembuat nol di b_0, dan $z(x)$ memiliki berhingga atau tak hingga banyaknya pembuat nol yang berturut-turut $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, dengan $b_i > b_0$ ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$), maka :

(i) $y(x)$ memiliki pembuat nol yang sama banyaknya dengan yang dimiliki oleh $z(x)$ pada setiap interval tertutup $[b_0, b_i]$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

(ii) jika pembuat nol $y(x)$ secara berturut-turut adalah $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, dengan $a_i > b_0, \forall i = 1,2,\ldots,n,..$ maka $a_i < b_i$ untuk setiap i.

Bukti :

Berdasarkan *Teorema 3.7*, $y(x)$ memiliki satu pembuat nol dalam setiap interval terbuka $(b_0, b_1), (b_1, b_2), \ldots, (b_{n-1}, b_n)$, maka $a_i < b_i$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. dan kedua pernyataan tersebut dipenuhi. ∎

Lemma 3.3

Andaikan $Q(x)$ adalah fungsi positif yang kontinu dan memenuhi pertidaksamaan

$$0 < m^2 < Q(x) < M^2 \tag{3.22}$$

dalam interval tertutup $[a, b]$. Asumsikan $y(x)$ adalah penyelesaian nontrivial dari

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)y=0$$

dalam interval ini.

(i) jika x_1 dan x_2 secara berturut-turut adalah pembuat nol dari $y(x)$, maka

$$\frac{\pi}{M} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{m} \tag{3.23}$$

(ii) jika pembuat nol dari $y(x)$ adalah a, b, dan $n - 1$ titik dalam interval terbuka (a, b), maka

$$\frac{m(b-a)}{\pi} < n < \frac{M(b-a)}{\pi} \tag{3.24}$$

Bukti :

(i) Untuk membuktikan (3.23), diperlukan perbandingan dengan persamaan yang diberikan dengan

$$\frac{d^2z}{dx^2} + m^2 z = 0$$

Penyelesaian nontrivial yang bernilai nol pada x_1 adalah

$$z(x) = \sin m(x - x_1)\,. \tag{3.25}$$

Jika pembuat nol yang berikutnya dari $z(x)$ adalah $x_1 + \pi/m$, dan berdasarkan *Teorema 3.7* didapat $x_2 < x_1 + \pi / m$ atau $x_2 - x_1 < \pi / m$. Karena diketahui pertidaksamaan $0 < m^2 < Q(x) < M^2$, sehingga $\pi/M < \pi/m$, maka didapat :

$$\frac{\pi}{M} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{m} \tag{3.26}$$

(ii) Untuk membuktikan (3.24), amati bahwa terdapat n subinterval antara $n + 1$ pembuat nol, sedemikian hingga dengan (3.23) didapat $b - a$ yang merupakan jumlah panjang dari n interval bagian $< n(\pi/m)$ dan oleh karena itu $m(b-a)/\pi < n$. Dengan jalan yang sama dapat dilihat bahwa $b-a > n(\pi/M)$, maka $n < M(b-a)/\pi$. ■

Teorema 3.8 (**Teorema Eksistensi Penyelesaian Masalah Sturm-Liouville**)

Andaikan $R(x)$ adalah fungsi bernilai positif yang kontinu dan asumsikan persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [Q(x) + \lambda R(x)]y = 0 \tag{3.27}$$

dalam sebuah interval tertutup $[a, b]$ dan $y(a) = y(b) = 0$. Untuk setiap λ, asumsikan $y_\lambda(x)$ adalah penyelesaian yang unik dari persamaan (3.27) yang memenuhi kondisi awal $y_\lambda(a) = 0$ dan $y_\lambda{}'(a) = 1$, maka terdapat barisan naik dari bilangan positif

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

sehingga $\lambda_n \to \infty$, jika $n \to \infty$. Fungsi $y_{\lambda_k}(x)$, dengan $k = 1, 2, \ldots$ memiliki tepat $k-1$ pembuat nol dalam interval terbuka (a,b).

Bukti :

Diketahui $R(x)$ adalah fungsi bernilai positif yang kontinu dalam interval $[a, b]$, sehingga terdapat bilangan r dan R sedemikian hingga $0 < r < R(x) < R$. Karena $Q(x)$ adalah fungsi yang kontinu dalam interval $[a, b]$, maka terdapat bilangan q dan Q sedemikian hingga $q < Q(x) < Q$.

Periode suatu penyelesaian $y_{\lambda_k}(x)$ adalah waktu yang diperlukan untuk menempuh satu gelombang. Fungsi $y_{\lambda_k}(x)$ berosilasi lebih cepat daripada penyelesaian

$$y_0''+[q+\lambda r]y_0 = 0 \tag{3.27a}$$

$$y_0(a) = 0, \qquad y_0'(a) = 1$$

karena jumlah periode $y_{\lambda_k}(x)$ lebih banyak daripada penyelesaian persamaan (3.27a) dan $y_{\lambda_k}(x)$ berosilasi lebih lambat daripada penyelesaian

$$y_1''+[Q+\lambda R]y_1 = 0\,. \tag{3.27b}$$

$$y_1(a) = 0, \qquad y_1'(a) = 1$$

karena jumlah periode $y_{\lambda_k}(x)$ lebih sedikit daripada penyelesaian persamaan (3.27b). Jika $\lambda > 0$ dan besar, maka $0 < [q + \lambda r] < [Q + \lambda R]$. Misalkan $[q + \lambda r] = m^2$ dan $[Q + \lambda R] = M^2$, maka berlaku pertidaksamaan $m^2 < [Q(x) + \lambda R(x)] < M^2$. Penyelesaian nontrivial dari persamaan (3.27a) dan (3.27b) yang bernilai nol pada a adalah :

$$y_0 = \frac{1}{m}\sin m(x-a) = \frac{1}{\sqrt{q+\lambda r}}\sin\left(\sqrt{q+\lambda r}\right)(x-a)$$

dan

$$y_1 = \frac{1}{M}\sin M(x-a) = \frac{1}{\sqrt{Q+\lambda R}}\sin\left(\sqrt{Q+\lambda R}\right)(x-a)$$

Jika pembuat nol berikutnya adalah $a+\frac{\pi}{\sqrt{q+\lambda r}}$,dan berdasarkan *Teorema 3.7* didapat $x_1 < a+\frac{\pi}{\sqrt{q+\lambda r}}$. Diketahui pertidaksamaan $[q + \lambda r] < [Q(x) + \lambda R(x)] < [Q + \lambda R]$, maka berdasarkan *Lemma 3.3* diperoleh :

$$\frac{\pi}{\sqrt{Q+\lambda R}} < b-a < \frac{\pi}{\sqrt{q+\lambda r}}.$$

Jika $\lambda > 0$ dan kecil (sangat kecil sedemikian hingga $b-a < \frac{\pi}{\sqrt{Q+\lambda R}}$), maka pembuat nol $y_\lambda(x)$ terletak disebelah kiri a, karena panjang interval $(b - a)$ lebih kecil dari panjang periode $\frac{\pi}{\sqrt{Q+\lambda R}}$. Jika λ berada pada $b-a > \frac{\pi}{\sqrt{q+\lambda r}}$, maka $y(x)$ hanya memiliki setidaknya satu pembuat nol, karena panjang interval $(b - a)$ lebih panjang dari panjang periode $\frac{\pi}{\sqrt{q+\lambda r}}$. Dengan demikian untuk setiap λ berlaku

$$\lambda > \max\left\{0, \left(\frac{\pi^2}{(b-a)^2} - q\right)\frac{1}{r}\right\} = \lambda^0.$$

Jika $\lambda < 0$ dan sangat kecil, maka r dan R pada persamaan (3.27a) dan (3.27b) ditukar, sedemikian hingga :

$$-m^2 = Q + \lambda r < 0, \quad \text{jika } \lambda < \min\left\{0, -\frac{Q}{r}\right\} = \lambda^1.$$

Pada kasus ini, persamaan mempunyai penyelesaian $y_\lambda(x) = \frac{1}{m}$ sinh $m(x - a)$ yang tidak bernilai nol pada $x = b$ maupun pada titik-titik yang lainnya. Oleh karena itu, untuk setiap $\lambda < \lambda^1$, penyelesaian dari persamaan (3.27) tidak memiliki pembuat nol dalam interval $(a, b]$.

Secara sama, jika $\lambda \to \infty$, maka banyaknya pembuat nol dari $y_\lambda(x) \to \infty$ dalam $[a, b]$. Diketahui pertidaksamaan $[Q(x) + \lambda R(x)] < [Q + \lambda R]$. Asumsikan bahwa y_m dan y_n secara berturut-turut adalah penyelesaian dari persamaan (3.27) dan persamaan (3.27b), maka y_m dan y_n memenuhi kondisi awal yang sama, yaitu $y_m(a) = 0$ dan $y_n(a) = 0$. Jadi, y_m dan y_n memiliki pembuat nol yaitu a. Asumsikan y_m memiliki berhingga atau tak hingga banyaknya pembuat nol secara berturut-turut $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, dengan $t_i > a$ ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$). Berdasarkan *Lemma 3.3.1*, jika pembuat nol y_n secara berturut-turut $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, dengan $s_i > a$ ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$), maka $s_i > t_i$. Jadi, pembuat nol y_λ yang ke-n berada di sebelah kanan a.

Penyelesaian $y_\lambda(x)$ dari persamaan (3.27) dengan kondisi $y_\lambda(a) = 0$ kontinu bervariasi dengan λ. Jika $y_\lambda(x)$ mempunyai satu pembuat nol dalam interval (a, b), maka $y_\lambda(x)$ juga kontinu bervariasi dengan λ. Jadi, jika λ naik dari λ^1 menuju λ^0, maka akan terdapat suatu nilai λ, misalkan λ_1, sehingga penyelesaian $y_\lambda(x)$ untuk pertama kalinya bernilai nol pada $x = b$. Ini membuktikan bahwa terdapat nilai eigen terkecil λ_1 dari masalah (3.27), dan $y_{\lambda_k}(x)$ adalah fungsi eigen. Berdasarkan hal tersebut, dapat diasumsikan bahwa terdapat nilai eigen λ_2, dengan $\lambda_2 > \lambda_1$, maka terdapat $y_{\lambda_2}(x)$ yang merupakan penyelesaian dari persamaan (3.27) memiliki satu pembuat nol dalam interval (a, b), dan bernilai nol pada $x = b$.

Jika λ semakin besar, maka nilai $\dfrac{\pi}{\sqrt{Q(x)+\lambda R(x)}}$ semakin kecil, sehingga menyebabkan jumlah periode yang semakin banyak dalam interval $[a,b]$. Ketika λ berubah menuju ∞ dan naik secara kontinu, akan terdapat tak hingga banyaknya nilai $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$. Jadi, λ membentuk barisan monoton naik $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ sehingga $\lambda_n \to \infty$, jika $n \to \infty$, dan terdapat fungsi eigen $y_{\lambda_1}(x)$, $y_{\lambda_2}(x)$, ... , sehingga $y_{\lambda_k}(x) \to \infty$.

Jika $y_{\lambda_k}(x)$ adalah suatu penyelesaian, sedemikian hingga $y_{\lambda_k}(x)$ memenuhi kondisi $y_{\lambda_k}(a) = 0$ dan $y_{\lambda_k}(b) = 0$. Andaikan penyelesaian memiliki $y_{\lambda_k}(x)$ pembuat nol t_0, t_1, $t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k$, dengan $t_0 = a$ dan $t_k = b$, maka dapat dibuat k subinterval terbuka (a, t_1), $(t_1, t_2)\ldots$, (t_{k-2}, t_{k-1}), (t_{k-1}, b). Jadi, $y_{\lambda_k}(x)$ bernilai nol pada a, b, dan $k-1$ pembuat nol dalam interval $[a,b]$.

Berdasarkan *Lemma 3.3* pada pertidaksamaan (3.24) diperoleh :

$$\frac{\sqrt{q+\lambda_n r^2}(b-a)}{\pi} < n < \frac{\sqrt{Q+\lambda_n R^2}(b-a)}{\pi}$$

$$\frac{n^2\pi^2}{R^2(b-a)^2} - \frac{Q}{R^2} < \lambda_n < \frac{n^2\pi^2}{r^2(b-a)^2} - \frac{q}{r^2} \qquad \blacksquare$$

Persamaan (3.27) merupakan kasus khusus dalam kasus Masalah Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [Q(x)+\lambda R(x)]y = 0 \tag{3.28}$$

dimana $P(x) = 0$. Asumsikan terdapat $P(x)$, $Q(x)$ dan $R(x)$ adalah fungsi kontinu dalam $[a, b]$, $P(x) > 0$, $R(x) > 0$ dan $P(x)$ memiliki turunan yang kontinu dalam interval tersebut. Jika variable bebas dalam (3.28) diubah dari x menjadi variable yang baru w yang didefinisikan dengan

$$w(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)} \tag{3.29}$$

sedemikian hingga

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{P(x)} \qquad \text{dan} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \frac{1}{P(x)}\frac{dy}{dw}$$

Substitusikan persamaan tersebut ke (3.28), maka

$$\frac{d^2y}{dw^2} + [Q_1(w) + \lambda R_1(w)]y = 0 \tag{3.30}$$

dimana $Q_1(w)$ dan $R_1(w)$ adalah positif dan kontinu dalam interval yang ditransformasi $0 \leq w \leq c = w(b)$. Dengan menggunakan *Lemma 3.3* ke persamaan (3.29) akan didapat pernyataan yang berhubungan dengan persamaan (3.28).

D. Orthogonalitas Dalam Masalah Sturm-Liouville

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai fungsi-fungsi orthogonal dalam penyelesaian masalah Sturm-Liouville.

Teorema 3.9

Jika λ_m, λ_n adalah dua nilai eigen yang berbeda dari masalah Sturm-Liouville pada *Definisi 3.1*, dan ϕ_m, ϕ_n secara berturut-turut adalah fungsi eigen yang berhubungan dengan nilai eigen λ_m dan λ_n, maka

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx = 0$$

dengan kata lain fungsi eigen ϕ_m dan ϕ_n saling orthogonal terhadap fungsi pembobot R dalam interval $a \leq x \leq b$.

Bukti :

Karena ϕ_m adalah fungsi eigen yang berhubungan dengan nilai eigen λ_m, dan ϕ_n adalah fungsi eigen yang berhubungan dengan nilai eigen λ_n, kedua fungsi eigen ini harus memenuhi Sturm-Liouville dengan $\lambda = \lambda_m$ dan $\lambda = \lambda_n$ yaitu :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_m'(x)\right] + \left[Q(x) + \lambda_m R(x)\right]\phi_m(x) = 0 \\
&\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_n'(x)\right] + \left[Q(x) + \lambda_n R(x)\right]\phi_n(x) = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned}
k_1\phi_m(a) + k_2\phi_m'(a) &= 0 \\
l_1\phi_m(b) + l_2\phi_m'(b) &= 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
k_1\phi_n(a) + k_2\phi_n'(a) &= 0 \\
l_1\phi_n(b) + l_2\phi_n'(b) &= 0
\end{aligned}$$

Kalikan kedua sisi persamaan pertama dengan $\phi_n(x)$ dan kedua sisi persamaan kedua dengan ϕ_m, kemudian dikurangkan, maka didapat :

$$\phi_n(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_m'(x)\right]+\lambda_m\phi_m(x)\phi_n(x)R(x)-\phi_m(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_n'(x)\right]-\lambda_n\phi_m(x)\phi_n(x)R(x)=0 \tag{3.32}$$

dan mengakibatkan :

$$(\lambda_m-\lambda_n)\phi_m(x)\phi_n(x)R(x)=\phi_m(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_n'(x)\right]-\phi_n(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_m'(x)\right]$$

Integralkan kedua ruas dengan batas bawah a dan batas atas b, maka :

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx=\int_a^b \phi_m(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_n'(x)\right]dx-\int_a^b \phi_n(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_m'(x)\right]dx$$

Dari mengintegralkan ruas kanan akan didapat :

$$\phi_m(x)P(x)\phi_n'(x)\Big|_a^b-\int_a^b P(x)\phi_n'(x)\phi_m'(x)dx-\phi_n(x)P(x)\phi_m'(x)\Big|_a^b+\int_a^b P(x)\phi_m'(x)\phi_n'(x)dx$$

atau yang lebih sederhana :

$$\left\{P(x)\left[\phi_m(x)\phi_n'(x)-\phi_n(x)\phi_m'(x)\right]\right\}\Big|_a^b$$

Dengan demikian persamaannya menjadi :

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx=P(b)\left[\phi_m(b)\phi_n'(b)-\phi_m'(b)\phi_n(b)\right]-P(a)\left[\phi_m(a)\phi_n'(a)-\phi_m'(a)\phi_n(a)\right]$$

(i) Dari *Definisi 3.1*, jika $k_2 = l_2 = 0$, maka $\phi_m(a)=0$, $\phi_m(b) = 0$, $\phi_n(a) = 0$, dan $\phi_n(b) = 0$ dan menyebabkan ruas kanan pada persamaan tersebut bernilai nol.

(ii) Jika $k_2 = 0$, tetapi $l_2 \neq 0$, maka $\phi_m(a) = 0$, $\phi_n(a) = 0$, dan :

$$\begin{aligned} \beta\phi_m(b) + \phi_m'(b) &= 0 \\ \beta\phi_n(b) + \phi_n'(b) &= 0 \end{aligned} \quad \text{dengan } \beta = {}^{l_1}\!/_{l_2}.$$

Persamaan pertama dikalikan dengan ϕ_n, dan persamaan kedua dikalikan dengan ϕ_m, kemudian dikurangkan, maka menjadi :

$$\lfloor \beta\phi_n(b) + \phi_n'(b) \rfloor \phi_m(b) - \lfloor \beta\phi_m(b) + \phi_m'(b) \rfloor \phi_n(b) = 0$$

$$\phi_n'(b)\phi_m(b) - \phi_m'(b)\phi_n(b) = 0$$

Hal ini menyebabkan ruas kanan pada persamaan

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx = 0$$

(iii)Ini juga berlaku pada kondisi jika $k_2 \neq 0$, $l_2 = 0$ maupun $k_2 = 0$, $l_2 \neq 0$. Karena λ_m dan λ_n adalah nilai eigen yang berbeda, maka $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$. Oleh karena itu, haruslah :

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx = 0 \tag{3.33}$$

Jadi, ϕ_m dan ϕ_m saling orthogonal terhadap fungsi pembobot $r(x)$ yang berada pada interval $a \leq x \leq b$. ■

Contoh 3.6

Masalah Sturm-Liouville pada *Contoh 3.2* yaitu :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0$$

dengan $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$, $R(x) = 1$ dan nilai eigen $\lambda_n = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ditemukan fungsi eigen $y = c_n \sin nx$, dengan c_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) adalah konstanta yang tidak nol. Jika fungsi eigen dinotasikan dengan $\{\phi_n(x)\}$ dan misalkan $c_n = 1$, untuk setiap $n = 1, 2, 3, \ldots$), maka :

$$\phi_n(x) = \sin nx \qquad (0 \leq x \leq \pi\,;\, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Dengan *Teorema 3.9*, himpunan tak hingga $\{\phi_n(x)\}$ adalah suatu himpunan yang elemen-elemennya saling orthogonal dengan fungsi pembobot $R(x) = 1$ untuk setiap x pada interval $a \leq x \leq b$. Jadi, *Teorema 3.9* menunjukkan bahwa :

$$\int_0^{\pi} (\sin mx)(\sin nx)(1) = 0$$

untuk $m = 1, 2, 3, \ldots;\, n = 1, 2, 3, \ldots.$ □

Teorema 3.10

Jika masalah Sturm-Liouville memenuhi *Teorema 3.9*, dan R positif pada interval $a \leq x \leq b$ (atau negatif pada interval tersebut), maka semua nilai eigen adalah bilangan real.

Bukti :

Andaikan nilai eigennya adalah $\lambda = \alpha + i\beta$ dengan fungsi eigennya adalah :

$$y(x) = u(x) + iv(x)$$

dimana α, β adalah bilangan real, u, dan v adalah fungsi yang bernilai real.

Substitusikan persamaan ini ke dalam ke persamaan dalam masalah Sturm-Liouville akan menghasilkan :

$$(Pu' + iPv')' + (Q + \alpha R + i\beta R)(u + iv) = 0$$

Persamaan ini akan setara dengan :

$$(Pu')' + (Q + \alpha R)u - \beta Rv = 0$$

$$(Pv')' + (Q + \alpha R)v + \beta Ru = 0$$

Persamaan pertama dikalikan dengan v, persamaan kedua dikalikan dengan $-u$, maka didapat :

$$v(Pu')' + (Q + \alpha R)uv - \beta Rv^2 = 0$$

$$-u(Pv')' + (Q + \alpha R)(-u)v - \beta Ru^2 = 0$$

dan kemudian hasilnya dijumlahkan dan diperoleh :

$$-u(Pv')' + v(Pu')' - \beta Rv^2 - \beta Ru^2 = 0$$

$$-\beta(u^2 + v^2)R = u(Pu')' - v(Pv')'$$

$$= [(Pv')u - (Pu')v]'$$

Hasil tersebut yang merupakan derivatif adalah kontinu pada interval $a \le x \le b$. Dengan mengintegralkan terhadap x dari a sampai b, diperoleh:

$$-\beta\int_a^b (u^2 + v^2)Rdx = \left[P(uv' - u'v)\right]_a^b$$

Karena syarat batas, maka ruas kanan bernilai nol (sama seperti dalam bukti *Teorema 3.9*). Karena y adalah fungsi eigen, maka y adalah penyelesaian nontrivial ($y \neq 0$), dan karena $y(x) = u(x) + iv(x)$, maka $(u^2 + v^2) \neq 0$. Karena y dan P kontinu dan $P > 0$ atau $P < 0$ pada interval $a \leq x \leq b$, nilai integral pada ruas kiri tidak mungkin bernilai nol, sehingga mengakibatkan $\beta = 0$ yang berarti $\lambda = \alpha$ adalah bilangan real.

■

Definisi 3.2

Suatu fungsi f disebut normal dengan fungsi pembobot R dalam interval $a \leq x \leq b$ jika dan hanya jika

$$\int_a^b [f(x)]^2 R(x)dx = 1 \tag{3.34}$$

Definisi 3.3

Jika $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ himpunan tak hingga dari fungsi-fungsi yang didefinisikan dalam interval $a \leq x \leq b$. Himpunan $\{\phi_n\}$ disebut ortonormal dengan fungsi bobot R dalam interval $a \leq x \leq b$ jika :

1. orthogonal terhadap fungsi bobot R dalam interval $a \leq x \leq b$,
2. setiap fungsi adalah normal dengan fungsi pembobot R dalam interval $a \leq x \leq b$.

Oleh karena itu, himpunan $\{\phi_n\}$ adalah ortonormal dengan fungsi pembobot R dalam $a \leq x \leq b$ jika :

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx = \begin{cases} 0 & jika \quad m \neq n \\ 1 & jika \quad m = n \end{cases} \tag{3.35}$$

Contoh 3.7

Himpunan fungsi $\{\phi_n\}$, dengan $\phi_n(x) = \sqrt{2/\pi}\sin nx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ pada interval $0 \leq x \leq \pi$ ortogonal relatif terhadap fungsi pembobot yang bernilai konstan yaitu 1 dalam interval $0 \leq x \leq \pi$, karena

$$\int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin mx\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right)(1)dx = 0 \qquad \text{jika } m \neq n$$

Lebih jauh, setiap fungsi pada persamaan tersebut adalah ortonormal relatif dengan fungsi pembobot yang berada pada interval $0 \leq x \leq \pi$, karena :

$$\int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right)^2 (1)dx = 1$$

Jadi, himpunan $\{\phi_n\}$ adalah ortonormal relatif dengan fungsi pembobot yang bernilai 1 dalam interval $0 \leq x \leq \pi$. □

Teorema 3.11

Jika ϕ_n adalah suatu fungsi eigen dengan nilai eigen λ_n dalam masalah Sturm-Liouville yang didefinisikan pada *Definisi 3.1*, maka $k_n\phi_n$, dimana k_n adalah konstanta yang tidak nol juga merupakan fungsi eigen dengan nilai eigen λ_n.

Bukti :

Diketahui bahwa ϕ_n adalah fungsi eigen dari masalah Sturm-Liouville, maka :

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_n'(x)\right]+\left[Q(x)+\lambda_n R(x)\right]\phi_n(x)=0 \tag{3.36}$$

dengan syarat batas :

$$\begin{aligned} k_1\phi_n(a)+k_2\phi_n'(a)&=0 \\ l_1\phi_n(b)+l_2\phi_n'(b)&=0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Kalikan kedua ruas dari persamaan (3.36) dan (3.37) dengan konstanta yang tak nol yaitu k_n dan diperoleh :

$$k_n\left[\frac{d}{dx}\left[P(x)\phi_n'(x)\right]+\left[Q(x)+\lambda_n R(x)\right]\phi_n(x)\right]=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)k_n\phi_n'(x)\right]+\left[Q(x)+\lambda_n R(x)\right]k_n\phi_n(x)=0$$

dengan syarat batas :

$$\begin{aligned} k_1k_n\phi_n(a)+k_2k_n\phi_n'(a)&=0 \\ l_1k_n\phi_n(b)+l_2k_n\phi_n'(b)&=0 \end{aligned}$$

Jadi, $k_n\phi_n$ juga merupakan fungsi eigen dari masalah Sturm-Liouville karena $k_n\phi_n$ memenuhi masalah nilai batas Sturm-Liouville. ■

Teorema 3.12

Dari himpunan fungsi-fungsi eigen $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ...$ dapat dibentuk himpunan fungsi-fungsi eigen yang baru $k_1\phi_1, k_2\phi_2, k_3\phi_3, ...$. Himpunan fungsi eigen yang baru ini juga orthogonal relatif dengan fungsi pembobot R yang berada pada interval $a \leq x \leq b$.

Bukti :

Berdasarkan *Teorema 3.9* maka

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx = 0$$

dengan ϕ_m dan ϕ_n saling orthogonal terhadap fungsi pembobot $R(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$.

Berdasarkan *Teorema 3.11*, maka $k_m\phi_m$ dan $k_n\phi_n$ adalah fungsi eigen, dengan $m \neq n$, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}\int_a^b k_m\phi_m(x)k_n\phi_n(x)R(x)dx &= k_m k_n \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)R(x)dx \\ &= k_m\, k_n.\, 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi, $k_m\phi_m$ dan $k_n\phi_n$ adalah orthogonal relatif terhadap fungsi pembobot $R(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$. ■

Teorema 3.13

Jika himpunan fungsi eigen $k_1\phi_1, k_2\phi_2, k_3\phi_3,...$ normal relatif terhadap R pada interval $a \leq x \leq b$, maka himpunan fungsi eigen tersebut akan ortonormal relatif terhadap R pada interval $a \leq x \leq b$.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa konstanta-konstanta k_1, k_2, k_3, ... diperlukan sedemikian hingga bahwa himpunan $k_1\phi_1, k_2\phi_2, k_3\phi_3,...$ ortonormal.

Asumsikan bahwa fungsi $R(x) > 0$ untuk setiap x pada interval $a \leq x \leq b$. Asumsikan juga bahwa tidak ada fungsi eigen ϕ_n (n = 1, 2, 3, ...) yang bernilai nol dalam interval $a \leq x \leq b$. Oleh karena itu :

$$\int_a^b [\phi_n(x)]^2 R(x)dx = K_n > 0 \qquad (3.38)$$

dengan n = 1, 2, 3, ..., sedemikian hingga

$$\int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{K_n}}\phi_n(x)\right]^2 R(x)dx = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Jadi, himpunan

$$\frac{1}{\sqrt{K_1}}\phi_1, \frac{1}{\sqrt{K_2}}\phi_2, \frac{1}{\sqrt{K_3}}\phi_3, \ldots$$

adalah himpunan ortonormal relatif terhadap R dalam interval $a \leq x \leq b$. Telah ditunjukkan bahwa dari himpunan fungsi eigen $\phi_1, \phi_2, \phi_3,...$ yang orthogonal dapat ditemukan himpunan fungsi eigen yang ortonormal $k_1\phi_1, k_2\phi_2, k_3\phi_3,...$, dengan

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{K_n}} = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b [\phi_n(x)]^2 R(x)dx}} \tag{3.39}$$

dengan $n = 1, 2, 3, \ldots.$ ■

Contoh 3.8

Suatu masalah Sturm-Liouville pada *Contoh 3.6* mempunyai himpunan fungsi eigen yang orthogonal yaitu $\{\phi_n\}$, dimana $\{\phi_n\} = c_n \sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \ldots; 0 \leq x \leq \pi$), dan c_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) adalah konstanta tak nol. Andaikan barisan fungsi eigen yang ortonormal $\{k_n\phi_n\}$, maka :

$$K_n = \int_0^\pi (c_n \sin nx)^2 (1) dx = \frac{c_n^2 \pi}{2}$$

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{K_n}} = \frac{1}{c_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$k_n\phi_n(x) = \left(\frac{1}{c_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\left(c_n \sin nx\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Masalah Sturm-Liouville ini mempunyai himpunan fungsi eigen yang orthonormal $\{\psi_n\}$, dengan $\psi_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \ldots; 0 \leq x \leq \pi$). □

Teorema 3.14

Andaikan masalah Sturm-Liouville seperti yang telah didefinisikan pada *Definisi 3.1* mempunyai $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ yaitu himpunan tak hingga dari nilai eigen yang dapat membentuk barisan monoton naik $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, dan $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ adalah himpunan fungsi eigen yang ortonormal. Misalkan terdapat fungsi f yang kontinu dalam interval $a \leq x \leq b$ dan juga memiliki turunan $f\,'$ yang kontinu sepotong-sepotong dalam interval tersebut, sedemikian hingga $f(a) = 0$ jika $\phi_1(a) = 0$ dan $f(b) = 0$ jika $\phi_1(b) = 0$, maka jika $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ konvergen secara uniform ke $f(x)$ pada interval (a, b), maka

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)R(x)dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.40}$$

Bukti :

Andaikan $\{\phi_n\}$ ortonormal relatif terhadap fungsi pembobot R dalam interval $a \leq x \leq b$ dan fungsi f dapat diekspansi dalam deret tak hingga dari fungsi-fungsi yang ortonormal $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ yaitu :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

untuk setiap x dalam interval $a \leq x \leq b$. Kalikan kedua ruas dengan $\phi_n(x)R(x)$, dengan R adalah fungsi pembobot dan ϕ_k adalah fungsi ke-k dari himpunan $\{\phi_n\}$, sedemikian hingga:

$$f(x)\phi_k(x)R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)\phi_k(x)R(x).$$

Integralkan kedua ruas dari persamaan ini dari a ke b dan didapatkan:

$$\int_a^b f(x)\phi_k(x)R(x) = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)\phi_k(x)R(x)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b c_n\phi_n(x)\phi_k(x)R(x)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_k(x)R(x)dx. \tag{3.41}$$

Karena $\{\phi_n\}$ himpunan ortonormal relatif terhadap r dalam interval $a \le x \le b$, maka

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_k(x)R(x)dx = \begin{cases} 0 & jika \quad n \ne k \\ 1 & jika \quad n = k \end{cases} \tag{3.42}$$

Oleh karena itu, setiap anggota kecuali anggota ke-k dalam deret yang terdapat dalam ruas kanan adalah nol. Dan jika $k = n$, maka $c_k.1 = c_k$ sedemikian hingga :

$$\int_a^b f(x)\phi_k(x)R(x)dx = c_k \tag{3.43}$$

Persamaan tersebut hanya berlaku untuk koefisien ke-k (k = 1, 2, 3, ...),oleh karena itu secara umum untuk koefisien c_n berlaku :

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)R(x)dx. \tag{3.44}$$

■

Contoh 3.9

Masalah Sturm-Liouville yaitu :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0$$

dan mempunyai fungsi eigen yang ortonormal $\{\phi_n\}$ yang memuat fungsi f, dengan $f(x) = \pi x - x^2$, dengan interval $0 \le x \le \pi$.

Penyelesaian :

Berdasarkan *Contoh 3.7* ditemukan fungsi eigen yang ortonormal $\{\phi_n\}$ yaitu:

$$\phi_n(x) = \sqrt{2/\pi}\,\sin nx \qquad 0 \le x \le \pi \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Dapat dibentuk deret :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

untuk setiap $n = 1, 2, 3, \dots$, maka :

$$c_n = \int_0^{\pi} f(x)\phi_n(x)r(x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right)(1)dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\pi\int_0^{\pi} x\sin nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left(\frac{\pi}{n^2}\sin nx - \frac{\pi x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^\pi - \left(\frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx - \frac{x^2}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^\pi\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left(-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi\right) - \left(\frac{2}{n^3}\cos n\pi - \frac{\pi^2}{n}\cos n\pi - \frac{2}{n^3}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{2}{n^3}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{4}{n^3} & jika \quad n \quad ganjil \\ 0 & jika \quad n \quad genap \end{cases}$$

Karena $\{\phi_n\}$ortonormal, maka deret menjadi :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n^3}\sin nx \qquad \text{atau} \qquad \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

$$(\text{n} = \text{ganjil})$$

Dengan kata lain :

$$\pi x - x^2 \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \qquad 0 \le x \le \pi,$$

Jika deret fungsi tersebut dijabarkan akan menjadi :

$$\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right]$$

Berdasarkan deret fungsi yang telah ditemukan, maka :

$$\phi_1(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 0 = 0, \qquad f(0) = 0$$

$$\phi_1(\pi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin \pi = 0, \qquad f(\pi) = 0$$

dapat dikatakan bahwa $f(0) = 0$ jika $\phi_1(0) = 0$ dan $f(\pi) = 0$ jika $\phi_1(\pi) = 0$. □

BAB IV

APLIKASI MASALAH STURM LIOUVILLE

Dalam bab ini akan dibahas mengenai penerapan masalah Sturm-Liouville dalam beberapa masalah, misalnya masalah vibrasi seutas dawai dan masalah aliran panas. Kedua masalah tersebut merupakan masalah nilai batas ordo kedua.

A. VIBRASI SEUTAS DAWAI

Vibrasi seutas dawai merupakan salah satu penerapan masalah Sturm-Liouville, kejadian ini misalnya dialami oleh dawai biola dengan asumsi memiliki persamaan gelombang berdimensi satu :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

dengan $u(x,t)$ adalah defleksi dawai tersebut. Dawai tersebut diikat pada kedua ujung $x = 0$ dan $x = L$, karenanya terdapat dua syarat batas :

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \text{ untuk semua } t \tag{4.2}$$

Bentuk gerak dawai itu tergantung pada defleksi awal ($t = 0$) dan kecepatan awal. Andaikan $f(x)$ adalah defleksi awalnya dan $g(x)$ adalah kecepatan awal, maka diperoleh dua **syarat awal** :

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \tag{4.3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \tag{4.4}$$

Langkah Pertama adalah Pemisahan Variabel

Dengan menggunakan metode hasil kali akan menghasilkan penyelesaian bagi persamaan gelombang (4.1) yang berbentuk :

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{4.5}$$

yang merupakan hasil kali dua fungsi yang tergantung pada peubah x dan t. Dengan mendiferensialkan (4.5) diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'' \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

dengan mensubstitusikan persamaan tersebut ke dalam persamaan (4.1), maka :

$$FG'' = c^2 F''G$$

Dengan membagi dengan c^2FG didapat :

$$\frac{G''}{c^2G} = \frac{F''}{F}$$

Ruas kiri adalah fungsi yang tergantung pada peubah t, dan ruas kanan adalah fungsi yang tergantung pada peubah x. Ini berarti ruas kanan maupun ruas kiri sama dengan konstanta, sehingga :

$$\frac{G''}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k$$

Ini menghasilkan dua persamaan differensial biasa linear, yaitu :

$$F'' - kF = 0 \tag{4.6}$$

dan

$$G'' - c^2kG = 0 \tag{4.7}$$

dengan k adalah sembarang bilangan.

Langkah Kedua : Memenuhi Syarat Batas

Dalam menentukan penyelesaian F dan G bagi (4.6) dan (4.7) sehingga $u = FG$ memenuhi syarat batas (4.2), yaitu :

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \qquad u(L,t) = F(L)G(t) = 0$$

untuk semua t.

Jika $G(t) = 0$, untuk semua t, maka $u = 0$, sehingga ini akan menyebabkan penyelesaian trivial. Namun jika $G(t) \neq 0$, maka :

$$F(0) = 0 \qquad \text{dan} \qquad F(L) = 0. \tag{4.8}$$

(i) Untuk $k = 0$, penyelesaian umum bagi (4.6) adalah $F = ax + b$, sehingga dari (4.8) diperoleh $a = b = 0$. Ini meyebabkan $F = 0$, dan menyebabkan penyelesaian trivial.

(ii) Untuk $k = \mu^2$ positif, penyelesaian umum bagi (4.5) adalah :

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},$$

Karena $F(0) = 0$, maka $A + B = 0$, sehingga $A = -B$. Diketahui juga $F(L) = 0$, maka

$$0 = Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L}$$

$$0 = -Be^{\mu L} + Be^{-\mu L}$$

Karena nilai bilangan eksponensial tidak pernah nol, maka haruslah $B = 0$, dan mengakibatkan $A = 0$. Oleh karena itu, diperoleh $F(x) = 0$, sehingga ini juga menyebabkan penyelesaian trivial.

(iii) Untuk k negatif, misalnya $k = -p^2$. Persamaan (4.6) menjadi :

$$F'' + p^2 F = 0$$

Dengan penyelesaian umumnya adalah :

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Dari persamaan tersebut dan dari persamaan (4.8) diperoleh :

$$F(0) = A = 0 \qquad \text{sehingga} \qquad F(L) = B\sin pL = 0$$

Ambil $B \neq 0$ supaya tidak menghasilkan penyelesaian trivial. Ini berarti $\sin pL = 0$ yang mengakibatkan :

$$pL = n\pi \qquad \text{atau} \qquad p = \frac{n\pi}{L} \tag{4.9}$$

dengan $n = 1, 2, \ldots.$

Dengan mengambil $B = 1$, dapat diperoleh tak hingga banyaknya penyelesaian $F(x) = F_n(x)$, dengan

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x \tag{4.10}$$

dengan $n = 1, 2, \ldots.$, sehingga penyelesaian tersebut memenuhi (4.8).

Bilangan $k = -p^2 = -(n\pi / L)^2$, yang berasal dari (4.9) disubstitusikan dalam persamaan (4.7), diperoleh :

$$G'' + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \text{dengan} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

Penyelesaian umumnya adalah :

$$G_n(t) = B_n\cos\lambda_n t + C_n\sin\lambda_n t.$$

Jadi, fungsi-fungsi $u_n(x, t) = F_n(x)\, G_n(t)$, yaitu :

$$u_n(x,t) = (B_n\cos\lambda_n t + C_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x. \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.11}$$

merupakan penyelesaian bagi (4.1) yang memenuhi syarat batas (4.2). Fungsi-fungsi tersebut adalah *fungsi eigen*, dengan *nilai eigennya* adalah $\lambda_n = cn\pi / L$.

Setiap u_n merepresentasikan suatu gerak harmonik yang memiliki frekuensi $\lambda_n / 2\pi = cn/2L$ siklus per satuan waktu. Gerak ini dinamakan *modus normal* ke-n dawai tersebut. Modus normal pertama dikenal sebagai *modus dasar* (*fundamental mode*) ($n = 1$) , sedangkan yang lain dikenal sebagai *overtone*; pada musik, modus-modus tersebut menghasilkan oktaf. Dalam persamaan (4.11)

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = 0 \quad \text{pada} \quad x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots, \frac{(n-1)}{n}L$$

maka modus normal ke-n memiliki (n – 1) yang disebut sebagai *simpul* (*nodes*), yaitu titik pada dawai yang tidak bergerak.

Langkah Ketiga : Solusi Masalah Keseluruhan

Fungsi-fungsi $u_n(x, t) = F_n(x)\, G_n(t)$ juga dapat ditulis dengan :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} (B_n \cos\lambda_n t + C_n \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{4.12}$$

dengan $\lambda_n = cn\pi/L$. Dari syarat awal (4.3), diperoleh

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x). \tag{4.13}$$

Agar persamaan (4.12) memenuhi persamaan (4.3), maka harus dipilih koefisien-koefisien B_n sehingga $u(x, 0)$ menjadi deret separuh kisaran (*half-range expansion*) bagi $f(x)$, yaitu deret sinus Fourier bagi $f(x)$. Jadi,

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4.14}$$

Dengan mendifferensialkan persamaan (4.12) terhadap t, dan dengan menggunakan syarat awal kedua, yaitu (4.4), diperoleh :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-B_n\lambda_n \sin\lambda_n t + C_n\lambda_n \cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x).$$

Agar persamaan (4.12) memenuhi persamaan (4.4), koefisien-koefisien C_n harus dipilih, untuk $t = 0$, turunan $\partial u/\partial t$ menjadi deret sinus Fourier bagi $g(x)$, jadi

$$C_n\lambda_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (4.15)$$

Persamaan (4.12) dengan koefisien-koefisien (4.14) dan (4.15) adalah salah satu solusi bagi (4.1) yang memenuhi syarat (4.2), (4.3) dan (4.4).

Diambil kasus khusus yaitu kecepatan awal $g(x)$ adalah nol, dan ini mengakibatkan C_n bernilai nol dan persamaan (4.12) tereduksi menjadi

$$u_n(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi}{L}x. \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}. \qquad (4.16)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\lambda_n = cn\pi/L$ dalam persamaan , maka

$$\cos\frac{cn\pi}{L}t\,\sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right].$$

Dengan demikian persamaan (4.16) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$

atau

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left(\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right)$$

Karena defleksi awal $f(x)$ kontinu pada interval $0 \le x \le L$ dan bernilai nol dikedua titik ujungnya, maka $u(x, t)$ merupakan suatu fungsi yang kontinu untuk semua nilai x dan t. Fungsi $u(x, t)$ merupakan solusi bagi (4.1), jika $f(x)$ terdifferensialkan dua kali pada interval $0 \leq x \leq L$, dan memiliki turunan kedua pada $x = 0$ yang bernilai nol. Berdasarkan kondisi tersebut, terbukti bahwa $u(x, t)$ merupakan solusi bagi (4.1) yang memenuhi (4.2) sampai (4.4).

Contoh 4.1.1

Carilah penyelesaian dari

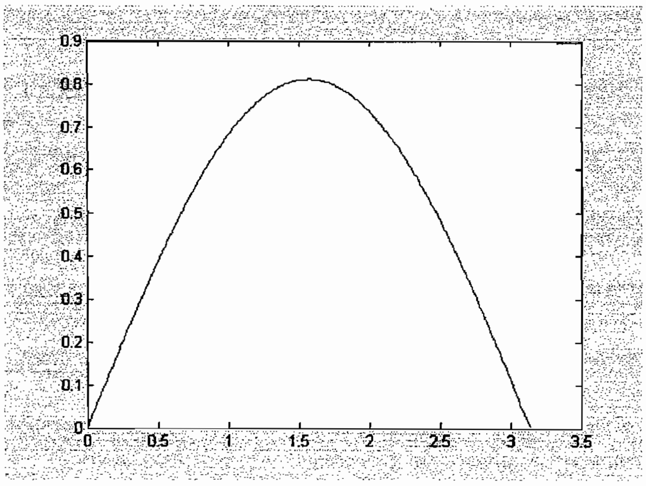
$$4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

yang memenuhi kondisi-kondisi:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \qquad u_t(0, t) = 0$$

dan defleksi awalnya yaitu $u(x, 0) = f(x) = \dfrac{8}{\pi^2}\sin x$.

gambar untuk $f(x) = \dfrac{8}{\pi^2}\sin x$



Penyelesaian :

Ambil $u = XT$, dengan X adalah fungsi yang hanya tergantung pada x saja, dan T adalah fungsi yang hanya tergantung pada t saja. Substitusikan ke persamaan differensialnya, sehingga didapat

$$XT'' = \frac{25}{4}X''T$$

Dengan syarat batas

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{dan} \qquad u(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0$$

Karena masing-masing sisinya harus konstan, misalnya $-\lambda^2$, maka diperoleh

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \;\; \text{dan} \qquad T'' + \frac{25}{4}\lambda^2 T = 0$$

Karena jika $T(t) = 0$, untuk semua t, maka $u = 0$, sehingga ini akan menyebabkan penyelesaian trivial. Namun jika $T(t) \neq 0$, sehingga :

$$X(0) = 0 \qquad \text{dan} \qquad X(\pi) = 0.$$

Penyelesaian umum dari $X'' + \lambda^2 X = 0$ adalah

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

Karena $X(0) = 0$, maka $A = 0$, sehingga $X(\pi) = B \sin \lambda\pi = 0$. Namun $B \neq 0$, maka $\sin \lambda\pi = 0$, dengan $\lambda\pi = n\pi$, sehingga $\lambda = n$, dengan $n = 1, 2, \ldots.$

Dengan mengambil $B = 1$, didapat

$$X_n(x) = \sin nx, \text{ dengan } n = 1, 2, \ldots$$

Penyelesaian umum dari $T'' + \frac{25}{4}\lambda^2 T = 0$ adalah

$$T_n(t) = C \cos \frac{5}{2}nt + D \sin \frac{5}{2}nt$$

karena $\lambda = n$, dengan $n = 1, 2, \ldots.$

Dengan demikian, penyelesaian yang dicari adalah

$$u(x,t) = (\sin nx)(C_n \cos \frac{5}{2} nt + D_n \sin \frac{5}{2} nt)$$

Dengan kondisi batas $u(x, 0) = f(x)$, diperoleh

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = f(x)$$

Agar persamaan (4.12) memenuhi persamaan (4.3), maka harus dipilih koefisien-koefisien C_n sehingga $u(x, 0)$ menjadi deret separuh kisaran (*half-range expansion*) bagi $f(x)$, yaitu deret sinus Fourier bagi $f(x)$. Jadi,

$$C_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x \sin nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2}{\pi}(\pi - x) \sin nx\, dx\right] = \frac{4}{\pi^2}\left[\int_0^{\pi/2} x \sin nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n}\cos nx dx + \left[-\frac{(\pi - x)}{n}\cos nx\right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{n}\cos nx dx\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\left[-\frac{\pi}{2n}\cos nx\right] + \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\pi}{2n}\cos nx\right] - \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}n - 0\right) - \left(\sin n\pi - \sin\frac{\pi}{2}n\right)\right] = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}n$$

karena nilai $\sin n\pi = 0$, dengan $n = 1, 2, \ldots$

Persamaan penyelesaian $u(x, t)$ didefferensialkan, dan menghasilkan :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2} n \sin nx\left(D_n \cos\frac{5}{2}nt - C_n \sin\frac{5}{2}nt\right)$$

Karena kondisi batas $u_t(x, 0) = 0$, maka

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2} n\, D_n \sin nx = g(x)$$

Koefisien-koefisien D_n harus dipilih, untuk $t = 0$, turunan $\partial u/\partial t$ menjadi deret sinus Fourier bagi $g(x)$, jadi

$$\frac{5}{2}n\,D_n = \frac{2}{\frac{5}{2}n\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Karena diketahui syarat batas kecepatan awal $g(x)$ adalah nol, maka mengakibatkan D_n bernilai nol dan persamaan (4.12) tereduksi menjadi

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}n\sin nx\cos\frac{5}{2}nt$$

atau

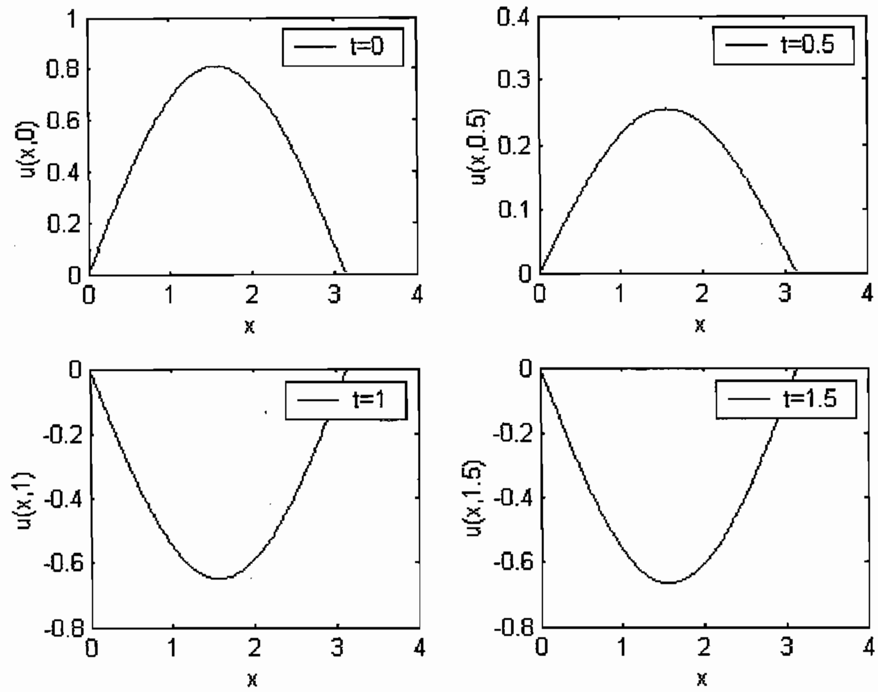
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}n\left[\frac{1}{2}\left(\sin n\left(x-\frac{5}{2}t\right)+\sin n\left(x+\frac{5}{2}t\right)\right)\right]$$

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{2}n\left(\sin n\left(x-\frac{5}{2}t\right)+\sin n\left(x+\frac{5}{2}t\right)\right)$$

Jadi, penyelesaiannya adalah

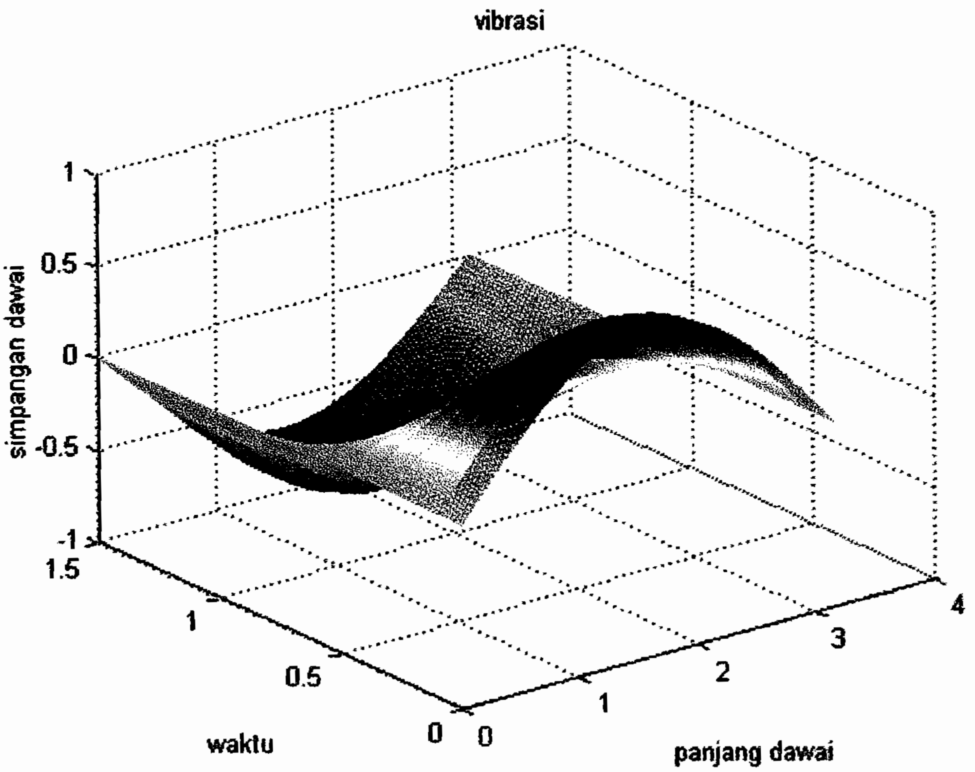
$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\left[\sin x\cos\frac{5}{2}t-\frac{1}{9}\sin 3x\cos\frac{15}{2}t+\ldots\right] \qquad \square$$

Vibrasi seutas dawai dengan n = 1, t = 0, 0.5, 1, 1.5



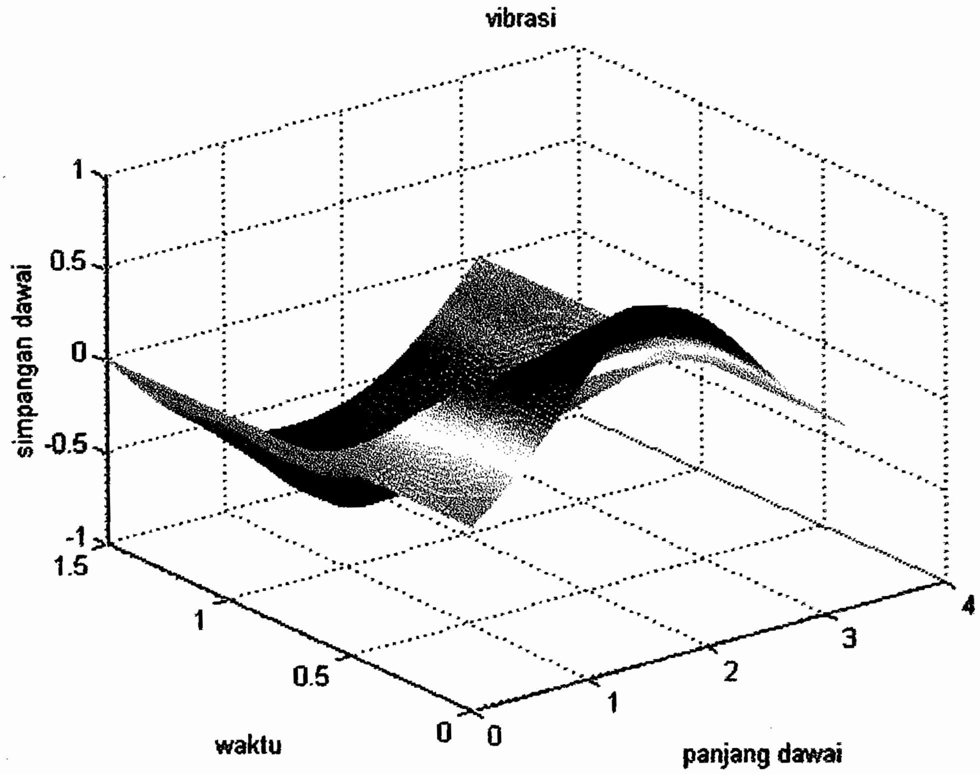
Grafik dengan 0 < t < 1.5 dan n = 1

```
[x,t]=meshgrid(0:0.01:pi, 0:0.1:1.5);
z=(8./(pi.^2)).*sin(x).*cos(5.*t./2);
xlabel('panjang dawai'),ylabel('waktu'),zlabel('simpangan dawai');
title('vibrasi seutas dawai');
mesh(x,t,z)
```



Grafik dengan 0 < t < 1.5 dan n = 2

```
[x,t]=meshgrid(0:0.01:pi, 0:0.1:1.5);
z=(8./(pi.^2)).*((sin(x).*cos(5.*t./2))-((1./9).*sin(3.*x).*cos(15.*t./2)));
xlabel('panjang dawai'),ylabel('waktu'),zlabel('simpangan dawai');
title('vibrasi seutas dawai');
mesh(x,t,z)
```



B. KONDUKSI PANAS

Sebuah batang konduksi tipis dengan difusivitas k, ujung-ujungnya terletak pada $x = 0$ dan $x = L$ yang terletak pada sumbu x. Permukaan lateralnya diisolasi sehingga panas tak bisa masuk atau keluar. Ujung-ujung $x = 0$ dan $x = L$ dijaga agar selalu bertemperatur 0. Jika temperature awalnya adalah $f(x)$, dengan $0 < x < L$, cari temperatur batang tersebut pada setiap titik x pada waktu t.

Penyelesaian :

Masalah ini adalah masalah konduksi panas satu dimensi, karena temperaturnya hanya tergantung pada posisi x pada setiap waktu t. Oleh karena itu dapat ditulis dengan $u(x,t)$. Persamaan konduksi panas untuk temperatur batang yang permukaannya diisolasi adalah :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < L, t > 0) \tag{4.17}$$

Karena ujung-ujungnya dijaga agar temperaturnya nol, maka diperoleh syarat batas

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t > 0 \tag{4.18}$$

Karena temperature awalnya adalah $f(x)$, maka

$$u(x, 0) = f(x) \qquad 0 < x < L \qquad |u(x,t)| < M \tag{4.19}$$

Langkah Pertama : *Metode Pemisahan Variabel*

Untuk menyelesaikan masalah nilai batas ini, gunakan metode hasil kali

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{4.20}$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = FG' \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \tag{4.21}$$

Subsitusikan persamaan (4.21) ke persamaan (4.17), sehingga didapat

$$FG' = kF''G$$

Untuk memisahkan varibel, bagi kedua ruas persamaan tersebut dengan $kF''G$, maka didapat

$$\frac{G'}{kG} = \frac{F''}{F} = -\lambda \tag{4.22}$$

Ruas kiri hanya tergantung pada t, dan ruas kanan hanya tergantung pada x. Oleh karena itu kedua ruas tersebut sama dengan suatu konstanta, misalnya $-\lambda$, sehingga diperoleh

$$F'' + \lambda F = 0 \tag{4.23}$$

dan

$$G' + k\lambda G = 0 \tag{4.24}$$

untuk λ adalah sembarang bilangan.

Langkah Kedua : *Memenuhi Syarat Batas*

Dalam menentukan penyelesaian F dan G bagi (4.23) dan (4.24) sehingga $u = FG$ memenuhi syarat batas (4.18), yaitu :

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \tag{4.25}$$

dan

$$u(L,t) = F(L)G(t) = 0, \tag{4.26}$$

untuk semua t.

Jika $G(t) = 0$, untuk semua t, maka $u = 0$, sehingga ini akan menyebabkan penyelesaian trivial. Namun jika $G(t) \neq 0$, sehingga :

$$F(0) = 0 \qquad \text{dan} \qquad F(L) = 0. \tag{4.27}$$

(i) untuk $\lambda = 0$ penyelesaian umum bagi (4.23) adalah $F = ax + b$, sehingga dari (4.27) diperoleh $a = b = 0$. Ini menyebabkan $F = 0$, dan menyebabkan penyelesaian trivial.

(ii) untuk $\lambda = -\mu^2$ negatif, penyelesaian umum bagi (4.20) adalah :

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},$$

Karena $F(0) = 0$, maka $A + B = 0$, sehingga $A = -B$. Diketahui juga $F(L) = 0$, maka

$$0 = Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L}$$

$$0 = -Be^{\mu L} + Be^{-\mu L}$$

Karena nilai bilangan eksponensial tidak nol, maka haruslah $B = 0$, dan mengakibatkan $A = 0$. Oleh karena itu, diperoleh $F(x) = 0$, sehingga ini juga menyebabkan penyelesaian trivial.

(iii) untuk $\lambda = \mu^2$ positif. Persamaan (4.27) menjadi :

$$F'' + \mu^2 F = 0$$

Dengan penyelesaian umumnya adalah :

$$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x.$$

Dari persamaan tersebut dan dari persamaan (4.8) diperoleh :

$$F(0) = A = 0 \qquad \text{sehingga} \qquad F(L) = B\sin\mu L = 0$$

Ambil $B \neq 0$ supaya tidak menghasilkan penyelesaian trivial. Ini berarti $\sin\mu L = 0$ yang mengakibatkan :

$$\mu L = n\pi \qquad \text{atau} \qquad \mu = \frac{n\pi}{L} \tag{4.28}$$

dengan $n = 1, 2, \ldots.$

Oleh karena itu diperoleh penyelesaian $F(x) = F_n(x)$, dengan

$$F_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \tag{4.29}$$

dengan $n = 1, 2, \ldots.$, sehingga penyelesaian tersebut memenuhi (4.27).

Bilangan $\lambda = \mu^2 = (n\pi / L)^2$, yang berasal dari (4.28) disubstitusikan dalam persamaan (4.24), diperoleh :

$$G' + k\mu^2 G = 0 \qquad \text{dengan} \qquad \mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Penyelesaian umumnya adalah

$$G_n(t) = D_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \tag{4.30}$$

Substitusikan persamaan (4.29) dan (4.30) ke (4.20), sehingga didapatkan penyelesaian :

$$u_n(x,t) = C_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

dengan $C_n = B_n D_n$.

Langkah Ketiga : *Solusi Masalah Keseluruhan*

Dan dengan menggunakan prinsip superposisi, maka didapatkan penyelesaian :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Kondisi batas $u(x, 0) = f(x)$ akan menghasilkan :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$$

dengan $C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$.

Jadi, penyelesaiannya adalah

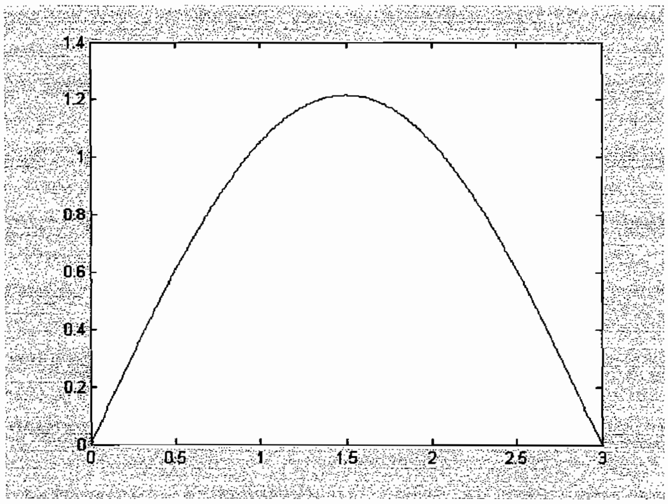
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\left(e^{-n^2\pi^2kt/L^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Contoh 4.2.1

Selesaikan $\dfrac{\partial u}{\partial t}=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<3, t>0$,

dengan $u(0, t) = u(3, t) = 0$, dan suhu awal $u(x, 0) = f(x) = \dfrac{12}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi}{3}x$.

Gambar untuk $f(x) = \dfrac{12}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi}{3}x$



kondisi yang terakhir ini menunjukkan bahwa u dibatasi untuk $0<x<3, t>0$.

Penyelesaian :

Ambil $u = XT$, dengan X adalah fungsi yang hanya tergantung pada x saja, dan T adalah fungsi yang hanya tergantung pada t saja. Substitusikan ke persamaan differensialnya, sehingga didapat

$$XT'' = 2X''T$$

Dengan syarat batas

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{dan} \qquad u(3, t) = X(3)T(t) = 0$$

Karena masing-masing sisinya harus konstan, misalnya $-\lambda^2$, maka diperoleh

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad \text{dan} \qquad T' + 2\lambda^2 T = 0$$

Karena jika $T(t) = 0$, untuk semua t, maka $u = 0$, sehingga ini akan menyebabkan penyelesaian trivial. Namun jika $T(t) \neq 0$, sehingga :

$$X(0) = 0 \qquad \text{dan} \qquad X(3) = 0.$$

Penyelesaian umum dari $X'' + \lambda^2 X = 0$ adalah

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

Karena $X(0) = 0$, maka $A = 0$, sehingga $X(\pi) = B \sin \lambda\pi = 0$. Namun $B \neq 0$, maka $\sin \lambda\pi = 0$, dengan $\lambda\pi = n\pi$, sehingga $\lambda = n$, dengan $n = 1, 2, \ldots.$

Dengan mengambil $B = 1$, didapat

$$X_n(x) = \sin nx, \text{ dengan } n = 1, 2, \ldots$$

Penyelesaian umum dari $T' + 2\lambda^2 T = 0$ adalah

$$T(t) = C\, e^{-2\lambda^2 t}$$

karena $\lambda = n$, dengan $n = 1, 2, \ldots.$

Dengan demikian, penyelesaian yang dicari adalah

$$u(x,t) = Ce^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

Karena $u(3, t) = 0$, maka $u(3,t) = Ce^{-2\lambda^2 t} \sin 3\lambda = 0$.

Jika $C = 0$, maka akan menghasilkan penyelesaian trivial, oleh karena itu $C \neq 0$, sehingga $\sin 3\lambda = 0$ atau $3\lambda = m\pi$, $\lambda = \frac{m\pi}{3}$, dengan $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$ Dengan demikian

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} C_m \, e^{-2m^2\pi^2 t/9} \sin\frac{m\pi}{3}x$$

Dengan menggunakan syarat batas yang terakhir, diperoleh

$$u(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\frac{m\pi}{3}x = f(x)$$

$$C_m = \frac{2}{3}\left[\int_0^{3/2} x\sin\frac{m\pi}{3}x\,dx + \int_{3/2}^{3}(\pi - x)\sin\frac{m\pi}{3}x\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left(\left[-\frac{3x}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{3}x\right]_0^{3/2} + \int_0^{3/2}\frac{3}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{3}x\,dx - \left[\frac{3(3-x)}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{3}x\right]_{3/2}^{3} - \int_{3/2}^{3}\frac{3}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{3}x\,dx\right)$$

$$=2\left(\left[-\frac{3}{2m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}\right]+\left[\frac{3}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{3}x\right]_0^{3/2}+\left[\frac{3}{2m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}\right]-\left[\frac{3}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{3}x\right]_{3/2}^{3}\right)$$

$$=\frac{6}{m^2\pi^2}\left[\left(\sin\frac{m\pi}{2}-0\right)-\left(\sin m\pi - \sin\frac{m\pi}{2}\right)\right]=\frac{12}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}.$$

Jadi, persamaan $u(x,t)$ menjadi

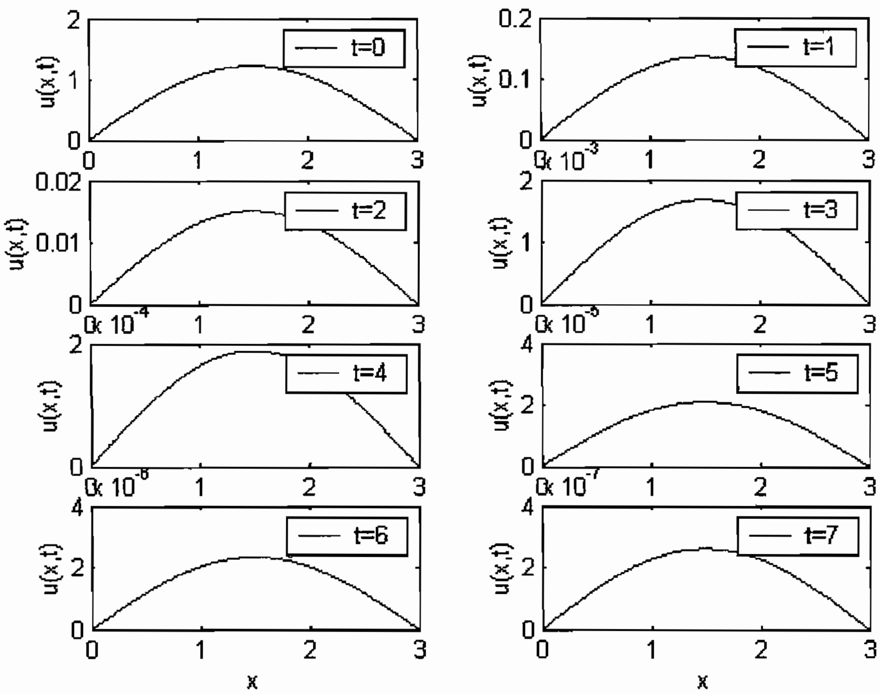
$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{12}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}e^{-2m^2\pi^2 t/9}\sin\frac{m\pi}{3}x.$$

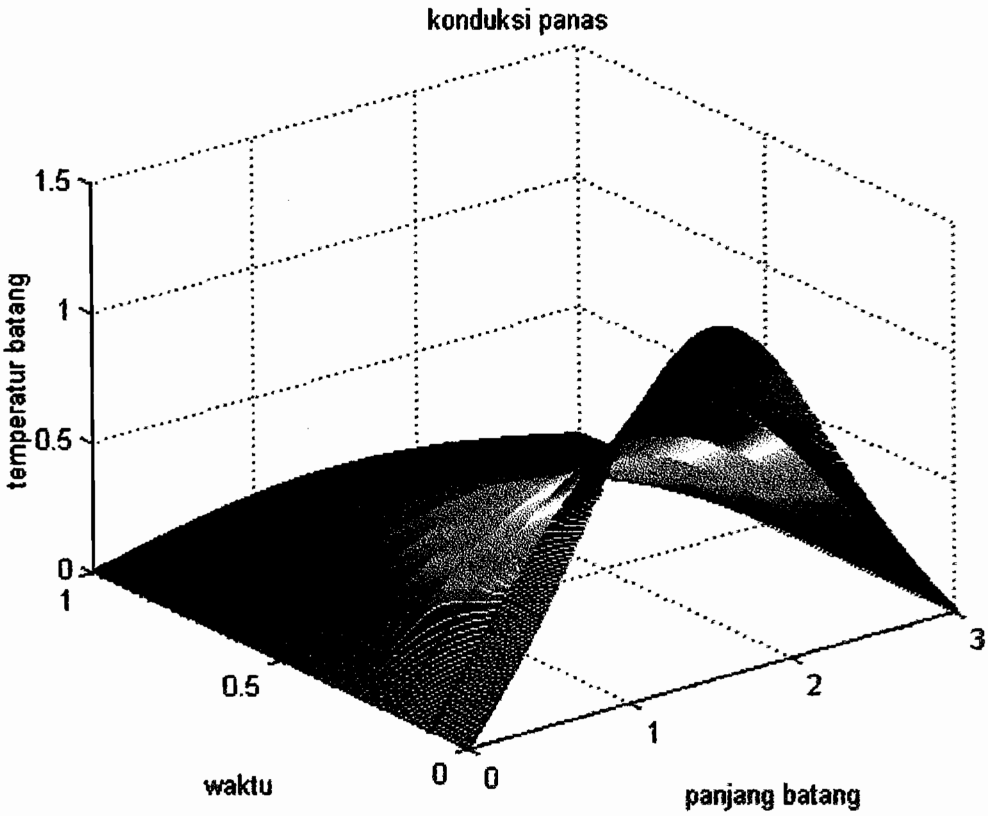
Dengan demikian solusinya adalah

$$u(x,t)=\frac{12}{\pi^2}\left[e^{-2\pi^2 t/9}\sin\frac{\pi}{3}x-\frac{1}{9}e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x+\frac{1}{25}e^{-50\pi^2 t/9}\sin\frac{5\pi}{3}x-\ldots\right]$$

□

Konduksi panas dengan n=1, t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7





Grafik dengan $0 < t < 1$ dan $n = 1$

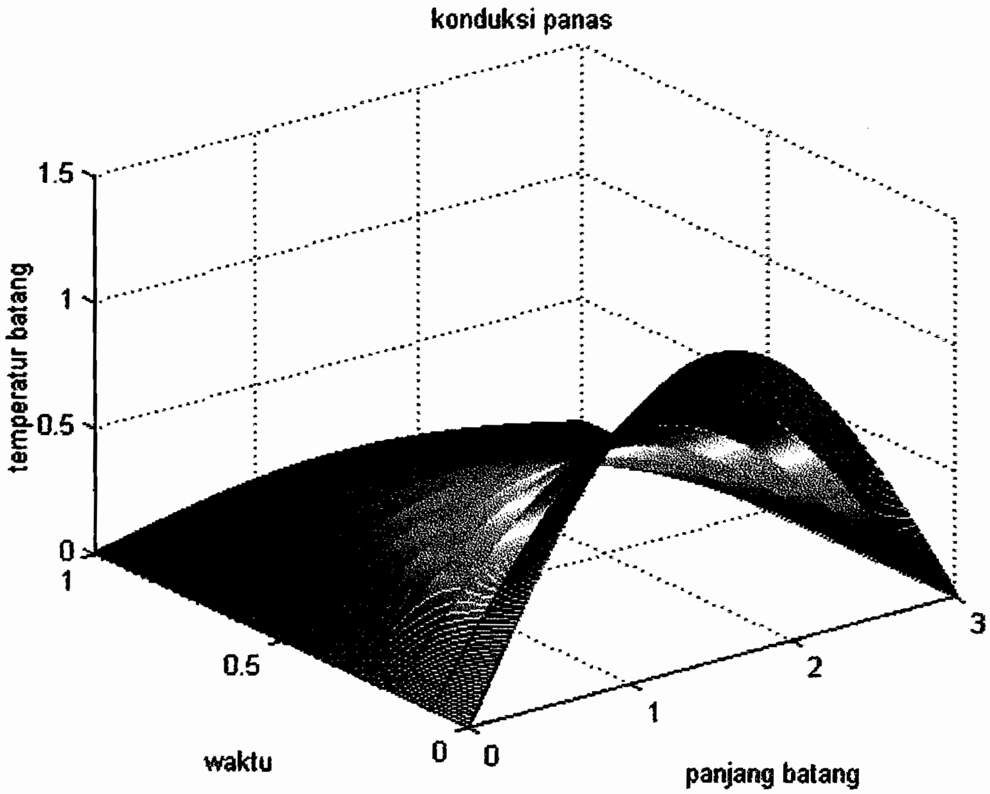
```
[x,t]=meshgrid(0:0.01:3, 0:0.1:1);

z=(12./(pi.^2)).*((exp(-2.*(pi.^2).*t./9).*sin(pi.*x./3))-((1./9).*((exp(-
2.*(pi.^2).*t).*sin(pi.*x)))));

xlabel('panjang batang'),ylabel('waktu'),zlabel('temperatur batang');

title('konduksi panas');

mesh(x,t,z)
```



Grafik dengan 0 < t < 1 dan n = 1

```
[x,t]=meshgrid(0:0.01:3, 0:0.1:1);

z=(12./(pi.^2)).*((exp(-2.*(pi.^2).*t./9).*sin(pi.*x./3)));

xlabel('panjang batang'),ylabel('waktu'),zlabel('temperatur batang');

title('konduksi panas');

mesh(x,t,z)
```

BAB V

PENUTUP

Dua fungsi *f(x)* dan *g(x)* yang berada pada selang $a \le x \le b$ disebut ortogonal jika fungsi-fungsi tersebut bernilai nyata , sedemikian hingga integral hasil kalinya *f(x)* . *g(x)* pada selang tersebut bernilai nol, dengan kata lain

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \,.$$

Fungsi-fungsi yang saling orthogonal ini dibutuhkan dalam penyelesaian masalah ordo kedua linier, khususnya dalam masalah nilai batas Sturm-Liouville.

Masalah Sturm-Liouville adalah persamaan differensial ordo kedua linier yang berbentuk

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [Q(x) + \lambda R(x)]y = 0$$

dengan *P, Q,* dan *R* adalah fungsi bernilai real yang kontinu, *P* mempunyai turunan, *Q(x)*>0 dan *R(x)*>0 untuk setiap $x \in$ **R** yang berada pada interval $a \le x \le b$ dan λ adalah parameter.

Persamaan tersebut harus memenuhi syarat :

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0$$
$$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0$$

dimana k_1, k_2, l_1, dan l_2 adalah konstanta bilangan real yang tidak nol atau keduanya tidak nol.

Masalah Sturm-Liouville ini memiliki nilai parameter λ yang dapat menyebabkan masalah Sturm-Liouville ini memiliki penyelesaian trivial, yaitu $y = 0$, namun λ dapat juga menyebabkan masalah ini memiliki penyelesaian nontrivial, yaitu $y \neq 0$. Penyelesaian nontrivial tersebut disebut fungsi eigen dan λ yang berkaitan dengan fungsi eigen y disebut nilai eigen.

Penerapan masalah Sturm-Liouville ini ditemui dalam bidang fisika yaitu :

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah masalah vibrasi seutas dawai

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah masalah konduksi panas.

Permasalahan yang dihadapi adalah mencari fungsi eigen dan nilai eigen pada masalah nilai batas pada vibrasi seutas dawai dan konduksi panas yang merupakan masalah Sturm-Liouville. Masalah nilai bats tersebut adalah :

1. Masalah vibrasi seutas dawai : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, \qquad \text{untuk semua } t$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

dengan $f(x)$ adalah defleksi awalnya dan $g(x)$ adalah kecepatan awalnya. Fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan syarat awal.

2. Masalah konduksi panas : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\qquad (0 < x < L,\ t > 0)$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \qquad |u(x,t)| < M$$

dengan $f(x)$ adalah temperatur awal, dan M menunjukkan bahwa u harus dibatasi untuk $0 < x < L$, $t > 0$.

Terdapat tiga langkah dalam penyelesaian masalah nilai batas ini, yaitu :

(i) menyelesaikan persamaan dengan metode pemisahan variable

(ii) memenuhi syarat batas

(iii) solusi masalah keseluruhan

dengan cara memasukkan syarat awal ke dalam penyelesaian umum.

Penyelesaiannya berupa fungsi dalam variable x dan t, juga merupakan fungsi eigen –fungsi eigen yang orthogonal pada suatu interval dalam masalah Sturm-Liouville tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Ross, Shepley L.(1984). *Differential Equations*, Third Edition, United States of America: John Wiley & Sons.

Kreyszig, Erwin. (1993). *Matematika Teknik Lanjutan.* Jakarta : Gramedia Pustaka Utama.

Simmons, George F. (1985). *Differential Equations with Applications and Historical notes.* New York : McGraw-Hill.

Agarwal, Ravi P., Gupta, Ramesh C. (1993). *Essentials of Ordinary Differential Equations*. Singapore : McGraw & Hill.

Andrew, Larry C. (1986). *Elementary Partial Differential Equations With Boundary Value Problems.* Orlando, Florida: Academic Press College.

Folland, Gerald B. (1992). *Fourier Analysis and Its Application.* University of Washington.

Spiegel, Murray R. (1986). *Analisis Fourier.* Jakarta : Erlangga.

Plaat, Otto. (1971). *Ordinary Differential Equations.* University of San Fransisco.

Edwards , Jr., C.H., Penney, David E. (1993). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems (third ed.).* University or Georgia.

LAMPIRAN I

DAFTAR TEOREMA-TEOREMA

Teorema 2.1	*: Sifat Vektor pada Ruang Vektor*
Teorema 2.2	*: Syarat Ruang Bagian*
Teorema 2.3	*: Kombinasi Linear*
Teorema 2.4	*: Sifat Ruang hasil kali dalam Real*
Teorema 2.5	*: Hubungan antara vektor orthogonal dan bebas linear*
Teorema 2.6	*: Sifat dua Ruang bagian yang saling orthogonal*
Teorema 3.1 dan Teorema 3.2	*: Teorema Eksistensi dan Ketunggalan*
Teorema 3.3	*: Pembuat nol yang tak hingga banyaknya*
Teorema 3.4	*: Dua penyelesaian yang bebas linear*
Teorema 3.5	*: Dua penyelesaian yang mempunyai pembuat nol yang sama*
Teorema 3.6	*: Sturm's Separation Theorem*
Teorema 3.7	*: Sturm's Comparison Theorem*
Teorema 3.8	*: Eksistensi Masalah Sturm-Liouville*
Teorema 3.9	*: Keortogonalan Fungsi Eigen*
Teorema 3.10	*: Sifat Nilai Eigen*
Teorema 3.11	*: Sifat Fungsi Eigen*
Teorema 3.12	*: Himpunan Fungsi Eigen*
Teorema 3.13	*: Himpunan Fungsi Eigen yang ortonormal*
Teorema 3.14	*: Koefisien dari deret yang konvergen ke $f(x)$*

LAMPIRAN II

DAFTAR DEFINISI DAN LEMMA

Definisi 2.1 : *Ruang Vektor*

Definisi 2.2 : *Ruang Bagian*

Definisi 2.3 : *Kombinasi Linear*

Definisi 2.4 : *Himpunan Perentang*

Definisi 2.5 : *Kumpulan Vektor bebas linear*

Definisi 2.6 : *Basis untuk Ruang Vektor*

Definisi 2.7 : *Hasil kali dalam pada Ruang Vektor Real*

Definisi 2.8 : *Norm pada Ruang hasil kali dalam Real*

Definisi 2.9 : *Keorthogonalan pada Ruang hasil kali dalam Real*

Definisi 2.10 : *Himpunan Orthogonal*

Definisi 2.11 : *Himpunan Ortonormal*

Definisi 2.12 : *Orthogonalitas dua Ruang Bagian*

Definisi 2.13 : *Komplemen Orthogonal*

Definisi 3.1 : *Masalah Sturm-Liouville*

Definisi 3.2 : *Sifat Normal terhadap fungsi pembobot*

Definisi 3.3 : *Syarat Himpunan Ortonormal*

Lemma 3.1 : *Abel's Formula*

Lemma 3.2 : *Pembuat nol dari dua penyelesaian nontrivial*

Lemma 3.3 : *Sifat pembuat nol dari penyelesaian nontrivial*