PROSIDING SEMINAR NASIONAL
ALJABAR, PENERAPAN DAN PEMBELAJARANNYA

Kontribusi Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya dalam Mencerdaskan Bangsa

Editor

Beni Utomo
Antonius Yudhi Anggoro

Kontributor:

Henry W. M. Patty | Samsul Arifin | Dian Rizki Fauzi | Maxrizal | Lucia Winda Cesari | Benedictus Dwi Yuliyanto | Yulia Indah Puspitasari | Iqbal Maulana | Arif Munandar | Iwan Ernanto | Ahmad Faisol | Indriati Nurul Hidayah | Dewa Putu Wiadnyana Putra | Elvira Kusniyanti | Na'imah Hijriati | Siswanto | Scolastika Lintang Rengganis Radityani | Ila Nurlailla Setyowati | Maria Rettian Anggita Sari | Yulius Wahyu Putranto | A. Tatak Handaya Kurniawan | Yokhanan A. | Paskalia Pradanti | Nurhidayah | Maria Kristin Sondang Sihombing | Ari Dwi Hartanto | Anindiati Praminto Putri | Annisa Nur Azizah | Lilik Andri Susanto | Lusia Devi Astuti | Catharina Mara Apriani | Dominikus Arif Budi Prasetyo | Christina Novy Wijaya | Yoanna Krisnawati | Novi Indriani | Trisona Agustina | Kartika Sari | Natalia Merry Dellani | Meta Dispini | Adventa Eklesiawati | Riandika Ratnasari | Almu Noor Romadoni | Yosep Dwi Kri

Sanata Dharma
University Press

DAFTAR ISI

PEMBELAJARAN ALJABAR

Pemodelan Jaringan dan Analisa Penjadwalan Kereta Api Komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus

[1]Scolastika Lintang Rengganis Radityani, [2]Marcellinus Andy Rudhito
Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta
[1]justlintang@gmail.com
[2]rudhito@usd.ac.id

Abstrak

Saat ini, penjadwalan kereta api komuter di Daerah Operasi VI (DAOP VI) Yogyakarta dibuat berdasarkan kebutuhan penumpang (konsumen), sehingga belum terjadi proses sinkronisasi. Proses sinkronisasi dalam jaringan transportasi penting untuk dilakukan guna menjamin tersedianya sarana transportasi, dalam hal ini kereta api komuter, pada saat penumpang dari suatu kereta api dengan rute tertentu ingin berpindah ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda. Oleh karena itu, pada penelitian ini dibuat suatu desain penjadwalan untuk keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan memperhatikan proses sinkronisasi. Salah satu cara untuk memudahkan penyusunan jadwal berdasarkan aturan sinkronisasi adalah menggunakan aljabar max-plus.

Penelitian ini bertujuan untuk menyusun suatu model jaringan dan menganalisa penjadwalan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta menggunakan aljabar max-plus. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi pustaka yang didukung dengan data lapangan dan proses komputasi dengan program *MATLAB*.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa matriks dari model jaringan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta dinyatakan sebagai matriks yang tidak *irreducible* (tereduksi). Hal ini diduga karena tidak semua lintasan terdapat kereta api komuter yang siap melayani sehingga lintasan tersebut seperti dianggap tidak ada. Berdasarkan hasil perhitungan dengan program *MATLAB,* didapatkan nilai eigen maksimum yaitu $\lambda(A) = 786$ dan vektor eigen yang berupa bilangan real, sehingga dapat dibuat penjadwalan kereta api komuter yang tersinkronisasi. Nilai eigen tersebut menyatakan periode keberangkatan kereta api komuter dari masing-masing stasiun, yaitu setiap 786 menit sekali atau setiap 13 jam 6 menit sekali. Sedangkan waktu keberangkatan awal kereta api komuter di setiap stasiun diperoleh dari vektor eigen.

Kata Kunci: *aljabar max-plus, nilai eigen, vektor eigen, jadwal, kereta api komuter*

1. Pendahuluan

Saat ini, pembuatan jadwal keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta didasarkan pada kebutuhan penumpang (konsumen), sehingga belum terjadi proses sinkronisasi. Proses sinkronisasi dalam jaringan transportasi penting untuk dilakukan guna menjamin tersedianya sarana transportasi pada saat penumpang ingin berpindah rute. Menurut Subiono (2015: 1), sinkronisasi memerlukan ketersediaan beberapa sumber pada saat yang bersamaan, dalam hal ini memerlukan ketersediaan kereta api untuk menjamin terjadinya perpindahan penumpang dari suatu kereta api dengan rute tertentu ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda.

Melihat pentingnya sinkronisasi dalam jaringan transportasi, maka pada penelitian ini dibuat suatu desain penjadwalan untuk keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan memperhatikan proses sinkronisasi.

Salah satu cara untuk memudahkan penyusunan jadwal berdasarkan aturan sinkronisasi adalah menggunakan aljabar max-plus. Langkah awal dalam melakukan penelitian ini adalah mengumpulkan data yang diperlukan seperti denah lintas DAOP VI Yogyakarta, jadwal keberangkatan, dan rute yang dilewati oleh kereta api komuter. Selanjutnya, dibuat aturan sinkronisasi untuk graf rute pilihan yang menjamin terjadinya perpindahan penumpang dari suatu kereta api dengan rute tertentu ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda. Kemudian, dibentuk suatu model matematika berdasarkan aturan sinkronisasi tersebut. Berdasarkan model ini, sistem dianalisis untuk membuat suatu desain penjadwalan yang memperhatikan sinkronisasi dan menentukan kesesuaiannya dengan kondisi real.

Penelitian ini memiliki beberapa asumsi, yaitu yang pertama kecepatan kereta api komuter dianggap tetap sehingga waktu tempuh kereta api komuter dari suatu stasiun ke stasiun yang lain dianggap tetap. Waktu tempuh inilah yang menjadi bobot pada graf rute pilihan. Rata- rata waktu tempuh merupakan hasil perhitungan dari total waktu yang diambil dari selisih jadwal waktu kedatangan dan waktu keberangkatan kereta api komuter, dan dari penelitian 2 kereta api komuter Prambanan Ekspres yang beroperasi pada pagi hari pukul 09.10-10.25 dan pada sore hari pada pukul 17.00-18.15 WIB. Selanjutnya, asumsi kedua yaitu distribusi jumlah kereta api pada setiap lintasan dianggap tetap sehingga distribusi jumlah kereta api pada waktu acuan yaitu pukul 09:42 dianggap tetap. Distribusi dan posisi kereta api pada waktu acuan tersebut ditentukan dari jadwal kereta api komuter yang sudah ada. Kemudian, asumsi yang ketiga yaitu jenis kereta api komuter yang digunakan dalam model tidak dibedakan. Dalam penelitian ini, proses komputasi untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks A yang didapatkan dari hasil pemodelan dilakukan dengan program *MALTAB*. Nilai eigen menyatakan periode keberangkatan kereta api komuter dari masing-masing stasiun, sedangkan waktu keberangkatan awal kereta api komuter di setiap stasiun diperoleh dari vektor eigen.

Dalam penelitian ini, masalah yang ditemukan memiliki perbedaan dengan dua penelitian serupa sebelumnya, dimana kedua penelitian tersebut memiliki persamaan yaitu terdapat minimal satu kereta api pada setiap lintasan dan tidak terdapat perbedaan intensitas pada suatu lintasan tertentu. Sedangkan dalam penelitian ini, terjadi perbedaan kerapatan artinya tidak semua lintasan yang dimodelkan dilewati oleh kereta api komuter dan terjadi perbedaan kepadatan atau intensitas pada rute Yogyakarta – Solo Balapan PP. Hal ini terlihat dari jadwal keberangkatan kereta api komuter yang telah ada. Dua penelitian serupa yang berhubungan dengan aplikasi aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api tersebut, yaitu penelitian yang dilakukan oleh Geert Jan Olsder, Subiono, dan Michael Mc Gettrick (2000, dalam Subiono, 2002) yang membentuk sebuah model dari seluruh sistem kereta api di Belanda menggunakan aljabar max-plus dan penelitian yang dilakukan oleh Ahmad Afif (2015) untuk membuat penjadwalan kereta api yang tepat demi mengurangi kelemahan kereta api dalam melayani ketepatan waktu kedatangan dan keberangkatan.

2. Landasan Teori

2.1. Definisi dan Sifat Dasar Aljabar Max-Plus

Secara singkat, aljabar max-plus dapat didefinisikan sebagai himpunan semua bilangan real $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dilengkapi dengan operasi maksimum (disingkat *max*) yang dinotasikan dengan $\oplus$ (dibaca *o-plus*) dan operasi penjumlahan (atau *plus*) yang dinotasikan dengan $\otimes$ (dibaca *o-times*), serta membentuk semilapangan idempoten. Seperti dalam aljabar biasa, prioritas urutan operasi dalam $\mathbb{R}_{\max}$ juga penting untuk diperhatikan. Apabila tidak diberikan tanda kurung, maka operasi $\otimes$ mempunyai prioritas yang lebih tinggi daripada operasi $\oplus$.

Operasi lainnya dalam $\mathbb{R}_{\max}$ yang memiliki prioritas tertinggi dibandingkan dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah operasi pangkat. Pangkat $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dengan $\mathbf{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli, dari elemen $x \in \mathbb{R}_{\max}$ yang dinotasikan dengan $x^{\otimes^n}$. Notasi $x^{\otimes^n}$ kemudian didefinisikan sebagai berikut: $x^{\otimes^0} \coloneqq 0$ dan $x^{\otimes^n} \coloneqq x \otimes x^{\otimes^{n-1}}$, untuk $n = 1, 2, \dots$.

Didefinisikan juga $\varepsilon^{\otimes^0} \coloneqq 0$ dan $\varepsilon^{\otimes^n} \coloneqq \varepsilon$, untuk $n = 1, 2, \dots$.

Diperhatikan bahwa $x^{\otimes^k} \coloneqq \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{k} = \underbrace{x + x + \dots + x}_{k} = kx$, dengan operasi perkalian pada bilangan real.

2.2. Matriks dan Vektor di $\mathbb{R}_{\max}$

2.2.1. Matriks di $\mathbb{R}_{\max}$

Definisi 1. *Diberikan* $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n} \coloneqq \left\{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}, i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\right\}$.

a. *Diketahui* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, *didefinisikan* $A \oplus B$ *adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:*
$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$$
b. *Diketahui* $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$, $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, *didefinisikan* $\alpha \otimes A$ *adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:*
$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes a_{ij} \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$$
c. *Diketahui* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, *didefinisikan* $A \otimes B$ *adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:*
$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj} \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$$

$(\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah matriks $\mathcal{E}$ dan elemen satuan adalah matriks E. Matriks E disebut juga sebagai *matriks identitas max-plus* dan matriks $\mathcal{E}$ disebut sebagai *matriks nol max-plus*.

Definisi 2. *Pangkat* $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ *dengan* $\boldsymbol{N}$ *adalah himpunan semua bilangan asli, dari matriks* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *dinotasikan dengan* $A^{\otimes^k}$. *Notasi* $A^{\otimes^n}$ *kemudian didefinisikan sebagai berikut:*
$$A^{\otimes^0} \coloneqq E_n \text{ dan } A^{\otimes^k} \coloneqq A \otimes A^{\otimes^{k-1}}, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots .$$
Jadi, untuk sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ berlaku :
$$(\alpha \oplus A)^{\otimes^k} = \alpha^{\otimes^k} \otimes A^{\otimes^k} \text{ ; untuk } k = 1, 2, \dots .$$
Untuk sebarang $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ didefinisikan $trace(A) \coloneqq \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}$.

2.2.2. Vektor di $\mathbb{R}_{\max}$

Definisi 3. *Diberikan semiring komutatif* $(\boldsymbol{S}, +, \times)$ *dengan elemen netral* ***0*** *dan elemen identitas* ***1***. *Semimodul* $\boldsymbol{M}$ *atas* $\boldsymbol{S}$ *adalah semigrup komutatif* $(\boldsymbol{M}, +)$ *bersama operasi perkalian skalar* $\bullet$: $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$, *yang dituliskan dengan* $(\alpha, x) \mapsto \alpha \bullet x$, *yang memenuhi aksioma berikut:*

$\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{S}$ dan $\forall x, y \in \boldsymbol{M}$ berlaku:

a. $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$

b. $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$

c. $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \bullet \beta) \bullet x$

d. $1 \bullet x = x$

e. $0 \bullet x = 0$

*Suatu elemen dalam semimodul disebut **vektor**.*

Diberikan vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ di dalam semimodul $\boldsymbol{M}$ dan skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ di dalam semiring komutatif $\boldsymbol{S}$. Didefinisikan *kombinasi linear* dari vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah suatu bentuk aljabar $\alpha_1 \bullet x_1 + \alpha_2 \bullet x_2 + \dots + \alpha_n \bullet x_n$.

2.3. Matriks dan Graf di $\mathbb{R}_{\max}$

Definisi 4. (Graf Bobot (*Precedence Graph),* Schutter, 1996 dalam Rudhito, 2016)

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Graf bobot atau preseden dari A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, D)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $D = \{(j, i) | w(i, j) = a_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Definisi 5. (M. Andy Rudhito, 2016)

Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, bobot suatu lintasan $\rho = i_1 \to i_2 \to \dots \to i_l$ dalam graf bobot $G(A)$ adalah $|\rho|_w = a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}}$. Bobot rata-rata lintasan ρ, dinotasikan dengan $|\bar{\rho}|$, didefinisikan sebagai $\frac{1}{|\rho|_l} \cdot |\rho|_w$ (dengan operasi perkalian dan pembagian pada bilangan real).

$\left(A^{\otimes^k}\right)_{st}$ adalah bobot maksimum semua lintasan dalam $G(A)$ dengan panjang *k*, dengan *t* sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya. Namun, apabila tidak ada lintasan dengan panjang *k* dari *t* ke *s,* maka bobot maksimum didefinisikan sama dengan ε. Selanjutnya, dijelaskan mengenai bobot rata-rata maksimum untuk sirkuit elementer, dengan maksimum diambil atas semua sirkuit elementer dalam suatu graf.

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, dengan graf bobotnya $G(A) = (V, E)$. Bobot maksimum dari semua sirkuit yang memiliki panjang *k* dengan titik *i* sebagai titik awal dan titik akhir dalam *G(A)* dinotasikan sebagai $\left(A^{\otimes^k}\right)_{ii}$. Maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit yang memiliki panjang *k* dengan titik *i* sebagai titik awal dan titik akhir dalam *G(A)* atas seluruh titik *i* adalah $\bigoplus_{k=1}^{n} \left(A^{\otimes^k}\right)_{ii} = trace\left(A^{\otimes^k}\right)$ dan bobot rata-ratanya adalah $\frac{1}{k} trace\left(A^{\otimes^k}\right)$. Kemudian, diambil maksimum atas sirkuit dengan panjang $k \leq n$, yaitu semua sirkuit elementer, diperoleh suatu rumus untuk bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam *G(A),* yang dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(A)$, yaitu

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(A^{\otimes^k}\right)\right)$$

2.4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen di $\mathbb{R}_{\max}$

Seperti halnya pada matriks real, konsep nilai eigen dan vektor eigen juga dipelajari pada matriks di $\mathbb{R}_{\max}$. Penjelasan diawali dengan membahas kembali konsep dalam aljabar max-plus dan graf yang berkaitan dengan pembahasan nilai eigen dan vektor eigen. Berikut didefinisikan terlebih dahulu suatu matriks yang graf bobotnya terhubung kuat.

Definisi 6. (Subiono, 2015)
Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dikatakan irreducible (tak-tereduksi) jika graf G(A) adalah strongly connected (terhubung kuat). Lebih lanjut, matriks tak-tereduksi adalah matriks yang tidak dapat dikonstruksi menjadi bentuk matriks segitiga atas.

Teorema 1. *Matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ irreducible (tak-tereduksi) jika dan hanya jika $\left(A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes^{n-1}}\right)_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.*

Selanjutnya, dibahas mengenai konsep nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks di $\mathbb{R}_{\max}$.

Definisi 7. (Schutter, 1996 dalam M. Andy Rudhito, 2016)
Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ disebut nilai eigen max-plus matriks A jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dengan $v \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sehingga $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Vektor v tersebut disebut vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ.

Berikut diberikan teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen aljabar max-plus. Untuk setiap matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, $\lambda_{\max}(A)$ adalah nilai eigen $\mathbb{R}_{\max}$.

Lemma 1. *Jika matriks irreducible (tak-tereduksi) $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ mempunyai nilai eigen λ dengan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen $\mathbb{R}_{\max}$ yang bersesuaian dengan λ, maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Teorema 2. *Jika matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ irreducible (tak-tereduksi), maka matriks A mempunyai nilai eigen $\mathbb{R}_{\max}$ tunggal.*

3. Pemodelan Jaringan Kereta Api Komuter

3.1. Sistem Transportasi Kereta Api Komuter di DAOP VI Yogyakarta dan Penentuan Rute Pilihan

Sebelum menentukan rute pilihan yang digunakan dalam pemodelan penelitian ini, berikut dijelaskan tujuh rute yang dilalui oleh kereta api komuter (kereta api lokal) yang berada di DAOP VI Yogyakarta. Data ini diperoleh dari PT Kereta Api Indonesia Daerah Operasi (DAOP) VI Yogyakarta.

Rute 1 (Kereta Api Prambanan Ekspres): Stasiun Kutoarjo – Stasiun Jenar – Stasiun Wates – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Maguwo – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Maguwo – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogayakarta – Stasiun Wates – Stasiun Jenar – Stasiun Kutoarjo.

Rute 2 (Kereta Api Prambanan Ekspres): Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Maguwo – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Maguwo – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta.

Rute 3 (Kereta Api Sidomukti): Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan.

Rute 4 (Kereta Api Madiun Jaya): Stasiun Madiun – Stasiun Walikukun - Stasiun Sragen - Stasiun Solo Jebres – Stasiun Solo Balapan – Stasiun

Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Maguwo – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Maguwo – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Solo Jebres – Stasiun Sragen – Stasiun Walikukun – Stasiun Madiun.
Rute 5 (Kereta Api Joglo Kerto): Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Wates – Stasiun Jenar – Stasiun Kutoarjo – Stasiun Kebumen – Stasiun Gombong – Stasiun Sumpiuh – Stasiun Kroya – Stasiun Purwokerto – Stasiun Kroya – Stasiun Sumpiuh – Stasiun Gombong – Stasiun Kebumen – Stasiun Kutoarjo – Stasiun Jenar – Stasiun Wates – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan.
Rute 6 (Kereta Api Kalijaga): Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Salem – Stasiun Gundih – Stasiun Telawa – Stasiun Kedungjati – Stasiun Brumbung – Stasiun Semarang Tawang – Stasiun Semarang Poncol – Stasiun Semarang Tawang – Stasiun Brumbung – Stasiun Kedungjati – Stasiun Telawa – Stasiun Gundih – Stasiun Salem – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari.
Rute 7 (Kereta Api Bathara Kresna): Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Kota – Stasiun Sukoharjo – Stasiun Pasar Nguter – Stasiun Wonogiri – Stasiun Pasar Nguter – Stasiun Sukoharjo – Stasiun Solo Kota – Stasiun Purwosari.

Selanjutnya, dilakukan pemilihan rute dalam penelitian ini dengan menentukan stasiun yang akan menjadi stasiun transfer, yaitu stasiun-stasiun besar dan menengah yang memungkinkan penumpang berpindah dari suatu kereta api dengan rute tertentu ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda. Stasiun-stasiun tersebut adalah Stasiun Purwokerto (**A**), Stasiun Wates (**1**), Stasiun Kutoarjo (**B**), Stasiun Yogyakarta (**C**), Stasiun Lempuyangan (**2**), Stasiun Klaten (**3**), Stasiun Purwosari (**4**), Stasiun Solo Balapan (**D**), Stasiun Sragen (**5**), Stasiun Madiun (**E**), Stasiun Wonogiri (**6**), Stasiun Semarang Tawang (**F**), dan Stasiun Semarang Poncol (**G**). Pemilihan rute ini menggunakan semua rute kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta yaitu rute 1 sampai dengan rute 7 yang telah dijelaskan di atas, kecuali rute 3. Hal ini dikarenakan kereta api Sidomukti yang beroperasi pada rute 3 hanya beroperasi pada hari Minggu saja, sehingga rute kereta api Sidomukti pada rute 3 tidak diikutsertakan sebagai rute pilihan. Penelitian ini hanya memperhitungkan rute kereta api komuter yang beroperasi pada hari efektif (Senin-Sabtu dan bukan hari libur).

3.2. Sinkronisasi dan Penyusunan Model Matematika

Sebelum membentuk model matematika dari jaringan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, terlebih dahulu dibuat aturan sinkronisasi waktu keberangkatan kereta api komuter dari suatu stasiun yang harus menunggu datangnya kereta api komuter lainnya yang menuju ke stasiun tersebut. Hal ini bertujuan untuk menjamin bahwa penumpang dapat berpindah dari suatu kereta pada rute tertentu ke kereta yang lain dengan rute yang berbeda. Setelah itu, dilakukan tahap awal dalam proses memodelkan, yaitu mendefinisikan variabel untuk setiap busur yang menghubungkan stasiun satu dengan stasiun yang lain pada keenam rute yang telah ditetapkan.

Tabel 1. Definisi Variabel Kereta Api Komuter

Variabel	Definisi Keberangkatan Kereta Api Komuter dari:
$x_1(k-1)$	**B** menuju 1 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_2(k-1)$	1 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_3(k-1)$	**C** menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_4(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_5(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_6(k-1)$	4 menuju **D** pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_7(k-1)$	**D** menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_8(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_9(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_{10}(k-1)$	2 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_{11}(k-1)$	**C** menuju 1 pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_{12}(k-1)$	1 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 1
$x_{13}(k-1)$	**C** menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{14}(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{15}(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{16}(k-1)$	4 menuju **D** pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{17}(k-1)$	**D** menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{18}(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{19}(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{20}(k-1)$	2 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 2
$x_{21}(k-1)$	**E** menuju 5 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{22}(k-1)$	5 menuju **D** pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{23}(k-1)$	**D** menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{24}(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{25}(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{26}(k-1)$	2 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{27}(k-1)$	**C** menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{28}(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{29}(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{30}(k-1)$	4 menuju **D** pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{31}(k-1)$	**D** menuju 5 pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{32}(k-1)$	5 menuju **E** pada saat ke-($k-1$) di rute 3
$x_{33}(k-1)$	**D** menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{34}(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{35}(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{36}(k-1)$	2 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{37}(k-1)$	**C** menuju 1 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{38}(k-1)$	1 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{39}(k-1)$	**B** menuju **A** pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{40}(k-1)$	**A** menuju **B** pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{41}(k-1)$	**B** menuju 1 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{42}(k-1)$	1 menuju **C** pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{43}(k-1)$	**C** menuju 2 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{44}(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{45}(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke-($k-1$) di rute 4
$x_{46}(k-1)$	4 menuju **D** pada saat ke-($k-1$) di rute 4

$x_{47}(k-1)$	4 menuju **D** pada saat ke-$(k-1)$ di rute 5
$x_{48}(k-1)$	**D** menuju **F** pada saat ke-$(k-1)$ di rute 5
$x_{49}(k-1)$	**F** menuju **G** pada saat ke-$(k-1)$ di rute 5
$x_{50}(k-1)$	**G** menuju **F** pada saat ke-$(k-1)$ di rute 5
$x_{51}(k-1)$	**F** menuju **D** pada saat ke-$(k-1)$ di rute 5
$x_{52}(k-1)$	**D** menuju 4 pada saat ke-$(k-1)$ di rute 5
$x_{53}(k-1)$	4 menuju 6 pada saat ke-$(k-1)$ di rute 6
$x_{54}(k-1)$	6 menuju 4 pada saat ke-$(k-1)$ di rute 6

Berdasarkan data waktu tempuh antar stasiun dan banyak kereta api komuter pada waktu acuan (pukul 09.42), aturan sinkronisasi, dan Tabel 1 di atas, maka dapat disusun model aljabar max-plus dari setiap rute yang telah ditentukan, yaitu jika $x_i(k), i = 1,2,3,\ldots,54$ adalah keberangkatan kereta api komuter ke$-(k-1)$, maka persamaan-persamaan hasil pemodelan dapat dinyatakan dalam model umum $\mathbb{R}_{\max}$ yaitu $x(k) = A \otimes x(k-1)$ untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$ dan $x(k-1) = (x_1(k-1), x_2(k-1), \ldots x_{54}(k-1))$, dengan A adalah matriks yang berukuran 54×54 dan vektor $x(k-1)$ adalah waktu keberangkatan yang ke$-(k-1)$ dari semua kereta api. Untuk memudahkan penulisan, elemen-elemen matriks A yang sama dengan ε dituliskan sebagai $\varepsilon =$.

4. Desain Penjadwalan Kereta Api Komuter

Matriks A yang didapatkan dari hasil pemodelan kemudian dianalisis dengan cara menghitung nilai eigen dan vektor eigen matriks A. Kemudian, berdasarkan nilai eigen dan vektor eigen tersebut dibuat suatu desain penjadwalan keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta.

Dalam penelitian ini, untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A digunakan bantuan aplikasi dari program *MATLAB*. Dengan menggunakan program tersebut, diperoleh bahwa matriks A tidak iredusibel (tereduksi). Matriks tidak iredusibel memiliki arti bahwa nilai eigennya mungkin tidak tunggal dan vektor eigennya mungkin tidak merupakan bilangan real. Berdasarkan hasil komputasi dengan program *MATLAB*, didapatkan nilai eigen maksimum yaitu $\lambda(A) = 786$ dan vektor eigen matriks A berupa bilangan real yang berukuran 1×54, yaitu:

8	-55	-276	-441	-564	60
44	-29	-180	-394	-532	-574
-715	71	-124	-124	-509	-119
-711	75	-119	-119	-505	-14
-680	-680	-91	-97	-483	
-652	-652	-60	-75	-461	
-124	-124	-509	-55	-119	
-119	-119	-505	-32	-114	
-877	-91	-474	0	46	
-846	-59	-446	-685	53	

Nilai eigen dalam penelitian ini diartikan sebagai periode keberangkatan kereta api di setiap stasiun asal adalah setiap $\lambda(A)$ sekali, yaitu setiap 786 menit sekali atau 13 jam 6 menit sekali. Sedangkan vektor eigen matriks A digunakan sebagai keadaan awal keberangkatan kereta api komuter di setiap stasiun. Untuk mempermudah penyusunan jadwal keberangkatan awal kereta api komuter, maka didefinisikan vektor keberangkatan awal yang baru yaitu $\boldsymbol{v}'$ sebagai berikut.

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} \otimes (-\min(\boldsymbol{v}))$$

dengan

$$\min(\boldsymbol{v}) = \min_{1\leq i\leq 54}[\boldsymbol{v}]_{i,1}$$

Sehingga diperoleh vektor akhir keberangkatan $\boldsymbol{v}'$ yang berukuran 1×54 adalah:

885	822	601	436	313	937
921	848	697	483	345	303
162	948	753	753	368	758
166	952	758	758	372	863
197	197	786	780	394	
225	225	817	802	416	
753	753	368	822	758	
758	758	372	845	763	
0	786	403	877	923	
31	818	431	192	930	

Vektor $\boldsymbol{v}'$ tersebut kemudian dinyatakan sebagai waktu keberangkatan awal penjadwalan. Selanjutnya, disusun jadwal periodik keberangkatan kereta api komuter dari setiap stasiun dengan periodik antar keberangkatan kereta api komuter di setiap stasiun adalah $\lambda(A)$ =786. Karena hasil $[\boldsymbol{v}']_{9,1} = [0]$, maka keberangkatan kereta api komuter x_9 yaitu keberangkatan dari Stasiun Klaten menuju ke Stasiun Lempuyangan dijadikan sebagai titik acuan penjadwalan. Keberangkatan awal yang sebenarnya dari Stasiun Klaten menuju ke Stasiun Lempuyangan adalah pada pukul 05.53 WIB. Oleh karena itu, waktu keberangkatan awal pada setiap stasiun akan berubah menyesuaikan titik acuan tersebut.

Berikut ini disajikan desain keberangkatan kereta api yang dipilih setelah melakukan proses sinkronisasi di enam rute yang telah dibahas. Diasumsikan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta beroperasi selama 24 jam.

Tabel 2. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 1:
Kutoarjo – Solo Balapan PP

Rute		**Jadwal Keberangkatan I**	**Jadwal Keberangkatan II**
Kutoarjo	Wates	5:26	18:32
Wates	Yogyakarta	6:02	19:08
Yogyakarta	Lempuyangan	6:29	19:35
Lempuyangan	Klaten	6:33	19:39
Klaten	Purwosari	7:04	20:10
Purwosari	Solo Balapan	7:32	20:38

Solo Balapan	Purwosari	7:32	20:38
Purwosari	Klaten	7:37	20:43
Klaten	Lempuyangan	8:05	21:11
Lempuyangan	Yogyakarta	8:36	21:42
Yogyakarta	Wates	8:41	21:47
Wates	Kutoarjo	9:07	22:13

Tabel 3. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 2:
Yogyakarta – Solo Balapan PP

Rute		**Jadwal Keberangkatan I**	**Jadwal Keberangkatan II**
Yogyakarta	Lempuyangan	6:29	19:35
Lempuyangan	Klaten	6:33	19:39
Klaten	Purwosari	7:04	20:10
Purwosari	Solo Balapan	7:32	20:38
Solo Balapan	Purwosari	7:32	20:38
Purwosari	Klaten	7:37	20:43
Klaten	Lempuyangan	8:05	21:11
Lempuyangan	Yogyakarta	8:27	21:33

Tabel 4. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 3:
Madiun – Solo Balapan PP

Rute		**Jadwal Keberangkatan I**	**Jadwal Keberangkatan II**
Madiun	Sragen	0:42	13:48
Sragen	Solo Balapan	2:18	15:24
Solo Balapan	Purwosari	3:14	16:20
Purwosari	Klaten	3:39	16:45
Klaten	Lempuyangan	3:42	16:48
Lempuyangan	Yogyakarta	4:18	17:24
Yogyakarta	Lempuyangan	5:31	18:37
Lempuyangan	Klaten	5:35	18:41
Klaten	Purwosari	6:06	19:12
Purwosari	Solo Balapan	6:34	19:40
Solo Balapan	Sragen	6:39	19:45
Sragen	Madiun	7:26	20:32

Tabel 5. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 4:
Solo Balapan – Purwokerto PP

Rute	**Jadwal Keberangkatan I**	**Jadwal Keberangkatan II**

Solo Balapan	Purwosari	3:14	16:20
Purwosari	Klaten	3:19	16:25
Klaten	Lempuyangan	3:41	16:47
Lempuyangan	Yogyakarta	4:03	17:09
Yogyakarta	Wates	4:25	17:31
Wates	Kutoarjo	4:46	17:52
Kutoarjo	Purwokerto	5:18	18:24
Purwokerto	Kutoarjo	6:59	20:05
Kutoarjo	Wates	9:00	22:06
Wates	Yogyakarta	9:32	22:38
Yogyakarta	Lempuyangan	9:55	23:01
Lempuyangan	Klaten	9:59	23:05
Klaten	Purwosari	10:21	23:27
Purwosari	Solo Balapan	10:43	23:49

Tabel 6. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 5:
Puwosari – Semarang Poncol PP

Rute		**Jadwal Keberangkatan I**	**Jadwal Keberangkatan II**
Purwosari	Solo Balapan	2:59	16:05
Solo Balapan	Semarang Tawang	3:04	16:10
Semarang Tawang	Semarang Poncol	6:04	19:10
Semarang Poncol	Semarang Tawang	6:11	19:17
Semarang Tawang	Solo Balapan	6:18	19:24
Solo Balapan	Purwosari	8:50	21:56

Tabel 7. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 6:
Puwosari – Wonogiri PP

Rute		**Jadwal Keberangkatan I**	**Jadwal Keberangkatan II**
Purwosari	Wonogiri	2:59	16:05
Wonogiri	Purwosari	5:04	18:10

Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa adanya perbedaan kondisi dengan dua penelitian serupa sebelumnya, yaitu terjadi perbedaan kerapatan artinya tidak semua lintasan yang dimodelkan dilewati oleh kereta api komuter dan terjadi perbedaan kepadatan atau intensitas pada rute Yogyakarta – Solo Balapan PP, diduga menyebabkan kesimpulan matriks oleh program *MATLAB* menjadi matriks yang tidak iredusibel (tereduksi). Meskipun tidak iredusibel ternyata tetap didapatkan vektor eigen yang berupa bilangan real. Kemudian, terlihat bahwa nilai keperiodikan untuk sistem ini relatif besar, yaitu $\lambda(A) = 786$ menit atau 13 jam 6 menit, sehingga dalam satu hari hanya dapat terjadi dua kali keberangkatan apabila mempertimbangkan proses sinkronisasi dan diasumsikan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta beroperasi selama 24 jam. Oleh karena itu, apabila desain penjadwalan yang tersinkronisasi tersebut akan digunakan oleh PT KAI untuk membuat jadwal keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, maka pembuatan jadwal keberangkatannya adalah dengan menambahkan salah satu jadwal keberangkatan yang terbentuk ke jadwal keberangkatan yang saat ini sudah ada. Pemilihan jadwal keberangkatan yang tersikronisasi tersebut disesuaikan dengan jadwal keberangkatan yang telah ada dan mengacu pada kebutuhan penumpang (konsumen) sehingga diperoleh jadwal keberangkatan yang optimal.

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan penelitian dan hasil pembahasan yang telah dilakukan pada pemodelan jaringan dan analisis penjadwalan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Jaringan kereta api komuter di Daerah Operasi VI (DAOP VI) Yogyakarta dapat dimodelkan menggunakan aljabar max-plus dengan bentuk umum $\mathbb{R}_{\max}$ yaitu $x(k) = A \otimes x(k-1),$ dimana A adalah matriks yang berukuran 54×54 dan vektor $x(k-1)$ adalah waktu keberangkatan yang ke-$(k-1)$ dari semua kereta api.
2. Penjadwalan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta memiliki periode keberangkatan masing-masing stasiun, yaitu setiap $\lambda(A)$ menit sekali, dengan $\lambda(A) = 786$. Sedangkan, waktu keberangkatan awal kereta api komuter di setiap stasiun diperoleh dari vektor eigen.

Adapun beberapa saran yang dapat penulis berikan bagi penelitian selanjutnya, yaitu:

1. Penelitian ini menentukan stasiun-stasiun transfer untuk memodelkan sistem kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, sehingga ada beberapa stasiun pemberhentian kecil yang tidak diikutsertakan dalam pemodelan. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya dapat memperhitungkan stasiun-stasiun pemberhentian kecil tersebut agar didapatkan penjadwalan yang lebih sesuai dengan kondisi realnya.
2. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa matriks hasil pemodelan merupakan matriks yang tidak iredusibel. Dalam penelitian ini penulis masih memberikan dugaan mengenai penyebab terjadinya hal tersebut. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya dapat meneliti lebih jauh guna mencari tahu penyebab yang sebenarnya.
3. Penelitian ini menghasilkan suatu desain penjadwalan yang mempertimbangkan proses sinkronisasi. Bagi penelitian selanjutnya, selain dapat membuat desain penjadwalan yang tersinkronisasi juga dapat memberikan hasil penelitian untuk menentukan di stasiun mana penumpang turun dan menggunakan kereta api apa saja, apabila dikehendaki waktu optimal yang dapat ditempuh saat penumpang ingin berpindah jalur.
4. Penelitian ini menunjukkan bahwa matriks hasil pemodelan adalah matriks yang tidak iredusibel dan memiliki vektor eigen yang berupa bilangan real. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya dapat meneliti ciri-ciri keadaan

dari suatu sistem yang matriks hasil pemodelannya tidak iredusibel tetapi dapat menghasilkan vektor eigen berupa bilangan real.

Daftar Pustaka

[1] Afif Ahmad, 2015, *Aplikasi Petri Net dan aljabar Max-Plus Pada Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur*, Tesis, Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[2] Kereta Api Prambanan Ekspres, (tanggal akses: 17 Juni 2016), https://id.m.wikipedia.org/wiki/Kereta_api_Prambanan_Ekspres.

[3] M. Andy Rudhito, 2016, *Aljabar Max-plus dan Penerapannya,* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

[4] Subiono, 2002, *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, TRAIL Thesis Series, The Netherlands: Delft University Press.

[5] Subiono, 2015, *Aljabar Max-Plus dan Terapannya,* Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.