



[WWW.USD.AC.ID/KPA2016](http://www.usd.ac.id/kpa2016)

Prosiding

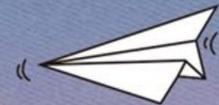
SEMINAR NASIONAL

ALJABAR, PENERAPAN, DAN PEMBELAJARANNYA

Kontribusi Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya dalam Mencerdaskan Bangsa

Prosiding

ALJABAR, PENERAPAN, DAN PEMBELAJARANNYA
SEMINAR NASIONAL



SDUP
SANATA DHARMA UNIVERSITY PRESS
Jl. Affandi (Gejayan) Mrican, Yogyakarta 55281
Phone: (0274)513301, Fax: 51335153 Email: publisher@usd.ac.id

appti

ISBN 978-602-6369-47-5



PROSIDING SEMINAR NASIONAL ALJABAR, PENERAPAN DAN PEMBELAJARANNYA

Kontribusi Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya dalam Mencerdaskan Bangsa

Editor

Beni Utomo
Antonius Yudhi Anggoro

Kontributor:

Henry W. M. Patty | Samsul Arifin | Dian Rizki Fauzi | Maxrizal | Lucia Winda Cesari | Benedictus Dwi Yuliyanto |
Yulia Indah Puspitasari | Iqbal Maulana | Arif Munandar | Iwan Ernanto | Ahmad Faisol | Indriati Nurul Hidayah |
Dewa Putu Wiadnyana Putra | Elvira Kusniyanti | Na'imah Hijriati | Siswanto | Scolastika Lintang Rengganis Radityani |
Ila Nurlaila Setyowati | Maria Rettian Anggita Sari | Yulius Wahyu Putranto | A. Tatak Handaya Kurniawan |
Yokhanan A. | Paskalia Pradanti | Nurhidayah | Maria Kristin Sondang Sihombing | Ari Dwi Hartanto | Anindiati Praminto Putri |
Annisa Nur Azizah | Lilik Andri Susanto | Lusya Devi Astuti | Catharina Mara Apriani | Dominikus Arif Budi Prasetyo |
Christina Novy Wijaya | Yoanna Krisnawati | Novi Indriani | Trisona Agustina | Kartika Sari | Natalia Merry Dellani |
Meta Dispini | Adventa Eklesiawati | Riandika Ratnasari | Almu Noor Romadoni | Yosep Dwi Kri



Sanata Dharma
University Press

PROSIDING SEMINAR NASIONAL ALJABAR, PENERAPAN DAN PEMBELAJARANNYA

Kontribusi Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya dalam Mencerdaskan Bangsa

Copyright © 2016

Beni Utomo (*et al.*), Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Editor:

Beni Utomo, M.Sc.
Antonius Yudhi Anggoro, M.Si.

Buku Cetak

ISBN: 978-602-6369-47-5
EAN: 9-786026-369475

Kontributor:

Henry W. M. Patty | Samsul Arifin | Dian Rizki Fauzi | Maxrizal | Lucia Winda Cesari | Benedictus Dwi Yuliyanto | Yulia Indah Puspitasari | Iqbal Maulana | Arif Munandar | Iwan Ernanto | Ahmad Faisol | Indriati Nurul Hidayah | Dewa Putu Wiadnyana Putra | Elvira Kusniyanti | Na'imah Hijriati | Siswanto | Scolastika Lintang Rengganis Radityani | Ila Nurlaila Setyowati | Maria Rettian Anggita Sari | Yulius Wahyu Putranto | A. Tatak Handaya Kurniawan | Yokhanan A. | Paskalia Pradanti | Nurhidayah | Maria Kristin Sondang Sihombing | Ari Dwi Hartanto | Anindiati Praminto Putri | Annisa Nur Azizah | Lilik Andri Susanto | Lusnia Devi Astuti | Catharina Mara Apriani | Dominikus Arif Budi Prasetyo | Christina Novy Wijaya | Yoanna Krisnawati | Novi Indriani | Trisona Agustina | Kartika Sari | Natalia Merry Dellani | Meta Dispini | Adventa Eklesiawati | Riandika Ratnasari | Almu Noor Romadoni | Yosep Dwi Kri

Reviewer:

Prof. Dr. Frans Susilo, SJ.
Prof. Dr. Sri Wahyuni
Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd.
Dr. Ariyadi Wijaya
Dr. Hongki Julie, M.Si.
Dr. Indah Emilia Wijayanti
Dr. Intan Muchtadi
Sudi Mungkasi, Ph.D.
M.V Any Herawati, M.Si.
Veronika Fitri, S.Pd, M.Sc.

Cover Ilustration & Layout:
Made Setianto, S.Pd

Cetakan Pertama, November 2016
viii; 402 hlm.; 21 x 29,5 cm.

PENERBIT:



SANATA DHARMA UNIVERSITY PRESS
Lantai 1 Gedung Perpustakaan USD
Jl. Affandi (Gejayan) Mrican,
Yogyakarta 55281
Telp. (0274) 513301, 515253;
Ext.1527/1513; Fax (0274) 562383
e-mail: hpublisher@usd.ac.id

INSTITUSI PENDUKUNG:



UNIVERSITAS SANATA DHARMA
DAN KOMUNITAS PEMINAT ALJABAR
Panitia Seminar Nasional Aljabar, Penerapan Dan Pembelajarannya 2016
Kampus III USD, Paingan, Maguwoharjo, Depok Sleman 55284



Sanata Dharma University Press anggota APPTI
(Asosiasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia)

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang.

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apa pun, termasuk fotokopi, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Isi buku sepenuhnya menjadi tanggungjawab penulis.

TIM PROSIDING

Reviewer

Prof. Dr. Frans Susilo, SJ

Prof. Dr. Sri Wahyuni

Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd

Dr. Ariyadi Wijaya

Dr. Hongki Julie, M.Si

Dr. Indah Emilia Wijayanti

Dr. Intan Muchtadi

Sudi Mungkasi, Ph.D

M.V Any Herawati, M.Si

Veronika Fitri, S.Pd, M.Sc

Editor

Beni Utomo, M.Sc

Antonius Yudhi Anggoro, M.Si

Layout & Cover

Made Setianto, S.Pd

KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa sehingga Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya 2016, yang diselenggarakan Universitas Sanata Dharma dan Komunitas Peminat Aljabar ini dapat diselesaikan sesuai dengan rencana.

Prosiding ini bertujuan mendokumentasikan dan mengkomunikasikan hasil presentasi artikel pada seminar nasional tersebut, yang terdiri dari 41 artikel dari para pemakalah yang berasal dari berbagai perguruan tinggi di seluruh Indonesia. Artikel tersebut telah dipresentasikan di seminar nasional pada tanggal 16 - 17 September 2016 dan telah *direview* serta direvisi sesuai saran-saran dari *reviewer*. Artikel didistribusikan dalam 3 kategori yang meliputi kategori Aljabar yang terdiri dari 15 artikel, Penerapan Aljabar 11 artikel dan Pembelajaran Aljabar 15 artikel.

Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya 2016 kali ini secara khusus kita persembahkan untuk Prof. Dr. Frans. Susilo, S.J., yang pada tanggal 12 Desember 2016 ini genap berusia 70 tahun dan akan memasuki masa purna tugas. Beliau adalah guru besar bidang Matematika Universitas Sanata Dharma, yang telah berperan aktif dalam merintis dan mengembangkan Himpunan Peminat Aljabar (HPA), yang kini menjadi Komunitas Peminat Aljabar (KPA). Kita sebagai kolega dan murid-muridnya mengucapkan terimakasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya atas peran serta dan jasa-jasa beliau.

Terima kasih disampaikan kepada pemakalah yang telah berpartisipasi pada desiminasi hasil kajian/penelitian yang dimuat pada prosiding ini. Terimakasih juga disampaikan kepada tim *reviewer*, tim prosiding, segenap panitia seminar, segenap pengurus KPA dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan prosiding ini. Semoga prosiding ini bermanfaat.

Yogyakarta, 14 November 2016

Ketua Panitia

Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd.

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Tim Prosiding	ii
Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	iv

BIDANG ALJABAR

Sifat-Sifat Semigrup Sebagai Graf Pembagi Nol <i>Henry W. M. Patty</i>	1
Dimensi Valuasi Dari Daerah Ideal Utama <i>Samsul Arifin, Hanni Garminia, Pudji Astuti</i>	9
Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Sistem Bipartisi dalam Aljabar Min-Maks-Plus dengan Menggunakan <i>Power Algorithm</i> <i>Dian Rizki Fauzi, Siswanto, Pangadi</i>	17
Karakteristik Elemen Satuan Pada Semiring <i>Pseudo-Ternary</i> Matriks Atas Bilangan Bulat Negatif <i>Maxrizal, Baiq Desy Aniska Prayanti</i>	25
Optimasi Waktu Produksi dan Analisis Keperiodikan pada Graf Sistem Produksi Ber-Loop dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-plus <i>Lucia Winda Cesari, Marcellinus Andy Rudhito</i>	35
Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting <i>Benedictus Dwi Yuliyanto, Dominikus Arif Budi Prasetyo</i>	46
Kongruensi Latis Distributif Terkecil pada Semiring dengan <i>Additive Reduct Semilatis</i> <i>Yulia Indah Puspitasari, Yeni Susanti</i>	55
Modul M-P-Miskin <i>Iqbal Maulana, Indah Emilia Wijayanti</i>	66
Modul Miskin dalam Kelas $\sigma[M]$ <i>Arif Munandar, Indah Emilia Wijayanti</i>	76

Beberapa Sifat Ideal Lie di Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi <i>Iwan Ernanto, Budi Surodjo</i>	87
Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi <i>Skew T-Noether</i> <i>Ahmad Faisol, Budi Surodjo, Sri Wahyuni</i>	95
Contoh Grup Perkalian Modulo n dengan Identitas Tidak Harus 1 <i>Indriati Nurul Hidayah, Purwanto</i>	101
Dualisasi pada Modul Auto Invarian <i>Dewa Putu Wiadnyana Putra, Indah Emilia Wijayanti</i>	105
Modul Dedekind Atas Gelanggang Tak Komutatif <i>Elvira Kusniyant, Hanni Garminia, Pudji Astuti</i>	114
Representasi Ring R Pada Modul M Atas Ring R' <i>Na'imah Hijriati, Sri Wahyuni, Indah Emilia Wijayanti</i>	120
 BIDANG PENERAPAN ALJABAR 	
Penentuan Penjadwalan Pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung dengan Sistem Persamaan Linear atas Aljabar Maks-Plus <i>Siswant, Casilda Reva Kartika, Sutrima</i>	126
Pemodelan Jaringan dan Analisa Penjadwalan Kereta Api Komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus <i>Scolastika Lintang Rengganis Radityani, Marcellinus Andy Rudhito</i>	134
Penerapan Kriptografi Kurva Eliptik atas Lapangan Berhingga Prima pada Algoritma ElGamal <i>Ila Nurlailla Setyowati, Nikken Prima Puspita, Harjito</i>	147
Penerapan Aljabar Max-Plus pada Sistem Produksi Sederhana Tas Kulit <i>Maria Rettian Anggita Sari, Paskalia Pradanti</i>	158
Simulasi Pemodelan Jalur Bus Rute Kenteng-Sleman- Prambanan dengan Menggunakan Model PetriNet dan Aljabar Max-Plus <i>Yulius Wahyu Putranto, A. Tatak Handaya Kurniawan, Yokhanan A.</i>	167
Penggunaan Aljabar Max-Plus dalam Pengaturan Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas <i>Paskalia Pradanti, Maria Rettian Anggita Sari</i>	178
Penerapan Aljabar Max-Plus dalam Penjadwalan Durasi Waktu Nyala Lampu Lalu-lintas Untuk Mengurangi Kemacetan Jalan di Persimpangan Janti Yogyakarta <i>Nurhidayah, Farkhatu Sikha</i>	185

Suatu Pemodelan Estimasi Waktu Pemrosesan Sistem Dengan Sejumlah Loker Menggunakan Aljabar Max-Plus <i>Maria Kristin Sondang Sihombing</i>	193
Konstruksi Sistem Kripto Menggunakan <i>General Linear Group</i> <i>Ari Dwi Hartanto, Diah Junia Eksi Palupi</i>	203
Penjadwalan Proses Produksi Topeng Batik Menggunakan Aljabar Max-Plus <i>Anindiati Praminto Putri, Cecilia Heru Purwitaningsih</i>	215
Keamanan Data Menggunakan Kriptografi Kurva Eliptik Atas Lapangan Galois Prima $GF(p)$ <i>Annisa Nur Azizah, Solichin Zaki, Nikken Prima Puspita</i>	223

PEMBELAJARAN ALJABAR

Efektivitas Penggunaan Media Pembelajaran Komik Pada Materi Persamaan Garis Lurus Ditinjau dari Prestasi dan Minat Belajar Siswa SMP Joannes Bosco Kelas VIII <i>Democracy</i> Tahun Ajaran 2015/2016 <i>Lilik Andri Susanto</i>	231
Analisis Pelaksanaan Pembelajaran Matematika Materi Transformasi dengan Pendekatan Saintifik Kurikulum 2013 di Kelas VII SMP Negeri 2 Wedi Tahun Ajaran 2015/2016 <i>Lusia Devi Astuti, Veronika Fitri Rianasari</i>	247
Analisis Representasi Matematis Siswa SMP dalam Memecahkan Masalah Matematika Kontekstual <i>Catharina Mara Apriani, Marcellinus Andy Rudhito</i>	256
Analisis Kemampuan dan Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Aljabar Model TIMSS <i>Dominikus Arif Budi Prasetyo, Marcellinus Andy Rudhito</i>	268
Hubungan Antara Kemampuan Penalaran Matematis dan Disposisi Matematis Terhadap Prestasi Belajar Matematika Siswa Materi Kubus dan Balok di Kelas VIII G SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta Tahun Ajaran 2015/2016 <i>Christina Novy Wijaya, Dominikus Arif Budi P.</i>	279
Upaya untuk Mengatasi Kesulitan Belajar Matematika dengan Diagnosis dan Pengajaran Remedial <i>Yoanna Krisnawati, St. Suwarsono</i>	290
Kesalahan dalam Pemahaman Konseptual Matematika Siswa Kelas VIII pada Materi Faktorisasi Suku Aljabar <i>Novi Indriani</i>	309

Efektivitas Penerapan Model Pembelajaran Berbasis Proyek pada Pokok Bahasan Transformasi Ditinjau dari Hasil Belajar dan Motivasi Belajar Siswa Kelas XI TOI di SMK N 2 Depok Tahun Ajaran 2015/2016 <i>Trisona Agustina, Febi Sanjaya</i>	319
Upaya Meningkatkan Motivasi Belajar Mahasiswa dalam Pembelajaran Struktur Aljabar Melalui Penerapan Model Pembelajaran MSTAD (<i>Modified Student Teams Achievement Divisions</i>) <i>Kartika Sari</i>	329
Analisis Kesalahan Siswa dalam Mengerjakan Soal-Soal pada Topik Operasi Bentuk Aljabar Kelas VIII B SMP Pangudi Luhur 1 Klaten Tahun Ajaran 2015/2016 <i>Natalia Merry Dellani</i>	337
Profil Kemampuan Matematika Siswa SMP N 1 Prambanan Klaten Kelas VIII-A dalam Menyelesaikan Soal-Soal TIMSS Grade 8 pada Materi Aljabar <i>Meta Dispini, Beni Utomo</i>	342
Peningkatan Motivasi dan Hasil Belajar Siswa Melalui Pemakaian Alat Peraga Manipulatif untuk Menghitung Luas Permukaan dan Volume Kubus serta Balok pada Siswa Kelas VIIA SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik Lampung Tahun Ajaran 2015/2016 <i>Adventa Eklesiawati, Febi Sanjaya</i>	353
Analisis Faktor Minat dan Minat terhadap Ilmu MIPA dalam Memilih Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam pada Siswa Kelas X SMA Negeri yang Menerapkan Kurikulum 2013 di Kabupaten Sleman <i>Riandika Ratnasari, Maria Suci Apriani</i>	365
Analisis Kesulitan Siswa Kelas VII Dalam Menyelesaikan Soal Pada Materi Faktorisasi Bentuk Aljabar SMP Pangudi Luhur Srumbung Magelang Semester Gasal Tahun Ajaran 2016/2017 <i>Almu Noor Romadoni</i>	378
Pengembangan Media Berbasis Flash untuk Mendukung Siswa Kelas VII dalam Menemukan Prinsip-Prinsip Pencermian <i>Yosep Dwi Kristanto, M.Pd.</i>	387

Sifat-Sifat Semigrup Sebagai Graf Pembagi Nol

Henry W. M. Patty
Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
email: henrywmpatty81@gmail.com

Abstrak

Kajian graf dalam bentuk struktur aljabar ataupun sebaliknya merupakan kajian yang menarik bagi para matematikawan. Berawal dari konsep ring komutatif yang disajikan dalam bentuk graf pembagi nol yaitu graf yang titik-titiknya merupakan elemen pembagi nol dari suatu ring komutatif maka dalam penulisan ini, ranahnya dibatasi menjadi semigrup komutatif berhingga sehingga graf pembagi nol yang terbentuk memiliki sifat-sifat tertentu. Diperoleh Z_p dengan p prima merupakan graf pohon dengan p titik selanjutnya semigrup simetri $S(n)$ tidak dapat dinyatakan sebagai graf pembagi nol dan juga diperoleh beberapa sifat graf pembagi nol lainnya.

Kata Kunci : *semigrup komutatif, graf pohon, graf pembagi nol*

1. Pendahuluan

Kajian struktur aljabar dalam bentuk graf menjadi salah satu alternatif solusi yang ditawarkan untuk mempermudah pemahaman struktur aljabar yang sebelumnya dipandang sebagai kajian teoritis. Dalam perkembangannya, graf sebagai sebuah diagram yang terdiri dari himpunan titik dan sisi serta semigrup yang merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner dan memenuhi sifat tertutup dan asosiatif, dapat dikaji sebagai suatu kesatuan. Diawali dengan konsep ring komutatif yang diaplikasikan dalam graf, Beck [3] dalam jurnalnya "*Coloring of commutative ring*" pada tahun 1988 memperkenalkan ranah ring komutatif dalam bentuk graf pembagi nol. Didefinisikan graf pembagi nol ($\Gamma(R)$) sebagai graf sederhana yang himpunan titiknya berasal dari elemen dalam ring komutatif R dan untuk setiap titik yang berbeda misalnya x dan y terhubung oleh suatu sisi atau bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Dengan demikian elemen 0 akan bertetangga dengan setiap elemen yang bukan nol.

Walaupun setiap ring komutatif R merupakan semigrup terhadap operasi pergandaan namun dari struktur semigrup tersebut dapat dikaji sifat-sifat khusus dari graf pembagi nol. Hal inilah yang mendasari penyelidikan bentuk dan sifat-sifat suatu graf pembagi nol dari suatu semigrup. Selanjutnya, graf pembagi nol didefinisikan sebagai suatu graf dengan titik-titiknya adalah elemen pembagi nol dari suatu semigrup S . Dengan kata lain, x dan y dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ dengan $x, y \in Z(S)^* = Z(S) \setminus \{0\}$.

2. Tinjauan Pustaka

Selain graf pembagi nol yang diperkenalkan oleh Beck [3], matematikawan D. D. Anderson, M. Naseer [2] serta S. Akbari dan A. Mohammadian [1] juga membahas tentang graf pembagi nol, namun titik-titik pada graf tersebut merupakan pembagi nol dari suatu ring komutatif. Oleh karena itu ranahnya dibatasi ke dalam semigrup dengan elemen 0 oleh F. DeMeyer dan L. DeMeyer [4]. Berbeda dengan De Meyer, dalam kumpulan jurnal W. B. Vasantha Kandasamy dan Florentin Smarandache [6] pada tahun 2012, bentuk graf pembagi

nol ditampilkan lebih terstruktur namun beberapa sifatnya belum dinyatakan secara eksplisit sehingga dalam tulisan ini akan dibuktikan dengan memanfaatkan konsep dasar teori graf dan semigrup.

Berkaitan dengan konsep semigrup dan graf maka khusus untuk pengertian dasar dalam teori semigrup seperti semigrup komutatif, pembagi nol dan unit mengacu pada Howie[5], sedangkan pengertian graf sederhana, graf lengkap dan graf pohon mengacu pada Wilson [6].

3. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengkaji definisi dan contoh dari semigrup dan graf selanjutnya mendefinisikan graf pembagi nol dari suatu semigrup serta membahas sifat-sifatnya. Untuk bentuk graf pembagi nol, ditinjau beberapa bentuk semigrup dengan operasi pergandaan dan digambarkan setiap grafnya berdasarkan definisi sedangkan khusus untuk sifat-sifatnya dibuktikan dengan menggunakan bukti langsung (memanfaatkan sifat-sifat semigrup dan graf) dan tak langsung (kontradiksi)

4. Hasil dan Pembahasan

Dalam bagian ini akan dibahas bentuk dan sifat-sifat dari graf pembagi nol dalam kaitannya dengan suatu semigrup komutatif berhingga terhadap operasi pergandaan (\cdot). Karena eksistensi elemen 0 belum terjamin dalam struktu semigrup maka dalam pembahasan ini semigrup S yang dimaksudkan adalah semigrup dengan elemen 0. Selanjutnya, jika semigrup tidak mempunyai pembagi nol atau hanya terdapat elemen nol yang merupakan pembagi nolnya maka dapat dikatakan bahwa graf pembagi nolnya adalah trivial. Didefinisikan graf pembagi nol dari suatu semigrup dengan elemen 0 sebagai berikut.

Definisi 3.1 [6] *Suatu semigrup S merupakan graf sederhana G dengan titik-titiknya adalah elemen-elemen di G , sedemikian sehingga dua elemen berbeda x dan y di G bertetangga jika hanya jika x adalah suatu pembagi nol dari y ataupun sebaliknya. Dengan demikian setiap elemen yang bukan nol akan bertetangga dengan elemen nol.*

Berikut ini diberikan contoh graf G sebagai graf pembagi nol pada semigrup S .

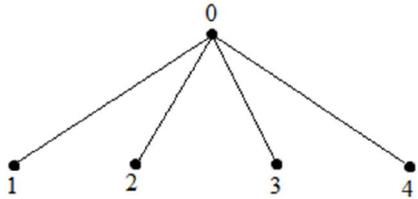
Contoh 3.1 Diberikan $A = (\mathbb{Z}_2, \cdot)$ merupakan semigrup dengan operasi pergandaan. Graf pembagi nol dari Y merupakan suatu graf pohon dengan dua titik sebagai berikut :



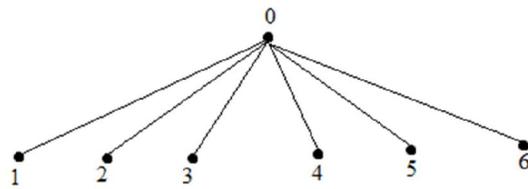
Gambar (1): Graf pembagi nol \mathbb{Z}_2

Berdasarkan teori grup, \mathbb{Z}_2 tidak memiliki pembagi nol karena tidak ada elemen tak nol di \mathbb{Z}_2 yang memenuhi $x \cdot y = 0$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_2$. Berdasarkan bentuk graf pohon di atas, tidak ada sisi yang terkait antara elemen-elemen yang bukan nol, sehingga graf pohonnya merupakan graf pembagi nol trivial.

Contoh 3.2. Diberikan $B = (\mathbb{Z}_5, \cdot)$ dan $C = (\mathbb{Z}_7, \cdot)$ yang merupakan semigrup dengan operasi pergandaan. Graf pembagi nol dari B dan C secara berurutan merupakan suatu graf pohon dengan lima titik dan tujuh titik sebagai berikut :



Gambar (2): Graf pembagi nol: \mathbb{Z}_5

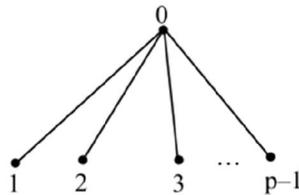


Gambar (3): Graf pembagi nol: \mathbb{Z}_7

Semigrup \mathbb{Z}_5 dan \mathbb{Z}_7 juga tidak memiliki pembagi nol. Pada graf pohon di atas tidak ada sisi yang terkait antara elemen–elemen yang bukan nol, sehingga graf pohon di atas juga merupakan graf pembagi nol trivial.

Berdasarkan Contoh 3.1 dan Contoh 3.2 dapat ditemukan suatu sifat untuk sebarang semigrup \mathbb{Z}_p dengan p prima sebagai berikut.

Teorema 3.1.[6] *Dimisalkan $S = \{\mathbb{Z}_p, \cdot\}$ (dengan p prima) adalah semigrup terhadap operasi pergandaan. Graf pembagi nol dari S merupakan graf pohon dengan p titik yang ditunjukkan dalam diagram berikut*

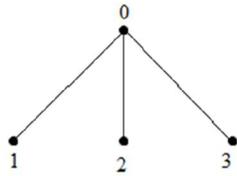


Gambar (4) : Graf pohon \mathbb{Z}_p dengan p prima

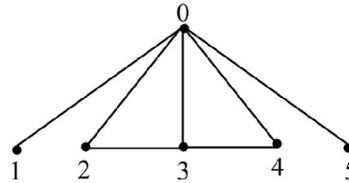
Bukti

Berdasarkan sifat dalam teori graf bahwa setiap graf pohon dengan n titik memiliki $n - 1$ sisi maka setiap \mathbb{Z}_p dengan p prima (jumlah titiknya prima) memiliki $p - 1$ sisi. Sedangkan berdasarkan sifat semigrup bahwa setiap \mathbb{Z}_p dengan p prima tidak memuat pembagi nol sejati atau lebih khusus setiap \mathbb{Z}_p dengan p prima merupakan daerah integral, sehingga setiap elemen tak nol tidak saling bertetangga. Selanjutnya berdasarkan Definisi 3.1, setiap elemen tak nol dari \mathbb{Z}_p akan selalu bertetangga dengan elemen nol sehingga diperoleh graf pembagi nol seperti diagram di atas. ■

Contoh 3.3. Diberikan semigrup $D = (\mathbb{Z}_4, \cdot)$ dan $E = (\mathbb{Z}_6, \cdot)$. Graf pembagi nol pada S dan P sebagai berikut :



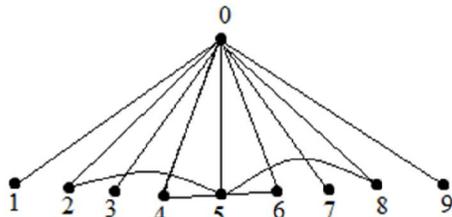
Gambar (5): Graf pembagi nol: \mathbb{Z}_4



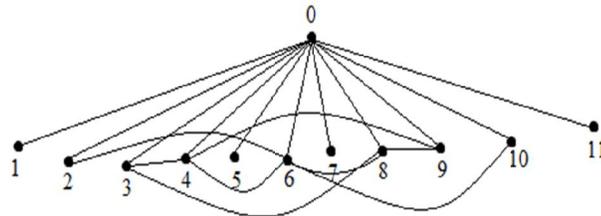
Gambar (6): Graf pembagi nol: \mathbb{Z}_6

Pada Gambar (5), walaupun \mathbb{Z}_4 memuat pembagi nol yaitu elemen 2, namun berdasarkan Definisi 3.1 disyaratkan bahwa graf pembagi nol merupakan graf sederhana (tanpa loop dan sisi ganda) sehingga graf yang terbentuk seperti di atas. Sedangkan pembagi nol di \mathbb{Z}_6 adalah 2, 3 dan 4, sehingga sesuai Definisi 3.1 graf yang terbentuk seperti Gambar (6).

Contoh 3.4 Diberikan semigrup $F = (\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$ dan $G = (\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$. Graf pembagi nol pada F dan G sebagai berikut :



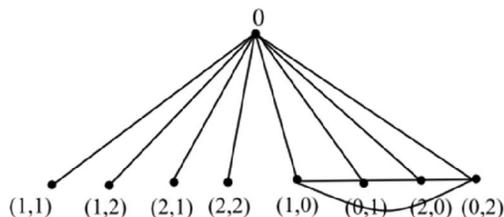
Gambar (7): Graf pembagi nol: \mathbb{Z}_{10}



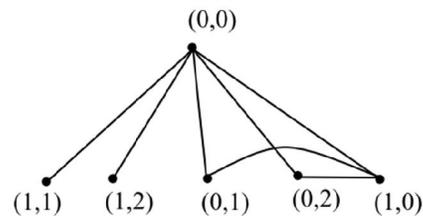
Gambar (8): Graf pembagi nol: \mathbb{Z}_{12}

Pembagi nol di \mathbb{Z}_{10} adalah 2, 4, 5, 6 dan 8, sehingga graf pembagi nol yang terbentuk seperti Gambar (7). Pembagi nol di \mathbb{Z}_{12} adalah 2, 3, 4, 6, 8, 9 dan 10 sehingga graf pembagi nol yang terbentuk seperti Gambar (8)

Contoh 3.5 Diberikan $H = \{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = (a, b) | a, b \in \mathbb{Z}_3\}$ dan $I = \{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = (a, b) | a \in \mathbb{Z}_2, b \in \mathbb{Z}_3\}$ merupakan semigrup dengan operasi pergandaan, graf pembagi nol dari H dan I sebagai berikut :



Gambar (9): Graf pembagi nol: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$



Gambar (10): Graf pembagi nol: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

Pembagi nol di H adalah $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ dan $(0,2)$ sehingga graf pembagi nol yang terbentuk seperti Gambar (9). Pembagi nol di I adalah $(0,1)$, $(0,2)$ dan $(1,0)$ sehingga graf pembagi nol yang terbentuk seperti Gambar (10)

Berdasarkan Contoh 3.5 diperoleh suatu sifat yang lebih umum sebagai berikut.

Teorema 3.2.[6] *Diberikan $S = \{ \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_t} = (a_1, a_2, \dots, a_t) | a_i \in \mathbb{Z}_{n_i} ; 1 \leq i < t, 1 < n_i < \infty \}$ adalah semigrup dengan operasi pergandaan. Graf pembagi nol dari S bukanlah graf pohon.*

Bukti

Diketahui $S = \{ \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_t} = (a_1, a_2, \dots, a_t) | a_i \in \mathbb{Z}_{n_i} ; 1 \leq i < t, 1 < n_i < \infty \}$. Diambil sebarang $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$. Akan ditunjukkan graf pembagi nol dari S bukan pohon.

Untuk menunjukkan a_i dan b_i merupakan pembagi nol maka harus ditunjukkan terdapat sisi yang menghubungkan a_i dan b_i . Karena $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$ maka $(a_1, a_2, \dots, a_t) \in \mathbb{Z}_{n_i}$ dan $(b_1, b_2, \dots, b_t) \in \mathbb{Z}_{n_i}$.

Khusus untuk $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$ dan $(b_1, b_2) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$. Jika (a_1, a_2) merupakan pembagi nol dari (b_1, b_2) maka $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (0,0)$. Kondisi ini terpenuhi jika $a_1 = 0$ dan $b_2 = 0$ atau $a_2 = 0$ dan $b_1 = 0$. Dengan tetap mengacu pada ketentuan bahwa setiap elemen dalam \mathbb{Z}_{n_i} akan selalu dihubungkan dengan suatu sisi ke elemen (0,0) sehingga akan terbentuk lintasan tertutup. Digeneralisasi untuk $(a_1, a_2, \dots, a_t) \in \mathbb{Z}_{n_i}$ dan $(b_1, b_2, \dots, b_t) \in \mathbb{Z}_{n_i}$. Karena selalu terbentuk lintasan tertutup maka graf pembagi nol dari S bukanlah suatu pohon. ■

Contoh 3.6 Dimisalkan $S(3)$ semigrup simetri jelas bahwa $S(3)$ tidak mempunyai pembagi nol.

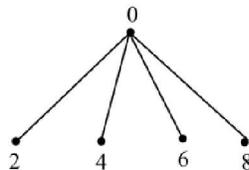
Berdasarkan Contoh 3.6, diperoleh suatu sifat sebagai berikut:

Teorema 3.3 [6] *Jika $S(n)$ suatu semigrup simetri maka $S(n)$ tidak dapat dinyatakan sebagai graf pembagi nol.*

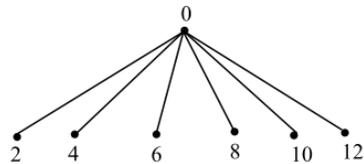
Bukti

Karena semigrup simetri tidak memuat pembagi nol, maka jelas bahwa $S(n)$ tidak dapat dinyatakan sebagai graf pembagi nol. ■

Contoh 3.7 Diberikan $S_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ dan $S_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ secara berurutan merupakan semigrup terhadap pergandaan modulo 10 dan 14. Graf pembagi nol dari S_1 dan S_2 dapat ditunjukkan dalam diagram berikut



Gambar (11): Graf pembagi nol: S_1



Gambar (12): Graf pembagi nol: S_2

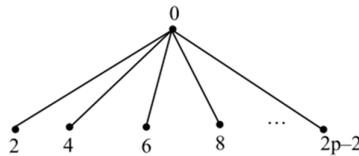
Dari Contoh 3.7 ditemukan suatu sifat sebagai berikut

Teorema 3.4 [6] *Dimisalkan $S = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2p - 2\}$ merupakan semigrup atas pergandaan modulo $2p$ dengan p prima. Dapat dibentuk graf pembagi nol dari S yang merupakan graf pohon dengan banyaknya titik p*

Bukti

Ambil sebarang $m, n \in S$, maka $m = n = 2(p - 1)$ dengan p prima. Akan ditunjukkan bahwa S dapat dinyatakan sebagai graf pembagi nol dan merupakan pohon dengan banyaknya titik p atau dengan kata lain S tidak memuat pembagi nol.

Andaikan S memuat pembagi nol. Artinya $m \neq 0, n \neq 0, mn = 0$. Jika $0 = mn = 2(p - 1).2(p - 1) = 4(p - 1)^2$. Karena $4 \neq 0$ maka persamaan $4(p - 1)^2 = 0$ hanya akan dipenuhi untuk $(p - 1)^2 = (p - 1)(p + 1) = 0$ sehingga $p = 1$ atau $p = -1$. Timbul kontradiksi dengan p prima, sehingga pengandaian diingkari dan terbukti S tidak memuat pembagi nol. Jika digambarkan maka graf pembagi nol dari S dapat ditunjukkan seperti diagram berikut

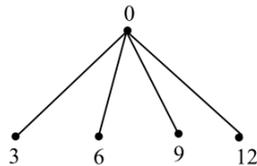


Gambar (13): Graf pohon: $S = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2p - 2 | p \text{ prima}\}$

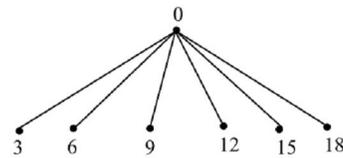
Dari diagram yang terbentuk merupakan pohon dengan banyaknya titik p dan merupakan graf pembagi nol trivial. ■

Selanjutnya dapat diselidiki bentuk graf $3p - 3$ dengan p prima sebagai berikut

Contoh 3.8 Diberikan $S_3 = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ dan $S_4 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ secara berurutan merupakan semigrup terhadap pergandaan modulo 15 dan 21. Graf pembagi nol dari S_3 dan S_4 dapat ditunjukkan dalam diagram berikut



Gambar (14): Graf pembagi nol: S_3



Gambar (15): Graf pembagi nol: S_4

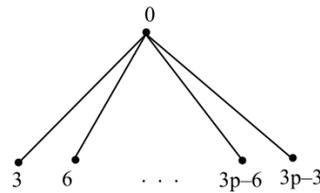
Berdasarkan contoh 3.8 ditemukan suatu sifat sebagai berikut

Teorema 3.5 [6] *Dimisalkan $S = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3p - 3 | p \text{ prima}\}$ merupakan semigrup atas pergandaan modulo $3p$. Graf pembagi nol dari S adalah pohon dengan p titik*

Bukti

Ambil sebarang $a, b \in S$, maka $a = b = 3(p - 1)$ dengan p prima. Akan ditunjukkan bahwa S dapat dinyatakan sebagai graf pembagi nol dan merupakan pohon dengan banyaknya titik p atau dengan kata lain S tidak memuat pembagi nol.

Andaikan S memuat pembagi nol. Artinya $a \neq 0, b \neq 0, ab = 0$. Jika $0 = ab = 3(p - 1).3(p - 1) = 9(p - 1)^2$. Karena $9 \neq 0$ maka persamaan $9(p - 1)^2 = 0$ hanya akan dipenuhi untuk $(p - 1)^2 = (p - 1)(p + 1) = 0$ sehingga $p = 1$ atau $p = -1$. Timbul kontradiksi dengan p prima, sehingga pengandaian diingkari dan terbukti S tidak memuat pembagi nol. Jika digambarkan maka graf pembagi nol dari S dapat ditunjukkan seperti diagram berikut

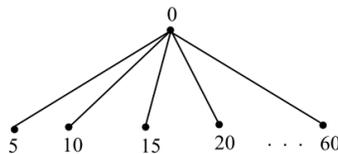


Gambar (16): Graf pembagi nol: $S = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3p - 3 | p \text{ prima}\}$

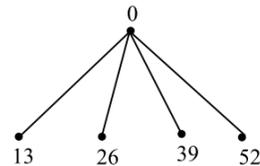
Graf yang terbentuk merupakan pohon dengan banyaknya titik p dan merupakan graf pembagi nol trivial ■

Diberikan \mathbb{Z}_n dengan $n = pq$, p dan q prima dan $p \neq q$, Dimisalkan $S_1 = \{0, p, 2p, \dots, qp - p\}$ dan $S_2 = \{0, q, 2q, 3q, \dots, pq - q\}$ adalah dua subhimpunan sejati dari \mathbb{Z}_n . Pasangan S_1 dan S_2 merupakan semigrup terhadap pergandaan modulo pq . Diperoleh graf pembagi nol S_i dengan $1 \leq i \leq 2$ dimana graf S_1 dengan q titik dan graf S_2 dengan p titik

Contoh 3.9 Diberikan $S = \mathbb{Z}_{65}$ merupakan semigrup terhadap operasi pergandaan modulo 65. Dimisalkan $P_1 = \{0, 5, 10, \dots, 60\} \subseteq S$ dan $P_2 = \{0, 13, 26, \dots, 52\} \subseteq S$ subsemigrup dari S . Graf pembagi nol dari P_1 dan P_2 merupakan pohon, seperti yang ditunjukkan dalam diagram berikut



Gambar (17): Graf pembagi nol: P_1



Gambar (18): Graf pembagi nol: P_2

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan beberapa sifat dari semigrup sebagai graf pembagi nol yaitu jika $S = \{\mathbb{Z}_p, .\}$ dengan p prima merupakan semigrup terhadap operasi pergandaan maka S merupakan pohon. Sebaliknya jika $S = \{\mathbb{Z}_{n1} \times \mathbb{Z}_{n2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{ni}\}$ merupakan semigrup terhadap operasi pergandaan maka S bukanlah suatu pohon. Selanjutnya karena $S(n)$ suatu semigrup simetri dan tidak memuat pembagi nol maka $S(n)$ tidak dapat dinyatakan sebagai graf pembagi nol.

Selain itu jika $S = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2p - 2\}$ dan $S = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3p - 3\}$ dengan syarat p prima merupakan semigrup terhadap pergandaan modulo $2p$ maka S dapat dinyatakan sebagai pohon dengan p titik.

Penelitian ini masih dapat dilanjutkan untuk beberapa sifat graf pembagi nol yang lain diantaranya untuk $S = \mathbb{Z}_{pq}$ dengan p dan q dua bilangan prima berbeda yang merupakan semigrup terhadap pergandaan modulo pq dan graf pembagi nol untuk suatu subsemigrup

Daftar Pustaka

- [1] Akbari, S. dan Mohammadian, 2007, A., *On zero divisor graphs of finite rings*, J. Algebra, 314, 168-184
- [2] Anderson, D.D. dan M. Naseer., 1993, *Beck's coloring of commutative ring*, J. Algebra, 159, 500-514
- [3] Beck, I., 1988, *Coloring of a commutative ring*, J. Algebra, 116, 208-226
- [4] DeMeyer, F. dan DeMeyer, L., 2005, *Zero divisor graphs of semigroups*, J. Algebra, 283, 190-198
- [5] Howie, J. M., 1976, *Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press
- [6] Vasantha Kandasamy, W. B. dan Smarandache F., 2012, *Semigroups as graphs*, Zip Publishing, Ohio
- [7] Wilson, R. J., 1998, *Introduction to Graph Theory*, Addison Wesley Longman, England.

Dimensi Valuasi Dari Daerah Ideal Utama

Samsul Arifin, Hanni Garminia, Pudji Astuti

Abstrak

Suatu gelanggang valuasi adalah gelanggang komutatif yang ideal-idealnya terurut total oleh relasi inklusi. Baru-baru ini, Ghorbani dan Nazemian [5] memperkenalkan konsep dimensi valuasi dari suatu gelanggang komutatif yang mengukur seberapa jauh suatu gelanggang komutatif menyimpang dari sifat valuasi. Dalam tulisan ini akan diulas gagasan dimensi valuasi tersebut dan kemudian menunjukkan sebuah metode untuk menentukan dimensi valuasi dari suatu daerah ideal utama.

Kata Kunci: *dimensi valuasi, dimensi uniserial, daerah ideal utama.*

1. Pendahuluan

Gelanggang valuasi dapat diidentifikasi melalui koleksi dari semua idealnya yang bersifat terurut total terhadap relasi inklusi. Konsep yang berkaitan dengan gelanggang valuasi ini dikaji antara lain oleh Faith [3], Faith [4], Kaplansky [6] dan Manis [7]. Ukuran yang merepresentasikan seberapa jauh suatu gelanggang komutatif menyimpang dari sifat valuasi disebut dengan dimensi valuasi. Konsep dimensi valuasi dikenalkan oleh Ghorbani dan Nazemian [5].

Modul uniserial adalah modul yang koleksi dari semua submodulnya terurut total terhadap relasi inklusi. Sifat modul uniserial telah dikaji antara lain oleh Facchini dan Salce [2], Eisenbud dan Griffith [1] dan Warfield [10]. Ukuran yang merepresentasikan seberapa jauh suatu modul menyimpang dari sifat uniserial disebut dengan dimensi uniserial. Konsep dimensi uniserial pertama kali dikenalkan oleh Nazemian, dkk. [8]. Pada dasarnya dimensi valuasi suatu gelanggang tidak lain adalah dimensi uniserial dari modul regulernya.

Sifat-sifat dari dimensi valuasi dan dimensi uniserial sudah banyak yang diteliti. Nazemian, dkk. [8] menunjukkan bahwa untuk sebarang gelanggang R dan bilangan ordinal α terdapat suatu R -modul dengan dimensi uniserial α . Suatu gelanggang komutatif adalah Noether jika dan hanya jika setiap modul yang dibangun secara berhingga memiliki dimensi uniserial. Pada literatur yang lain, Ghorbani dan Nazemian [5] menunjukkan bahwa setiap gelanggang Noether merupakan gelanggang berdimensi valuasi. Lebih jauh, setiap gelanggang Artin, yang berarti juga merupakan gelanggang Noether, mempunyai dimensi valuasi berhingga. Oleh karena itu lapangan bilangan rasional, riil, dan kompleks memiliki dimensi valuasi berhingga. Selain itu, gelanggang bilangan bulat modulo n juga berdimensi valuasi berhingga. Walaupun demikian, tidak semua gelanggang komutatif yang memiliki dimensi valuasi berhingga adalah gelanggang Artin (lihat Ghorbani dan Nazemian [5]). Lebih lanjut, gelanggang berdimensi valuasi berhingga adalah gelanggang semisempurna.

Sementara itu Ghorbani dan Nazemian [5] juga memberikan contoh gelanggang Noether semisempurna yang berdimensi valuasi tak berhingga. Jika

diberikan gelanggang suku banyak A dengan variabel tak berhingga banyak atas suatu lapangan dan suatu ideal I dengan aturan tertentu di dalamnya, maka gelanggang kuosien A/I merupakan gelanggang lokal tanpa dimensi valuasi.

Memperhatikan hasil-hasil di atas, klasifikasi gelanggang dikaitkan dengan dimensi valuasi nampaknya tidak sederhana dan cukup menarik dan menantang untuk dikembangkan lebih lanjut. Untuk menambah model yang dapat dimanfaatkan dalam meningkatkan pemahaman dan pengembangan teori dimensi valuasi, tujuan dari tulisan ini adalah menentukan dimensi valuasi dari daerah ideal utama. Untuk itu, pembahasan diawali dengan ulasan konsep dimensi valuasi yang diperkenalkan oleh Ghorbani dan Nazemian [5] dan disampaikan di Sesi 2. Hasil utama, yaitu dimensi valuasi dari sebarang daerah ideal utama dibahas di Sesi 3.

2. Konsep Dimensi Valuasi

Dalam tulisan ini diasumsikan bahwa semua gelanggang adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan. Pengembangan konsep dimensi valuasi tidak bisa lepas dari pengertian dimensi uniserial. Konsep dimensi uniserial suatu modul pertama kali diperkenalkan oleh Nazemian, dkk., [8]. Konsep tersebut terkait dengan bilangan ordinal yang dikembangkan dengan induksi *transfinite* (lihat Stoll [9]). Pada tulisan ini bilangan ordinal hingga akan diidentifikasi dengan bilangan bulat positif dan bilangan ordinal *transfinite* pertama dinotasikan dengan ω . Untuk setiap bilangan ordinal $\alpha \geq 1$, dibangun secara induksi *transfinite* koleksi R -modul ξ_α , dimulai dari ξ_1 , dengan memanfaatkan koleksi R -modul ξ_β untuk setiap bilangan ordinal $\beta < \alpha$. Khususnya, koleksi R -modul ξ_1 berisi semua modul uniserial tak nol.

Definisi 2.1. Nazemian, dkk., [8].

Untuk setiap bilangan ordinal $\alpha \geq 1$ didefinisikan koleksi modul sebagai berikut:

- a) $\xi_1 = \{M \mid M \text{ } R\text{-modul uniserial}\},$
- b) $\xi_\alpha = \left\{ M \mid M \text{ } R\text{-modul, } (\forall N < M) \left(M/N \not\cong M \Rightarrow M/N \in \bigcup_{\beta < \alpha} \xi_\beta \right) \right\}.$

Sebagai contoh koleksi ξ_2 berisi semua R -modul M yang tidak uniserial dan untuk setiap N submodul dari M dengan sifat $M/N \not\cong M \Rightarrow M/N$ uniserial. Suatu modul M dikatakan memiliki dimensi uniserial jika terdapat bilangan ordinal α sehingga $M \in \xi_\alpha$. Mudah ditunjukkan bahwa jika $M \in \xi_\beta$ dan $\beta < \alpha$ maka $M \in \xi_\alpha$. Lebih lanjut, suatu modul M yang memiliki dimensi uniserial dikatakan berdimensi uniserial α , dinotasikan $u.s.\dim(M) = \alpha$, jika α adalah bilangan ordinal terkecil sehingga $M \in \xi_\alpha$.

Definisi 2.2. Nazemian, dkk., [8].

Misalkan M adalah R -modul.

- a) Untuk $M \in \xi_\alpha$, bilangan ordinal minimal α disebut dimensi uniserial dari modul M , dinotasikan $u.s.\dim(M)$.
- b) Untuk $M = 0$, $u.s.\dim(M) = 0$.
- c) Untuk $M \neq 0$ dan $M \notin \xi_\alpha$ untuk sebarang bilangan ordinal $\alpha \geq 1$, dikatakan bahwa “ $u.s.\dim(M)$ tidak terdefinisi” atau “modul M tidak memiliki dimensi uniserial”.

Berikut disajikan ulasan dalam menentukan dimensi uniserial suatu modul. Jika diberikan $M = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ adalah \mathbf{Z} -modul, maka $u.s.\dim(M) = 2$. Perhatikan bahwa semua submodul yang terdapat dalam \mathbf{Z} -modul M adalah sebagai berikut:

$$N_1 = \{(0,0)\}$$

$$N_2 = \{(0,0), (1,1)\}, N_4 = \{(0,0), (0,1)\}, N_5 = \{(0,0), (1,0)\}$$

$$N_3 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

- a) Jelas bahwa $M/N_1 = M$ dan M/N_3 adalah modul nol. Untuk submodul $N_2 = \{(0,0), (1,1)\}$ diperoleh:

$$M/N_2 = \{N_2, \{(0,1), (1,0)\}\}.$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh $M/N_4 = \{N_4, \{(0,1), (1,0)\}\}$ dan $M/N_5 = \{N_5, \{(0,1), (1,0)\}\}$. Dari sini dapat diperoleh bahwa $M/N_2, M/N_4, M/N_5 \in \xi_1$.

- b) Terdapat submodul $N_2 = \{(0,0), (1,1)\}$ dan $N_4 = \{(0,0), (0,1)\}$ di modul M yang berlaku $N_2 \not\subseteq N_4$ dan $N_4 \not\subseteq N_2$. Dari sini dapat diperoleh bahwa M bukanlah modul uniserial.
- c) Dari penjelasan a) dan b) di atas, dapat disimpulkan bahwa $u.s.\dim(M) = 2$.

Pada area teori gelanggang, pengertian valuasi pertama kali muncul dalam gelanggang komutatif, yaitu suatu fungsi valuasi yang merupakan homomorfisma dari grup perkalian unsur-unsur tak nol suatu lapangan ke suatu grup komutatif yang terurut total dengan sifat tertentu. Terdapat beberapa definisi yang saling ekuivalen terkait konsep gelanggang valuasi. Wisbauer [11] telah menuliskan karakteristik dari gelanggang valuasi yaitu sebagai berikut.

Teorema 2.3. Wisbauer [11].

Untuk suatu subring D dan lapangan hasil baginya, K , pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

- 1) Setiap x tak nol di K berlaku $x \in D$ atau $x^{-1} \in D$.
- 2) Koleksi ideal di D terurut total terhadap relasi inklusi.
- 3) Koleksi ideal utama di D terurut total terhadap relasi inklusi.
- 4) Terdapat grup komutatif T yang terurut total dan fungsi valuasi $v: K^x \rightarrow T$ dengan $D = \{x \in K^x \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$.

Gelanggang komutatif yang memenuhi Teorema 2.3. disebut gelanggang valuasi. Contoh gelanggang valuasi antara lain adalah sebarang lapangan, sehingga lapangan bilangan rasional, riil, kompleks dan lapangan \mathbf{Z}_p dengan p bilangan prima merupakan gelanggang valuasi. Sifat valuasi pada gelanggang dapat diidentifikasi dari sifat terurut total dari koleksi idealnya.

Pada tahun 2015 Ghorbani dan Nazemian [5] memperkenalkan konsep dimensi valuasi sebagai ukuran dari seberapa jauh suatu gelanggang komutatif menyimpang dari sifat valuasi. Ghorbani dan Nazemian [5] mendefinisikan konsep dimensi valuasi dari suatu gelanggang sebagai berikut. Merujuk pada konsep ini, gelanggang berdimensi valuasi berhingga dapat dipandang sebagai perumuman dari gelanggang valuasi.

Definisi 2.4. Ghorbani dan Nazemian [5].

Untuk suatu gelanggang R , dimensi uniserial dari modul R_R disebut dimensi valuasi dari gelanggang R dan dinotasikan $v.\dim(R)$. Jika R_R tidak memiliki dimensi uniserial, dikatakan bahwa gelanggang R tidak memiliki dimensi valuasi.

Sifat-sifat gelanggang yang memiliki dimensi valuasi sudah banyak yang ditemukan (lihat Nazemian, dkk. [8] dan Ghorbani dan Nazemian [5]). Jika I adalah ideal dari gelanggang berdimensi valuasi R , maka gelanggang faktor R/I memiliki dimensi valuasi dan berlaku $u.s.\dim((R/I)_R) = v.\dim(R/I)$. Dalam konsep dimensi uniserial, suatu submodul dari modul yang berdimensi uniserial tidak selalu memiliki dimensi uniserial (lihat Nazemian, dkk., [8]). Hal ini berbeda dengan konsep dimensi valuasi, karena untuk suatu gelanggang berdimensi valuasi, setiap ideal di dalamnya memiliki dimensi valuasi. Karakteristik dari dimensi valuasi, dari gelanggang Noether dapat dilihat di Ghorbani dan Nazemian [5].

Dalam rujukan Nazemian, dkk. [8], ditunjukkan bahwa jika M adalah modul dengan panjang berhingga, maka modul M memiliki dimensi uniserial dan berlaku $u.s.\dim(M) \leq \text{length}(M)$.

Selanjutnya diperoleh bahwa suatu gelanggang Artin memiliki dimensi valuasi berhingga. Ditunjukkan pula bahwa setiap gelanggang semi-Artin dengan dimensi valuasi adalah gelanggang Artin.

Memperhatikan hasil-hasil yang telah ada di literatur, dimensi valuasi dari sebarang daerah ideal utama masih belum diketahui dan hal tersebut akan dibahas dalam sesi selanjutnya.

3. Dimensi Valuasi dari Daerah Ideal Utama

Pada bagian ini akan dikaji dimensi valuasi dari sebarang daerah ideal utama. Mengingat sebarang daerah ideal utama R adalah gelanggang Noether, dengan merujuk pada hasil Ghorbani dan Nazemian [5] dapat disimpulkan bahwa R memiliki dimensi valuasi. Selanjutnya akan dibuktikan teorema berikut yang merupakan hasil utama dari makalah ini.

Teorema 3.1.

Jika R suatu daerah ideal utama maka $v.\dim(R) = 1$ atau $v.\dim(R) = \omega$.

Bukti Teorema 3.1. di atas akan memanfaatkan dua lema berikut.

Lema 3.2.

Misalkan R suatu daerah ideal utama yang bukan lapangan dan I suatu ideal tak nol di R yang tidak sama dengan R . Maka gelanggang R/I sebagai R -modul bersifat Artin.

Bukti: Misalkan I suatu ideal tak nol di R dan tidak sama dengan R . Misalkan a pembangun dari I , yaitu

$$I = \langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}.$$

Misalkan pula $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ untuk suatu $p_1, p_2, \dots, p_k \in R$ unsur prima yang berbeda di R dan e_1, e_2, \dots, e_k adalah bilangan bulat positif. Akan dibuktikan bahwa R/I sebagai \underline{R} -modul bersifat Artin. Untuk itu, misalkan

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_m \supseteq \dots$$

suatu rantai turun submodul di R/I . Definisikan untuk setiap $i = 1, 2, \dots$

$$I_i = \{r \in R \mid r + I \in J_i\}.$$

Mudah ditunjukkan bahwa I_i adalah ideal di R yang mengandung I dan berlaku $I_i \supseteq I_{i+1}$

Misalkan a_i adalah pembangun dari I_i , yaitu $I_i = \langle a_i \rangle$. Diperoleh a_i membagi a dan a_{i+1} untuk semua $i = 1, 2, \dots$. Karena itu untuk $i = 1, 2, \dots$

$$a_i = u_i p_1^{e_{1i}} p_2^{e_{2i}} \dots p_k^{e_{ki}}$$

untuk suatu $u_i \in R$ unit dan $e_{1i}, e_{2i}, \dots, e_{ki}$ adalah bilangan bulat taknegatif. Dari sifat a_i membagi a_{i+1} untuk setiap $i = 1, 2, \dots$ diperoleh barisan

$$0 \leq e_{j1} \leq e_{j2} \leq \dots \leq e_{jk},$$

untuk semua $j = 1, 2, \dots, k$. Jadi $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, e_j\}$ untuk semua $j = 1, 2, \dots, k$. Karena itu terdapat m_j sehingga $e_{jm_j} = e_{j_i}$ untuk semua $i \geq m_j$. Misalkan $m = \max\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, maka diperoleh a_m dan a_i sekawan untuk semua $i \geq m$. Jadi $I_m = I_i$ untuk semua $i \geq m$. Akibatnya $J_m = J_i$ untuk semua $i \geq m$. Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa R/I bersifat Artin.

Lema 3.3.

Misalkan R suatu daerah ideal utama dan terdapat $p, q \in R$ dua unsur prima yang tidak sekawan. Jika $I_n = \langle p^n q \rangle$ adalah ideal yang dibangun oleh $p^n q$ dengan n bilangan bulat positif, maka R/I_n sebagai R -modul memenuhi $u.s.\dim(R/I_n) = n + 1$.

Bukti: Lema akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika pada n . Untuk $n = 1$, diperoleh $I_1 = \langle pq \rangle$. Gelanggang kuosien R/I_1 sebagai R -modul memiliki empat buah submodul yaitu

$$R/I_1, \langle p \rangle/I_1, \langle q \rangle/I_1, \text{ dan } I_1/I_1.$$

Jelas R/I_1 tidak uniserial karena $\langle p \rangle/I_1 \not\subseteq \langle q \rangle/I_1$ dan $\langle p \rangle/I_1 \not\supseteq \langle q \rangle/I_1$. Selanjutnya karena $(R/I_1)/(\langle p \rangle/I_1) \cong R/\langle p \rangle$ dan $(R/I_1)/(\langle q \rangle/I_1) \cong R/\langle q \rangle$ adalah modul sederhana maka $u.s.\dim(R/I_1) = 2$. Jadi, lema benar untuk $n = 1$.

Misalkan lema benar untuk semua bilangan bulat k dengan $1 \leq k \leq n$; yaitu $u.s.\dim(R/I_k) = k + 1$. Misalkan $I_{k+1} = \langle p^{k+1} q \rangle$. Akan dibuktikan $u.s.\dim(R/I_{n+1}) = n + 2$ atau $n + 2$ adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $R/I_{n+1} \in \zeta_{n+2}$. Perhatikan bahwa semua submodul dari R/I_{n+1} berbentuk J/I_{n+1} dengan J adalah ideal di R yang mengandung I_{n+1} , artinya $J = \langle p^{i_1} q^{i_2} \rangle$ dengan $0 \leq i_1 \leq n + 1$ dan $0 \leq i_2 \leq 1$.

Misalkan J/I_{n+1} adalah submodul tak nol dari R/I_{n+1} yang tidak sama dengan R/I_{n+1} . Dari sini diperoleh $J = \langle p^{i_1} q^{i_2} \rangle$ dengan $0 \leq i_1 \leq n + 1$, $0 \leq i_2 \leq 1$ dan $(i_1, i_2) \neq (n + 1, 1)$ serta $(i_1, i_2) \neq (0, 0)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $(R/I_{n+1})/(J/I_{n+1}) \in \zeta_{n+1}$ dalam dua kasus, yaitu untuk $i_1 < n$ dan $i_1 \geq n$.

Jika $i_1 < n$ diperoleh $I_n \subseteq J$ sehingga J/I_n adalah submodul tak nol dari R/I_n yang tidak sama dengan R/I_n . Akibatnya $(R/I_n)/(J/I_n) \in \zeta_n$ karena $u.s.\dim(R/I_n) = n + 1$. Lebih lanjut diperoleh

$$(R/I_{n+1})/(J/I_{n+1}) \cong (R/J) \cong (R/I_n)/(J/I_n).$$

Jadi, diperoleh $(R/I_{n+1})/(J/I_{n+1}) \in \zeta_n \subseteq \zeta_{n+1}$.

Jika $i_1 \geq n$ diperoleh $(i_1, i_2) \in \{(n, 0), (n, 1), (n+1, 0)\}$. Jika $(i_1, i_2) = (n, 0)$ maka diperoleh $I_n \subseteq J$ dengan J/I_n sehingga dengan cara yang serupa untuk kasus $i_1 < n$ diperoleh $(R/I_{n+1})/(J/I_{n+1}) \in \zeta_n \subseteq \zeta_{n+1}$. Jika $(i_1, i_2) = (n, 1)$ diperoleh $I_n \cong J$ sehingga $(R/I_{n+1})/(J/I_{n+1}) \cong R/I_n \in \zeta_{n+1}$. Terakhir, jika $(i_1, i_2) = (n+1, 0)$ diperoleh $J = \langle p^{n+1} \rangle$ sehingga $(R/I_{n+1})/(J/I_{n+1}) \cong R/\langle p^{n+1} \rangle \in \zeta_1$ karena $R/\langle p^{n+1} \rangle$ adalah modul uniserial.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa $R/I_{n+1} \in \zeta_{n+2}$. Lebih lanjut, dari $(R/I_{n+1})/(J/I_{n+1}) \cong (R/I_n)$, maka R/I_n tidak isomorfik dengan R/I_{n+1} serta dari $u.s.\dim(R/I_n) = n+1$ dapat disimpulkan $R/I_{n+1} \notin \zeta_{n+1}$. Jadi $n+2$ adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $R/I_{n+1} \in \zeta_{n+2}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $u.s.\dim(R/I_{n+1}) = n+2$.

Bukti Teorema 3.1.

Daerah ideal utama yang juga merupakan lapangan mempunyai dimensi valuasi 1. Daerah ideal utama yang bukan lapangan dapat dibedakan dari banyaknya unsur prima yang tidak sekawan. Daerah ideal utama dengan unsur prima tunggal, dalam arti kita tidak membedakan dua unsur prima yang sekawan, adalah daerah valuasi diskrit. Dalam kasus ini daerah ideal utama tersebut mempunyai dimensi valuasi 1. Karena itu untuk membuktikan Teorema 3.1. di atas cukup dibuktikan bahwa sebarang daerah ideal utama yang memiliki minimal dua unsur prima yang tidak sekawan akan berdimensi valuasi ω .

Misalkan R adalah daerah ideal utama dan terdapat p dan q dua unsur prima di R yang tidak sekawan. Akan ditunjukkan bahwa dimensi valuasi dari R adalah ω . Misalkan I sebarang ideal tak nol di R yang tidak sama dengan R . Adanya unsur prima di R menunjukkan bahwa R bukan lapangan. Karena itu, berdasarkan Lema 3.2. dapat disimpulkan bahwa R/I bersifat Artin. Selanjutnya merujuk pada Ghorbadi dan Nazemian [5] dapat disimpulkan bahwa $u.s.\dim(R/I)$ hingga atau terdapat n bilangan bulat positif sehingga $R/I \in \zeta_n$. Jadi $R \in \zeta_\omega$.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $u.s.\dim(R) = \omega$ perlu ditunjukkan bahwa ω adalah bilangan ordinal terkecil sehingga $R \in \zeta_\omega$. Perhatikan bahwa berdasarkan Lema 3.3., untuk sebarang bilangan bulat positif $n \geq 2$ terdapat $I_{n-1} = \langle p^{n-1}q \rangle$ ideal tak nol di R yang tidak sama dengan R sehingga $u.s.\dim(R/I_{n-1}) = n$, yang artinya $R \notin \zeta_n$. Jadi ω adalah bilangan ordinal terkecil sehingga $R \in \zeta_\omega$. Dengan demikian, terbukti bahwa $v.\dim(R) = \omega$.

Daerah bilangan bulat \mathbf{Z} adalah daerah ideal utama yang memiliki lebih dari satu unsur prima. Dengan mengacu pada bukti Teorema 3.1. di atas diperoleh akibat berikut.

Akibat 3.4. $v.\dim(\mathbf{Z}) = \omega$.

Daftar Pustaka

- [1] Eisenbud, D. dan Griffith, P., 1971, *Serial Rings*, J. Algebra, 17, 389-400.
- [2] Facchini, A. dan Salce, L., 1990, *Uniserial modules: sums and isomorphisms of subquotients*, Comm. Algebra 18, 2, 499–517.
- [3] Faith, C., 1984, *The structure of valuation rings*, J. Pure Appl. Algebra, 31, 7-27.
- [4] Faith, C., 1986, *The structure of valuation rings II*, J. Pure Appl. Algebra, 42, 37-43.
- [5] Ghorbani, A. dan Nazemian, Z., 2015, *On commutative rings with uniserial dimension*, Journal of Algebra and Its Applications, 14, 1, 1550008.
- [6] Kaplansky, I., 1952, *Modules over Dedekind rings and valuation rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 72, 327-340.
- [7] Manis, M., 1969, *Valuation on a commutative ring*, Proc. Amer. Math. Soc, 20, 193-198
- [8] Nazemian, Z., Ghorbani, A. dan Behboodi, M., 2014, *Uniserial dimension of modules*, J. Algebra, 399, 894-903.
- [9] Stoll, R. R., 1961, *Set Theory and Logic*, Dover Publication Inc., New York.
- [10] Warfield, R. B., 1975, *Serial rings and finitely presented modules*, J. Algebra, 37, 187–222.
- [11] Wisbauer, R., 1991, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading.

Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Sistem Bipartisi pada Sistem Min-maks-plus

Dian Rizki Fauzi¹, Siswanto², dan Pangadi³

¹ Prodi Matematika FMIPA UNS, dianrizkyfauzizi@gmail.com

² Prodi Matematika FMIPA UNS, sis.mipauns@yahoo.co.id

³ Prodi Matematika FMIPA UNS, adi@mipa.uns.ac.id

Abstrak

Sistem kejadian diskrit (SKD) digunakan untuk mempelajari proses yang disebabkan oleh terjadinya suatu peristiwa. Sistem min-maks-plus yaitu sistem bipartisi min-maks-plus merupakan bagian dari SKD. Pada sistem bipartisi tersebut melibatkan 3 operasi, yaitu minimum (\oplus'), maksimum (\oplus), dan penjumlahan (\otimes). Himpunan pada sistem bipartisi min-maks-plus adalah $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sistem bipartisi min-maks-plus berupa pasangan matriks (A, B) . Sistem bipartisi min-maks-plus dapat direpresentasikan menjadi graf bipartisi. Masalah eigen juga dipelajari pada sistem bipartisi min-maks-plus. Sifat tak tereduksi pada sistem bipartisi min-maks-plus berdasarkan keberadaan struktur nilai eigen. Selanjutnya, power algorithm digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen yang sesuai untuk sistem bipartisi min-maks-plus. Hasil dari penelitian ini adalah diperolehnya nilai eigen dan vektor eigen dari sistem bipartisi min-maks-plus menggunakan power algorithm.

Kata Kunci: *sistem kejadian diskrit, sistem bipartisi, nilai eigen, dan vektor eigen.*

1. Pendahuluan

Aljabar merupakan cabang ilmu matematika yang penerapannya banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Aljabar maks-plus misalnya, dapat digunakan untuk menentukan siklus penjadwalan suatu masalah transportasi. Selanjutnya aljabar min-maks-plus merupakan perkembangan dari ilmu aljabar maks-plus. Aljabar maks-plus dan aljabar min-maks-plus merupakan bagian dari Sistem Kejadian Diskrit (SKD). SKD merupakan suatu klasifikasi masalah dengan sumber daya terbatas. Aplikasi dari aljabar min-maks-plus membahas masalah lokasi, penjadwalan mesin, *cutting* dan *packing*, dan penentuan *path* [2].

Aljabar min-maks-plus adalah gabungan dari aljabar maks-plus dan aljabar min-plus. Aljabar min-maks-plus pertama kali dikenalkan oleh Olsder [3] mengenai konsep perilaku dinamis pada tahun 1991. Permasalahan yang umum pada aljabar min-maks-plus adalah penentuan nilai eigen dan vektor eigen. Kelas dari aljabar min-maks-plus yang dipelajari dalam penelitian ini adalah aljabar min-maks-plus yang dapat dipisah, yaitu sistem bipartisi min-maks-plus. Struktur eigen untuk pertama kali dipelajari oleh Olsder [4] pada tahun 1993. Sistem bipartisi diwakili oleh sepasang matriks (A, B) untuk keberadaan struktural nilai eigen didasarkan pada sifat tak tereduksi.

Penelitian yang dilakukan oleh Subiono dan Woude [5] menjelaskan tentang konsep sistem bipartisi dalam aljabar min-maks-plus dan *power algorithm* yang digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen yang sesuai dari sistem bipartisi. Sejalan dengan penelitian tersebut, penelitian ini akan mengkaji ulang penelitian tersebut dengan memberikan penyempurnaan penjelasan dan contoh penerapan *power algorithm*.

2. Aljabar Min-maks-plus

Suatu aljabar min-maks-plus merupakan sistem gabungan dari aljabar maks-plus dan aljabar min-plus. Aljabar min-maks-plus yang dipelajari adalah sistem bipartisi. Himpunan dari sistem bipartisi meliputi $R \cup \{\pm\infty\}$. Selanjutnya $-\infty$ dinotasikan sebagai ε dan $+\infty$ dinotasikan sebagai \top .

2.1. Sistem Bipartisi

Diberikan $z_i(k) = x_i(k)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n \in \underline{n}$ dan $z_{j+n}(k) = y_j(k)$ untuk $j = 1, 2, \dots, m \in \underline{m}$. Selanjutnya didefinisikan sistem bipartisi sebagai

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \max(a_{i1} + y_1(k), a_{i2} + y_2(k), \dots, a_{in} + y_n(k)) \\ y_j(k+1) &= \min(b_{j1} + x_1(k), b_{j2} + x_2(k), \dots, b_{jm} + x_m(k)), \end{aligned}$$

dengan $k = 1, 2, \dots$, dimana $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m}, a_{ij} \in R_\varepsilon$, dan $b_{ji} \in R_\top$. Pada sistem bipartisi melibatkan operasi minimum (\oplus'), maksimum (\oplus), dan plus (\otimes), sehingga sistem dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= (a_{i1} \otimes y_1(k)) \oplus (a_{i2} \otimes y_2(k)) \oplus \dots \oplus (a_{in} \otimes y_n(k)) \\ y_j(k+1) &= (b_{j1} \otimes y_1(k)) \oplus' (b_{j2} \otimes y_2(k)) \oplus' \dots \oplus' (b_{jn} \otimes x_n(k)). \end{aligned}$$

Sistem dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \oplus_{j=1}^m (a_{ij} \otimes y_j(k)), i \in \underline{n} \\ y_j(k+1) &= \oplus'_{i=1}^n (b_{ji} \otimes x_i(k)), j \in \underline{m}. \end{aligned}$$

Dari sistem didapat persamaan umum dari sistem bipartisi sebagai

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes y(k) \\ y(k+1) &= B \otimes' x(k), \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \in R_\varepsilon^n$ dan $y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{pmatrix} \in R_\top^m$ dimana

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in R_\varepsilon^{n \times m} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in R_\top^{m \times n}.$$

Selanjutnya sistem bipartisi dapat dinotasikan sebagai

$$z(k+1) = \mathcal{M}(z(k)) \tag{2}$$

dimana $z(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$ dan $\mathcal{M}(z(k)) = \mathcal{M} \left(\begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} A \otimes y(k) \\ B \otimes' x(k) \end{pmatrix}$.

$\mathcal{M}(\cdot)$ merupakan pemetaan min-maks-plus yang bersifat monoton, homogen, dan *non-expansive*. Berikut diuraikan asumsi dan definisi yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Asumsi 1. Setiap baris pada matriks A dan B pada sistem (1) memuat paling tidak satu elemen berhingga.

Definisi 2.1. Suatu sistem bipartisi disebut regular jika sesuai dengan asumsi 1.

2.2. Graf Bipartisi

Sistem bipartisi dapat direpresentasikan menjadi graf bipartisi. Berikut diuraikan definisi graf bipartisi yang diambil dari Chartrand [1].

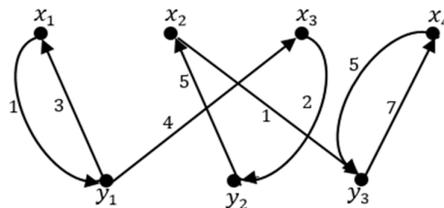
Definisi 2.2. Suatu graf G dikatakan bipartisi jika himpunan vertex V dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan yang disjoint V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap edge dari G menghubungkan satu vertex di V_1 dan satu vertex di V_2 .

Suatu pasangan matriks (A, B) dimana $A \in R_\varepsilon$ dan $B \in R_T$ dapat dibentuk menjadi graf bipartisi jika matriks A_{ij} memiliki ukuran yang sama dengan matriks B_{ji}^T . Representasi graf dari sistem bipartisi tersebut memiliki $n + m$ vertex, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$. Terdapat edge dari vertex y_j ke x_i jika $a_{ij} \neq \varepsilon$ dan nilai a_{ij} menunjukkan bobot dari edge tersebut. Begitu pula, terdapat edge dari vertex x_i ke y_j jika $b_{ji} \neq T$ dan nilai b_{ji} menunjukkan bobot dari edge tersebut.

Contoh 1. Diberikan pasangan matriks (A, B) sebagai

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & T & T & T \\ T & T & 2 & T \\ T & 1 & T & 5 \end{pmatrix}.$$

Representasi graf dari pasangan matriks (A, B) , yaitu



Gambar 1. Graf bipartisi

3. Pembahasan

3.1. Sifat Tereduksi

Berikut diuraikan definisi dan teorema terkait sifat tak tereduksi dari sistem bipartisi yang diambil dari Woude dan Subiono [6].

Definisi 3.2.

- i. Sistem (1) mempunyai nilai eigen λ dan vektor eigen $z = (\bar{x} \ \bar{y})^T$ dengan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda \mathbf{1}_n + \bar{x} = A \otimes \bar{y}$$

$$\lambda \mathbf{1}_m + \bar{y} = B \otimes' \bar{x}.$$

- ii. Sistem (1) atau sepasang matriks (A, B) dikatakan tereduksi jika terdapat permutasi α dari \underline{n} dan permutasi β dari \underline{m} sedemikian sehingga

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathcal{E} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ dan } B(\beta, \alpha) = \begin{pmatrix} B_{11} & \top \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

dengan

- i. A_{ij} memiliki ukuran yang sama dengan B_{ji}^T
- ii. Pada tiap baris A_{ij} terdapat paling tidak satu elemen berhingga.
- iii. Pada tiap baris B_{ji} terdapat paling tidak satu elemen berhingga.
- iv. \mathcal{E} merupakan matriks yang semua elemennya $\{-\infty\}$
- v. \top merupakan matriks yang semua elemennya $\{+\infty\}$.

Jika tidak terdapat permutasi α, β yang memenuhi maka sistem (1) atau pasangan matriks (A, B) dikatakan tidak tereduksi.

Terdapat kasus khusus untuk sistem bipartisi S , yaitu pasangan matriks (\bar{A}, \bar{B}) tereduksi. Matriks \bar{A} dan \bar{B} dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \mathcal{E} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \text{ dan } \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{11} & \top \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} \end{pmatrix}$$

dengan vektor $x(k)$ dan $y(k)$ yang dipartisi menjadi

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \text{ dan } y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix}.$$

Sehingga sistem dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \otimes y_1(k) \oplus \bar{A}_{12} \otimes y_2(k) \\ \bar{A}_{22} \otimes y_2(k) \\ \bar{B}_{11} \otimes' x_1(k) \\ \bar{B}_{21} \otimes' x_1(k) \oplus \bar{B}_{22} \otimes' x_2(k) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Selanjutnya didefinisikan subsistem bipartisi S_1 dan S_2 berturut-turut, yaitu

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ y_1(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \otimes y_1(k) \\ \bar{B}_{11} \otimes' x_1(k) \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} x_2(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{22} \otimes y_2(k) \\ \bar{B}_{22} \otimes' x_2(k) \end{pmatrix}.$$

Misalkan kedua subsistem memiliki nilai eigen berturut-turut λ_1 dan λ_2 dengan vektor eigennya berhingga. Sesuai dengan definisi 3.1, λ_1 dan λ_2 tunggal.

Teorema 3.3. Misalkan S merupakan sistem (3) yang memiliki subsistem S_1 dan S_2 dengan nilai eigen berturut-turut adalah λ_1 dan λ_2 serta vektor eigennya berhingga. Jika sistem memiliki nilai eigen λ_0 serta vektor eigennya berhingga, maka $\lambda_1 \leq \lambda_0 \leq \lambda_2$.

Bukti

Diberikan subsistem S_i untuk $i = 1, 2$ berlaku

$$z_i(k+1) = \mathcal{N}_i(z_i(k))$$

dengan

$$z_i(k) = \begin{pmatrix} x_i(k) \\ y_i(k) \end{pmatrix}, \mathcal{N}_i(z_i(k)) = \begin{pmatrix} \bar{A}_{ii} \otimes y_i(k) \\ \bar{B}_{ii} \otimes' x_i(k) \end{pmatrix}.$$

Jika $\bar{z}_i = \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix}$ merupakan suatu vektor eigen dari subsistem S_i dengan nilai eigen λ_i maka dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \bar{x}_i + \lambda_i 1_{ni} &= \bar{A}_{ii} \otimes \bar{y}_i \\ \bar{y}_i + \lambda_i 1_{mi} &= \bar{B}_{ii} \otimes' \bar{x}_i \end{aligned}$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \bar{z}_i + \lambda_i 1_{ni+mi} &= \mathcal{N}_i(\bar{z}_i). \\ \mathcal{N}_i^k(\bar{z}_i) &= \bar{z}_i + (k \cdot \lambda_i) 1_{ni+mi} \end{aligned}$$

yang berakibat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_i^k(\bar{z}_i)}{k} = \lambda_i 1_{ni+mi}.$$

$\mathcal{N}_i(\cdot)$ bersifat *non-expansive* sehingga berlaku

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_i^k(\bar{z}_i)}{k} = \lambda_i 1_{ni+mi}.$$

Selanjutnya diberikan suatu pemetaan $\mathcal{M}(\cdot)$ untuk $\bar{z} = (\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2)^T$, didefinisikan

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\bar{z}) &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \otimes \tilde{y}_1 \oplus \bar{A}_{12} \otimes \tilde{y}_2 \\ \oplus \bar{A}_{22} \otimes \tilde{y}_2 \\ \bar{B}_{11} \otimes' \tilde{x}_1 \\ \bar{B}_{21} \otimes' \tilde{x}_1 \oplus \bar{B}_{22} \otimes' \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_1(\bar{z}) = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \otimes \tilde{y}_1 \\ \oplus \bar{A}_{22} \otimes \tilde{y}_2 \\ \bar{B}_{11} \otimes' \tilde{x}_1 \\ \bar{B}_{21} \otimes' \tilde{x}_1 \oplus \bar{B}_{22} \otimes' \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \text{ dan} \\ \mathcal{M}_2(\bar{z}) &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \otimes \tilde{y}_1 \oplus \bar{A}_{12} \otimes \tilde{y}_2 \\ \oplus \bar{A}_{22} \otimes \tilde{y}_2 \\ \bar{B}_{11} \otimes' \tilde{x}_1 \\ \bar{B}_{22} \otimes' \tilde{x}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pemetaan $\mathcal{M}(\cdot)$ bersifat homogen, monoton, dan *non-expansive* sehingga berlaku

$$\mathcal{M}_1^k(\bar{z}) \leq \mathcal{M}^k(\bar{z}) \leq \mathcal{M}_2^k(\bar{z}).$$

Selanjutnya dapat dinyatakan

$$\frac{\mathcal{M}_1^k(\bar{z})}{k} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 1_{n1} \\ * \\ \lambda_1 1_{m1} \\ * \end{pmatrix} \text{ untuk } k \rightarrow \infty \text{ dan } \frac{\mathcal{M}_2^k(\bar{z})}{k} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ \lambda_2 1_{n2} \\ * \\ \lambda_2 1_{m2} \end{pmatrix} \text{ untuk } k \rightarrow \infty.$$

Diasumsikan sistem S mempunyai nilai eigen λ_0 . Dari uraian diatas dapat disimpulkan untuk $k \rightarrow \infty$, dapat dinyatakan

$$\frac{\mathcal{M}_1^k(\bar{z})}{k} \leq \frac{\mathcal{M}^k(\bar{z})}{k} \leq \frac{\mathcal{M}_2^k(\bar{z})}{k}$$



$$\begin{pmatrix} \lambda_1 1_{n1} \\ * \\ \lambda_1 1_{m1} \\ * \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \lambda_0 1_{n1} \\ \lambda_0 1_{n2} \\ \lambda_0 1_{m1} \\ \lambda_0 1_{m2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} * \\ \lambda_2 1_{n2} \\ * \\ \lambda_2 1_{m2} \end{pmatrix},$$

sehingga didapat $\lambda_1 \leq \lambda_0 \leq \lambda_2$.

Akibat 3.4. Misalkan sistem S dengan subsistem S_1 dan S_2 dengan nilai eigen masing-masing λ_1 dan λ_2 seperti pada Teorema 3.3. Jika $\lambda_1 > \lambda_2$, maka sistem S tidak mempunyai nilai eigen.

Bukti

Dengan kontradiksi dari teorema 3.3, akibat 3.4 terbukti. ■

3.2. Power Algorithm

Power algorithm dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari sistem bipartisi. Sebelum beralih pada *power algorithm* pada sistem bipartisi, terlebih dahulu diberikan definisi, asumsi, lemma, dan akibat yang diambil dari Woude dan Subiono [6].

Definisi 3.7. Suatu sistem bipartisi dikatakan mempunyai nilai eigen jika terdapat bilangan berhingga $\lambda \in \mathbb{R}$ dan vektor $v \in \mathbb{R}^{n+m}$ sedemikian sehingga $\mathcal{M}(v) = \lambda \otimes v$.

Definisi 3.8. Diberikan sembarang vektor awal $z(0)$, sistem (2) mempunyai perilaku periodik jika terdapat bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sedemikian sehingga $z(p) = z(q) \otimes c$, dengan $p - q$ sebagai panjang dari perilaku periodik. Selanjutnya bobot rata-rata dari perilaku periodik tersebut adalah $\frac{c}{p-q}$, yang merupakan nilai eigen dari sistem.

Asumsi 2. Untuk sembarang vektor awal $z(0)$, sistem (2) diiterasi sampai menghasilkan perilaku periodik. Setiap perilaku periodik mempunyai bobot rata-rata yang sama merupakan nilai eigen.

Algoritma 3.9. *Power algorithm* dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari sistem bipartisi sebagai berikut.

1. Ambil sembarang vektor awal $z(0)$.
2. Iterasi $z(k) = \mathcal{M}(z(k-1))$ untuk $k = 1, 2, \dots$ sampai terdapat bilangan bulat positif p, q , dan bilangan real c sehingga $z(p) = c \otimes z(q)$.
3. Definisikan sebagai nilai eigen $\lambda = \frac{c}{p-q}$.
4. Definisikan sebagai calon vektor eigen $v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j-1))$.
5. Jika $\mathcal{M}(v) = \lambda \otimes v$ maka sistem bipartisi memiliki v yang merupakan vektor eigen dan algoritma berhenti. Jika $\mathcal{M}(v) \neq \lambda \otimes v$ maka algoritma dilanjutkan dengan langkah selanjutnya.

6. Ambil $z(0) = v$ sebagai vektor awal yang baru. Ulangi langkah ke-2 sampai terdapat bilangan bulat positif r yang memenuhi $z(r + 1) = \lambda \otimes z(r)$. Maka $z(r)$ merupakan vektor eigen dengan nilai eigen λ .

Contoh 2. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari pasangan matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 8 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau & 2 & \tau & \tau \\ \tau & 2 & \tau & \tau & \tau & \tau \\ \tau & 2 & \tau & 3 & \tau & \tau \\ \tau & \tau & 1 & \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau & 1 & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau & \tau & \tau & 2 \end{pmatrix}.$$

Dari pasangan (A, B) diiterasi didapat

$$\begin{aligned} z(0) &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ z(1) &= (2 \ 3 \ 5 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2)^T \\ z(2) &= (4 \ 4 \ 7 \ 5 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \ 5)^T \\ z(3) &= (7 \ 7 \ 10 \ 8 \ 7 \ 7 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 5 \ 6)^T \\ z(4) &= (8 \ 8 \ 11 \ 9 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \ 9 \ 9 \ 8 \ 9)^T \\ z(5) &= (11 \ 11 \ 14 \ 12 \ 11 \ 11 \ 9 \ 10 \ 10 \ 10 \ 9 \ 10)^T, \end{aligned}$$

sehingga $p = 5, q = 3$, dan $c = 4$ maka nilai $\lambda = 2$. Selanjutnya ditentukan vektor eigen

$$\begin{aligned} v &= 2^{\otimes(2-1)} \otimes z(3) \oplus 2^{\otimes(0)} \otimes z(4) \\ &= 2 \otimes (7 \ 7 \ 10 \ 8 \ 7 \ 7 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 5 \ 6)^T \oplus \\ &\quad 0 \otimes (8 \ 8 \ 11 \ 9 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \ 9 \ 9 \ 8 \ 9)^T \\ &= (9 \ 9 \ 12 \ 10 \ 9 \ 9 \ 8 \ 9 \ 9 \ 9 \ 8 \ 9)^T. \end{aligned}$$

Selanjutnya dicek apakah $\mathcal{M}(v) = \lambda \otimes v$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v) &= (11 \ 11 \ 14 \ 12 \ 11 \ 11 \ 10 \ 11 \ 11 \ 11 \ 10 \ 11)^T \text{ dan} \\ \lambda \otimes v &= (11 \ 11 \ 14 \ 12 \ 11 \ 11 \ 10 \ 11 \ 11 \ 11 \ 10 \ 11)^T \end{aligned}$$

maka $\mathcal{M}(v) = \lambda \otimes v$, didapatkan nilai $\lambda = (2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2)^T$ dengan vektor eigen $v = (9 \ 9 \ 12 \ 10 \ 9 \ 9 \ 8 \ 9 \ 9 \ 9 \ 8 \ 9)^T$.

Lemma 3.10. Misalkan λ dan v dihitung menggunakan algoritma 3.9, maka $\mathcal{M}(v) \geq \lambda \otimes v$.

Bukti

$$v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j-1)).$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} v &\geq \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j-1), \forall i = 1, 2, \dots, p-q. \\ \mathcal{M}(v) &\geq \mathcal{M}(\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j-1)), \forall i = 1, 2, \dots, p-q. \\ \mathcal{M}(v) &\geq \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes \mathcal{M}(z(q+j-1)), \forall i = 1, 2, \dots, p-q. \\ \mathcal{M}(v) &\geq \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j), \forall i = 1, 2, \dots, p-q. \\ \mathcal{M}(v) &\geq \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j), \forall i = 0, 1, 2, \dots, p-q-1 \\ \mathcal{M}(v) &\geq \lambda^{\otimes(p-q-j+1)} \otimes z(q+j-1), \forall i = 1, 2, \dots, p-q \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}(v) \geq \lambda \otimes \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j-1), \forall i = 1, 2, \dots, p-q.$$

Selanjutnya dari pertidaksamaan diatas dapat disimpulkan

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v) &\geq \lambda \otimes \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j-1) \\ &= \lambda \otimes \bigoplus_{j=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes z(q+j-1) \right) = \lambda \otimes v. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Akibat 3.11. Misalkan λ dan v dihitung menggunakan algoritma 3.9 dan untuk $z(0) = v$ maka berlaku

$$z(k+1) \geq \lambda \otimes z(k), \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

Bukti

Suatu barisan $\{z(k) | k \in \mathbb{N}\}$ dibangkitkan oleh $z(k+1) = \mathcal{M}(z(k))$ dan $z(0) = z_0$ sebagai nilai awal. Barisan $z(k)$ dapat ditulis

$$\begin{aligned} z(k) &= \mathcal{M}(z(k-1)) \\ z(k) &= \mathcal{M}(\mathcal{M}(z(k-2))) \\ z(k) &= \mathcal{M}^2(z(k-2)) \\ &\vdots \\ z(k) &= \mathcal{M}^k(z(0)), \end{aligned}$$

untuk $x(0) = v$ didapat $z(k) = \mathcal{M}^k(v)$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$. Selanjutnya $z(k+1) = \mathcal{M}^{k+1}(v) = \mathcal{M}(\mathcal{M}^k(v)) \geq \mathcal{M}^k(\lambda \otimes v)$. Sifat homogen berlaku $\mathcal{M}^k(\lambda \otimes v) = \lambda \otimes (\mathcal{M}^k(v)) = \lambda \otimes z(k)$, sehingga dapat disimpulkan $z(k+1) \geq \lambda \otimes z(k)$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots$ \blacksquare

4. Kesimpulan

Di dalam penelitian ini telah dijelaskan penentuan nilai eigen dan vektor eigen dengan *power algorithm* beserta contoh penerapannya. Penjelasan *power algorithm* dapat dilihat pada 3.2 dan contoh penerapannya dapat dilihat pada contoh 2.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G. and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, 2nd ed., Wadsworth Inc., California, 1979.
- [2] Cuninghame-Green, R. A., *Minimax Algebra and Applications*, Fuzzy Sets and Systems 41 (1991), no. 3, 251-267.
- [2] Olsder, G. J., *Eigenvalues of Dynamic Min-max Systems*, Journal of Discrete Event Dynamic Systems (1991), pp. 177-207.
- [3] Olsder, G. J., *On Struktural Properties of Min-max Systems*, Report of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics, TU Delft (1993), pp. 93-95.
- [4] Subiono and J. van der Woude, *Power Algorithms for (max, +)-and Bipartite (min, max, plus)-Systems*, Journal of Discrete Event Dynamic Systems (2000), pp. 369-389.
- [5] Woude, J. van der and Subiono, *Condition for the Struktural Existence of an Eigenvalue of a Bipartite (min, max, plus) system*, Theoretical Computer Science, 293: 13-24, 2003.

Karakteristik Elemen Satuan Pada Semiring Pseudo-Ternary Matriks Atas Bilangan Bulat Negatif

Maxrizal¹ dan Baiq Desy Aniska Prayanti²

¹ Jurusan Sistem Informasi, STMIK Atma Luhur Pangkalpinang

² Universitas Bangka Belitung

¹ maxrizal@atmaluhur.ac.id dan ² baiqdesyaniska@gmail.com

Abstrak

Struktur semiring pseudo-ternary merupakan generalisasi dari struktur semiring ternary. Sifat-sifat yang terdapat di semiring ternary diselidiki dan diaplikasikan pada semiring pseudo-ternary. Dalam makalah ini dikaji karakteristik dari elemen satuan pada semiring pseudo-ternary matriks atas bilangan bulat negatif. Suatu elemen pada semiring pseudo-ternary dikatakan memiliki elemen satuan jika elemen tersebut merupakan elemen satuan kiri, tengah dan kanan. Jika elemen tersebut hanya merupakan elemen kiri dan kanan maka elemen tersebut dinamakan elemen satuan dua sisi. Hasil kajian menunjukkan bahwa karakteristik elemen satuan pada semiring pseudo ternary matriks atas bilangan bulat negatif bergantung pada ordo dari matriks. Selanjutnya, kelemahan-kelemahan pada ordo matriks dikaji dan dimodifikasi pada beberapa subsemiring pseudo-ternary di semiring pseudo-ternary matriks atas bilangan bulat negatif. Tujuannya agar diperoleh subsemiring pseudo-ternary di semiring pseudo-ternary matriks atas bilangan bulat negatif yang memiliki elemen satuan dua sisi atau elemen satuan.

Kata Kunci: *semiring pseudo ternary matriks atas bilangan bulat negatif, elemen satuan, elemen satuan dua sisi, subsemiring pseudo-ternary matriks atas bilangan bulat negatif.*

1. Pendahuluan

Konsep semiring ternary pada [2, 3, 4, 5, 6, 7] yang diperkenalkan oleh T.K. Dutta dan S. Kar (2004) merupakan generalisasi dari ring ternary yang diperkenalkan oleh W.G. Lister pada tahun 1971. Pada [3, 5, 6] dijelaskan bahwa konsep semiring ternary dimotivasi oleh struktur pada himpunan bilangan bulat negatif (\mathbb{Z}^-) yang dilengkapi operasi biner penjumlahan dan triner perkalian biasa. Selanjutnya pada [8], konsep semiring ternary pada \mathbb{Z}^- diperluas pada matriks persegi atas \mathbb{Z}^- sehingga $M_{n \times n}(\mathbb{Z}^-)$ yang dilengkapi operasi biner penjumlahan dan triner perkalian biasa merupakan semiring ternary.

Faktanya, $M_{n \times n}(\mathbb{Z}^-)$ merupakan bentuk matriks khusus dari matriks persegi panjang dan struktur matriks $M_{m \times n}(\mathbb{Z}^-)$ dilengkapi operasi biner penjumlahan dan triner perkalian biasa bukan merupakan semiring ternary. Bahkan struktur $(M_{m \times n}(\mathbb{Z}^-), +, \cdot)$ tidak tertutup pada operasi triner perkalian biasa. Untuk itu pada [8], didefinisikan operasi perkalian triner untuk matriks persegi panjang yaitu

$A \otimes B \otimes C = AB^T C$, dengan $A, B, C \in M_{m \times n}(\square^-)$ dan B^T adalah transpose dari matriks B . Selanjutnya, struktur $(M_{n \times n}(\square^-), +, \otimes)$ disebut semiring pseudo-ternary [8].

Berdasarkan [8] diperoleh bahwa konsep semiring pseudo-ternary bersifat lebih umum dari semiring ternary sehingga memberi peluang untuk menyelidiki sifat-sifat pada semiring ternary yang masih berlaku pada semiring pseudo-ternary. Salah satu sifat yang dikaji pada makalah ini adalah eksistensi elemen satuan pada semiring pseudo-ternary $(M_{n \times n}(\square^-), +, \otimes)$. Secara umum, suatu elemen pada suatu semiring pseudo-ternary S disebut elemen satuan jika elemen itu merupakan elemen satuan kiri sekaligus elemen satuan tengah dan kanan.

Berdasarkan definisi di atas, dalam makalah ini dikaji eksistensi dari elemen satuan kiri, tengah dan kanan pada semiring pseudo-ternary $(M_{n \times n}(\square^-), +, \otimes)$.

2. Kajian Pustaka

Berikut ini beberapa definisi yang berkaitan dengan struktur semiring pseudo-ternary yang didefinisikan pada [8].

Definisi 1. Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$ yang dilengkapi dengan operasi biner $+: S \times S \rightarrow S$ dan operasi triner $\bullet: S \times S \times S \rightarrow S$. Himpunan S disebut semiring pseudo-ternary jika memenuhi:

1. $(S, +)$ merupakan semigrup abelian.
2. (S, \bullet) merupakan semigrup pseudo-ternary yaitu untuk setiap $a, b, c, d, e \in S$ berlaku $abc \in S$ dan $(abc)de = ab(cde)$.
3. Berlaku sifat distributif kanan, kiri dan tengah, yaitu untuk setiap $a, b, c, d \in S$ berlaku

$$(i) \quad (a+b)cd = acd + bcd$$

$$(ii) \quad a(b+c)d = abd + acd$$

$$(iii) \quad ab(c+d) = abc + abd$$

Untuk memudahkan pemahaman pada bagian selanjutnya, struktur semiring pseudo-ternary disimbolkan menjadi semiring P-T.

Definisi 2. Suatu elemen disebut elemen nol dari semiring P-T $(S, +, \square)$ dinotasikan dengan "0" jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $0+x=x$ dan $0xy = x0y = xy0 = 0$. Semiring P-T S yang mempunyai elemen nol disebut semiring P-T dengan elemen nol.

Selanjutnya, pada pembahasan di bawah ini S merupakan notasi untuk semiring P-T dengan elemen nol dan $S^* = S - \{0\}$.

Definisi 3. Diberikan suatu semiring P-T $(S, +, \square)$. Elemen e di S disebut elemen satuan kiri (tengah, kanan) jika berlaku $eex = x$ ($exe = x$, $xee = x$), untuk setiap $x \in S$. Elemen satuan kiri sekaligus kanan disebut elemen satuan dua sisi. Selanjutnya, elemen satuan kiri sekaligus elemen satuan tengah dan kanan disebut elemen satuan.

Selanjutnya, di bawah ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan subhimpunan yang ada pada semiring P-T.

Definisi 4. Diberikan semiring P-T $(S, +, \square)$. Himpunan $T \subseteq S$ disebut subsemiring P-T jika $(T, +, \square)$ juga merupakan semiring P-T.

Perhatikan bahwa Definisi 4 dapat dinyatakan dalam Definisi di bawah ini.

Definisi 5. Diberikan suatu semiring P-T $(S, +, \bullet)$ dan subhimpunan $T \subseteq S$. Himpunan T disebut subsemiring P-T jika untuk setiap $t_1, t_2, t_3 \in T$ maka berlaku $t_1 + t_2 \in T$ dan $t_1 t_2 t_3 \in T$.

Selain mengkaji definisi-definisi yang berkaitan dengan semiring P-T, kajian pada makalah ini juga membutuhkan beberapa konsep dasar aljabar elementer. Berikut ini diberikan beberapa definisi dan sifat matriks pada aljabar elementer [1].

Definisi 6. Suatu matriks persegi yang semua elemen di luar diagonal utamanya nol disebut matriks diagonal.

Definisi 7. Suatu matriks diagonal L berukuran $n \times n$ yang semua elemen diagonal utamanya adalah k dinyatakan sebagai $L_{n \times n} = (D(k))_{n \times n}$.

Selanjutnya, diberikan beberapa proposisi yang berkaitan dengan matriks diagonal.

Proposisi 1. Jika L adalah matriks diagonal maka berlaku $L = L^T$, dengan L^T adalah tranpose dari matriks L .

Proposisi 2. Jika $L_{n \times n} = (D(k))_{n \times n}$ maka berlaku

$$L_{n \times n} = \begin{bmatrix} L_{n \times n} & | & O_{n \times r} \end{bmatrix}_{n \times (n+r)} \begin{bmatrix} L_{n \times n} & | & O_{n \times r} \end{bmatrix}_{(n+r) \times n}^T \quad \text{dan} \quad L_{n \times n} = \begin{bmatrix} L_{n \times n} \\ O_{r \times n} \end{bmatrix}_{n \times (n+r)}^T \begin{bmatrix} L_{n \times n} \\ O_{r \times n} \end{bmatrix}_{(n+r) \times n},$$

dengan O adalah matriks dengan semua elemennya adalah 0 dan $r \in \mathbb{N}^+$.

3. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan Definisi 2, struktur $(M_{m \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ merupakan semiring P-T dengan elemen nol. Selanjutnya, berdasarkan permasalahan pada bagian pendahuluan, berikut ini diberikan beberapa definisi, contoh dan proposisi yang berkaitan dengan eksistensi elemen satuan pada semiring P-T $(M_{m \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$. Perlu diperhatikan bahwa perkalian triner untuk $A, B, C \in M_{m \times n}(\square_0^-)$ didefinisikan sebagai $A \otimes B \otimes C = AB^T C$. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 1. Diketahui semiring P-T $(M_{2 \times 3}(\square_0^-), +, \otimes)$. Untuk semua $A \in M_{2 \times 3}(\square_0^-)$ maka terdapat $E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\square_0^-)$ yang merupakan elemen satuan kiri, karena berlaku $E \otimes E \otimes A = A$. Perhatikan bahwa $A \otimes E \otimes E \neq A$ dan $E \otimes A \otimes E \neq A$ sehingga E bukan merupakan elemen satuan kanan dan tengah.

Selanjutnya, Contoh 1 di atas memotivasi proposisi berikut ini.

Proposisi 3. Jika $m < n$ ($m > n$) maka semiring P-T $(M_{m \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ hanya memiliki elemen satuan kiri (kanan).

Bukti:

Diketahui $m < n$ sehingga berlaku semiring P-T $(M_{m \times (m+k)}(\square_0^-), +, \otimes)$, dengan $k \in \square^+$.

Kasus 1. (Akan diselidiki elemen satuan kiri)

Diambil sebarang $A \in M_{m \times (m+k)}(\square_0^-)$. Jika $L_{m \times m} = (D(1))_{m \times m}$ maka berlaku $LA = A$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $A \in M_{m \times (m+k)}(\square_0^-)$ terdapat $I_{m \times m} = (D(-1))_{m \times m}$, sehingga berlaku

$$A_{m \times n} = L_{m \times m} A_{m \times n} = I_{m \times m} I_{m \times m}^T A_{m \times n} = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & | & O_{m \times k} \end{bmatrix}_{m \times (m+k)} \begin{bmatrix} I_{m \times m} & | & O_{m \times k} \end{bmatrix}_{(m+k) \times m}^T A_{m \times n}$$

Jika diambil $E = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & | & O_{m \times k} \end{bmatrix}_{m \times (m+k)}$ maka berlaku $A = EE^T A = E \otimes E \otimes A$, untuk setiap $A \in M_{m \times (m+k)}(\square_0^-)$. Jadi, E merupakan elemen satuan kiri.

Kasus 2. (Akan diselidiki elemen satuan kanan)

Diambil sebarang $A \in M_{m \times n}(\square_0^-)$. Jika $R_{n \times n} = (D(1))_{n \times n}$ maka berlaku $AR = A$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $A \in M_{m \times n}(\square_0^-)$ terdapat $I_{n \times n} = (D(-1))_{n \times n}$, sehingga berlaku

$$A_{m \times n} = A_{m \times n} R_{n \times n} = A_{m \times n} I_{n \times n}^T I_{n \times n} = A_{m \times n} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{k \times n} \end{bmatrix}_{n \times (n+k)}^T \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{k \times n} \end{bmatrix}_{(n+k) \times n}$$

Jika diambil $E = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{k \times n} \end{bmatrix}_{(n+k) \times n}$ maka berlaku $A \otimes E \otimes E = AE^T E = A$, untuk setiap

$A \in M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Perhatikan bahwa $E \notin M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right)$, karena diketahui $m < n$. Jadi, E bukan merupakan elemen satuan kanan.

Kasus 3. (Akan diselidiki elemen satuan tengah)

Diambil sebarang $A \in M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Andaikan terdapat E elemen satuan tengah.

Menurut Definisi 3, untuk setiap $A \in M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right)$ berlaku

$$A = E \otimes A \otimes E = EA^T E = A^T$$

Karena $m < n$ maka tidak mungkin berlaku $A = A^T$, untuk setiap $A \in M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Terjadi kontradiksi. Jadi, E bukan merupakan elemen satuan tengah.

Dari pembuktian Proposisi 3, kita dapat menemukan elemen satuan kiri yang lain dengan menukarkan kolom-kolom pada matriks $I_{m \times m}$ dan $O_{m \times k}$. Salah satu hasil dekomposisi untuk elemen satuan kiri adalah $E = \begin{bmatrix} O_{m \times k} & I_{m \times m} \end{bmatrix}_{m \times (m+k)}$. Berikut ini diberikan proposisi yang menyatakan banyaknya elemen satuan kiri atau kanan dari semiring P-T $\left(M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right), +, \otimes \right)$.

Proposisi 4. Jika $m < n$ ($m > n$) maka elemen satuan kiri (kanan) pada semiring P-T $\left(M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right), +, \otimes \right)$ tidak tunggal dan banyaknya elemen satuan kiri (kanan) adalah permutasi m baris (n kolom) dari n kolom (m baris).

Berikut ini diberikan contoh untuk memperjelas Proposisi 3 dan 4.

Contoh 2. Diberikan semiring P-T $\left(M_{3 \times 5} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right), +, \otimes \right)$. Berdasarkan Proposisi 3, terdapat $E = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 2} \end{bmatrix}_{3 \times 5} \in M_{3 \times 5} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right)$ sebagai salah satu elemen satuan kiri, dengan $I_{3 \times 3} = (D(-1))_{3 \times 3}$. Berdasarkan Proposisi 5, banyaknya elemen satuan kiri pada semiring P-T $\left(M_{3 \times 5} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right), +, \otimes \right)$ adalah $\underbrace{5 \times (5-1) \times (5-2)}_{3 \text{ faktor}} = 60$.

Kita telah menyelidiki eksistensi elemen satuan pada semiring P-T $\left(M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right), +, \otimes \right)$ untuk ukuran matriks $m \neq n$. Selanjutnya, pada proposisi di bawah ini akan dijelaskan eksistensi elemen satuan pada semiring P-T $\left(M_{m \times n} \left(\begin{smallmatrix} \square & - \\ & 0 \end{smallmatrix} \right), +, \otimes \right)$ dengan ukuran matriks $m = n$ (matriks persegi).

Proposisi 5:

Semiring P-T $(M_{1 \times 1}(\square_0^-), +, \otimes)$ memiliki elemen satuan.

Bukti:

Diberikan semiring P-T $(M_{1 \times 1}(\square_0^-), +, \otimes)$. Diambil sebarang $[a] \in M_{1 \times 1}(\square_0^-)$ dan berlaku $[a] = [a]^T$. Jika diambil $[1]$ maka $[1][a] = [a][1] = [a]$. Perhatikan bahwa untuk setiap $[a] \in M_{1 \times 1}(\square_0^-)$ terdapat $E = [-1]$, sehingga berlaku

$$A \otimes E \otimes E = AE^T E = [a][(-1)^T] [-1] = [a][1] = [a] = A$$

$$E \otimes E \otimes A = EE^T A = [-1][(-1)^T] [a] = [1][a] = [a] = A$$

dan

$$E \otimes A \otimes E = [-1][a]^T [-1] = [-1][a] [-1] = [a] = A$$

Jadi, E elemen satuan di semiring P-T $(M_{1 \times 1}(\square_0^-), +, \otimes)$.

Selanjutnya, banyaknya elemen satuan pada semiring P-T $(M_{1 \times 1}(\square_0^-), +, \otimes)$ dinyatakan pada proposisi di bawah ini.

Proposisi 6. Elemen satuan pada semiring P-T $(M_{1 \times 1}(\square_0^-), +, \otimes)$ tunggal, yaitu $[-1]$.

Perhatikan bahwa Proposisi 5 merupakan kasus umum pada bilangan bulat (\square_0^-) , karena setiap \square_0^- bisa dinyatakan sebagai matriks berukuran 1×1 . Selanjutnya, pada proposisi di bawah ini akan dinyatakan kasus $m = n$ dan $n > 1$, untuk semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$.

Proposisi 7. Jika $n > 1$ maka semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ hanya memiliki elemen satuan dua sisi.

Bukti:

Diberikan semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$, dengan $n > 1$.

Kasus 1. (Akan diselidiki elemen satuan dua sisi)

Diambil sebarang $A \in M_{n \times n}(\square_0^-)$. Jika $L_{n \times n} = (D(1))_{n \times n}$ maka berlaku $LA = AL = A$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $A \in M_{n \times n}(\square_0^-)$ terdapat $I_{n \times n} = (D(-1))_{n \times n}$, sehingga berlaku

$$A_{n \times n} I_{n \times n}^T I_{n \times n} = A_{n \times n} L_{n \times n} = A_{n \times n}$$

$$I_{n \times n} I_{n \times n}^T A_{n \times n} = L_{n \times n} A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

Jika diambil $E = I_{n \times n}$ dan dibentuk

$$A \otimes E \otimes E = AE^T E = A$$

$$E \otimes E \otimes A = EE^T A = A$$

Jadi, E elemen satuan dua sisi.

Kasus 2. (Akan diselidiki elemen satuan tengah)

Diambil sebarang $A \in M_{n \times n}(\square_0^-)$. Andaikan terdapat E elemen satuan tengah.

Menurut Definisi 3, untuk setiap $A \in M_{n \times n}(\square_0^-)$ berlaku

$$A = E \otimes A \otimes E = EA^T E = A^T$$

Perhatikan bahwa tidak setiap $A \in M_{n \times n}(\square_0^-)$ berlaku $A = A^T$. Jadi, semiring P-T

$(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ tidak memiliki elemen satuan tengah.

Selanjutnya, banyaknya elemen satuan dua sisi pada semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ dinyatakan pada proposisi di bawah ini.

Proposisi 8. Jika $n > 1$ maka elemen satuan dua sisi pada semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ tidak tunggal dan banyaknya elemen satuan dua sisi adalah permutasi n baris dari n kolom.

Berdasarkan Proposisi 7, penambahan syarat $n > 1$ pada semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ hanya menghasilkan elemen satuan dua sisi. Dari fakta ini, memotivasi untuk menyelidiki elemen satuan tengah pada suatu subsemiring P-T di semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 3. Dibentuk himpunan $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \square_0^- \right\}$. Perhatikan bahwa

$K \subseteq M_{2 \times 2}(\square_0^-)$. Untuk setiap $A \in K$ berlaku $A = A^T$. Diambil $A, B, C \in M_{n \times n}(\square_0^-)$

yaitu $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa

$$A \otimes B \otimes C = AB^T C = \begin{bmatrix} -59 & -44 \\ -79 & -69 \end{bmatrix} \notin K$$

Jadi, subhimpunan $(K, +, \otimes)$ bukan merupakan subsemiring P-T di semiring P-T $(M_{2 \times 2}(\square_0^-), +, \otimes)$.

Perhatikan bahwa membentuk subhimpunan yang dibentuk dari semua matriks simetri ($A = A^T$) di $M_{n \times n}(\square_0^-)$ tidak menghasilkan suatu subsemiring P-T di semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$. Dari kelemahan Contoh 4, diperoleh fakta yang dinyatakan pada contoh di bawah ini.

Contoh 4. Diberikan $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Perhatikan bahwa $D \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $A \in D$ berlaku $A = A^T$. Berdasarkan Definisi 5, subhimpunan $(D, +, \otimes)$ merupakan subsemiring P-T di semiring P-T $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \otimes)$. Misalkan diambil sebarang $A \in D$ maka terdapat $E = (D(-1))_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sehingga $E \otimes A \otimes E = EA^T E = A^T = A$, untuk setiap $A \in D$. Dengan demikian, E adalah elemen satuan tengah. Berdasarkan Proposisi 7, E merupakan elemen satuan dua sisi. Jadi E adalah elemen satuan di $(D, +, \otimes)$.

Konsep yang diperoleh dari Contoh 4 di atas dinyatakan pada proposisi di bawah ini.

Proposisi 9. Jika D adalah himpunan semua matriks diagonal di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ maka semiring P-T $(D, +, \otimes)$ memiliki elemen satuan.

Bukti:

Diberikan D himpunan semua matriks diagonal di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Berdasarkan Definisi 1, $(D, +, \otimes)$ merupakan semiring P-T. Perhatikan bahwa untuk setiap $A \in D_{n \times n}$ berlaku $A = A^T$. Diambil $A \in D_{n \times n}$ maka terdapat $E = (D(-1))_{n \times n}$ sehingga berlaku $E \otimes A \otimes E = EA^T E = A^T = A$, untuk setiap $A \in D_{n \times n}$. Dengan demikian, E adalah elemen satuan tengah. Berdasarkan Proposisi 7, E merupakan elemen satuan dua sisi di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Jadi E adalah elemen satuan di $(D, +, \otimes)$.

Proposisi 10. Jika D adalah himpunan semua matriks diagonal di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ maka semiring P-T $(D, +, \otimes)$ memiliki elemen satuan yang tunggal, yaitu $(D(-1))_{n \times n}$.

Berdasarkan Proposisi 9, elemen satuan dapat ditemukan di salah satu subsemiring P-T dari semiring P-T $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \otimes)$ yaitu pada himpunan semua matriks diagonal di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Perhatikan kembali bahwa semiring P-T $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \otimes)$ hanya memuat elemen satuan kiri atau kanan, sehingga akan diselidiki elemen satuan dua sisi pada subsemiring P-T $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \otimes)$. Berikut ini diberikan contoh subsemiring P-T di semiring P-T $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \otimes)$ yang memiliki elemen satuan dua sisi.

Contoh 5. Dibentuk subhimpunan $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \square_0^- \right\}$. Berdasarkan Definisi 5, $(H, +, \otimes)$ merupakan subsemiring P-T di semiring P-T $(M_{2 \times 3}(\square_0^-), +, \otimes)$. Perhatikan bahwa untuk setiap $A \in H$ terdapat $E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ yang merupakan elemen satuan dua sisi.

Berdasarkan Contoh 5, subsemiring P-T $(H, +, \otimes)$ memiliki elemen satuan dua sisi. Jika diperhatikan, untuk setiap $A \in H$ memuat vektor kolom $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ yaitu vektor-vektor kolom dari matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\square_0^-)$. Selanjutnya, sifat ini dinyatakan pada proposisi di bawah ini.

Proposisi 11. Diberikan semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$. Diambil sebarang $A \in M_{n \times n}(\square_0^-)$ dan dibentuk

$$H = \left\{ A^* \mid A^* \in M_{m \times k}(\square_0^-), m \geq n > 1, k \geq n > 1 \text{ dan } m \neq k \right\}.$$

Jika A^* memuat semua vektor kolom (vektor baris) dari A dan memuat vektor nol untuk kolom (baris) yang lain maka semiring P-T $(H, +, \otimes)$ memiliki elemen satuan dua sisi.

Perhatikan bahwa jika diambil D matriks diagonal di $M_{n \times n}(\square_0^-)$ maka diperoleh proposisi berikut.

Proposisi 12. Diberikan semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$. Diambil sebarang matriks diagonal D di $M_{n \times n}(\square_0^-)$ dan dibentuk

$$G = \left\{ D^* \mid D^* \in M_{m \times k}(\square_0^-), m \geq n > 1, k \geq n > 1 \text{ dan } m \neq k \right\}.$$

Jika D^* memuat semua vektor kolom (vektor baris) dari D dan memuat vektor nol untuk kolom (baris) yang lain maka semiring P-T $(G, +, \otimes)$ memiliki elemen satuan.

4. Kesimpulan

Hasil kajian menunjukkan bahwa eksistensi elemen satuan pada semiring P-T $(M_{m \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ bergantung pada ordo dari matriks $m \times n$. Jika $m < n$ ($m > n$) maka semiring P-T $(M_{m \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ memiliki elemen satuan kiri (kanan). Sedangkan

untuk $n > 1$ maka semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ memiliki elemen satuan dua sisi.

Untuk kasus $n = 1$, semiring P-T $(M_{n \times n}(\square_0^-), +, \otimes)$ memiliki elemen satuan.

Selain itu, kita juga memperoleh fakta bahwa untuk $n > 1$, semiring P-T $(D, +, \otimes)$ memiliki elemen satuan, dengan D adalah himpunan semua matriks diagonal di $M_{n \times n}(\square_0^-)$.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H., dan Rorres, C., 2005, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, Edisi.8, diterjemahkan oleh Hermein, I., dan Gressando, J., Erlangga, Jakarta.
- [2] Dutta. T. K., Shum. K. P., dan Mandal. S., 2012, Singular Ideal of Ternary Semirings, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 5, No.2, pp. 116-128.
- [3] Dutta. T. K., dan Kar. S., 2006, A Note On Regular Ternary Semiring, *Kyungpook Mathematical Journal*, Vol. 46, pp. 357-365.
- [4] Kar. S., 2011, Ideal Theory In The Ternary Semiring \square_0^- , *Bulletin of The Malaysian Mathematical Science Society*, Vol. 34, No. 1, pp. 69-77.
- [5] Madhusudana . D. R., Srinivasa. G. R., dan Siva, P, P., 2015, Concept on Ordered Ternary Semiring, *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, Vol. 2, No. 4, pp. 435-438.
- [6] Madhusudana . D. R., dan Srinivasa. G. R., 2014, Special Element of A Ternary Semiring, *International Journal of Engineering Research and Applications*, Vol. 4, No. 11, pp. 123-130.
- [7] Madhusudana . D. R., dan Srinivasa. G. R., 2014, A Study On Ternary Semiring, *International Journal of Mathematical Archive*, Vol. 5, No. 12, pp. 24-30.
- [8] Maxrizal dan Suparwanto. A., 2014, Semiring Pseudo-Ternary, *Jurnal Matematika & Sains*, Vol. 19, No. 2, pp. 50-55.

Optimasi Waktu Produksi dan Analisis Keperiodikan pada Graf Sistem Produksi Ber-Loop dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-plus

Lucia Winda Cesari¹⁾ dan M.Andy Rudhito²⁾

¹⁾Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam FKIP Universitas Sanata Dharma

²⁾S2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
luc.caesar@gmail.com, arudhito@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji persamaan pada sistem produksi ber-loop serta analisis keperiodikannya dengan menggunakan sistem persamaan linear aljabar *max-plus*. Penelitian diawali dengan membuat graf sistem produksi modifikasi sesuai dengan banyaknya *loop* yang ada pada graf produksi. Selanjutnya disusun aturan sinkronisasi yang sesuai dengan graf modifikasi serta pemodelan sistem persamaan linear sesuai dengan aturan sinkronisasi yang ada. Langkah berikutnya adalah membahas penjadwalan periodik dari barisan keadaan sistem dan output berdasarkan pada sistem persamaan linear aljabar *max-plus*.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa graf produksi ber-loop dapat disajikan dalam suatu graf modifikasi dengan penambahan unit pemrosesan sesuai banyaknya *loop*. Dari perhitungan barisan keadaan sistem dan *output* pada sistem produksi ber-loop, barisan *input* paling lambat dapat ditentukan dengan menjadikan nilai maksimum waktu pemrosesan pada unit-unit pemrosesan yang memulai pemrosesan secara langsung tanpa menunggu unit pemrosesan lain sebagai input pertama. Barisan input selanjutnya ditentukan secara periodik dengan periode sebesar λ yang merupakan nilai eigen maksimum matriks A. Hal ini membuat barisan keadaan sistem dan *output* yang terbentuk menjadi periodik.

Kata Kunci : *abstrak, aljabar, sistem persamaan linear aljabar max-plus, loop, sistem produksi*

1. Pendahuluan

Aljabar *max-plus* merupakan suatu struktur aljabar yang semesta pembicaraannya merupakan gabungan dari himpunan bilangan real dan negatif tak terhingga ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Aljabar *max-plus* dilengkapi dengan operasi maksimum yang dinotasikan dengan \oplus , dan operasi penjumlahan dinotasikan dengan \otimes . Aljabar *max-plus* dapat digunakan untuk menggambarkan secara *linear* dinamika waktu dari suatu sistem *nonlinear* dalam aljabar konvensional, sehingga pembahasan menjadi lebih mudah.^[5] Aplikasi aljabar *max-plus* dapat dijumpai dalam penjadwalan penerbangan pesawat di bandara, penjadwalan keberangkatan kereta api, menentukan jalur tercepat, model sistem antrian, maupun dalam sistem produksi sederhana.

Penelitian yang telah dilakukan sebelumnya yang berupa studi kasus untuk menentukan waktu optimum pada produksi bakpia pathok dilakukan tanpa membuat penjadwalan secara periodik.^[1] Selain itu, pada penelitian sebelumnya telah dijelaskan

mengenai pembuatan penjadwalan produksi secara periodik tetapi hanya terbatas pada produksi dengan dua mesin saja.^[7] Hal ini mengakibatkan dirasa perlu untuk melakukan

suatu penelitian yang membuat suatu sistem dalam sistem produksi dapat mencapai waktu optimum dan bekerja secara periodik.

Sesuai dengan prinsip optimasi yang bertujuan untuk meningkatkan kinerja mesin produksi sehingga mempunyai kualitas yang baik dan hasil kerja yang tinggi^[2], secara khusus dalam penelitian ini, penulis menggunakan sistem persamaan linear dalam aljabar *max-plus* untuk menghitung waktu optimum dalam sistem produksi sederhana. Pada penelitian ini akan dihitung waktu optimum produksi dari suatu graf sistem produksi ber-loop dengan menggunakan sistem persamaan linear aljabar *max-plus* waktu invarian, serta dibuat penjadwalan aktivitas produksi secara periodik. Perbedaan dari penelitian-penelitian sebelumnya adalah pada penelitian ini akan terlihat model matematika yang relevan agar suatu sistem dalam sistem produksi dapat bekerja secara periodik sesuai dengan kondisi-kondisi yang diberikan. Sistem yang dapat bekerja secara periodik akan mempermudah dalam kegiatan produksi.

2. Aljabar *Max-Plus*

Aljabar *max-plus* merupakan suatu struktur aljabar yang semesta pembicaraannya merupakan gabungan dari himpunan bilangan real dan negatif tak terhingga ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Aljabar *max-plus* dilengkapi dengan operasi maksimum yang dinotasikan dengan \oplus , dan operasi penjumlahan dinotasikan dengan \otimes . ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) dapat dinotasikan sebagai \mathbb{R}_ε , dengan ε merupakan $\{-\infty\}$. Elemen ε merupakan elemen netral pada operasi \oplus dan 0 merupakan elemen identitas pada operasi \otimes . Selanjutnya, $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan \mathbb{R}_{\max} .^[4]

Aljabar *max-plus* (\mathbb{R}_{\max}) merupakan semiring komutatif yang sekaligus idempoten sebab untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$ dan $x \oplus x = \mathbf{max}\{x, x\} = x$. Selain itu, aljabar *max-plus* juga merupakan semifield sebab untuk setiap $x \in \mathbb{R}_{\max}$ memiliki invers yaitu $-x$, sehingga berlaku $x \otimes (-x) = x + (-x) = (-x) + x = (-x) \otimes x = \mathbf{0}$.^[8]

Definisi 2.1

Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Elemen ke- i, j dari $A \oplus B$ adalah :

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}) \quad (1)$$

Dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$.

Diketahui $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times m}$, elemen ke- i, j dari $A \otimes B$ adalah :

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj} \quad (2)$$

Dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$, Elemen ke- i, j dari A^T adalah :

$$[A^T]_{ij} = a_{ji} \quad (3)$$

Dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$

Definisi 2.2

Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ disebut nilai eigen *max-plus* matriks A jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{max}^n$ dengan $v \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Vektor v tersebut disebut vektor eigen *max-plus* matriks A yang bersesuaian dengan λ .

Teorema 2.1

Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Jika $\lambda \in \mathbb{R}$ adalah nilai eigen matriks A di \mathbb{R}_{max} , maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam $G(A)$.

Bukti :

Misal λ adalah nilai eigen matriks A di \mathbb{R}_{max} , maka untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ berlaku $(A \otimes x)_i = (\lambda \otimes x)_i$ dengan $x \neq \varepsilon_{n \times 1}$. Akibatnya terdapat suatu indeks i_1, i_2 sehingga $a_{i_1}, a_{i_2} \otimes x_{i_2} = \lambda \otimes x_{i_1}$ dengan $x_{i_1} \neq \varepsilon$. Karena $\lambda \neq \varepsilon$ dan $x_{i_1} \neq \varepsilon$ maka $x_{i_2} \neq \varepsilon$ dan $a_{i_1}, a_{i_2} \neq \varepsilon$. Karena $x_{i_2} \neq \varepsilon$ maka terdapat suatu indeks i_3 sedemikian rupa sehingga $a_{i_2}, a_{i_3} \otimes x_{i_3} = \lambda \otimes x_{i_2}$. Karena $\lambda \neq \varepsilon$ dan $x_{i_2} \neq \varepsilon$ maka $x_{i_3} \neq \varepsilon$ dan $a_{i_2}, a_{i_3} \neq \varepsilon$. Demikian seterusnya dengan cara yang sama seperti di atas, maka diperoleh suatu barisan $\{i_j\}$ sehingga berakibat $a_{i_{j-1}}, a_{i_j} \otimes x_{i_j} = \lambda \otimes x_{i_{j-1}}$ dengan $x_{i_j} \neq \varepsilon$ dan $a_{i_{j-1}}, a_{i_j} \neq \varepsilon$ untuk $j = 1, 2, \dots$. Karena banyak titik dalam graf $G(A)$ berhingga, maka terdapat suatu j dan l sehingga $i_j = i_l$. Akibatnya diperoleh suatu sirkuit \tilde{n} . Misalkan \tilde{n} adalah $(i_l, i_m), \dots, (i_{l+2}, i_{l+1}), (i_{l+1}, i_l)$ sehingga diperoleh $(A_{i_l, i_{l+1}} \otimes x_{i_{l+1}}) \otimes \dots \otimes (A_{i_l, i_{l+1}} \otimes x_{i_{l+1}}) = (\lambda \otimes x_{i_l}) \otimes \dots \otimes (\lambda \otimes x_{i_m})$. Karena operasi \otimes di \mathbb{R}_{max} bersifat komutatif maka diperoleh $(A_{i_l, i_{l+1}} \otimes \dots \otimes A_{i_m, i_l}) \otimes \dots \otimes (x_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes x_{i_m} \otimes x_{i_l}) = \lambda^{m-l+1} (x_{i_l} \otimes x_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes x_{i_m})$ atau $(A_{i_l, i_{l+1}} \otimes \dots \otimes A_{i_m, i_l}) = \lambda^{m-l+1}$ atau $\lambda = \frac{A_{i_l, i_{l+1}} \otimes \dots \otimes A_{i_m, i_l}}{m-l+1}$. Hal ini berarti λ merupakan bobot rata-rata sirkuit \tilde{n} .^[6]

Definisi 2.3

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Graf bobot dari A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $A = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot $G = (V, A)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dengan :

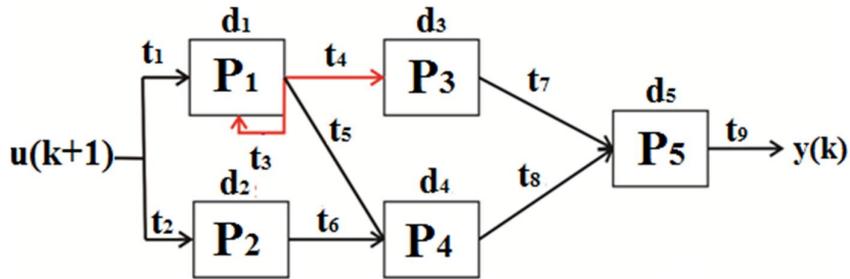
$$A_{ij} = \begin{cases} w(j, i) & \text{jika } (j, i) \in A_{[3]} \\ \varepsilon & \text{jika } (j, i) \notin A \end{cases}$$

3. Pembahasan

Graf sistem produksi ber-loop merupakan suatu graf representasi dari sistem produksi yang memuat suatu mesin dengan beberapa pekerjaan identik dalam satu periode produksi. Graf tersebut tersaji dalam beberapa jenis seperti berikut.

3.1 Loop Tunggal (Single Loop)

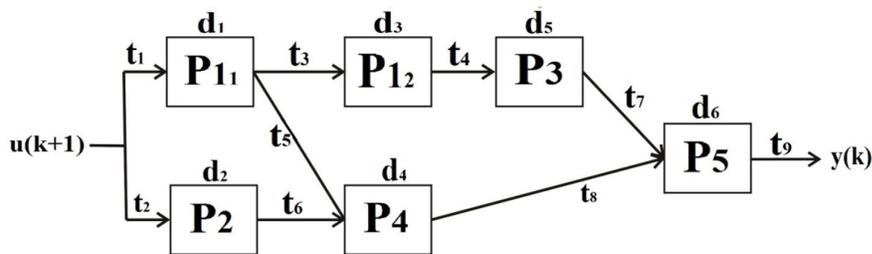
Graf dengan *loop* tunggal menandakan bahwa mesin yang mengandung *loop* tersebut melakukan dua kali pekerjaan (*job*) dalam satu kali periode produksi. Dengan mengandaikan bentuk segiempat sebagai pemrosesan serta anak panah menunjukkan jalur produksi, graf tersebut dapat tersaji sebagai berikut.



Gambar 1. Graf Sistem Produksi Loop Tunggal

Pada Gambar 1. di atas, anak panah merah menunjukkan alur produksi untuk pekerjaan (*job*) kedua pada mesin P_1 . P_1 melakukan pekerjaan (*job*) pertama dan mendistribusikannya pada P_4 . P_1 yang telah menyelesaikan pekerjaan pertamanya kemudian memulai lagi pekerjaan keduanya dan mendistribusikannya ke P_3 . Dengan kata lain untuk setiap satu kali produksi hingga *output* tersedia, unit pemrosesan P_1 harus melakukan 2 kali pekerjaan (*job*) sedangkan unit pemrosesan yang lain hanya melakukan 1 kali pekerjaan.

Selanjutnya diberikan suatu graf modifikasi dengan penambahan unit pemrosesan bayangan sebanyak *loop* yang ada seperti berikut ini.



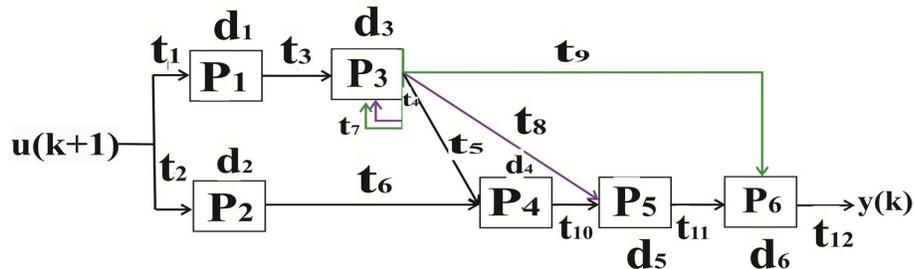
Gambar 2. Graf Sistem Produksi Modifikasi Loop Tunggal

Pada Gambar 2. terlihat bahwa unit pemrosesan bayangan yang ditambahkan untuk merepresentasikan pekerjaan kedua pada P_1 adalah P_{12} . Pekerjaan pertama yang telah diselesaikan pada P_1 yang direpresentasikan dengan P_{11} kemudian dilanjutkan ke unit pemrosesan P_4 , sementara itu unit pemrosesan P_{12} dapat memulai pekerjaannya segera setelah P_{11} menyelesaikan pekerjaannya.

3.2 Loop Berganda (Multi Loop)

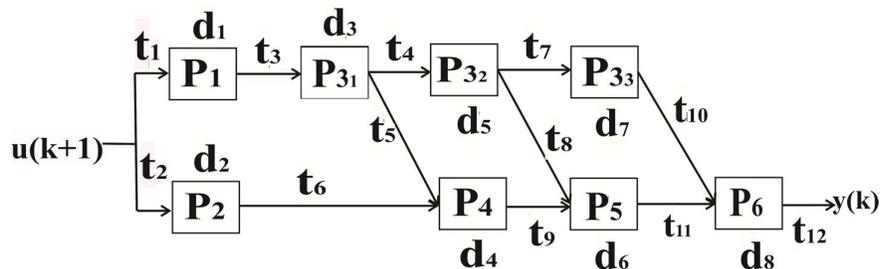
Suatu unit pemrosesan dalam sistem produksi dapat memuat beberapa *loop* (tidak hanya satu). Misal untuk suatu unit pemrosesan P_i untuk setiap satu kali

produksi dapat memuat n loop. Hal ini menandakan bahwa unit pemrosesan P_i melakukan pekerjaan sebanyak $n + 1$ kali untuk satu produksi hingga *output* tersedia. Berikut ini tersaji graf sistem produksi yang memuat beberapa *loop* pada satu unit pemrosesan.



Gambar 3. Graf Sistem Produksi Loop Berganda

Gambar 3. menunjukkan bahwa pada unit pemrosesan P_3 terdapat 2 loop yang menandakan bahwa P_3 melakukan pekerjaan sebanyak 3 kali dalam satu kali periode produksi hingga *output* tersedia. Garis ungu menunjukkan alur produksi untuk pekerjaan kedua, sedangkan garis hijau menunjukkan alur produksi untuk pekerjaan ketiga. P_3 melakukan pekerjaan pertama dan mendistribusikannya ke P_4 , sementara itu P_3 kembali melakukan pekerjaannya dan mendistribusikannya ke P_5 . Pekerjaan ketiga pada P_3 yang telah diselesaikan kemudian didistribusikan ke P_6 . Selanjutnya diberikan graf modifikasi yang sesuai yakni :



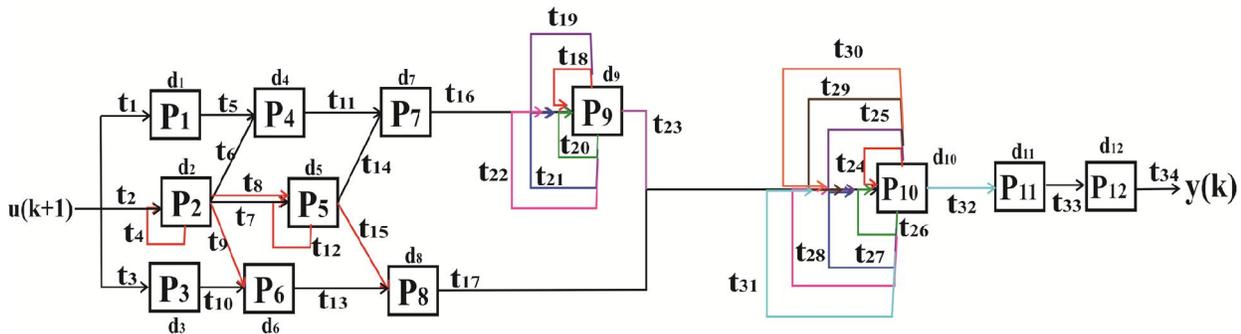
Gambar 4. Graf Sistem Produksi Modifikasi Loop Berganda

Gambar 4. menunjukkan bahwa unit pemrosesan bayangan P_{3_2} dan P_{3_3} ditambahkan untuk merepresentasikan pekerjaan kedua dan ketiga pada P_3 untuk satu kali periode produksi.

3.3 Loop Berganda dengan Banyak Titik (*Multi Loop Multi Vertex*)

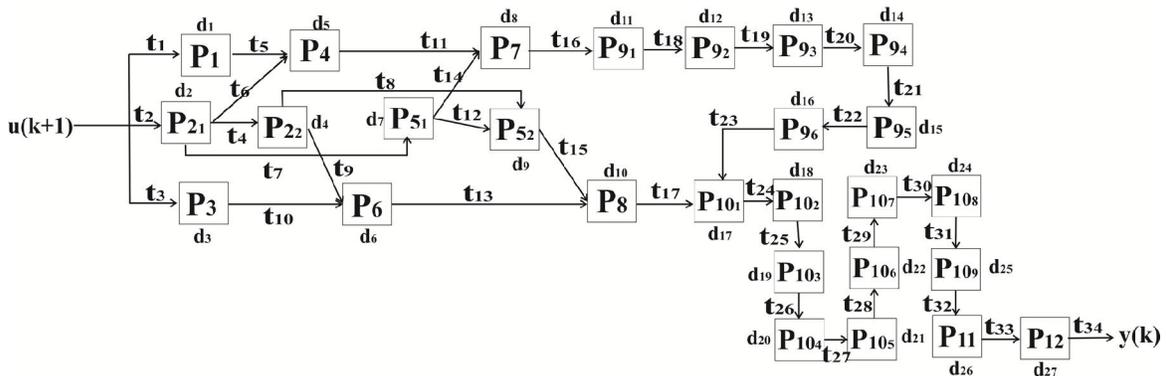
Pada bagian ini akan dibahas mengenai graf sistem produksi yang memiliki beberapa *loop* pada beberapa titik. Titik pada bahasan ini berarti unit pemrosesan yang nantinya pada graf akan direpresentasikan dengan bangun segiempat. Graf yang

terbentuk adalah sebagai berikut.



Gambar 5. Graf Sistem Produksi Multi Loop Multi Vertex

Gambar 5. menunjukkan bahwa pada unit pemrosesan P_2 dan P_5 masing-masing memuat 1 loop. Hal ini berarti bahwa P_2 dan P_5 masing-masing melakukan 2 pekerjaan untuk setiap satu kali periode produksi. Unit pemrosesan P_9 dan P_{10} yang memuat masing-masing 5 loop dan 8 loop melakukan 6 kali pekerjaan dan 9 kali pekerjaan untuk setiap satu kali periode produksi. Graf modifikasi yang dapat dibentuk dari Gambar 3.5 adalah sebagai berikut.



Gambar 6. Graf Sistem Produksi Modifikasi Multi Loop Multi Vertex

Berdasarkan Gambar 6. unit pemrosesan bayangan (P_{22}) ditambahkan untuk merepresentasikan unit pemrosesan yang memuat loop pada P_{21} . Hal yang sama juga dilakukan untuk semua unit pemrosesan yang mengandung loop. Banyaknya unit pemrosesan bayangan yang ditambahkan sesuai dengan banyaknya loop yang ada pada unit pemrosesan tersebut.

Berdasarkan proses modifikasi dari ketiga jenis graf tersebut dapat terlihat bahwa banyaknya unit pemrosesan modifikasi setara dengan jumlahan unit pemrosesan ber-loop ditambah dengan banyaknya loop. Hal ini dapat dirumuskan sebagai berikut.

Teorema 1

Jika suatu graf ber-loop memiliki i unit pemrosesan dan memiliki total loop sebanyak n , maka banyaknya unit pemrosesan modifikasi yang terjadi sebanyak $n + i$.

Bukti :

Diberikan suatu graf dengan i unit pemrosesan tak identik dan n loop. n loop menandakan terdapat n pemrosesan identik yang terjadi sehingga terdapat n unit pemrosesan. Banyaknya unit pemrosesan yang terjadi $i + n$ atau $n + i$. ■

Setelah melakukan modifikasi graf dengan penambahan unit pemrosesan bayang sebanyak $loop$, selanjutnya akan dilakukan pemodelan sesuai graf modifikasi untuk masing-masing jenis graf. Pemodelan tersebut dilakukan sesuai dengan sistem persamaan linear *max-plus* waktu invarian berikut ini.

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k + 1) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned} \tag{4}$$

untuk $k = 1, 2, 3, \dots$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0, A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_{max}^{l \times n}$. Vektor $x(k) \in \mathbb{R}_{max}^n$ menyatakan keadaan atau *state*, $u(k) \in \mathbb{R}_{max}^m$

adalah vektor *input*, dan $y(k) \in \mathbb{R}_{max}^l$ adalah vektor *output* sistem saat waktu ke- k . SLMi seperti dalam definisi diatas secara singkat dituliskan dengan SLMi (A, B, C) dan dituliskan SLMi (A, B, C, x_0) jika kondisi awal diberikan. Persamaan tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut.

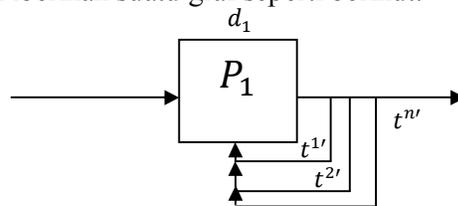
- i) $u(k + 1)$: waktu saat bahan baku dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke $(k + 1)$.
- ii) $x_i(k)$: waktu saat bahan dilakukan pemrosesan ke- i dan mulai bekerja untuk pemrosesan ke- k dengan waktu pemrosesan sebesar d_i .
- iii) $y(k)$: waktu saat produk kue ke- k yang diselesaikan meninggalkan sistem.

Berdasarkan sistem persamaan linear yang telah dibuat untuk ketiga jenis graf tersebut dapat diperoleh hasil bahwa terdapat perbedaan pada *entry* matriks diagonal utama yang menunjukkan waktu proses unit pemrosesan bayangan. *Entry* yang menunjukkan unit pemrosesan bayangan merupakan hasil penjumlahan dari waktu proses unit pemrosesan asal dan waktu transfernya, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut.

Teorema 2

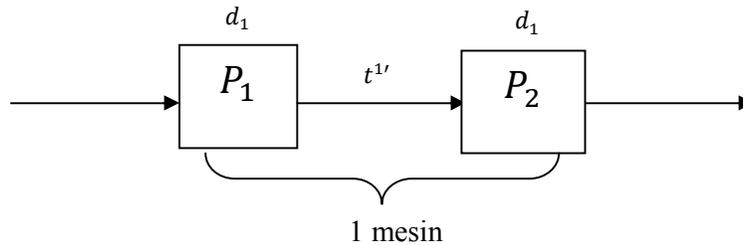
Jika P_i menunjukkan suatu unit pemrosesan dengan *loop* sebanyak n dan P_n menunjukkan unit pemrosesan bayangan ke- n maka a_{nn} pada matriks A sama dengan $((n + 1) \times d_i) + t$, dengan d_i menunjukkan waktu pemrosesan pada unit pemrosesan P_i dan t menunjukkan total waktu transfer dari P_i hingga P_n .

Bukti : Diberikan suatu graf seperti berikut.



Gambar 7. Graf Sistem Produksi dengan n loop

Diambil : $t = \otimes_{n=1}^n t^n$
 Untuk $n = 1$



Gambar 8. Graf Sistem Produksi Modifikasi n loop pada loop pertama

Karena P_1 dan P_2 bekerja pada mesin yang sama, waktu pemrosesan yang dibutuhkan sampai P_2 selesai harus menunggu P_1 selesai. Waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan pekerjaan pada P_2 adalah $d_1 + t^{1'} + d_1 = 2d_1 + t^{1'} = (1 + 1)d_1 + t^{1'}$

Untuk $n = 2$

Dengan prinsip yang sama, waktu pemrosesan sampai P_3 selesai harus menunggu pemrosesan P_1, P_2 selesai pemrosesan. Sehingga waktu yang diperlukan untuk mesin tersebut hingga menyelesaikan pekerjaan P_3 sama dengan waktu proses untuk menyelesaikan P_2 ditambah dengan waktu transfer ditambah dengan waktu pemrosesan pada P_3 sehingga dapat dituliskan : $(1 + 1)d_1 + t^{1'} + t^{2'} + d_1 = (1 + 1 + 1)d_1 + t^{1'} + t^{2'} = (2 + 1)d_1 + \otimes_{n=1}^2 t^{n'}$

Dengan menggunakan prinsip yang sama, pada $n = n$

Waktu pemrosesan hingga P_n dapat dituliskan : $(n - 1 + 1)d_1 + \otimes_{n=1}^{n-1} t^{n'} + d_1 + t^{n'} = (n - 1 + 1 + 1)d_1 + \otimes_{n=1}^{n-1} t^{n'} + t^{n'} = (n + 1)d_1 + \otimes_{n=1}^n t^{n'} = (n + 1)d_1 + t$

Karena waktu merosesan $P_n = (n + 1)d_1 + t$ menunjukkan lama waktu P_n dapat memulai pekerjaan ke- $(k + 1)$ setelah menyelesaikan pekerjaan ke- k dengan $k = 1, 2, 3, \dots$ maka menurut Definisi 2.16, lama waktu pemrosesan pada unit pemrosesan P_n jika disajikan ke dalam bentuk matriksnya akan bersesuaian dengan a_{nn} . Hal ini mengakibatkan,

$$a_{nn} = (n + 1)d_1 + t \tag{5}$$

Berdasarkan sistem persamaan linear tersebut dapat dicari barisan keadaan sistem dan output secara rekursif sesuai dengan kondisi awalnya. Selain itu, barisan keadaan ouput dapat dicari dengan menggunakan

$$y = K \otimes x_0 \oplus H \otimes u \tag{6}$$

dengan

$$K = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p} \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes p-2} \otimes B & \dots & C \otimes B \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pada barisan *output* yang diperoleh kemudian akan dicari *input* paling lambat yang membuat kualitas barang setengah jadi menjadi lebih terjaga. Pencarian waktu *input* paling lambat dilakukan dengan mencari sub penyelesaian terbesar (\hat{u}) pada $y = H \otimes u$, yaitu :

$$-\hat{u}(k) = \max_{l \leq i \leq p} (-y(i) + H_{i,k}), \quad (7)$$

Berdasarkan *input* paling lambat kemudian dicari barisan keadaan sistem secara rekursif seperti sebelumnya. Waktu *input* paling lambat membuat barisan keadaan sistem maupun *output* menjadi periodik. Keperiodikan dari ketiga jenis graf tersebut memiliki beberapa kesamaan antara lain bahwa periode sistem yang dicapai adalah sebesar λ yang merupakan nilai eigen maksimum dari matriks A . Selain itu, waktu *input* paling lambat untuk periode produksi pertama setara dengan nilai maksimum waktu pemrosesan untuk unit pemrosesan yang memulai pemrosesan secara langsung tanpa menunggu unit pemrosesan lainnya. Hal ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

Teorema 4.1

Jika terdapat suatu persamaan

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k + 1) \\ y(k) &= C \otimes x(k), \end{aligned}$$

dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, λ merupakan nilai eigen

maksimum dari matriks A , dan *input* $x(0)$ bersesuaian dengan matriks B , serta diketahui P_1 hingga P_l merupakan unit pemrosesan yang memulai pemrosesan tanpa bergantung pada pemrosesan lainnya maka barisan *input* paling lambat agar barisan keadaan sistem periodik adalah $[p, p + \lambda, p + 2\lambda, \dots, p + (k - 1)\lambda]$ dengan $p = \bigoplus_{l=1}^l a_{ll}$.

Bukti :

Misal diberikan nilai $p = \bigoplus_{l=1}^l a_{ll}$, maka $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ll} \leq p$. P_1, P_2, \dots, P_l merupakan unit pemrosesan yang bekerja secara langsung tanpa bergantung pada unit pemrosesan lainnya, sehingga waktu pemrosesan untuk tiap-tiap unit pemrosesannya sama dengan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ll}$. λ merupakan nilai eigen maksimum dari matriks A , sehingga λ merupakan waktu terlama yang dimiliki suatu unit pemrosesan dalam sistem produksi untuk menyelesaikan pekerjaannya dalam satu periode.

Selanjutnya akan diambil *input* paling lambat untuk produksi pertama. Karena P_1, P_2, \dots, P_l merupakan unit pemrosesan yang bekerja secara langsung maka unit-unit pemrosesan tersebut bergantung pada waktu *input* yang diberikan. Semakin cepat waktu *input*nya, semakin cepat pula unit pemrosesan tersebut memulai pekerjaannya, begitupun sebaliknya.

Dalam kasus ini akan dicari *input* yang paling lambat yang memenuhi $y(1)$. Jika $u(1) < p$ maka ada $a_{mm} = p$ yang memenuhi $a_{mm} > u(1)$. Jadi, $u(1)$ bukan *input* paling lambat. Jika $u(1) > p$ maka waktu produksi yang diambil menjadi tidak optimum karena semua unit pemrosesan dari P_1 hingga P_l seharusnya telah dapat menyelesaikan proses pertamanya. Hal ini membuat barang akan keluar dari sistem melebihi dari waktu yang diharapkan. Sehingga diambil $u(1) = p$ yang membuat $y(1)$ tetap.

Jika diambil periode $< \lambda$, maka ada unit pemrosesan yang belum menyelesaikan pemrosesan sebelumnya saat unit pemrosesan yang lain telah melakukan pemrosesan periode selanjutnya. Hal ini membuat keadaan tidak periodik untuk semua sistem.

Selanjutnya diambil λ sebagai periode yang merupakan waktu terlama yang dimiliki suatu unit pemrosesan dalam sistem produksi untuk menyelesaikan pekerjaannya dalam satu periode. Pengambilan λ sebagai periode membuat semua unit pemrosesan telah selesai melakukan pemrosesan dan siap melakukan pemrosesan selanjutnya. Begitu pun untuk unit pemrosesan dengan waktu pemrosesan sebesar λ , unit pemrosesan tersebut akan segera melakukan pemrosesan selanjutnya tanpa harus menunggu terlalu lama.

Jika diambil periode $> \lambda$, maka akan terjadi waktu tunggu pada unit pemrosesan dengan waktu proses terpanjang sehingga waktu pemrosesan menjadi tidak optimum. Sehingga, periode yang diambil untuk membuat barisan keadaan sistem menjadi periodik adalah λ . Seperti dijelaskan diatas, bahwa unit pemrosesan yang bekerja secara langsung dapat memulai produksi sesuai dengan barisan *input* yang dimasukkan. Sehingga, agar barisan keadaan sistem optimum dan periodik, barisan *input* yang dipilih adalah $[p, p + \lambda, p + 2\lambda, \dots, p + (k - 1)\lambda]$ dengan $p = \bigoplus_{l=1}^l a_{ll}$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan-pembahasan sebelumnya dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Sifat-sifat model matematika waktu produksi pada graf sistem produksi ber-loop dengan menggunakan sistem persamaan linear aljabar *max-plus* adalah sebagai berikut.
 - a. Jika suatu graf ber-loop memiliki i unit pemrosesan dan memiliki total loop sebanyak n , maka banyaknya unit pemrosesan modifikasi yang terjadi sebanyak $n + i$.
 - b. Jika P_i menunjukkan suatu unit pemrosesan dengan loop sebanyak n dan P_n menunjukkan unit pemrosesan bayangan ke- n maka a_{nn} pada matriks A sama dengan $((n + 1) \times d_i) + t$, dengan d_i menunjukkan waktu pemrosesan pada unit pemrosesan P_i dan t menunjukkan total waktu transfer dari P_i hingga P_n .
2. Jika terdapat suatu persamaan

$$x(k + 1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k + 1)$$

$$y(k) = C \otimes x(k),$$

dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, λ merupakan nilai eigen maksimum

dari matriks A , dan *input* $x(0)$ bersesuaian dengan matriks B , serta diketahui P_1 hingga P_l merupakan unit pemrosesan yang memulai pemrosesan tanpa bergantung pada pemrosesan lainnya maka barisan *input* paling lambat agar barisan keadaan sistem periodik adalah $[p, p + \lambda, p + 2\lambda, \dots, p + (k - 1)\lambda]$ dengan $p = \bigoplus_{l=1}^l a_{ll}$.

Daftar Pustaka

- [1] Arifin, Mustofa dan Mustofa. 2012. *Aplikasi Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-Plus dalam Mengoptimalkan Waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" Daerah Istimewa Yogyakarta*. Skripsi diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

- [2] Berlianty, Arifin. (2002). *Teknik-Teknik Optimasi Heuristik*. ISBN : 987-979-756-625-8.
- [3] De Schutter, B. 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. PhD Thesis. Leuven: Department of Electrical Engineering, Katholieke Universiteit.
- [4] De Schutter, B and T. Van den Boom. 2008. Max-plus algebra and max-plus linear discrete event system : An Introduction, “*Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event System*”. Goteborg, Sweden.
- [5] Farlow, Kasie G. (2009). *Max-Plus Algebra*. Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [6] Rudhito, Andy. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta : Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP-Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.
- [7] Subiono and Nur Shofianah. 2009. *Using Max-Plus Algebra in The Flow Shop Scheduling*. The Journal of Technology and Science, Vol. 20, No. 3.
- [8] Subiono. 2015. *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*. Surabaya : Jurusan Matematika, FMIPA-ITS, Surabaya.

Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting

Benedictus Dwi Yuliyanto¹⁾

Dominikus Arif Budi Prasetyo²⁾

^{1) 2)}Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta

¹⁾bene384@gmail.com

²⁾dominic_abp@usd.ac.id

Abstrak

Makalah ini mengkaji tentang graf dan pelabelan pada graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Salah satu topik dalam graf yang mendapat banyak perhatian adalah pelabelan graf. Salah satu jenis pelabelan graf yaitu pelabelan total ajaib sisi kuat. Pelabelan ajaib merupakan pemetaan bijektif dengan menggabungkan himpunan titik pada graf dengan himpunan sisi pada graf ke himpunan bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, a + b$ dengan a banyak titik dan b banyak sisi. Sebuah graf memiliki pelabelan total ajaib sisi kuat jika label-label pada titiknya merupakan urutan bilangan bulat positif $1, 2, 3, \dots, a$ dengan a banyaknya titik. Graf yang dapat dilabeli secara total ajaib kuat dinamakan dengan graf total ajaib sisi kuat. Makalah ini bertujuan untuk membuktikan bahwa graf baru yaitu graf sikel dengan tambahan dua anting memenuhi pelabelan total ajaib sisi kuat.

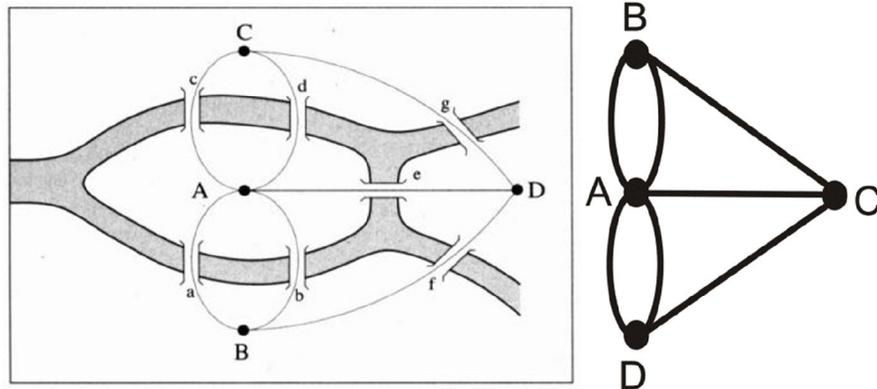
Makalah ini membahas mengenai pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting. Tujuan dari makalah ini adalah memahami algoritma konstanta ajaib yang terbentuk dan algoritma pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting.

Berdasarkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf baru yang telah dibangun yaitu graf sikel dengan tambahan dua anting memenuhi pelabelan total ajaib sisi kuat dengan konstanta ajaib pada interval tertentu.

Kata Kunci: *graf, pelabelan graf, graf sikel dengan tambahan dua anting, strong edge magic total labeling.*

1. Pendahuluan

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Ketika itu dia memikirkan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di kota Kaliningrat, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Masalah jembatan Konigsberg tersebut dapat dinyatakan dalam istilah graf (*graph*) dengan menentukan keempat daerah tersebut sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan tersebut sebagai sisi (*edge*) yang menggabungkan pasangan titik yang sesuai (Suryadi, 1996).



Gambar 1.1. Jembatan Königsberg dan grafnya

Salah satu topik dalam graf yang mendapat banyak perhatian adalah pelabelan graf (*graph labeling*). Dengan objek kajian berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf muncul pertama kali pada pertengahan tahun 1960-an.

Penelitian mengenai pelabelan ajaib graf terus berkembang, sehingga kemudian Wallis (2001: 17) mengkaji dan memperkenalkan istilah *strong edge-magic total labeling* atau pelabelan total sisi ajaib kuat. Sebuah graf memiliki pelabelan total sisi ajaib kuat jika label-label pada titiknya merupakan urutan bilangan bulat positif $1, 2, 3, \dots, a$ dengan a banyaknya titik. Graf yang dapat dilabeli secara total ajaib kuat dinamakan dengan graf total ajaib sisi kuat.

Berdasarkan hasil dari penelitian-penelitian sebelumnya, penulis mengembangkan hasil penelitian yang berkaitan dengan graf total sisi ajaib kuat, yaitu memahami algoritma konstantan ajaib yang terbentuk pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) dan algoritma pelabelan total sisi ajaib kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$). Serta peneliti menyusun program menggunakan Turbo Pascal untuk melakukan pelabelan pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$).

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif, dengan pembahasan dari hal khusus menuju ke hal yang umum. Secara garis besar, langkah-langkah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai literatur mengenai topik yang akan di bahas.
2. Mempelajari topik.
3. Membangun graf sisi ajaib baru.
4. Menganalisa graf tersebut.
5. Menentukan pola dari konstanta ajaib yang terbentuk dari pelabelan graf tersebut.
6. Menentukan rumus pelabelan untuk titik dan sisi pada graf tersebut.

2. Pelabelan Ajaib

Pelabelan graf adalah pemetaan bijektif yang memetakan semua elemen dari graf tersebut (titik dan sisi) ke dalam suatu himpunan bilangan bulat positif. Terdapat beberapa pelabelan, antara lain pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan yang domainnya himpunan dari titik, pelabelan sisi adalah pelabelan yang domainnya himpunan dari sisi, sedangkan pelabelan total adalah pelabelan yang domainnya himpunan titik dan sisi.

Pada pelabelan graf, terdapat bobot yang dapat dihitung. Bobot adalah jumlah dari label-label pada setiap elemen graf. Oleh karena itu, terdapat dua jenis pelabelan graf menurut jumlah dari setiap bobotnya, yaitu pelabelan tak ajaib (*antimagic labeling*) dan pelabelan ajaib (*magic labeling*). Pelabelan tak ajaib adalah pelabelan yang jumlah setiap bobotnya berbeda, sedangkan pelabelan ajaib adalah pelabelan yang jumlah setiap bobotnya bernilai sama (konstan). Dalam penelitian ini akan digunakan pelabelan total ajaib sisi kuat (*strong edge magic total labeling*).

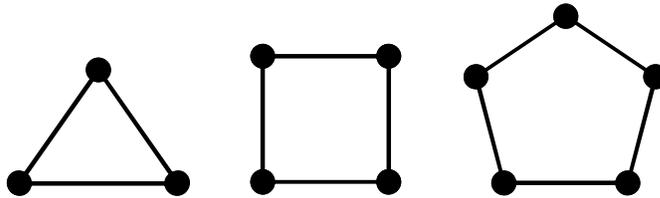
Pelabelan total sisi ajaib pada graf G adalah pemetaan satu-satu λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat positif $1, 2, \dots, a + b$, dimana $a = |V(G)|$ dan $b = |E(G)|$, dengan sifat tersebut, diberikan untuk setiap sisi (xy) ,

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta k . Dengan kata lain, bobot dari setiap sisi $Wf(e_i) = k$ untuk setiap pilihan dari sisi e_i . k disebut dengan konstanta ajaib (*magic constants*) dari G . (Wallis., 2001).

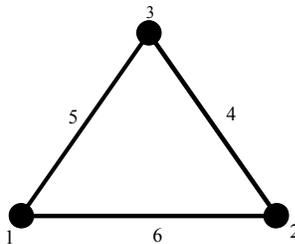
Graf sikel adalah graf yang setiap titiknya bersisian dan tidak mengandung sisi ganda atau gelang. Graf sikel dengan a buah titik dilambangkan dengan C_a .

Contoh:



Gambar 2.1. Graf sikel

Berikut contoh pelabelan total sisi ajaib pada C_3 :



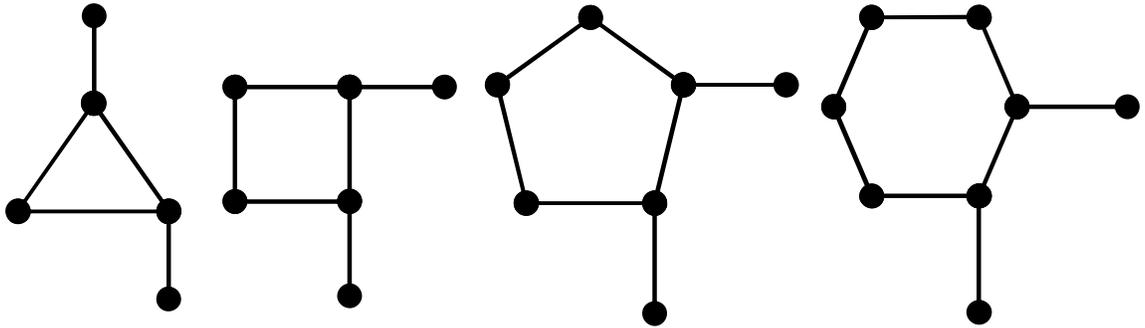
Gambar 2.2. Pelabelan total sisi ajaib dari C_3 dengan $k = 9$

3. Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting ($C_a + 2A_1$)

Graf sikel dengan tambahan dua anting merupakan perkembangan dari graf sikel C_a yang ditambahkan dua titik di luar C_a dan dua sisi yang menghubungkan masing-masing titik tersebut dengan C_a atau perkembangan dari graf sikel dengan tambahan satu anting $C_a + A_1$ yang ditambahkan satu titik lain di luar $C_a + A_1$ dan satu sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan $C_a + A_1$.

Graf sikel dengan tambahan dua anting dilambangkan dengan $C_a + 2A_1$. Banyaknya titik dan sisi yang terdapat pada graf sikel dengan tambahan dua anting adalah $2a + 4$.

Contoh:



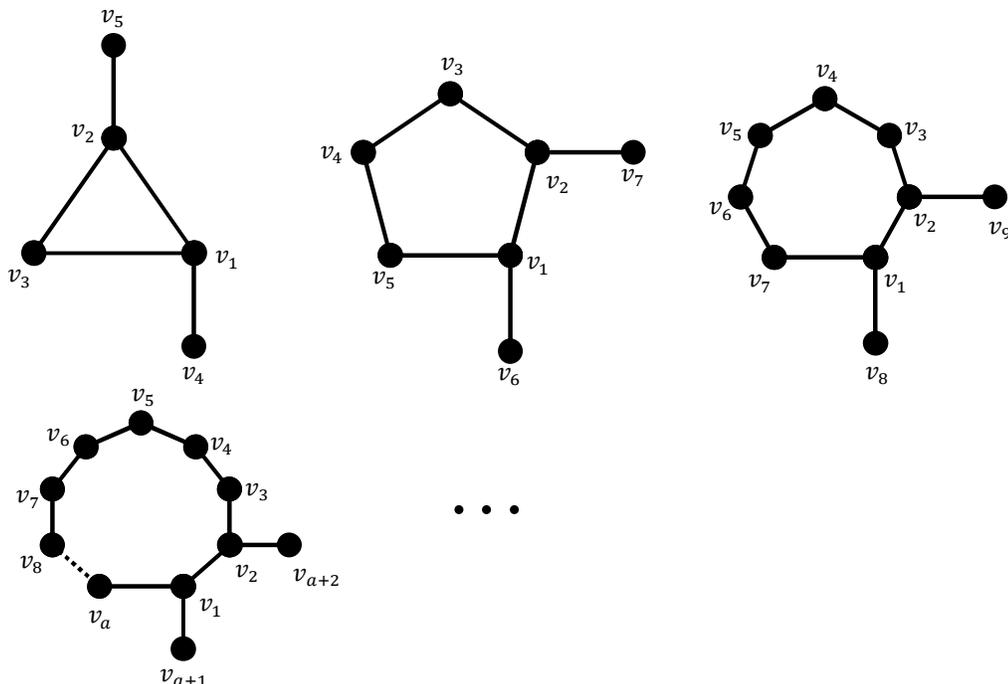
Gambar 3.1. Graf siklus dengan tambahan dua anting

Gambar 3.1. merupakan gambar graf siklus dengan tambahan dua anting $C_3 + 2A_1$, $C_4 + 2A_1$, $C_5 + 2A_1$, dan $C_6 + 2A_1$.

4. Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Siklus dengan Tambahan Dua Anting ($C_a + 2A_1$)

Pelabelan total sisi ajaib dikatakan kuat (*strong*) jika label-label pada titiknya merupakan urutan bilangan bulat $1, 2, \dots, a$, dengan a adalah banyaknya titik pada sebuah graf (Wallis., 2001).

Graf siklus dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) merupakan perkembangan bentuk dari graf siklus yaitu graf siklus dengan tambahan satu anting ($C_a + A_1$). Berikut ini beberapa contoh dari graf siklus dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$).



Gambar 4.1. Graf siklus dengan tambahan dua anting

Pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$), setiap sikel terdapat a buah titik dan a buah sisi dan dua buah titik di luar sikel yang dihubungkan langsung dengan dua buah sisi ke graf tersebut. Dalam hal ini, titik dan sisi yang menjadi anting terakhir atau kedua pada graf sikel adalah titik ke $a + 2$ dan sisi ke $a + 2$ sehingga jumlah total dari titik dan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) adalah $2a + 4$.

Pada pelabelan total ajaib sisi kuat terdapat label titik yang dihitung satu kali karena titik tersebut hanya bersisian dengan satu sisi, dihitung dua kali karena titik tersebut bersisian dengan dua sisi, dan dihitung tiga kali karena titik tersebut bersisian dengan tiga sisi. Dengan kata lain, semua titik pasti bersisian dengan satu sisi dan ada titik yang bersisian dengan dua atau tiga sisi. Sedangkan label sisi dihitung satu kali, akibatnya:

$$S_w = S_v + (S_v - (V_{a+1} + V_{a+2})) + (V_1 + V_2) + S_e$$

Dimana S_w merupakan $(a + 2)k$ atau penjumlahan berulang dari k sebanyak $(a + 2)$, k adalah konstanta ajaib, S_v merupakan semua titik yang dihitung satu kali, $(S_v - (V_{a+1} + V_{a+2}))$ merupakan titik-titik yang dihitung dua kali, $(V_1 + V_2)$ merupakan titik-titik yang dihitung tiga kali, dan S_e merupakan label sisi yang dihitung satu kali, sehingga berakibat:

$$(a + 2)k = S_v + (a + 2)(2a + 5) + (V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2}) \quad (4.1)$$

Berikut ini diberikan teorema mengenai nilai k jika label untuk titik dan sisi sudah tertentu.

Teorema 4.1.

Jika label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif $(1, 2, 3, \dots, a + 2)$ dan label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif $(a + 3, a + 4, a + 5, \dots, 2a + 4)$ maka nilai k berada pada interval

$$\frac{5a + 9}{2} < k < \frac{5a + 17}{2}.$$

Bukti:

Karena label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif $(1, 2, 3, \dots, a + 2)$, sehingga diperoleh:

$$S_v = \frac{1}{2}(a + 2)(a + 3) \quad (4.2)$$

dengan substitusi persamaan (4.2) ke persamaan (4.1), diperoleh:

$$(a + 2)k = \frac{1}{2}(a + 2)(a + 3) + (a + 2)(2a + 5) + (V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2})$$

$$k = \frac{(5a + 13)}{2} + \frac{((V_1 + V_2) - (V_{a+1} + V_{a+2}))}{(a + 2)} \quad (4.3)$$

Terdapat dua kemungkinan untuk memberi label titik-titik (V_1, V_2) dan (V_{a+1}, V_{a+2}) pada persamaan (4.3), yaitu:

Jika titik V_1 dan V_2 diberi label titik terkecil yaitu 1 dan 2, sedangkan titik V_{a+1} dan V_{a+2} diberi label titik terbesar yaitu $(a + 1)$ dan $(a + 2)$, maka:

$$k = \frac{5a^2 + 19a + 26}{2a + 4}$$

Jika titik V_1 dan V_2 diberi label titik terbesar yaitu $(a + 1)$ dan $(a + 2)$, sedangkan titik V_{a+1} dan V_{a+2} diberi label titik terkecil yaitu 1 dan 2, maka:

$$k = \frac{5a^2 + 27a + 26}{2a + 4}$$

Jadi nilai k (konstanta ajaib) yang terbentuk terletak pada interval:

$$\frac{5a^2 + 19a + 26}{2a + 4} \leq k \leq \frac{5a^2 + 27a + 26}{2a + 4} \quad (4.4a)$$

dan dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{5a + 9}{2} + \frac{8}{2a + 4} \leq k \leq \frac{5a + 17}{2} - \frac{8}{2a + 4} \quad (4.4b)$$

Karena nilai $\frac{8}{2a+4}$ untuk $a \geq 3$ selalu kurang dari satu, maka kita dapat menghilangkan nilai $\frac{8}{2a+4}$ dari pertidaksamaan (4.4b), sehingga interval dari konstanta ajaib yang terbentuk adalah:

$$\frac{5a + 9}{2} < k < \frac{5a + 17}{2} \quad (4.5)$$

Teorema 4.1. menyatakan bahwa jika label untuk titik adalah himpunan bilangan bulat positif $(1,2,3, \dots, a + 2)$ dan label untuk sisi adalah himpunan bilangan bulat positif $(a + 3, a + 4, a + 5, \dots, 2a + 4)$ maka nilai k berada pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$. Sehingga nilai k yang terletak pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$ berlaku pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$.

Berikut diberikan tabel 4.1. yang menyatakan hubungan antara nilai a dan nilai k yang terbentuk.

Tabel 4.1. Interval nilai k .

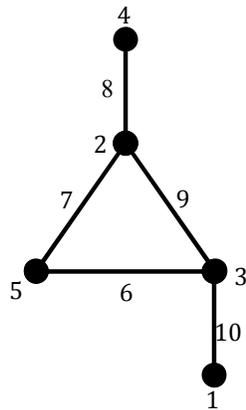
a ganjil			a genap		
a	Interval nilai k	Kemungkinan nilai k	a	Interval nilai k	Kemungkinan nilai k
3	$12 < k < 16$	13, 14, 15	4	$14,5 < k < 18,5$	15, 16, 17, 18
5	$17 < k < 21$	18, 19, 20	6	$19,5 < k < 23,5$	20, 21, 22, 23
7	$22 < k < 26$	23, 24, 25	8	$24,5 < k < 28,5$	25, 26, 27, 28

Selanjutnya pada makalah ini hanya akan dibahas mengenai pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a ganjil dengan pola tertentu yaitu untuk nilai $k = \frac{5a+13}{2}$. Nilai $k = \frac{5a+13}{2}$ terletak pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$. Peneliti tidak melakukan penelitian untuk pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a genap, serta pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ untuk $a \geq 3$ dan a ganjil dengan pola yang lain.

Berikut akan diberikan contoh pelabelan untuk beberapa graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dengan $a \geq 3$ dan a ganjil dengan $k = \frac{5a+13}{2}$.

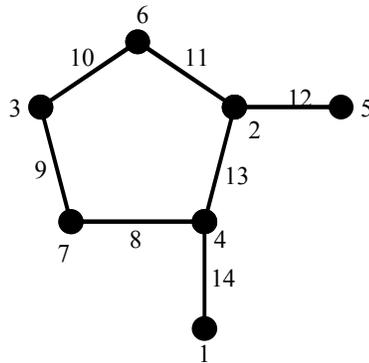
Contoh konstruksi graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_a + 2A_1)$ dengan label titik dan label sisi.

- $a = 3,$



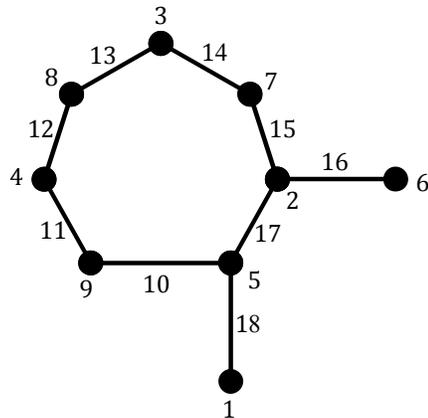
Gambar 4.2. Contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) untuk $a = 3$ atau ($C_3 + 2A_1$)

- $a = 5,$



Gambar 4.3. Contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) untuk $a = 5$ atau ($C_5 + 2A_1$)

- $a = 7,$



Gambar 4.4. Contoh pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) untuk $a = 7$ atau ($C_7 + 2A_1$)

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$) mempunyai pelabelan total ajaib sisi kuat dengan nilai k berada pada interval $\frac{5a+9}{2} < k < \frac{5a+17}{2}$ dan rumus pelabelannya untuk $a \geq 3$ dan a ganjil adalah sebagai berikut:

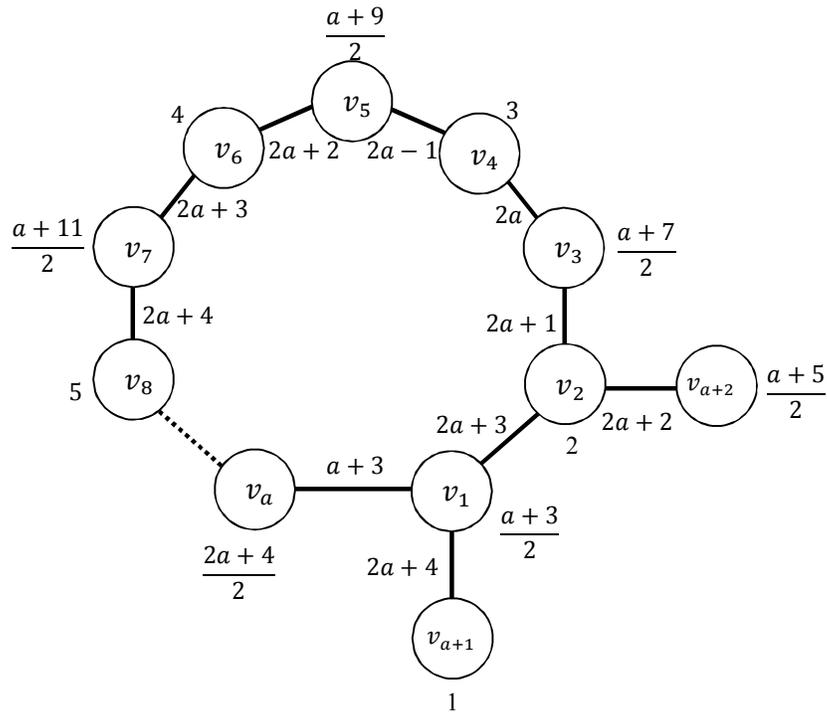
Rumus pelabelan titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$).

$$\left\{ \begin{array}{l} f(v_1) = \frac{a+3}{2} \\ f(v_2) = 2 \\ f(v_i) = \frac{(a+4)+i}{2} \quad ; i = 3, 5, 7, \dots, a \\ f(v_i) = \frac{i+2}{2} \quad ; i = 4, 6, 8, \dots, a-1 \\ f(v_{a+1}) = 1 \\ f(v_{a+2}) = \frac{a+5}{2} \end{array} \right.$$

Rumus pelabelan sisi pada graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$).

$$\left\{ \begin{array}{l} f(v_1v_2) = 2a+3 \\ f(v_iv_{i+1}) = (2a+3) - i \quad ; i = 2, 3, \dots, a-1 \\ f(v_av_1) = a+3 \\ f(v_1v_{a+1}) = 2a+4 \\ f(v_2v_{a+2}) = 2a+2 \end{array} \right.$$

Berikut adalah ilustrasi dari pelabelan graf sikel tersebut:



Gambar 4.5. Ilustrasi pelabelan graf sikel dengan tambahan dua anting ($C_a + 2A_1$)

Daftar Pustaka

- [1] Prasetyo, D.A.B., 2008, *Vertex Antimagic Total Labeling pada Multicycle dan Multicomplete Bipartite*, Thesis Math, Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [2] Septian, C.W., 2011, *Pelabelan Total Tak Ajaib Titik pada Graf Sikel dengan Tambahan Satu Ating*, Skripsi Matematika, Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.
- [3] Suryadi, H.S., 1996, *Teori Graf Dasar*, Edisi I, Jakarta: Gunadarma.
- [4] Wallis, W.D., 2001, *Magic Graph*, Birkhauser.

Kongruensi Latis Distributif Terkecil pada Semiring dengan *Additive Reduct* Semilatis

Yulia Indah Puspitasari¹ dan Yeni Susanti²
 Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada
¹ yuliaindahp.mail@gmail.com
² yeni_math@ugm.ac.id

Abstrak

Semiring merupakan struktur aljabar yang dibentuk dengan menggeneralisasi konsep ring, yaitu dengan menghilangkan syarat eksistensi elemen invers terhadap *additive reduct*-nya. Selanjutnya, pada kelas semiring \mathbb{SL}^+ , yaitu kelas semiring dengan *additive reduct*-nya semilatis, didefinisikan suatu kongruensi latis distributif. Lebih lanjut, ditentukan kongruensi latis distributif yang terkecil pada semiring di \mathbb{SL}^+ tersebut. Kongruensi latis distributif yang terkecil tersebut dapat diperoleh melalui dua pendekatan yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa meskipun kedua kongruensi tersebut didefinisikan berbeda, akan tetapi secara himpunan kongruensi-kongruensi tersebut sama.

Kata Kunci: *semiring, semilatis, kongruensi, latis distributif.*

1. Pendahuluan

Ring merupakan suatu sistem di aljabar struktur yang sangat sering dipelajari karena banyak penerapannya di berbagai cabang ilmu sains [5]. Dalam pengembangannya, konsep ring dapat digeneralisasi menjadi struktur semiring, yaitu dengan dihilangkannya syarat eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahannya. Di sisi lain, dikenal pula struktur aljabar semigrup, yang merupakan generalisasi dari konsep grup. Dalam teori semigrup, dikenal suatu semigrup yang lebih khusus, yaitu semilatis [3-4]. Secara aljabar, semilatis merupakan semigrup idempoten yang komutatif. Lebih lanjut, setelah mempelajari semilatis dapat dipelajari tentang latis. Dalam mempelajari latis selanjutnya dikenal suatu latis yang lebih khusus, yaitu latis distributif [7].

Di sisi lain, di dalam teori semiring, dikenal suatu semiring yang lebih khusus, yaitu semiring dengan *additive reduct* semilatis [1],[6]. Artinya $(S, +, \cdot)$ merupakan semiring dengan *additive reduct* semilatis, jika $(S, +)$ merupakan semilatis, dalam hal ini yaitu semigrup idempoten yang komutatif. Kelas semiring dengan *additive reduct* semilatis dinotasikan dengan \mathbb{SL}^+ . Di sisi lain, di dalam teori ring dikenal adanya suatu kongruensi, yang ternyata juga dapat didefinisikan pada \mathbb{SL}^+ . Lebih khusus, di dalam \mathbb{SL}^+ dapat didefinisikan suatu kongruensi latis distributif. Suatu relasi ρ pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ disebut kongruensi latis distributif jika ρ merupakan kongruensi pada S dan S/ρ merupakan latis distributif. Selanjutnya dapat ditentukan suatu kongruensi latis distributif terkecil pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ [2].

Dalam mempelajari kongruensi latis distributif terkecil pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ ternyata kongruensi tersebut dapat didefinisikan dengan dua pendekatan yang berbeda, yaitu kongruensi η dan kongruensi μ . Di dalam penelitian ini, akan ditunjukkan bahwa meskipun kedua kongruensi tersebut didefinisikan dengan pendekatan yang berbeda, akan tetapi secara himpunan kongruensi-kongruensi tersebut sama.

2. Semiring dengan *Additive Reduct* Semilatis

Semiring merupakan generalisasi dari konsep ring, yaitu dengan menghilangkan syarat eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahannya. Himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan $+$ dan operasi perkalian \cdot pada S disebut semiring jika $(S, +)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen identitas 0_S , (S, \cdot) merupakan semigrup, memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan, serta untuk setiap $a \in S$ berlaku

$$0_S \cdot a = 0_S = a \cdot 0_S.$$

Suatu himpunan tak kosong I di dalam semiring S disebut ideal di dalam semiring S jika untuk setiap $a, b \in I$ dan $x \in S$ berlaku $a + b \in I$, $ax \in I$, dan $a \in I$. Selanjutnya jika diberikan $(S, +, \cdot)$ merupakan semiring, maka $(S, +)$ disebut dengan *additive reduct*. Lebih lanjut, himpunan semua semiring S dengan $(S, +)$ merupakan semilatis dinotasikan \mathbb{SL}^+ . Jadi

$$\mathbb{SL}^+ = \{(S, +, \cdot) | (S, +, \cdot) \text{ semiring dan } (S, +) \text{ semilatis}\}.$$

Selanjutnya di dalam makalah ini S merupakan semiring di dalam \mathbb{SL}^+ . Diberikan himpunan $\emptyset \neq A \subseteq S$. Yang dimaksud dengan *k-closure* dari A di S , dinotasikan dengan \bar{A} adalah

$$\bar{A} = \{x \in S | x + a_1 = a_2 \text{ untuk suatu } a_1, a_2 \in A\}$$

dan dapat ditunjukkan bahwa $A \subseteq \bar{A}$. Selain itu, jika $(A, +)$ merupakan subsemigrup di dalam $(S, +)$ maka berlaku bahwa $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Selanjutnya himpunan A disebut *k-set* jika $\bar{A} \subseteq A$. Suatu ideal K di dalam semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ disebut *k-ideal* jika K merupakan *k-set*, yaitu $\bar{K} = K$.

Lemma 2.1. Diberikan semiring $S \in \mathbb{SL}^+$.

(1) Untuk setiap $a, b \in S$ pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) Terdapat $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$ sehingga $b + s_1 a t_1 = s_2 a t_2$.
- (ii) Terdapat $s, t \in S$ sehingga $b + s a t = s a t$.
- (iii) Terdapat $x \in S$ sehingga $b + x a x = x a x$.

(2) Jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $b + x a x = x a x$ dan $c + y a y = y a y$ untuk suatu $x, y \in S$ maka terdapat $z \in S$ sehingga $b + z a z = z a z = c + z a z$.

(3) Jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $c + x a x = x a x$ dan $c + y b y = y b y$ untuk suatu $x, y \in S$ maka terdapat $z \in S$ sehingga $c + z a z = z a z$ dan $c + z b z = z b z$.

Bukti. Diambil sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$.

- (1) Diambil sebarang $a, b \in S$. Jelas berlaku (iii) \Rightarrow (ii) sebab terdapat $s, t \in S$ dengan $s = t = x$ sehingga memenuhi $b + sat = sat$. Selanjutnya (ii) \Rightarrow (i) juga berlaku sebab terdapat $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$ dengan $s_1 = s_2 = s$ dan $t_1 = t_2 = t$ sehingga memenuhi $b + s_1at_1 = s_2at_2$. Selanjutnya untuk menunjukkan (i) \Rightarrow (iii) dipilih $x = s_1 + s_2 + t_1 + t_2 \in S$ sehingga memenuhi $b + xax = xax$.
- (2) Dipilih $z = x + y \in S$ sehingga memenuhi $b + zaz = zaz = c + zaz$.
- (3) Dipilih $z = x + y \in S$ sehingga memenuhi $c + zaz = zaz$ dan $c + zbz = zbz$. \square

Selanjutnya untuk himpunan $\emptyset \neq A \subseteq S$, yang dimaksud dengan k -radikal dari A di dalam S dan dinotasikan \sqrt{A} adalah

$$\sqrt{A} = \{x \in S \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x^n \in A\}.$$

Lemma 2.2. Untuk sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ dan $a, b \in S$ berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

- (1) \overline{SaS} merupakan k -ideal di S .
- (2) $\sqrt{SaS} = \sqrt{\overline{SaS}}$.

Bukti. Diambil sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$.

- (1) Jelas $a^3 \in SaS \subseteq \overline{SaS}$ sehingga $\overline{SaS} \neq \emptyset$. Diambil sebarang $b, c \in \overline{SaS}$. Menurut Lemma 2.1., karena $b, c \in S$ maka terdapat $x, y \in S$ sehingga $b + xax = xax$ dan $c + yay = yay$. Akibatnya terdapat $z \in S$ sehingga $b + zaz = zaz = c + zaz$. Diperoleh $(b + c) + zaz = zaz$ sehingga $b + c \in \overline{SaS}$. Selanjutnya diambil sebarang $d \in S$. Diperoleh $db + dxax = dxax$ dan $bd + xaxd = xaxd$ dengan $dx, xd \in S$. Akibatnya $db, bd \in \overline{SaS}$, sehingga \overline{SaS} merupakan ideal di dalam S . Selanjutnya jelas bahwa $\overline{SaS} \subseteq \overline{\overline{SaS}}$. Oleh karena \overline{SaS} merupakan ideal di dalam S maka $\overline{\overline{SaS}} = \{u \in S \mid u + v = v \text{ untuk suatu } v \in \overline{SaS}\}$. Diambil sebarang $u \in \overline{\overline{SaS}}$, terdapat $v \in \overline{SaS}$ sehingga $u + v = v$. Oleh karena $v \in S$ maka menurut Lemma 2.1. terdapat $t \in S$ sehingga memenuhi $v + tat = tat$. Akibatnya diperoleh $u + tat = tat$, sehingga $u \in \overline{SaS}$. Akibatnya $\overline{\overline{SaS}} \subseteq \overline{SaS}$ sehingga $\overline{\overline{SaS}} = \overline{SaS}$. Jadi \overline{SaS} merupakan k -ideal di dalam S .
- (2) Diambil sebarang $x \in \sqrt{SaS}$. Artinya terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $x^n \in \overline{SaS} = \overline{\overline{SaS}}$. Akibatnya $x \in \sqrt{\overline{SaS}}$ sehingga $\sqrt{SaS} \subseteq \sqrt{\overline{SaS}}$. Sebaliknya, diambil sebarang $y \in \sqrt{\overline{SaS}}$. Artinya terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga $y^m \in \overline{SaS} = \overline{\overline{SaS}}$. Akibatnya $y \in \sqrt{SaS}$ sehingga $\sqrt{\overline{SaS}} \subseteq \sqrt{SaS}$. Jadi $\sqrt{SaS} = \sqrt{\overline{SaS}}$. \square

Definisi 2.3. Himpunan $L \neq \emptyset$ dilengkapi dengan dua operasi biner \wedge dan \vee disebut *latis (aljabar)* jika untuk setiap $x, y, z \in L$ memenuhi sifat berikut:

- (1) komutatif, yaitu $x \wedge y = y \wedge x$ dan $x \vee y = y \vee x$;
- (2) asosiatif, yaitu $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ dan $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
- (3) absorpsi, yaitu $x \vee (x \wedge y) = x$ dan $x \wedge (x \vee y) = x$;
- (4) idempoten, yaitu $x \vee x = x$ dan $x \wedge x = x$.

Selanjutnya, suatu latris (L, \wedge, \vee) disebut latris distributif jika berlaku sifat distributif yaitu

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

dan

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

untuk setiap $x, y, z \in L$. Lebih lanjut, Sholander telah menuliskan teorema yang selanjutnya dapat mempermudah dalam menentukan suatu latris distributif.

Teorema 2.4. (Sholander) *Diberikan himpunan $L \neq \emptyset$ dilengkapi dengan dua operasi biner \wedge dan \vee . Jika untuk setiap $a, b, c \in L$ memenuhi:*

$$a \wedge (a \vee b) = a \tag{1}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a) \tag{2}$$

maka (L, \wedge, \vee) merupakan latris distributif.

Bukti. Lihat [8]. □

Jika ρ merupakan kongruensi pada S maka $S/\rho \in \mathbb{S}\mathbb{L}^+$ dengan

$$S/\rho = \{ [a]_\rho \mid a \in S \}$$

dan $[a]_\rho = \{ s \in S \mid (a, s) \in \rho \}$. Kongruensi ρ pada S disebut kongruensi latris distributif jika S/ρ merupakan latris distributif. Selain itu, untuk sebarang relasi biner ρ pada himpunan H , yang dimaksud dengan *closure* transitif dari ρ , dinotasikan $\bar{\rho}$, merupakan relasi transitif terkecil yang memuat ρ .

Proposisi 2.5. *Untuk sebarang relasi biner ρ pada himpunan H berlaku*

$$\bigcup_{k \geq 1} \rho^k$$

merupakan closure transitif dari ρ .

Bukti. Jelas $\rho \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \rho^k$. Selanjutnya diambil sebarang $(a, b), (b, c) \in \bigcup_{k \geq 1} \rho^k$. Artinya terdapat $m, n \in \mathbb{N}$ sehingga $(a, b) \in \rho^m$ dan $(b, c) \in \rho^n$. Diperhatikan bahwa

$$(a, b) \in \rho^m = \rho \circ \rho^{m-1} \Leftrightarrow (\exists d_1 \in H) (a, d_1) \in \rho^{m-1} \text{ dan } (d_1, b) \in \rho$$

$$(a, d_1) \in \rho^{m-1} = \rho \circ \rho^{m-2} \Leftrightarrow (\exists d_2 \in H) (a, d_2) \in \rho^{m-2} \text{ dan } (d_2, d_1) \in \rho$$

dan seterusnya proses dilanjutkan hingga diperoleh

$$(a, d_{m-2}) \in \rho^2 = \rho \circ \rho \Leftrightarrow (\exists d_{m-1} \in H) (a, d_{m-1}) \in \rho^{m-1} \text{ dan } (d_{m-1}, d_{m-2}) \in \rho.$$

Di sisi lain juga dipunyai bahwa

$$(b, c) \in \rho^n = \rho \circ \rho^{n-1} \Leftrightarrow (\exists e_1 \in H) (b, e_1) \in \rho^{n-1} \text{ dan } (e_1, c) \in \rho$$

$$(b, e_1) \in \rho^{n-1} = \rho \circ \rho^{n-2} \Leftrightarrow (\exists e_2 \in H) (b, e_2) \in \rho^{n-2} \text{ dan } (e_2, e_1) \in \rho$$

dan seterusnya proses dilanjutkan hingga diperoleh

$$(b, e_{n-2}) \in \rho^2 = \rho \circ \rho \Leftrightarrow (\exists e_{n-1} \in H) (b, e_{n-1}) \in \rho^{n-1} \text{ dan } (e_{n-1}, e_{n-2}) \in \rho.$$

Akibatnya diperoleh $(d_1, e_1) \in \rho^{n-1} \circ \rho = \rho^n$ sehingga $(d_1, c) \in \rho^{n+1}$. Di sisi lain dipunyai $(a, d_1) \in \rho^{m-1}$ sehingga $(a, c) \in \rho^{m+n} \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \rho^k$. Dengan demikian

$\bigcup_{k \geq 1} \rho^k$ merupakan relasi yang transitif. Selanjutnya diambil sebarang relasi transitif φ pada H dengan $\rho \subseteq \varphi$. Selanjutnya diambil sebarang $(a, b) \in \bigcup_{k \geq 1} \rho^k$, yang artinya $(a, b) \in \rho^n$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, sehingga menggunakan peroses yang sama seperti sebelumnya diperoleh

$$(a, d_{n-1}), (d_{n-1}, d_{n-2}), (d_{n-2}, d_{n-3}), \dots, (d_2, d_1), (d_1, b) \in \rho \subseteq \varphi.$$

Oleh karena φ bersifat transitif, maka $(a, b) \in \varphi$. Akibatnya $\bigcup_{k \geq 1} \rho^k \subseteq \varphi$, sehingga $\bigcup_{k \geq 1} \rho^k$ merupakan *closure* transitif dari ρ . Jadi jelas bahwa $\bar{\rho} = \bigcup_{k \geq 1} \rho^k$. \square

Selanjutnya untuk sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$, akan ditentukan relasi pada semiring S yang merupakan kongruensi latis distributif terkecil.

3. Kongruensi Latis Distributif η

Untuk sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$, didefinisikan relasi biner σ pada S sebagai berikut:

$$(a, b) \in \sigma \Leftrightarrow b \in \sqrt{SaS} \Leftrightarrow b^n \in \overline{SaS}, \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{N}$$

untuk setiap $a, b \in S$. Relasi σ merupakan relasi yang refleksif dan *closure* transitifnya, yaitu $\bar{\sigma}$ merupakan relasi yang transitif sekaligus refleksif. Selanjutnya didefinisikan relasi η pada $S \in \mathbb{SL}^+$ sebagai berikut

$$\eta = \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa relasi η tersebut merupakan relasi ekuivalensi.

Lemma 3.1. *Diberikan semiring $S \in \mathbb{SL}^+$. Untuk sebarang $a, b, c \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku pernyataan-pernyataan berikut:*

- (1) $(a, ab), (a, ba), (ab, bca), (a + ab, a), (a, a + ab) \in \sigma$ dan $(a + ab, a) \in \eta$.
- (2) $(a^2, a), (a, a^2) \in \sigma$ dan $(a, a^2) \in \eta$.
- (3) $(ab, ba) \in \sigma$ dan $(ab, ba) \in \eta$.
- (4) $(bab, ab), (ab, bab) \in \sigma$ dan $(ab, bab) \in \eta$.
- (5) $(a^n b^n, ab), (ab, a^n b^n) \in \bar{\sigma}$ dan $(ab, a^n b^n) \in \eta$.

Bukti. Diambil sebarang $S \in \mathbb{SL}^+$ dan $a, b, c \in S$.

- (1) Oleh karena $(ab)^2, (ba)^2 \in SaS \subseteq \overline{SaS}$ dan $(bca)^2 \in SabS \subseteq \overline{SabS}$, maka $(a, ab), (a, ba), (ab, bca) \in \sigma$. Selanjutnya oleh karena

$$a^3 + a(a + ab)a = a(a + ab)a$$

maka $(a + ab, a) \in \sigma$. Lebih lanjut, terdapat

$$x = a + b + ab + ba + (a + ab)^2 \in S$$

yang memenuhi $(a + ab)^3 + xax = xax$, sehingga $a + ab \in \overline{SaS}$. Dengan kata lain $(a, a + ab) \in \sigma$. Mengingat $\sigma \subseteq \bar{\sigma}$, diperoleh $(a + ab, a) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$.

- (2) Oleh karena $(a^2)^2 = a^4 = aaa^2 \in SaS \subseteq \overline{SaS}$ dan $a^4 = aa^2a \in Sa^2S \subseteq \overline{Sa^2S}$ maka $(a, a^2), (a^2, a) \in \sigma$. Mengingat $\sigma \subseteq \bar{\sigma}$, diperoleh $(a, a^2) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$.

- (3) Oleh karena $(ba)^2 \in SabS \subseteq \overline{SabS}$ dan $(ab)^2 \in SbaS \subseteq \overline{SbaS}$ maka $(ab, ba), (ba, ab) \in \sigma$. Mengingat $\sigma \subseteq \bar{\sigma}$, diperoleh $(ab, ba) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$.
- (4) Oleh karena $(ab)^3 \in SbabS \subseteq \overline{SbabS}$ dan $(bab)^2 \in SabS \subseteq \overline{SabS}$, maka $(bab, ab), (ab, bab) \in \sigma$. Mengingat $\sigma \subseteq \bar{\sigma}$, diperoleh $(ab, bab) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$.
- (5) Diperhatikan bahwa $\sigma \subseteq \bar{\sigma}$. Untuk $n = 1$, menurut (3) diperoleh $(ab, ba) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya, oleh karena $(b^2a)^3 \in Sab^2aS \subseteq \overline{Sab^2aS}$ maka $(ab^2a, b^2a) \in \bar{\sigma}$. Menurut (3) dan (4) dipunyai bahwa $(a^2b^2, ab^2a), (b^2a, bab), (bab, ab) \in \bar{\sigma}$. Oleh karena $(a^2b^2, ab^2a), (ab^2a, b^2a), (b^2a, bab), (bab, ab) \in \bar{\sigma}$ dan $\bar{\sigma}$ bersifat transitif, maka $(a^2b^2, ab) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya, diambil sebarang $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 2$. Menurut (3) dipunyai bahwa $(a^{n+1}b^{n+1}, a^n b^{n+1}a), (a^n b^{n+1}, ba^n b^n) \in \bar{\sigma}$. Oleh karena

$$(a^n b^{n+1})^3 \in Sa^n b^{n+1} aS \subseteq \overline{Sa^n b^{n+1} aS}$$

$$(a^n b^n)^3 \in Sba^n b^n S \subseteq \overline{Sba^n b^n S}$$

maka $(a^n b^{n+1}a, a^n b^{n+1}), (ba^n b^n, a^n b^n) \in \bar{\sigma}$. Jadi dipunyai

$$(a^{n+1}b^{n+1}, a^n b^{n+1}a), (a^n b^{n+1}a, a^n b^{n+1}), (a^n b^{n+1}, ba^n b^n), (ba^n b^n, a^n b^n) \in \bar{\sigma}$$

sehingga $(a^{n+1}b^{n+1}, a^n b^n) \in \bar{\sigma}$. Oleh karena berlaku untuk semua $n \geq 2$ maka $(a^n b^n, a^{n-1}b^{n-1}), \dots, (a^3 b^3, a^2 b^2) \in \bar{\sigma}$ sehingga $(a^n b^n, a^2 b^2) \in \bar{\sigma}$. Sebelumnya dipunyai bahwa $(a^2 b^2, ab) \in \bar{\sigma}$, sehingga diperoleh $(a^n b^n, ab) \in \bar{\sigma}$. Sebaliknya, menurut (4) dan (3) dipunyai $(ab, bab), (bab, b^2a), (ab^2a, a^2 b^2) \in \bar{\sigma}$. Di sisi lain, oleh karena $(ab^2a)^2 \in Sb^2aS \subseteq \overline{Sb^2aS}$ maka $(b^2a, ab^2a) \in \bar{\sigma}$. Akibatnya $(ab, a^2 b^2) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya diambil sebarang $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 2$. Menurut (1) dan (3) dipunyai

$$(a^n b^n, ba^n b^n), (ba^n b^n, a^n b^{n+1}), (a^n b^{n+1}, a^n b^{n+1}a), (a^n b^{n+1}a, a^{n+1}b^{n+1}) \in \bar{\sigma}$$

sehingga $(a^n b^n, a^{n+1}b^{n+1}) \in \bar{\sigma}$. Oleh karena berlaku untuk semua $n \geq 2$ maka jelas $(a^2 b^2, a^3 b^3), \dots, (a^{n-1}b^{n-1}, a^n b^n) \in \bar{\sigma}$ sehingga $(a^2 b^2, a^n b^n) \in \bar{\sigma}$. Sebelumnya dipunyai bahwa $(ab, a^2 b^2) \in \bar{\sigma}$, sehingga diperoleh $(ab, a^n b^n) \in \bar{\sigma}$. Lebih lanjut jelas bahwa $(ab, a^n b^n) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$. \square

Lemma 3.2. Untuk setiap semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ dan $a, b, c \in S$ berlaku dua pernyataan berikut:

- (1) Jika $(a, b) \in \sigma$ maka $(ac, bc), (ca, cb) \in \bar{\sigma}$.
- (2) Jika $(a, b) \in \sigma$ maka $(a + c, b + c) \in \sigma$ sehingga $(a + c, b + c) \in \bar{\sigma}$.

Bukti. Diambil sebarang $S \in \mathbb{SL}^+$ dan $a, b, c \in S$.

- (1) Diberikan $(a, b) \in \sigma$. Oleh karena $(cxa)^2 \in SacS \subseteq \overline{SacS}$ maka $(ac, cxa) \in \bar{\sigma}$. Menurut Lemma 2.1 dipunyai $b^n + xax = xax$ untuk suatu $x \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$. Jika $n = 1$ maka $b + xax = xax$. Dengan mengalikan cbc pada kedua ruas dipunyai $(cb)^2 + cb(cxa)x = cb(cxa)x$, sehingga $(cxa, cb) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya menurut Lemma 3.1. bagian (3) dipunyai $(cb, bc) \in \sigma \subseteq \bar{\sigma}$. Oleh karena $\bar{\sigma}$ transitif maka $(ac, bc) \in \bar{\sigma}$. Dengan cara yang sama juga diperoleh $(ca, cb) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya untuk kasus $n > 1$, diketahui $b^n + xax = xax$, sehingga jelas bahwa

$$c^n b^n + c^{n-1}(cxa)x = c^{n-1}(cxa)x.$$

Akibatnya $c^n b^n \in ScxaS \subseteq \overline{ScxaS}$, sehingga $(cxa, c^n b^n) \in \bar{\sigma}$. Menurut Lemma 3.1. diketahui $(c^n b^n, cb), (cb, bc) \in \bar{\sigma}$. Mengingat $(ac, cxa) \in \bar{\sigma}$ dan sifat transitif $\bar{\sigma}$ maka diperoleh $(ac, bc) \in \bar{\sigma}$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $(ca, cb) \in \bar{\sigma}$.

- (2) Diberikan $(a, b) \in \sigma$. Menurut Lemma 2.1. dipunyai bahwa $b^n + xax = xax$ untuk suatu $x \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$. Untuk $n = 1$ maka $b + xax = xax$. Jelas bahwa $b + x(a + c)x = x(a + c)x$ sehingga $b \in \overline{S(a + c)S}$. Di sisi lain dipunyai bahwa $c^3 + c(a + c)c = c(a + c)c$ sehingga $c^3 \in \overline{S(a + c)S}$. Menurut Lemma 2.2. dipunyai $\overline{S(a + c)S}$ merupakan k -ideal, sehingga $(b + c)^3 \in \overline{S(a + c)S}$. Dengan kata lain $(a + c, b + c) \in \sigma \subseteq \bar{\sigma}$. Untuk $n > 1$, diketahui $b^n + xax = xax$. Secara umum dipunyai bahwa

$$(b + c)^n = b^n + x'c + cy' + \sum_{i=1}^k x_i c y_i$$

untuk suatu $x', y', x_i, y_i \in S$ dan $k \in \mathbb{N}$. Kemudian dengan menambahkan $x'c + cy' + \sum_{i=1}^k x_i c y_i$ pada kedua ruas maka diperoleh

$$(b + c)^n + x'c + cy' + \sum_{i=1}^k x_i c y_i = b^n + x'c + cy' + \sum_{i=1}^k x_i c y_i.$$

Jika diambil $s = x' + y' + \sum_{i=1}^k x_i + y_i$ maka diperoleh

$$(b + c)^n + sc + cs + scs = b^n + sc + cs + scs$$

sehingga dengan mengingat $b^n + xax = xax$ lebih lanjut diperoleh

$$(b + c)^n + sc + cs + scs + xax = sc + cs + scs + xax.$$

Selanjutnya dengan mengambil $z = s + x$ didapat

$$(b + c)^n + zc + cz + zcz + zaz = zc + cz + zcz + zaz.$$

Lebih lanjut jika dipilih $w = (b + c)z + z(b + c) + (b + c)$ diperoleh

$$(b + c)^{n+2} + w(a + c)w = w(a + c)w$$

sehingga $(b + c)^{n+2} \in \overline{S(a + c)S}$. Dengan kata lain $(a + c, b + c) \in \sigma \subseteq \bar{\sigma}$. \square

Teorema 3.3. *Jika diberikan $S \in \mathbb{SL}^+$ maka relasi η merupakan kongruensi latris distributif terkecil pada S .*

Bukti. Telah diketahui bahwa η merupakan relasi ekuivalensi dan $\bar{\sigma}$ bersifat transitif. Diambil sebarang $(a, b) \in \eta = \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1}$. Oleh karena $(a, b) \in \bar{\sigma}$, menurut Proposisi 2.5. terdapat $n \in \mathbb{N}$ dan $d_1, d_2, \dots, d_{n-1} \in S$ sehingga

$$(a, d_{n-1}), (d_{n-1}, d_{n-2}), \dots, (d_2, d_1), (d_1, b) \in \sigma.$$

Selanjutnya menurut Lemma 3.2., untuk sebarang $c \in S$ diperoleh

$$(a + c, d_{n-1} + c), (d_{n-1} + c, d_{n-2} + c), \dots, (d_2 + c, d_1 + c), (d_1 + c, b + c) \in \bar{\sigma}$$

sehingga $(a + c, b + c) \in \bar{\sigma}$. Dengan cara yang sama diperoleh $(b + c, a + c) \in \bar{\sigma}$.

Akibatnya $(a + c, b + c) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$. Oleh karena $(S, +)$ semilatis maka jelas $(c + a, c + b) \in \eta$. Selanjutnya menurut Lemma 3.2., untuk sebarang $c \in S$ diperoleh

$$(ac, d_{n-1}c), (d_{n-1}c, d_{n-2}c), \dots, (d_2c, d_1c), (d_1c, bc) \in \bar{\sigma}$$

$$(ca, cd_{n-1}), (cd_{n-1}, cd_{n-2}), \dots, (cd_2, cd_1), (cd_1, cb) \in \bar{\sigma}.$$

Akibatnya didapat $(ac, bc), (ca, cb) \in \bar{\sigma}$. Menggunakan cara yang sama, karena $(b, a) \in \bar{\sigma}$ maka diperoleh $(bc, ac), (cb, ca) \in \bar{\sigma}$. Jadi dapat disimpulkan bahwa

$(ac, bc), (ca, cb) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$, sehingga η merupakan kongruensi. Menggunakan Lemma 3.1. dan Teorema 2.4. dapat ditunjukkan bahwa η merupakan kongruensi latis distributif pada S . Selanjutnya diambil sebarang kongruensi latis distributif β pada S . Dari $(a, d_{n-1}) \in \sigma$, menurut Lemma 2.1. dipunyai $d_{n-1}^m + xax = xax$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dan $x \in S$. Jelas bahwa $(xax, d_{n-1}^m + xax) \in \beta$. Selanjutnya, oleh karena S/β merupakan latis distributif, maka diperoleh $(ax^2, xax) \in \beta$ sehingga lebih lanjut dipunyai $(d_{n-1}^m + xax, d_{n-1}^m + ax^2) \in \beta$. Menggunakan sifat idempotent, jelas $(d_{n-1}^m, d_{n-1}) \in \beta$ sehingga $(d_{n-1}^m + ax^2, d_{n-1} + ax^2) \in \beta$. Akibatnya didapat $(ax^2, d_{n-1} + ax^2) \in \beta$, sebab β bersifat transitif. Selanjutnya diperoleh bahwa $(a, a + ax^2), (a + ax^2, a + d_{n-1} + ax^2) \in \beta$. Oleh karena $(S, +)$ merupakan semilatis maka $(a + d_{n-1} + ax^2, a + d_{n-1}) \in \beta$. Akibatnya $(a, a + d_{n-1}) \in \beta$. Menggunakan cara yang sama untuk $(d_{n-1}, d_{n-2}), \dots, (d_1, b) \in \sigma$ diperoleh bahwa $(d_{n-1}, d_{n-1} + d_{n-2}), \dots, (d_1, d_1 + b) \in \beta$ sehingga $(a, a + b) \in \beta$. Demikian pula karena $(a, b) \in \bar{\sigma}$, dengan cara yang sama diperoleh $(a + b, b) \in \beta$. Dengan demikian dapat disimpulkan $(a, b) \in \beta$, sehingga $\eta \subseteq \beta$. Oleh karena berlaku untuk sebarang kongruensi latis distributif β maka jelas η merupakan kongruensi latis distributif terkecil pada semiring S . \square

4. Kongruensi Latis Distributif μ

Diketahui bahwa *closure* transitif dari relasi σ , yaitu $\bar{\sigma}$ bersifat refleksif dan transitif. Akan tetapi secara umum, relasi $\bar{\sigma}$ belum tentu bersifat simetris. Akibatnya jelas bahwa jika $(a, b) \in \bar{\sigma}$ untuk suatu $a, b \in S$ maka belum tentu $(b, a) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya untuk sebarang $a \in S$ dibentuk dua himpunan bagian di semiring S sebagai berikut

$$M(a) = \{x \in S \mid (a, x) \in \bar{\sigma}\} \text{ dan } N(a) = \{x \in S \mid (x, a) \in \bar{\sigma}\}.$$

Lemma 4.1. *Diberikan semiring $S \in \mathbb{SL}^+$. Untuk sebarang $a, b, c \in S$ berlaku pernyataan-pernyataan berikut:*

- (1) *Jika $b \in M(a)$ maka $(bc) \subseteq M(ac)$;*
- (2) $M(ab) = M(a) \cap M(b)$.

Bukti. Diambil sebarang $S \in \mathbb{SL}^+$ dan $a, b, c \in S$.

- (1) Diberikan $b \in M(a)$, artinya $(a, b) \in \bar{\sigma}$. Menurut Proposisi 2.5. dan Lemma 3.2., diperoleh

$$(ac, d_{n-1}c), \dots, (d_2c, d_1c), (d_1c, bc) \in \bar{\sigma}$$

untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ dan $d_1, d_2, \dots, d_{n-1} \in S$. Oleh karena $\bar{\sigma}$ transitif maka $(ac, bc) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya diambil sebarang $x \in M(bc)$, artinya $(bc, x) \in \bar{\sigma}$. Jelas $(ac, x) \in \bar{\sigma}$, sehingga $x \in M(ac)$ yang artinya $M(bc) \subseteq M(ac)$.

- (2) Diambil sebarang $x \in M(ab)$, artinya $(ab, x) \in \bar{\sigma}$. Menggunakan Lemma 3.1. dan sifat transitif $\bar{\sigma}$ diperoleh $(a, x), (b, x) \in \bar{\sigma}$ sehingga $x \in M(a) \cap M(b)$, yang artinya $M(ab) \subseteq M(a) \cap M(b)$. Sebaliknya, diambil $y \in M(a) \cap M(b)$, artinya $(a, y), (b, y) \in \bar{\sigma}$. Menggunakan Proposisi 2.5., Lemma 3.1., dan Lemma 3.2., diperoleh $(ab, yb), (yb, y^2), (y^2, y) \in \bar{\sigma}$, sehingga $(ab, y) \in \bar{\sigma}$. Akibatnya

diperoleh $y \in M(ab)$, sehingga $M(a) \cap M(b) \subseteq M(ab)$. Dengan demikian jelas $M(ab) = M(a) \cap M(b)$. \square

Selanjutnya didefinisikan relasi μ_M dan μ_N sebagai berikut

$$(a, b) \in \mu_M \Leftrightarrow M(a) = M(b)$$

$$(a, b) \in \mu_N \Leftrightarrow N(a) = N(b)$$

untuk setiap $a, b \in S$. Dapat ditunjukkan bahwa $\mu_M = \mu_N$, sehingga selanjutnya relasi μ_M dan μ_N cukup dinotasikan dengan μ dan diperoleh $\mu = \mu_M = \mu_N$. Lebih lanjut dapat ditunjukkan bahwa μ merupakan relasi ekuivalensi.

Lemma 4.2. *Diberikan semiring $S \in \mathbb{SL}^+$. Untuk sebarang $a, b \in S$ berlaku pernyataan-pernyataan berikut:*

- (1) $(a + ab, a) \in \mu$;
- (2) $(a^2, a) \in \mu$;
- (3) $(ab, ba) \in \mu$.

Bukti. Diambil sebarang $S \in \mathbb{SL}^+$ dan $a, b \in S$.

- (1) Diambil sebarang $x \in M(a + ab)$, yang artinya $(a + ab, x) \in \bar{\sigma}$. Menurut Lemma 3.1. dipunyai $(a, a + ab) \in \bar{\sigma}$ sehingga menggunakan sifat transitif $\bar{\sigma}$ diperoleh $(a, x) \in \bar{\sigma}$ yang artinya $x \in M(a)$. Akibatnya $M(a + ab) \subseteq M(a)$. Selanjutnya diambil sebarang $y \in M(a)$, yang artinya $(a, y) \in \bar{\sigma}$. Menurut Lemma 3.1. dipunyai bahwa $(a + ab, a) \in \bar{\sigma}$ sehingga menggunakan sifat transitif $\bar{\sigma}$ diperoleh $(a + ab, y) \in \bar{\sigma}$ yang artinya $y \in M(a + ab)$. Akibatnya $M(a) \subseteq M(a + ab)$. Dengan kata lain $M(a + ab) = M(a)$ sehingga diperoleh $(a + ab, a) \in \mu$.
- (2) Menggunakan Lemma 4.1. jelas bahwa $M(a^2) = M(a) \cap M(a) = M(a)$ sehingga $(a^2, a) \in \mu$.
- (3) Menggunakan Lemma 4.1. jelas bahwa

$$M(ab) = M(a) \cap M(b) = M(b) = M(a) = M(ba)$$
 sehingga $(ab, ba) \in \mu$. \square

Teorema 4.3. *Jika diberikan semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ maka relasi μ merupakan kongruensi latis distributif terkecil pada semiring S .*

Bukti. Telah diketahui bahwa μ merupakan relasi ekuivalensi. Diambil sebarang $(a, b) \in \mu$ dan $c \in S$, yang artinya $M(a) = M(b)$. Menurut Lemma 4.1. jelas

$$M(ac) = M(a) \cap M(c) = M(b) \cap M(c) = M(bc)$$

$$M(ca) = M(c) \cap M(a) = M(c) \cap M(b) = M(cb)$$

sehingga $(ac, bc), (ca, cb) \in \mu$. Selanjutnya oleh karena $\bar{\sigma}$ bersifat refleksif maka $a \in M(a)$ dan $b \in M(b)$. Akibatnya $a \in M(b)$ dan $b \in M(a)$ sehingga $(a, b), (b, a) \in \bar{\sigma}$. Menggunakan Proposisi 2.5. dan Lemma 3.2. diperoleh bahwa $(a + c, b + c), (b + c, a + c) \in \bar{\sigma}$. Selanjutnya diambil sebarang $x \in M(a + c)$, yang artinya $(a + c, x) \in \bar{\sigma}$. Akibatnya $(b + c, x) \in \bar{\sigma}$, sehingga $x \in M(b + c)$ yang artinya $M(a + c) \subseteq M(b + c)$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$M(b + c) \subseteq M(a + c)$ sehingga $M(a + c) = M(b + c)$, artinya $(a + c, b + c) \in \mu$. Oleh karena $(S, +)$ merupakan semilatis maka $(c + a, c + b) \in \mu$. Dengan demikian μ merupakan kongruensi. Menggunakan Lemma 4.2. dan Teorema 2.4. dapat ditunjukkan bahwa μ merupakan kongruensi latis distributif pada S . Selanjutnya diambil sebarang kongruensi latis distributif β pada S . Diperhatikan bahwa untuk setiap $(a, b) \in \mu$ berakibat $(a, b), (b, a) \in \bar{\sigma}$ yang artinya $(a, b) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$. Menurut Teorema 3.3. diketahui $\eta \subseteq \beta$, sehingga $(a, b) \in \beta$. Akibatnya $\mu \subseteq \beta$. Oleh karena berlaku untuk sebarang kongruensi latis distributif β maka jelas η merupakan kongruensi latis distributif terkecil pada semiring S . \square

5. Hubungan Kongruensi η dan μ

Telah diketahui bahwa relasi η dan μ masing-masing merupakan kongruensi latis distributif terkecil pada sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$. Dengan memandang relasi η sebagai kongruensi latis distributif terkecil pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$, maka jelas bahwa $\mu \subseteq \eta$. Hal ini terjadi sebab μ merupakan kongruensi latis distributif pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$. Sebaliknya, dengan memandang memandang relasi μ sebagai kongruensi latis distributif terkecil pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$, maka dengan cara yang sama diperoleh bahwa $\eta \subseteq \mu$. Akibatnya diperoleh bahwa $\eta = \mu$.

Selain dengan alasan di atas, dapat pula ditunjukkan bahwa $\eta = \mu$ dengan memperhatikan definisi dari kedua relasi tersebut, tanpa memandang keduanya sebagai kongruensi latis distributif terkecil pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$.

Teorema 5.1. *Untuk sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$, relasi η dan μ pada S adalah sama.*

Bukti. Diambil sebarang $(a, b) \in \eta = \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1}$. Selanjutnya diambil sebarang $x \in M(a)$, sehingga dipunyai $(a, x) \in \bar{\sigma}$. Oleh karena $(b, a), (a, x) \in \bar{\sigma}$ dan $\bar{\sigma}$ bersifat transitif, maka $(b, x) \in \bar{\sigma}$. Akibatnya $x \in M(b)$ yang artinya $M(a) \subseteq M(b)$. Sebaliknya, diambil sebarang $y \in M(b)$, sehingga dipunyai $(b, y) \in \bar{\sigma}$. Oleh karena $(a, b), (b, y) \in \bar{\sigma}$ maka diperoleh $(a, y) \in \bar{\sigma}$. Akibatnya $y \in M(a)$ yang artinya $M(b) \subseteq M(a)$. Dengan demikian diperoleh $M(a) = M(b)$, yang artinya $(a, b) \in \mu$, sehingga jelas bahwa $\eta \subseteq \mu$. Selanjutnya, diambil sebarang $(c, d) \in \mu$ yang artinya $M(c) = M(d)$. Oleh karena relasi $\bar{\sigma}$ bersifat refleksif, maka jelas bahwa $(c, c), (d, d) \in \bar{\sigma}$. Akibatnya $c \in M(c)$ dan $d \in M(d)$. Oleh karena $M(c) = M(d)$ maka dipunyai $c \in M(d)$ dan $d \in M(c)$, yang artinya $(c, d), (d, c) \in \bar{\sigma}$. Akibatnya diperoleh $(c, d) \in \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1} = \eta$, sehingga jelas bahwa $\mu \subseteq \eta$. Dengan demikian $\eta = \mu$. \square

6. Kesimpulan

Di dalam teori semiring, dikenal kelas semiring yang lebih khusus, yaitu kelas semiring dengan *additive reduct* semilatis, yang selanjutnya dinotasikan \mathbb{SL}^+ . Lebih lanjut di dalam kelas \mathbb{SL}^+ dapat didefinisikan suatu kongruensi latis distributif. Suatu kongruensi ρ pada semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ disebut kongruensi latis distributif jika S/ρ merupakan latis distributif. Selanjutnya ditentukan kongruensi latis distributif yang

terkecil pada semiring di \mathbb{SL}^+ . Pertama, didefinisikan relasi σ pada sebarang semiring $S \in \mathbb{SL}^+$ dengan

$$(a, b) \in \sigma \Leftrightarrow b \in \sqrt{SaS}$$

untuk setiap $a, b \in S$. Selanjutnya relasi η yang didefinisikan $\eta = \bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}^{-1}$ merupakan kongruensi latis distributif yang terkecil pada S . Lebih lanjut, didefinisikan relasi μ pada S , yaitu $(a, b) \in \mu \Leftrightarrow M(a) = M(b)$, untuk setiap $a, b \in S$, dengan $M(a) = \{x \in S \mid (a, x) \in \bar{\sigma}\}$. Ternyata relasi μ juga merupakan kongruensi latis distributif yang terkecil pada S . Meskipun kongruensi η dan μ didefinisikan dengan pendekatan yang berbeda, akan tetapi secara himpunan kongruensi-kongruensi tersebut sama.

Daftar Pustaka

- [1] Bhuniya, A. K. and Mondal, T. K., 2010, Distributive Lattice Decompositions of Semirings with a Semilattice Additive Reduct, *Semigroup Forum*, 80, 293-301.
- [2] Bhuniya, A. K. and Mondal, T. K., 2015, On The Least Distributive Lattice Congruence On a Semiring with a Semilattice Additive Reduct, *Acta Math. Hungar.*, 147(1), 189-204.
- [3] Howie, J.M., 1976, *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press Inc., London.
- [4] Howie, J. M., 1995, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Clarendon Press, Oxford.
- [5] Hungerford, T.W., 2003, *Algebra*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc, USA.
- [6] Sen, M. K. and Bhuniya, A. K., 2011, On Semirings Whose Additive Reduct is Semilattice, *Semigroup Forum*, 82, 131-140.
- [7] Sholander, M., 1951, Postulates for Distributive Lattices, *Canadian Journal Math.*, 3, 28-30.

Modul M - P -Miskin

Iqbal Maulana¹ dan Indah Emilia Wijayanti²

¹ Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM
hmiqbal1202@gmail.com

² Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
ind_wijayanti@ugm.ac.id

Abstrak

Suatu modul atas ring R disebut modul p -miskin jika modul tersebut proyektif relatif hanya terhadap semua modul semisederhana atas R . Selanjutnya, untuk modul M atas R , didefinisikan kelas $\sigma[M]$ yaitu kelas yang memuat semua R -modul N sedemikian hingga M adalah *subgenerator* untuk N . Pada tulisan ini, akan dikaji modul M - p -miskin yaitu suatu modul di dalam $\sigma[M]$ yang proyektif relatif hanya terhadap semua modul semisederhana di dalam $\sigma[M]$. Selain itu, akan dikaji pula sifat-sifat dari modul M - p -miskin yang diantaranya merupakan hasil modifikasi dari sifat yang berlaku pada modul p -miskin.

Kata Kunci: *modul p -miskin, kelas $\sigma[M]$, modul M - p -miskin.*

1. Pendahuluan

Diberikan M dan N masing-masing adalah modul atas ring R (atau ditulis sebagai R -modul). Daerah proyektivitas dari M didefinisikan sebagai $\mathfrak{Pr}^{-1}(M) = \{N \mid M \text{ adalah modul } N\text{-proyektif}\}$ [1]. Selanjutnya, jika daerah proyektivitas dari M memuat seluruh modul atas R , maka M disebut modul proyektif. Modul p -miskin merupakan kasus khusus dari modul proyektif karena daerah proyektivitas dari modul p -miskin yang hanya terdiri dari semua modul semisederhana atas R [2]. Mengenai eksistensi modul p -miskin diperoleh bahwa setiap ring mempunyai modul p -miskin. Sedangkan untuk pembentukan modul p -miskin diperoleh bahwa suatu R -modul yang merupakan hasil jumlah langsung dari semua modul siklik atas R adalah modul p -miskin [2].

Selanjutnya, Wisbauer dalam bukunya telah membahas tentang kelas $\sigma[M]$, yaitu suatu kelas yang memuat semua R -modul N sedemikian hingga R -modul M adalah *subgenerator* untuk N [3]. Modul M disebut *subgenerator* untuk N jika N isomorfik dengan submodul dari suatu modul yang dibangun oleh M . Atau dengan kata lain, terdapat epimorfisma $\alpha : M^{(\Lambda)} \rightarrow U$ dengan N submodul dari U . Kemudian, Wisbauer juga telah membahas tentang modul proyektif di dalam $\sigma[M]$, yaitu suatu modul di $\sigma[M]$ yang daerah proyektivitasnya memuat seluruh modul di $\sigma[M]$ [3].

Jika diambil $M = R$ maka akan diperoleh $\sigma[R] = \{N \mid N \text{ merupakan } R\text{-modul}\}$, yang berarti R adalah *subgenerator* untuk semua modul atas R . Akibatnya, diperoleh definisi modul proyektif di dalam $\sigma[R]$, yaitu suatu modul di $\sigma[R]$ yang daerah proyektivitasnya memuat seluruh modul atas R . Hal tersebut sesuai dengan pen-definisian modul proyektif seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

Pada tulisan ini akan dikaji tentang suatu R -modul di $\sigma[M]$ yang daerah proyektivitasnya hanya terdiri dari semua modul semisederhana di $\sigma[M]$. Modul tersebut selanjutnya disebut modul p -miskin di dalam $\sigma[M]$, dan dinotasikan dengan modul M - p -miskin. Selain itu, akan dikaji pula sifat-sifat dari modul M - p -miskin,

yang diantaranya merupakan hasil modifikasi dari beberapa sifat pada modul p -miskin. Selanjutnya, dalam tulisan ini diasumsikan ring yang akan dibicarakan adalah ring dengan elemen satuan, sedangkan modulnya adalah modul kanan dan unital (kecuali kalau dinyatakan lainnya). Kemudian, $Mod-R$ menyatakan kelas dari semua modul kanan atas ring R , dan $SSMod-R$ menyatakan kelas dari semua modul semisederhana kanan atas ring R .

2. Modul p -Miskin dan Sifat-Sifatnya

Modul p -miskin dan sifat-sifatnya telah dijelaskan sebelumnya dalam artikel Holston, dkk (2012). Sebelum menjelaskan tentang modul p -miskin, terlebih dahulu akan dijelaskan tentang modul M -proyektif.

2.1. Modul M -Proyektif

Definisi 2.1. (Anderson dan Fuller, 1992)[1] Misalkan M , N dan P masing-masing adalah R -modul. Modul P disebut modul M -proyektif, jika untuk setiap epimorfisma $g : M \rightarrow N$ dan homomorfisma $f : P \rightarrow N$, terdapat homomorfisma $h : P \rightarrow M$ sedemi-kian hingga diagram berikut komutatif,

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 h \swarrow & \downarrow f & \\
 M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0
 \end{array}$$

yaitu berlaku $gh = f$.

Definisi 2.1 di atas ekuivalen dengan mengatakan bahwa modul P disebut modul M -proyektif, jika pemetaan $Hom(P, g) : Hom(P, M) \rightarrow Hom(P, N)$ dengan definisi $Hom(P, g)(\alpha) = g\alpha$, untuk setiap $\alpha \in Hom(P, M)$ adalah surjektif, untuk setiap epimorfisma $g : M \rightarrow N$.

Contoh 2.2. Diberikan \mathbb{Z}_{4p} dengan p bilangan prima adalah suatu modul atas \mathbb{Z} , maka diperoleh \mathbb{Z}_{4p} adalah modul \mathbb{Z}_4 -proyektif.

Contoh 2.3. Diberikan \mathbb{Z}_2 dan \mathbb{Z}_4 masing-masing modul atas \mathbb{Z} , maka diperoleh \mathbb{Z}_2 bukan modul \mathbb{Z}_4 -proyektif. Lebih lanjut, sebagai perumuman dari Contoh 2.3 ini maka diperoleh untuk sebarang bilangan prima p , \mathbb{Z}_p bukan modul \mathbb{Z}_{p^k} -proyektif dengan $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$.

Beberapa sifat pada modul M -proyektif akan dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 2.4. (Anderson dan Fuller, 1992)[1] Diberikan R -modul M dan $\{U_\lambda\}_\Lambda$ adalah keluarga R -modul. Hasil jumlah langsung $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$ adalah modul M -proyektif jika dan hanya jika U_λ adalah modul M -proyektif, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$.

Proposisi 2.5. (Wisbauer, 1991)[3] Jika modul P dibangun secara berhingga dan P merupakan modul M_λ -proyektif untuk sebarang keluarga R -modul $\{M_\lambda\}_\Lambda$, maka P juga merupakan modul $\bigoplus_\Lambda M_\lambda$ -proyektif.

Proposisi 2.6. (Anderson dan Fuller, 1992)[1] Untuk sebarang R -modul M , M adalah modul N -proyektif, untuk setiap modul semisederhana N atas R .

2.2. Modul p -Miskin

Berdasarkan Proposisi 2.6 maka diperoleh kondisi di mana berlaku $SSMod-R \subseteq \mathfrak{Pr}^{-1}(M)$, untuk setiap $M \in Mod-R$. Dalam hal $\mathfrak{Pr}^{-1}(M) = SSMod-R$, maka modul M disebut sebagai modul p -miskin. Lebih lanjut, diberikan definisi modul p -miskin sebagai berikut.

Definisi 2.7. *Suatu modul M atas ring R disebut modul p -miskin jika dan hanya jika daerah proyektivitas dari M hanya terdiri dari semua modul semisederhana atas ring R .*

Selanjutnya, dari [2] diperoleh suatu hasil yang menjelaskan bahwa irisan dari daerah proyektivitas semua modul di $Mod-R$ sama dengan kelas dari semua modul semisederhana atas ring R . Hal tersebut dijelaskan lebih lanjut dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.8. *Untuk setiap ring R , $\bigcap_{M \in Mod-R} \mathfrak{Pr}^{-1}(M) = SSMod-R$.*

Selanjutnya, sebelum menunjukkan eksistensi dan pembentukan modul p -miskin untuk setiap ring R , terlebih dahulu akan diberikan beberapa sifat dari modul p -miskin yang dijelaskan dalam lemma-lemma berikut ini.

Lemma 2.9. *Modul M adalah p -miskin jika dan hanya jika setiap modul siklik di daerah proyektivitas dari M adalah modul semisederhana.*

Lemma 2.10. *Untuk setiap ring R , jika M adalah modul p -miskin maka untuk setiap $N \in Mod-R$, $M \oplus N$ adalah modul p -miskin.*

Lemma 2.11. *Jika $\bigoplus_{i \in I} M_i^{(i)}$ adalah modul p -miskin maka $\bigoplus_{i \in I} M_i$ adalah modul p -miskin.*

Selanjutnya, teorema berikut ini akan menunjukkan tentang eksistensi modul p -miskin untuk setiap ring.

Teorema 2.12. *Setiap ring mempunyai modul p -miskin.*

Bukti. Misalkan R sebarang ring. Ambil $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ yang merupakan himpunan yang mewakili seluruh kelas-kelas isomorfisma dari modul siklik dan non-semisederhana atas R . Diperhatikan bahwa untuk setiap $\gamma \in \Gamma$ maka diperoleh A_γ non-semisederhana, sehingga berakibat terdapat X_γ bukan penjumlah langsung dari A_γ . Akibatnya, A_γ/X_γ bukan modul A_γ -proyektif. Selanjutnya, dibentuk $X = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma/X_\gamma$ yang merupakan hasil jumlah langsung dari semua modul faktor dari modul siklik yang non-semisederhana atas R .

Andaikan A suatu modul siklik dan non-semisederhana sedemikian hingga X adalah modul A -proyektif. Terdapat $\gamma \in \Gamma$ sedemikian hingga $A \cong A_\gamma$. Akibatnya, X adalah modul A_γ -proyektif. Karena $X = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma/X_\gamma$ adalah modul A_γ -proyektif, maka berdasarkan Proposisi 2.4 diperoleh A_γ/X_γ adalah modul A_γ -proyektif. Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah, dan haruslah A sebarang modul siklik dan semisederhana di daerah proyektivitas dari X . Dengan demikian, berdasarkan Lemma 2.9 diperoleh bahwa X adalah modul p -miskin.

Selanjutnya, teorema berikut ini akan mempermudah dalam pembentukan modul p -miskin, yaitu suatu R -modul yang merupakan hasil jumlah langsung dari semua modul siklik atas R adalah modul p -miskin.

Teorema 2.13. Misalkan R ring dan $M = \bigoplus_{N \in \Gamma} N$, dengan Γ adalah himpunan yang mewakili seluruh modul-modul siklik atas R . Modul M tersebut adalah modul p -miskin.

Bukti. Dari Teorema 2.12 diperoleh $X = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma/X_\gamma$. Misalkan $X' \leq X$ merupakan hasil jumlah langsung dari himpunan yang mewakili seluruh kelas-kelas isomorfisma dari modul faktor A_γ/X_γ . Berdasarkan Lemma 2.11, karena X adalah modul p -miskin maka X' adalah modul p -miskin juga. Kemudian, karena X' juga merupakan penjumlahan langsung dari M , maka berdasarkan Lemma 2.10 diperoleh M adalah modul p -miskin.

Contoh 2.14. Misalkan $\bigoplus_{p \text{ prima}} \mathbb{Z}_p$ menyatakan hasil jumlah langsung dari $\{\mathbb{Z}_p\}$, di mana $\{\mathbb{Z}_p\}$ adalah kelas dari modul-modul \mathbb{Z}_p dengan p masing-masing bilangan prima yang berbeda. Modul $\bigoplus_{p \text{ prima}} \mathbb{Z}_p$ adalah modul atas ring \mathbb{Z} dan juga merupakan contoh modul p -miskin. Hal ini dikarenakan daerah proyektivitas dari modul $\bigoplus_{p \text{ prima}} \mathbb{Z}_p$ hanyalah modul \mathbb{Z}_q dan $\bigoplus_q \mathbb{Z}_q$ untuk sebarang bilangan prima q , yang masing-masing merupakan modul semisederhana atas \mathbb{Z} .

Contoh 2.15. Modul $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ atas ring \mathbb{Z} merupakan modul p -miskin. Hal ini dikarenakan modul p -miskin $\bigoplus_{p \text{ prima}} \mathbb{Z}_p$ merupakan penjumlahan langsung dari $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$, sehingga berdasarkan Lemma 2.10 diperoleh bahwa $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ adalah modul p -miskin.

Contoh 2.16. Modul \mathbb{Z}_{4p} dengan p bilangan prima bukan merupakan modul p -miskin. Hal ini dikarenakan modul \mathbb{Z}_{4p} adalah modul \mathbb{Z}_4 -proyektif, padahal \mathbb{Z}_4 bukanlah modul semisederhana.

3. Modul M - p -Miskin dan Sifat-Sifatnya

Pada pembahasan sebelumnya telah didefinisikan bahwa suatu modul $M \in \text{Mod-}R$ disebut modul p -miskin jika dan hanya jika daerah proyektivitas dari M hanya terdiri dari semua R -modul semisederhana di $\text{Mod-}R$. Selanjutnya, muncul motivasi untuk mendefinisikan tentang suatu R -modul di $\sigma[M]$ yang daerah proyektivitasnya hanya terdiri dari semua R -modul semisederhana di $\sigma[M]$, yang selanjutnya modul tersebut disebut modul p -miskin di dalam $\sigma[M]$.

Definisi 3.1. Misalkan M sebarang R -modul. Suatu modul L di $\sigma[M]$ disebut modul p -miskin di dalam $\sigma[M]$ jika dan hanya jika $\mathfrak{Pr}_M^{-1}(L) = \{K \in \sigma[M] \mid K \text{ adalah modul semisederhana}\}$, di mana $\mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$ menyatakan daerah proyektivitas dari L di dalam $\sigma[M]$.

Untuk selanjutnya, modul p -miskin di dalam $\sigma[M]$ dinotasikan dengan modul M - p -miskin. Sebagai eksistensi dari Definisi 3.1 di atas, berikut ini akan diberikan contoh modul M - p -miskin.

Contoh 3.2. Diberikan modul $M = \mathbb{Z}_8$ atas ring \mathbb{Z} . Submodul-submodul dari \mathbb{Z}_8 antara lain $0, 2\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}_4, 4\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{4}\} \cong \mathbb{Z}_2$, dan \mathbb{Z}_8 . Selanjutnya, dibentuk epimorfisma $\alpha : \mathbb{Z}_8^{(\Lambda)} \rightarrow U$, dengan U merupakan kombinasi hasil jumlah langsung dari submodul-submodul dari \mathbb{Z}_8 , maka akan diperoleh

$$\sigma[\mathbb{Z}_8] = \{ \bigoplus_{\alpha \subseteq \Lambda} 0 \bigoplus_{\alpha \neq \beta \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2 \bigoplus_{(\alpha \cup \beta) \neq \gamma \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_4 \bigoplus_{\Lambda - (\alpha \cup \beta \cup \gamma)} \mathbb{Z}_8 \}.$$

Diperhatikan bahwa $\mathbb{Z}_2 \in \sigma[\mathbb{Z}_8]$, dan berdasarkan Contoh 2.3 maka akan diperoleh $\mathfrak{Pr}_{\mathbb{Z}_8}^{-1}(\mathbb{Z}_2) = \{ \bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2 \}$. Hal tersebut menunjukkan bahwa daerah proyektivitas dari \mathbb{Z}_2 di dalam $\sigma[\mathbb{Z}_8]$ hanya terdiri dari modul-modul semisederhana atas \mathbb{Z} . Dengan demikian, \mathbb{Z}_2 merupakan modul \mathbb{Z}_8 - p -miskin.

Berkaitan dengan modul p -miskin, jika L merupakan modul M - p -miskin maka belum tentu L merupakan modul p -miskin.

Contoh 3.3. Diperhatikan kembali Contoh 3.2 di mana \mathbb{Z}_2 merupakan modul \mathbb{Z}_8 - p -miskin, akan tetapi \mathbb{Z}_2 bukan modul p -miskin. Hal ini dikarenakan \mathbb{Z}_2 adalah modul \mathbb{Z}_9 -proyektif, padahal \mathbb{Z}_9 bukanlah modul semisederhana atas \mathbb{Z} .

Kemudian, diperhatikan bahwa dalam hal M adalah sebarang R -modul, maka modul-modul tak nol di dalam kelas $\sigma[M]$ belum tentu semuanya semisederhana. Akan tetapi, jika diberikan syarat cukup M adalah R -modul semisederhana, maka akan berakibat setiap modul tak nol di kelas $\sigma[M]$ merupakan modul semisederhana. Lebih lanjut, hal tersebut akan dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 3.4. Misalkan M adalah modul semisederhana atas ring R . Setiap modul tak nol di kelas $\sigma[M]$ merupakan modul semisederhana.

Bukti. Ambil sebarang modul tak nol $N \in \sigma[M]$, maka terdapat epimorfisma

$$\alpha : M^{(\Lambda)} \rightarrow U$$

dengan N submodul dari U . Karena diketahui M adalah modul semisederhana maka diperoleh $M^{(\Lambda)}$ juga modul semisederhana. Akibatnya, karena $M^{(\Lambda)}$ adalah modul semisederhana maka diperoleh bahwa U juga modul semisederhana. Selanjutnya, karena submodul tak nol dari modul semisederhana adalah semisederhana juga, maka diperoleh bahwa N adalah semisederhana. Dengan demikian, terbukti bahwa setiap modul tak nol di kelas $\sigma[M]$ merupakan modul semisederhana.

Berdasarkan hasil dari Proposisi 3.4 tersebut maka diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 3.5. Misalkan M modul semisederhana atas ring R . Modul $L \in \sigma[M]$ disebut modul M - p -miskin jika dan hanya jika $\mathfrak{Pr}_M^{-1}(L) = \sigma[M]$.

Dari Akibat 3.5 di atas maka dapat disimpulkan bahwa jika M adalah R -modul semisederhana, maka modul M - p -miskin dapat dipandang sebagai modul proyektif di dalam $\sigma[M]$. Oleh karena itu, sifat-sifat yang terkait dengan yang memiliki syarat cukup modul proyektif di dalam $\sigma[M]$, masih akan tetap berlaku juga ketika modul M - p -miskin menggantikan syarat cukup modul proyektif di dalam $\sigma[M]$ pada sifat-sifat tersebut. Selanjutnya, proposisi-proposisi berikut ini akan menjelaskan diantara beberapa sifat modul M - p -miskin dengan M adalah R -modul semisederhana.

Proposisi 3.6. Misalkan M adalah R -modul semisederhana, dan P di dalam $\sigma[M]$. Modul P adalah M - p -miskin jika dan hanya jika setiap barisan eksak pendek

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

di kelas $\sigma[M]$ terpisah.

Bukti. (\Rightarrow) Ambil sebarang barisan eksak pendek di kelas $\sigma[M]$

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0. \quad (1)$$

Karena diketahui P adalah modul M - p -miskin dengan M adalah R -modul semisederhana, maka berdasarkan Akibat 3.5 diperoleh untuk setiap $N \in \sigma[M]$, P adalah modul N -proyektif. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.1 diperoleh pemetaan

$$Hom(P, g) : Hom(P, N) \rightarrow Hom(P, P)$$

dengan definisi $Hom(P, g)(\alpha) = g\alpha$, untuk setiap $\alpha \in Hom(P, N)$ adalah surjektif, untuk setiap epimorfisma $g : N \rightarrow P$. Selanjutnya, karena $id_p \in Hom(P, P)$ dan $Hom(P, g)$ surjektif, maka terdapat homomorfisma $h : P \rightarrow N$ sedemikian hingga $gh = id_p$. Akibatnya, diperoleh bahwa barisan (1) adalah barisan eksak terpisah.

(\Leftarrow) Ambil sebarang $N \in \sigma[M]$, epimorfisma $\beta : N \rightarrow L$, dan homomorfisma $\gamma : P \rightarrow L$.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \gamma & \\ N & \xrightarrow{\beta} L & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Akan ditunjukkan terdapat $\mu : P \rightarrow N$ sedemikian hingga berlaku $\beta\mu = \gamma$. Dari R -modul N dan P dapat dibentuk $N \oplus P$ yang juga berada di dalam $\sigma[M]$, kemudian didefinisikan pemetaan proyeksi $\pi_1 : N \oplus P \rightarrow N$ dan $\pi_2 : N \oplus P \rightarrow P$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Ker(\beta) & \xrightarrow{i'} & N \oplus P & \xrightarrow{\pi_2} & P \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & Ker(\beta) & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{\beta} & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

Selanjutnya, dibentuk $Q = \{(n, p) \in N \oplus P \mid \beta(n) = \gamma(p)\}$.

Jelas bahwa $Q \subseteq N \oplus P$ dan $Q \neq \emptyset$ karena $(0, 0) \in Q$. Kemudian, ambil sebarang $(n_1, p_1), (n_2, p_2) \in Q$ dan $r \in R$, maka diperhatikan bahwa

$$\beta(n_1 + n_2) = \beta(n_1) + \beta(n_2) = \gamma(p_1) + \gamma(p_2) = \gamma(p_1 + p_2)$$

dan

$$\beta(n_1 r) = \beta(n_1) r = \gamma(p_1) r = \gamma(p_1 r),$$

sehingga diperoleh $(n_1 + n_2, p_1 + p_2), (n_1 r, p_1 r) \in Q$. Jadi Q merupakan submodul dari $N \oplus P$. Selanjutnya, dapat dibentuk $\pi'_1 = \pi_1|_Q$ dan $\pi'_2 = \pi_2|_Q$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Ker(\beta) & \xrightarrow{i'} & Q & \xrightarrow{\pi'_2} & P \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \pi'_1 & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & Ker(\beta) & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{\beta} & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

Karena diketahui setiap barisan eksak pendek di kelas $\sigma[M]$ terpisah, maka diperoleh barisan eksak pendek

$$0 \rightarrow Ker(\beta) \xrightarrow{i'} Q \xrightarrow{\pi'_2} P \rightarrow 0$$

adalah terpisah. Akibatnya, terdapat $h : P \rightarrow Q$ sedemikian hingga $\pi'_2 h = id_p$. Oleh karena itu, dapat dibentuk $\pi'_1 h = \mu : P \rightarrow N$ sedemikian hingga berlaku

$$\begin{aligned} \beta\mu &= \beta(\pi'_1 h) \\ &= (\beta\pi'_1)h \\ &= (\gamma\pi'_2)h \\ &= \gamma(\pi'_2 h) \\ &= \gamma id_p \\ &= \gamma \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan modul N -proyektif, untuk setiap $N \in \sigma[M]$, yang berarti P adalah modul M - p -miskin dengan M adalah R -modul semiseder-hana.

Proposisi 3.7. *Misalkan M adalah R -modul semisederhana. Setiap modul M - p -miskin merupakan penjumlah langsung dari suatu hasil jumlah langsung submodul-submodul (yang dibangun secara berhingga) dari $M^{(\mathbb{N})}$.*

Bukti. Misalkan L adalah sebarang modul M - p -miskin. Karena $\mu_e = \{U \subset M^{(\mathbb{N})} \mid U \text{ dibangun secara berhingga}\}$ adalah himpunan pembangun di $\sigma[M]$, maka untuk $L \in \sigma[M]$ terdapat $U \subset M^{(\mathbb{N})}$ di mana U dibangun secara berhingga, sedemikian hingga U adalah pembangun L . Akibatnya, karena U adalah pembangun L maka terdapat epimorfisma $\alpha : U^{(\Lambda)} \rightarrow L$, sehingga dapat dibentuk barisan eksak pendek sebagai berikut

$$0 \rightarrow Ker(\alpha) \rightarrow U^{(\Lambda)} \xrightarrow{\alpha} L \rightarrow 0. \quad (2)$$

Karena L adalah modul M - p -miskin dengan M adalah modul semisederhana, maka berdasarkan Proposisi 3.6 diperoleh barisan (2) adalah barisan eksak terpisah, sehingga berakibat $U^{(\Lambda)} \cong Ker(\alpha) \oplus L$. Dengan demikian, diperoleh bahwa L merupakan penjumlah langsung dari suatu hasil jumlah langsung submodul-submodul (yang dibangun secara berhingga) dari $M^{(\mathbb{N})}$.

Proposisi 3.8. *Misalkan M adalah R -modul semisederhana. Jika P merupakan modul M - p -miskin dan $N \in \sigma[M]$, maka untuk setiap submodul $L_1, L_2 \leq N$ berlaku $Hom(P, L_1 + L_2) = Hom(P, L_1) + Hom(P, L_2)$.*

Bukti. Terlebih dahulu akan ditunjukkan $Hom(P, L_1) + Hom(P, L_2) \subseteq Hom(P, L_1 + L_2)$. Ambil sebarang $\alpha \in Hom(P, L_1)$ dan $\beta \in Hom(P, L_2)$, maka diperoleh

$$\alpha + \beta \in Hom(P, L_1) + Hom(P, L_2).$$

Kemudian didefinisikan $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, untuk setiap $x \in P$, maka diperoleh $(\alpha + \beta)(x) \in L_1 + L_2$ dan dapat ditunjukkan bahwa $\alpha + \beta$ adalah homomorfisma. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $\alpha + \beta \in Hom(P, L_1 + L_2)$, yang berarti terbukti bahwa $Hom(P, L_1) + Hom(P, L_2) \subseteq Hom(P, L_1 + L_2)$.

Kemudian, akan ditunjukkan $Hom(P, L_1 + L_2) \subseteq Hom(P, L_1) + Hom(P, L_2)$. Ambil sebarang $f \in Hom(P, L_1 + L_2)$. Perhatikan diagram berikut

$$\begin{array}{c}
 P \\
 \downarrow f \\
 L_1 \oplus L_2 \xrightarrow{g} L_1 + L_2 \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Karena $L_1 \oplus L_2 \in \sigma[M]$ dan diketahui P merupakan modul M - p -miskin dengan M adalah R -modul semisederhana, maka diperoleh P adalah modul $L_1 \oplus L_2$ -proyektif. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.1 terdapat $h : P \rightarrow L_1 \oplus L_2$ sedemikian hingga $gh = f$. Selanjutnya, diperhatikan

$$P \xrightarrow{h} L_1 \oplus L_2 \xrightarrow{\pi_1} L_1$$

dan

$$P \xrightarrow{h} L_1 \oplus L_2 \xrightarrow{\pi_2} L_2$$

dengan π_1, π_2 adalah pemetaan proyeksi, maka dapat didefinisikan

$$g(z) = \pi_1(z) + \pi_2(z) = (\pi_1 + \pi_2)(z)$$

untuk setiap $z \in L_1 \oplus L_2$, sehingga diperoleh $g = \pi_1 + \pi_2$. Oleh karena itu, diperoleh $f = gh = (\pi_1 + \pi_2)h = \pi_1h + \pi_2h = f_1 + f_2$, di mana $f_1 = \pi_1h \in \text{Hom}(P, L_1)$ dan $f_2 = \pi_2h \in \text{Hom}(P, L_2)$. Jadi, diperoleh bahwa $f \in \text{Hom}(P, L_1) + \text{Hom}(P, L_2)$, yang berarti terbukti bahwa $\text{Hom}(P, L_1 + L_2) \subseteq \text{Hom}(P, L_1) + \text{Hom}(P, L_2)$.

Selanjutnya, dalam pembahasan kelas $\sigma[M]$ dengan M adalah modul p -miskin, diperoleh suatu hasil bahwa jika M adalah modul p -miskin atas ring semisederhana R , maka untuk setiap $N \in \sigma[M]$ berlaku N adalah modul p -miskin. Oleh karena itu, dalam proposisi berikut ini akan diberikan syarat tambahan pada modul M sedemikian hingga untuk setiap $L \in \sigma[M]$, L adalah modul M - p -miskin.

Proposisi 3.9. *Jika M adalah R -modul semisederhana, maka untuk setiap $L \in \sigma[M]$, L adalah modul M - p -miskin.*

Bukti. Diketahui M adalah R -modul semisederhana, maka berdasarkan Proposisi 3.4 diperoleh bahwa modul tak nol $N \in \sigma[M]$ adalah modul semisederhana. Kemudian, dengan memanfaatkan Proposisi 2.6 maka diperoleh untuk setiap modul $L \in \sigma[M]$, L adalah N -proyektif. Jadi, diperoleh bahwa L adalah modul M - p -miskin.

Selanjutnya, berikut ini diberikan karakteristik dari modul M - p -miskin, di mana karakteristik ini merupakan hasil modifikasi dari Lemma 2.9 yang berlaku pada modul p -miskin. Lebih lanjut, karakteristik tersebut akan dijelaskan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.10. *Modul $L \in \sigma[M]$ adalah modul M - p -miskin jika dan hanya jika setiap modul siklik di $\mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$ adalah modul semisederhana.*

Bukti. (\Rightarrow) Diketahui L adalah modul M - p -miskin, maka diperoleh untuk setiap $K \in \mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$, K adalah modul semisederhana. Selanjutnya, ambil sebarang modul siklik $xR \in \sigma[M]$, $x \in K$ sedemikian hingga $xR \in \mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$. Karena L adalah modul M - p -miskin, maka akibatnya diperoleh modul siklik xR adalah modul semisederhana.

(\Leftarrow) Ambil sebarang $K \in \mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$. Karena untuk setiap $K \in \mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$ diperoleh $K \in \sigma[M]$ dan lebih lanjut $K \in \text{Mod-}R$, maka diperoleh bahwa K dibangun oleh himpunan submodul-submodul sikliknya, sehingga diperoleh $K = \bigoplus_{x \in K} xR$. Selanjutnya, karena untuk $x \in K$ di mana $K \in \mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$ diperoleh $xR \in \mathfrak{Pr}_M^{-1}(L)$, maka dari yang diketahui diperoleh bahwa xR adalah modul semisederhana, dan berakibat diperoleh $\bigoplus_{x \in K} xR = K$ adalah modul semisederhana. Dengan demikian, karena daerah proyektivitas dari L di dalam kelas $\sigma[M]$ adalah sebarang modul semisederhana, maka diperoleh bahwa L adalah modul M - p -miskin.

Contoh 3.11. Sebelumnya dari Contoh 3.2 diperoleh bahwa \mathbb{Z}_2 merupakan modul \mathbb{Z}_8 - p -miskin. Akan ditunjukkan bahwa setiap modul siklik di $\mathfrak{Pr}_{\mathbb{Z}_8}^{-1}(\mathbb{Z}_2)$ adalah modul semisederhana. Diperhatikan bahwa $\mathfrak{Pr}_{\mathbb{Z}_8}^{-1}(\mathbb{Z}_2) = \{\bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2\}$, maka modul-modul siklik di $\mathfrak{Pr}_{\mathbb{Z}_8}^{-1}(\mathbb{Z}_2)$ dapat dituliskan sebagai $x\mathbb{Z}$, di mana $x \in \bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2 = \bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8$. Lebih lanjut akan diperoleh $\{x\mathbb{Z}\} = \{\bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2\}$. Hal ini dikarenakan $\bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8\mathbb{Z} \subseteq \bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8$ mengingat bahwa $\bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8$ adalah modul atas ring \mathbb{Z} , dan kemudian sudah jelas juga bahwa $\bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8 \subseteq \bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8\mathbb{Z}$. Dengan demikian, diperoleh $\bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8\mathbb{Z} = \bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} 4\mathbb{Z}_8 = \bigoplus_{\lambda \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2$. Akibatnya, diperoleh bahwa setiap modul siklik di $\mathfrak{Pr}_{\mathbb{Z}_8}^{-1}(\mathbb{Z}_2)$ adalah modul-modul semisederhana.

Selanjutnya, dengan memodifikasi Lemma 2.10 pada modul p -miskin, maka dapat diperoleh karakteristik lain dari modul M - p -miskin yaitu hasil jumlah langsung antara modul M - p -miskin dengan sebarang modul di dalam $\sigma[M]$ merupakan modul M - p -miskin juga. Hal tersebut lebih lanjut akan dijelaskan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.12. *Jika L adalah modul M - p -miskin, maka untuk setiap $N \in \sigma[M]$, $L \oplus N$ adalah modul M - p -miskin.*

Bukti. Ambil sebarang $N \in \sigma[M]$, dan karena $L \in \sigma[M]$ juga maka diperoleh bahwa $L \oplus N \in \sigma[M]$. Kemudian, diasumsikan $L \oplus N$ adalah modul K -proyektif, di mana $K \in \sigma[M]$. Berdasarkan Proposisi 2.4 diperoleh bahwa L adalah modul K -proyektif. Kemudian, karena diketahui L adalah modul M - p -miskin, maka haruslah K adalah modul semisederhana. Dengan demikian, diperoleh bahwa $L \oplus N$ adalah modul M - p -miskin.

4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari tulisan ini adalah sebagai berikut.

1. Misalkan M sebarang R -modul, maka suatu R -modul di $\sigma[M]$ disebut modul M - p -miskin jika dan hanya jika daerah proyektivitas dari modul tersebut hanya terdiri dari semua R -modul semisederhana di $\sigma[M]$.
2. Berkaitan dengan modul p -miskin, diperoleh bahwa jika L merupakan modul M - p -miskin, maka belum tentu L merupakan modul p -miskin.
3. Jika M adalah R -modul semisederhana, maka modul M - p -miskin dapat dipandang sebagai modul proyektif di dalam $\sigma[M]$.
4. Suatu modul adalah modul M - p -miskin jika dan hanya jika setiap modul siklik di daerah proyektivitas dari modul tersebut di dalam $\sigma[M]$ merupakan modul semisederhana.

5. Hasil jumlah langsung antara modul M - p -miskin dengan sebarang modul di dalam $\sigma[M]$ merupakan modul M - p -miskin juga.

Daftar Pustaka

- [1] Anderson, F. W., dan Fuller, K. R., 1992, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, Inc.
- [2] Holston, C., Lopez-Permouth, S. R., dan Ertas, N. O., 2012, *Rings Whose Modules Have Maximal Or Minimal Projectivity Domain*, Journal of Pure and Applied Algebra 216 (2012) 673-678.
- [3] Wisbauer, R., 1991, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Reading, United Kingdom.

Modul Miskin dalam Kelas $\sigma[M]$

Arif Munandar¹ dan Indah Emilia Wijayanti²

¹Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM
arifd1ng01@gmail.com

²Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
Ind_wijayanti@ugm.ac.id

Abstrak

Modul miskin adalah modul yang injektif relatif hanya terhadap semua modul semisederhana. Dalam tulisan ini didefinisikan modul miskin dalam kelas $\sigma[M]$, yaitu modul yang domain injektivitasnya seluruh modul semisederhana dalam kelas $\sigma[M]$ dan kemudian dibahas beberapa sifatnya.

Kata Kunci: *modul miskin, modul injektif, modul semisederhana, kelas $\sigma[M]$.*

1. Pendahuluan

Sudah diketahui bahwa sebarang ruang vektor mempunyai basis. Misalkan N sebarang ruang vektor dan V adalah ruang vektor yang memuat N , maka N dan V mempunyai basis. Teorema perluasan basis menjamin bahwa basis N dapat diperluas menjadi basis V . Dengan demikian terdapat subruang P di V sedemikian sehingga $V = N \oplus P$. Jadi N adalah penjumlahan langsung dari V . Kondisi ini tidak selalu terjadi dalam modul, sebagai contohnya $\mathbb{Z}_2 \cong 2\mathbb{Z}_4$ adalah submodul dari \mathbb{Z}_4 atas \mathbb{Z} , namun \mathbb{Z}_2 bukan penjumlahan langsung dari \mathbb{Z}_4 . Selanjutnya modul N yang memenuhi kondisi seperti dalam ruang vektor tersebut yaitu sebarang modul $V \supseteq N$, maka N menjadi penjumlahan langsung dari V disebut sebagai modul injektif.

Lam(1999) menyatakan bahwa kondisi sebarang modul N yang termuat dalam V adalah penjumlahan langsung dari V ekuivalen dengan mengatakan bahwa sebarang homomorfisma dari sebarang submodul $K \subseteq M$ ke modul N dapat diperluas menjadi homomorfisma dari ruang vektor M ke N . Dengan demikian modul N adalah modul injektif jika untuk sebarang R -modul M , sebarang monomorfisma $f: K \rightarrow M$ dan sebarang homomorfisma $g: K \rightarrow N$ terdapat homomorfisma $h: M \rightarrow N$ sedemikian sehingga $h \circ f = g$.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & M \\
 & & \downarrow g & \swarrow h & \\
 & & N & &
 \end{array}$$

Jika definisi di atas hanya berlaku untuk suatu R -modul L maka modul N disebut sebagai modul injektif relatif terhadap modul L dan dituliskan N modul L -injektif. Selanjutnya modul L yang demikian disebut sebagai domain injektivitas dari modul N .

Modul injektif N atas ring R adalah modul yang mempunyai domain injektivitas seluruh R -modul. Melihat kenyataan ini maka modul injektif disebut sebagai modul kaya jika dilihat dari segi domain injektivitasnya. Hal menarik yang da

pat diteliti lebih lanjut adalah modul yang tetap injektif namun dengan domain injektivitas paling kecil. Domain injektivitas paling kecil dapat dipandang sebagai irisan dari semua domain injektivitas dari setiap R -modul. Modul yang demikian disebut sebagai modul miskin. Disebut sebagai modul miskin karena dari segi domain injektivitasnya, modul miskin merupakan kebalikan dari modul injektif.

Modul semisederhana merupakan modul yang istimewa jika dihubungkan dengan domain injektivitas. Hal ini dikarenakan sebarang modul semisederhana selalu menjadi domain injektivitas dari sebarang R -modul. Fakta lain menunjukkan bahwa sebarang R -modul yang terdapat dalam irisan domain injektivitas dari semua R -modul adalah modul semisederhana. Hal ini memotivasi *Alahmadi dkk. (2010)* untuk mengkarakterisasi modul miskin yaitu modul yang domain injektivitasnya hanyalah seluruh modul semisederhana.

Noyan dkk.(2011) menyatakan bahwa sebarang ring mempunyai modul miskin dan membahas beberapa sifat berkaitan dengan hal tersebut. Modul p -miskin yaitu modul miskin versi modul proyektif diteliti oleh *Holson, dkk(2012)*. Modul p -miskin mempunyai beberapa kesamaan sifat dengan modul miskin, dalam tulisan ini disampaikan beberapa hasil dari modul miskin yang ditulis oleh *Noyan, dkk (2011)*.

Sifat modul-modul yang terdapat dalam $\sigma[M]$ dipengaruhi oleh sifat modul M . Sifat khusus yang dimiliki M akan mengakibatkan perubahan dari modul-modul dalam $\sigma[M]$. Oleh karena itu perlu dikaji hubungan antara sifat modul miskin dengan sifat modul-modul dalam $\sigma[M]$. Untuk itu dalam penelitian ini akan dikaji mengenai hubungan antara kedua hal tersebut. Dalam [7] dijelaskan definisi tentang modul injektif dalam $\sigma[M]$, terinspirasi dari hal itu, kemudian didefinisikan modul miskin di dalam $\sigma[M]$ dan dibahas beberapa sifat yang terkait dengan hal tersebut.

2. Modul Miskin

Hasil dalam bagian ini diperoleh dari jurnal [1] dan [2]. Modul injektif adalah modul yang mempunyai domain injektivitas seluruh R -modul. Dengan demikian dari segi domain injektivitas modul injektif dapat disebut sebagai modul kaya. Sebaliknya modul miskin adalah modul dengan domain injektivitas sekecil-kecilnya. Domain injektivitas sekecil-kecilnya diperoleh dari irisan semua domain injektivitas dari sebarang R -modul. Jika K modul L -injektif maka L disebut sebagai domain injektivitas dari modul K dan dinotasikan $\mathfrak{I}n^{-1}(K)$, sehingga $L \in \mathfrak{I}n^{-1}(K)$. Domain injektivitas sekecil-kecilnya dapat dituliskan sebagai $\cap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{I}n^{-1}(N)$ dengan N adalah sebarang R -modul. Dengan demikian modul miskin didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. [1] Diberikan R -modul M , dan sebarang R -modul N . Modul M disebut modul miskin jika $\mathfrak{I}n^{-1}(M) = \cap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{I}n^{-1}(N)$.

Untuk selanjutnya himpunan seluruh modul semisederhana kiri atas R dinotasikan dengan $R-SSMod$. Sebarang modul semisederhana selalu berada dalam domain injektivitas dari sebarang R -modul. Dengan demikian jika P sebarang $R-SSMod$, maka $P \in \mathfrak{I}n^{-1}(N)$ untuk sebarang R -modul N , sehingga $P \in \cap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{I}n^{-1}(N)$. Jadi $R-SSMod \subseteq \cap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{I}n^{-1}(N)$. Kejadian sebaliknya juga berlaku, berikut teorema yang menjelaskannya.

Teorema 2.2. [1] Diberikan M adalah R -modul, $R-SSMod$ adalah kelas dari semua modul semisederhana kiri atas R , dan $\mathfrak{S}n^{-1}(N)$ adalah kelas domain injektivitas dari modul N , maka

$$R-SSMod = \bigcap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{S}n^{-1}(N). \quad (1)$$

Bukti. Jelas bahwa sebarang modul semisederhana kiri merupakan domain injektivitas dari sebarang modul kiri atas R , dengan demikian

$$R-SSMod \subseteq \bigcap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{S}n^{-1}(N).$$

Selanjutnya akan dibuktikan $R-SSMod \supseteq \bigcap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{S}n^{-1}(N)$. Diambil sebarang $P \in \bigcap_{N \in R\text{-modul}} \mathfrak{S}n^{-1}(N)$. Dengan demikian setiap M modul kiri atas R adalah modul P -injektif. Akibatnya setiap R -modul M adalah modul P -injektif. Dengan kata lain $P \in R-SSMod$. ■

Akibat 2.3. [1] Diberikan M modul kiri atas R . Modul M miskin jika domain injektivitas dari modul M adalah hanyalah seluruh modul semisederhana kiri.

Untuk selanjutnya definisi mengenai modul miskin yang banyak digunakan adalah definisi sesuai akibat di atas. Dengan memperhatikan akibat di atas, suatu modul M bukan merupakan modul miskin jika terdapat N modul kiri atas R , dengan M adalah N -injektif tetapi N bukan modul semisederhana. Berikut ini adalah salah satu contoh penting dari modul miskin. Contoh ini dapat digunakan sebagai gambaran tentang pembentukan modul miskin dan sifat-sifat yang terdapat dalam modul miskin.

Contoh 2.3. Modul $\bigoplus_{p \in \text{prima}} \mathbb{Z}_p$ atas ring \mathbb{Z} adalah modul miskin.

Contoh 2.4. Modul \mathbb{Z}_{p^2} atas ring \mathbb{Z} dan sebarang bilangan prima p bukan merupakan modul miskin. Karena \mathbb{Z}_{p^2} adalah modul \mathbb{Z}_{p^2} -injektif, sementara \mathbb{Z}_{p^2} bukan modul semisederhana.

Jumlahan dari suatu modul miskin dengan sebarang R -modul menjadi modul miskin. Hal ini menjadi salah satu hasil penting dari modul miskin.

Teorema 2.5. [5] Diberikan M modul kiri atas R . Jika M modul miskin maka untuk setiap R -modul N , $M \oplus N$ modul miskin.

Bukti. Diberikan M modul miskin. Diambil sebarang R -modul N . Akan dibuktikan $M \oplus N$ adalah modul miskin. Sebarang modul semisederhana adalah domain injektivitas dari sebarang R -modul. Andaikan $M \oplus N$ adalah modul T -injektif dengan T modul non semisederhana. Menurut Wisabauer dalam [7] modul injektif relatif mempertahankan sifat jumlahan langsung, maka M adalah T -injektif. Karena M modul miskin, maka T semisederhana. Kontradiksi dengan pemilihan T , dengan demikian T modul semisederhana. ■

Sebarang ring mempunyai modul miskin. Hal ini dijamin oleh teorema berikut.

Teorema 2.6. [5] Setiap ring R , mempunyai modul miskin.

Bukti. Diambil sebarang ring R . Misalkan $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ adalah himpunan semua kelas-kelas isomorfisma R -modul non semisederhana dan siklik. Karena A_γ modul non semisederhana maka terdapat $K_\gamma \subset A_\gamma$ sedemikian sehingga K_γ proper submodul esensial dari A_γ . Selanjutnya dibentuk $T = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$. Misalkan B adalah sebarang modul siklik non semisederhana sedemikian sehingga T adalah B -injektif. Dengan demikian terdapat suatu $\gamma \in \Gamma$ sedemikian sehingga $B = A_\gamma$. Karena B non-semisederhana maka, B mempunyai proper esensial submodul katakan N sedemikian sehingga $N \cong K_\gamma$. Dengan demikian N adalah B -injektif, kontradiksi. Jadi B sebarang modul semisederhana dan siklik sedemikian sehingga T modul B -injektif, dengan kata lain T modul miskin. ■

Hasil yang diperoleh pada bagian ini sudah menunjukkan bahwa sebarang ring R mempunyai modul miskin. Lebih lanjut sebarang jumlahan langsung dari himpunan semua kelas-kelas isomorfisma dari modul miskin juga membentuk modul miskin. Hal ini akan menjadi hasil penting berikutnya. Berikut ini Lemma berkaitan dengan pembuktian dari Teorema tersebut.

Lemma 2.7. [2] *Modul M semisederhana jika dan hanya jika setiap subfaktor (submodul dari modul faktor) siklik dari M adalah M -injektif.*

Bukti. Diketahui M adalah modul semisederhana, akan ditunjukkan bahwa setiap subfaktor siklik dari M adalah M -injektif. Misalkan K sebarang submodul dari M , karena M semisederhana maka terdapat L submodul dari M sedemikian sehingga $M = K \oplus L$. Selanjutnya $K \cong M/L$, karena M semisederhana, maka setiap modul atas R adalah M -injektif, sehingga K modul M -injektif. Dengan demikian M/L modul M -injektif. Diambil sebarang submodul siklik P dari M dengan L submodul P . Dengan demikian P/L submodul dari M/L . Lebih lanjut karena M semisederhana, maka M/L juga semisederhana sehingga P/L penjumlahan langsung dari M/L . Akibatnya P/L modul M -injektif. Jadi setiap submodul siklik dari modul faktor M adalah modul M -injektif.

Sebaliknya diketahui setiap submodul siklik dari modul faktor M adalah M -injektif, akan ditunjukkan bahwa M semisederhana. Diambil sebarang N submodul siklik dari M . Dengan demikian setiap submodul dari modul faktor N adalah juga M -injektif. Selanjutnya menurut *Osofsky dan Smith (1991)* dalam [6] N merupakan jumlahan langsung berhingga dari submodul seragam. Misalkan A adalah submodul seragam yang merupakan penjumlahan langsung dari N . Misalkan A_1 sebarang submodul siklik dari A , dengan demikian A_1 adalah modul M -injektif. Akibatnya A_1 penjumlahan langsung dari A . Karena A seragam, maka setiap submodul dari A adalah submodul esensial. Dengan demikian A modul sederhana. Akibatnya N semisederhana. Karena N sebarang submodul siklik dari M , dan setiap modul dapat dibangun dari submodul-submodul sikliknya, maka M semisederhana. ■

Teorema 2.8. [5] *Diberikan sebarang ring R dan $M = \bigoplus_{N \in \Gamma} N$, dengan Γ adalah sebarang himpunan semua R -modul siklik, maka M modul miskin.*

Bukti. Misalkan $M = \bigoplus_{N \in \Gamma} N$, dengan Γ adalah sebarang himpunan semua R -modul siklik dan B adalah modul sedemikian sehingga M adalah B -injektif. Diambil

sebarang modul siklik P , maka P menjadi submodul dari M . Lebih lanjut perhatikan barisan eksak

$$0 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow M/P \rightarrow 0$$

karena M adalah B -injektif, maka P juga B -injektif. Dengan demikian setiap modul siklik adalah B -injektif. Jadi semua submodul siklik dari modul faktor B adalah B -injektif. Karena semua submodul siklik dari modul faktor B adalah B -injektif. Maka berdasarkan Lemma 2.7 B semisederhana. Jadi M modul miskin. Ring semisederhana selalu menjadi ring Artin. Lebih lanjut jika R ring semisederhana maka R_R ataupun ${}_R R$ menjadi modul semisederhana. Hal ini menyebabkan beberapa ekuivalensi berikut

Teorema 2.9. [5] *Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

1. Ring R semisederhana Artinian
2. Semua R -modul miskin kanan (kiri) adalah semisederhana
3. Penjumlah langsung tak nol dari R -modul miskin kanan (kiri) adalah modul miskin
4. Modul faktor tak nol dari R -modul miskin adalah modul miskin

Teorema di atas mudah dibuktikan dengan memahami bahwa sebarang modul atas ring semisederhana adalah modul semisederhana.

Berikutnya dalam [5] didefinisikan suatu modul jenis baru yang berhubungan dengan *socle* dari modul faktor. Modul tersebut diberi nama modul *Crumbles*.

Definisi 2.10. [5] *Diberikan M modul kiri atas R . Modul M dikatakan Crumbles jika *socle* dari setiap modul faktor M merupakan penjumlah langsung dari M .*

Contoh 2.11. Misalkan $M = \bigoplus_{p \in \text{prima}} \mathbb{Z}_p$, modul atas \mathbb{Z} . Modul tersebut adalah modul semisederhana, sehingga setiap modul faktor dari M adalah modul semisederhana. Karena *socle* dari modul semisederhana adalah dirinya sendiri dengan demikian setiap *socle* dari modul faktor M adalah penjumlah langsung dari M , sehingga M adalah modul *Crumbles*.

Teorema berikut mengkarakterisasi suatu ring R mempunyai modul miskin yang semisederhana yang di dihubungkan dengan modul *Crumbles*.

Teorema 2.12. [5] *Diberikan sebarang ring R . Pernyataan berikut ekuivalen;*

1. R mempunyai modul miskin semisederhana
2. Setiap R -modul siklik yang *Crumbles* adalah semisederhana
3. Setiap R -modul yang *Crumbles* adalah semisederhana

Bukti. (1) \Rightarrow (2) Misalkan S adalah modul miskin semisederhana. Andaikan terdapat B , modul siklik non-semisederhana yang *Crumbles*. Dengan demikian $\text{Tr}(B, E(S))$ dalam $E(S)$ tidak terdapat dalam S , sebab S modul miskin.

$$B \rightarrow S \rightarrow E(S)$$

Akibatnya terdapat peta dari homomorfisma B ke $E(S)$ yang tidak termuat dalam S . Diperhatikan bahwa peta B adalah submodul dari $E(S)$. Sementara S adalah modul semisederhana, maka setiap submodulnya adalah semisederhana. Karena S merupakan submodul esensial dari $E(S)$, maka setiap submodul dari S bukan merupakan penjumlah langsung dari $E(S)$. Dengan demikian B mempunyai faktor

non semisederhana dengan *socle* essential, kontradiksi dengan asumsi bahwa B adalah modul non-semisederhana dengan *socle* dari setiap modul faktor dari B adalah penjumlahan langsung dari B .

(2) \Rightarrow (1) Misalkan Γ adalah sebarang himpunan semua kelas-kelas isomorfisma dari modul kiri sederhana atas R . Dibentuk $S = \bigoplus_{B \in \Gamma} B^{(R)}$. Akan ditunjukkan bahwa S adalah modul miskin. Diperhatikan bahwa dengan dipilihnya Γ dan S , maka sebarang *socle* dari modul siklik atas R dapat disisipkan dalam S . Selanjutnya misalkan A adalah sebarang modul siklik non-semisederhana, dengan S adalah A –injektif. Berdasarkan asumsi, maka A adalah modul yang tidak *Crumbles*, artinya terdapat subfaktor semisederhana dari A katakan L/C yang bukan merupakan penjumlahan langsung dari A/C . Dengan menggunakan Lemma Zorn, dipilih submodul maksimal K/C dari A/C , dengan $K/C \cap L/C = 0$. Berdasarkan asumsi, maka $\frac{L \oplus K}{C}$ adalah proper essential dari $A/C / K/C$. Dengan demikian A/K mempunyai *proper essential socle* yang isomorfis dengan L/C . Karena A/K mempunyai proper essential *socle* maka A/K non-semisederhana. Lebih lanjut karena S adalah modul A –injektif, maka S juga A/K injektif, sehingga *embedding* $Soc\left(\frac{A}{K}\right) \rightarrow S$ dapat diperluas menjadi $f: \frac{A}{K} \rightarrow S$, dengan f adalah pemetaan injektif. Hal ini kontradiksi karena $f(A/K)$ adalah non semisederhana. Dengan demikian A semisederhana sehingga S miskin.

(2) \Rightarrow (3) Diketahui setiap R – modul yang *Crumbles* adalah modul semisederhana. Karena setiap modul dapat dibangun oleh modul sikliknya, maka setiap R – modul yang *Crumbles* adalah semisederhana.

(3) \Rightarrow (2) Diketahui setiap R –modul yang *Crumbles* adalah modul semisederhana. Akan dibuktikan bahwa setiap submodul sikliknya adalah modul yang *Crumbles*. Diperhatikan bahwa submodul siklik dan modul faktor dari modul semisederhana adalah modul semisederhana. Selanjutnya *socle* dari modul semisederhana adalah dirinya sendiri. Akibatnya setiap *socle* dari modul faktornya adalah penjumlahan langsung, yang berarti submodul sikliknya adalah *Crumbles*. ■

3. HUBUNGAN MODUL MISKIN M DENGAN $\sigma[M]$.

Berdasarkan pembentukan $\sigma[M]$, jelas bahwa sifat modul-modul yang terdapat dalam $\sigma[M]$ dipengaruhi oleh sifat modul M . Oleh karena itu akan diselidiki keterkaitan antara modul miskin M dengan modul-modul yang terdapat dalam $\sigma[M]$. Bagian pertama yang akan dibahas adalah jika M modul miskin apakah seluruh modul yang terdapat dalam $\sigma[M]$ menjadi modul miskin.

Submodul dari modul miskin belum tentu merupakan modul miskin. Penjelasan hal ini didasarkan pada Teorema 2.5, jika P modul miskin, maka sebarang jumlahan langsung antara P dengan modul K yang tidak harus miskin, akan menghasilkan modul miskin. Dengan kata lain $P \oplus K = M$ adalah modul miskin. Diperhatikan bahwa K merupakan submodul M , dan K tidak harus miskin. Dengan demikian sebarang submodul dari modul miskin belum tentu merupakan modul miskin. Penjelasan dari sifat di atas dapat pula dipahami dengan melihat bahwa \mathbb{Z}_4

bukan modul miskin sementara \mathbb{Z}_4 adalah submodul dari modul miskin $\bigoplus_{p \in \text{prima}} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_4$.

Selanjutnya bayangan epimorfisma dari modul miskin belum tentu merupakan modul miskin. Misalkan K modul miskin dan L adalah sebarang modul yang tidak miskin, maka berdasarkan Teorema 2.5 $K \oplus L$ merupakan modul miskin. Lebih lanjut dapat dibentuk epimorfisma $\pi: K \oplus L \rightarrow L$. Dengan demikian L adalah bayangan epimorfisma dari modul miskin yang bukan merupakan modul miskin.

Berdasarkan penjelasan di atas submodul dari modul miskin belum tentu merupakan modul miskin dan bayangan epimorfisma dari modul miskin belum tentu merupakan modul miskin. Diperhatikan bahwa modul-modul dalam $\sigma[M]$ adalah submodul dari bayangan epimorfisma dari jumlahan langsung modul M . Dengan demikian hal ini memberi petunjuk bahwa jika M modul miskin atas sebarang ring R , maka semua modul dalam $\sigma[M]$ belum tentu merupakan modul miskin. Berikut adalah contoh dari pernyataan tersebut.

Contoh 3.1 Diberikan modul $M = \bigoplus \mathbb{Z}_n$ yang merupakan modul miskin. \mathbb{Z}_4 bukan modul miskin sementara $\mathbb{Z}_4 \in \sigma[M]$.

Contoh 3.1 menunjukkan bahwa jika M adalah modul miskin atas sebarang ring R , maka seluruh modul dalam $\sigma[M]$ belum tentu menjadi modul miskin. Berikutnya akan dicari syarat cukup agar semua modul dalam $\sigma[M]$ menjadi modul miskin, jika M modul miskin. Diperhatikan bahwa Teorema 2.9 menjamin bahwa jika R ring semisederhana maka semua R -modul miskin akan menjadi modul semisederhana. Selain itu jelas bahwa jumlahan langsung dari modul semisederhana adalah modul semisederhana. Lebih lanjut bayangan epimorfisma dari suatu modul semisederhana adalah modul semisederhana. Memerhatikan beberapa kenyataan tersebut, jika M modul miskin maka ring semisederhana menjadi syarat cukup untuk membuat semua modul yang terdapat dalam $\sigma[M]$ menjadi miskin. Berikut adalah teorema yang menjelaskannya.

Teorema 3.2. *Jika M modul miskin atas ring semisederhana R maka sebarang modul $N \in \sigma[M]$ adalah modul miskin.*

Bukti. Diketahui M modul miskin, dan R semisederhana, maka berdasarkan Teorema 2.9 setiap modul miskin adalah modul semisederhana. Dengan demikian, M modul semisederhana. Karena M miskin semisederhana maka $M^{(\Lambda)}$ adalah modul miskin semisederhana. Selanjutnya dibentuk epimorfisma

$$\pi: M^{(\Lambda)} \rightarrow X$$

Karena $M^{(\Lambda)}$ adalah modul semisederhana maka barisan eksak berikut terpisah

$$0 \rightarrow \text{Ker } \pi \rightarrow M^{(\Lambda)} \rightarrow X \rightarrow 0 \quad (2)$$

Akibatnya $M^{(\Lambda)} = \text{Ker } \pi \oplus X$, sehingga X adalah penjumlahan langsung dari modul miskin $M^{(\Lambda)}$ yang berarti X modul miskin. Lebih lanjut bayangan epimorfisma dari suatu modul semisederhana adalah modul semisederhana, dengan demikian X adalah modul miskin semisederhana yang berarti setiap submodul K dari modul X adalah penjumlahan langsung. Dengan demikian K modul miskin dan K sebarang elemen di $\sigma[M]$. ■

Modul miskin yang semisederhana tidak harus dibentuk dari ring semisederhana. Sebagai contohnya $M = \bigoplus_{p \in \text{prima}} \mathbb{Z}_p$ adalah modul miskin atas ring \mathbb{Z} dengan \mathbb{Z} bukan merupakan ring semisederhana. Selanjutnya jika M semisederhana maka seluruh modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul semisederhana. Hal ini dituliskan dalam Lemma berikut.

Lemma 3.3. *Diberikan M modul kiri atas R . Jika modul M semisederhana maka setiap modul dalam $\sigma[M]$ adalah semisederhana.*

Bukti. Diketahui M modul semisederhana, maka $M^{(\Lambda)}$ untuk sebarang indek Λ adalah modul semisederhana. Selanjutnya bayangan epimorfisma dari $M^{(\Lambda)}$ adalah semisederhana. Dengan demikian setiap modul yang dibangun oleh M adalah modul semisederhana. Sehingga sebarang submodul dari modul yang dibangun oleh M adalah modul semisederhana. Dengan demikian setiap modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul semisederhana. ■

Berikut ini adalah teorema mengenai kondisi yang menyebabkan seluruh modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul miskin, dengan kondisi yang lebih umum dari Teorema 3.2.

Teorema 3.4. *Jika M modul miskin semisederhana, maka setiap modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul miskin.*

Bukti. Diketahui M modul miskin semisederhana, dengan memanfaatkan Lemma 3.3 maka setiap modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul semisederhana. Selanjutnya karena sebarang modul semisederhana menjadi domain injektivitas maka sebarang modul dalam $\sigma[M]$ menjadi domain injektivitas dari modul-modul dalam $\sigma[M]$. Dengan demikian setiap modul dalam $\sigma[M]$ mempunyai domain injektivitas seluruh modul semisederhana dalam $\sigma[M]$. Jadi setiap modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul miskin. ■

Dalam [7] dijelaskan modul $U \in \sigma[M]$ disebut sebagai modul injektif di $\sigma[M]$ jika U injektif relatif terhadap semua modul dalam $\sigma[M]$. Dengan kata lain $U \in \sigma[M]$ adalah modul injektif dalam $\sigma[M]$, jika U modul N –injektif untuk setiap $N \in \sigma[M]$. Wisbauer dalam [7] juga menjamin bahwa kondisi tersebut ekuivalen dengan mengatakan bahwa U adalah modul M –injektif. Hal ini memotivasi untuk mendefinisikan modul miskin di $\sigma[M]$. Berikut definisi dari modul miskin dalam $\sigma[M]$.

Definisi 3.5. *Diberikan sebarang ring R . Modul $U \in \sigma[M]$ disebut modul miskin dalam $\sigma[M]$ jika U adalah modul N –injektif untuk setiap $N \in \sigma[M]$ dan N modul semisederhana dalam $\sigma[M]$.*

Untuk mempermudah penulisan domain injektifitas dari suatu modul $U \in \sigma[M]$ dinotasikan dengan $\mathfrak{I}n_M^{-1}(U)$, kemudian himpunan semua kelas-kelas modul semisederhana dalam $\sigma[M]$ dinotasikan dengan $R - SMod_M$. Dengan menggunakan notasi tersebut maka $U \in \sigma[M]$ disebut sebagai modul miskin dalam $\sigma[M]$ jika $\mathfrak{I}n_M^{-1}(U) = R - SMod_M$. Dalam hal R adalah ring semisederhana maka setiap modul yang terbentuk adalah modul semisederhana, sehingga jika R ring

semisederhana maka tidak ada yang perlu dibahas mengenai modul miskin dalam $\sigma[M]$. Berdasarkan Lemma 3.3, jika M modul semisederhana maka seluruh modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul semisederhana. Hal ini melatar belakangi munculnya teorema berikut.

Teorema 3.6. *Diberikan sebarang ring R dan sebarang M modul semisederhana. Modul $U \in \sigma[M]$ adalah modul miskin dalam $\sigma[M]$ jika dan hanya jika $U \in \sigma[M]$ adalah modul M –injektif.*

Bukti. Diketahui $U \in \sigma[M]$ adalah modul miskin dalam $\sigma[M]$, maka U adalah modul N –injektif untuk setiap $N \in \sigma[M]$ dengan N modul semisederhana. Karena $M \in \sigma[M]$ dan M modul semisederhana maka $M \in \mathfrak{S}n_M^{-1}(U)$. Jadi U modul M –injektif dalam $\sigma[M]$.

Sebaliknya diketahui bahwa U adalah modul M –injektif dengan M adalah modul semisederhana. Akan ditunjukkan bahwa U adalah modul N –injektif untuk setiap N dalam $\sigma[M]$. Karena setiap modul semisederhana selalu menjadi domain injektivitas, maka setiap $N \in \sigma[M]$, berakibat $N \in \mathfrak{S}n_M^{-1}(U)$, sehingga $R - SSMoD_M \subseteq \mathfrak{S}n_M^{-1}(U)$. Tinggal ditunjukkan bahwa $\mathfrak{S}n_M^{-1}(U) \subseteq R - SSMoD_M$. Diambil sebarang $N \in \mathfrak{S}n_M^{-1}(U)$, berdasarkan Lemma 3.3 setiap modul dalam $\sigma[M]$ adalah modul semisederhana maka $N \in R - SSMoD_M$. Dengan demikian $\mathfrak{S}n_M^{-1}(U) = R - SSMoD_M$ atau U modul N –injektif untuk setiap modul semisederhana $N \in \sigma[M]$. Jadi U modul miskin dalam $\sigma[M]$. ■

Berdasarkan Teorema tersebut modul $U \in \sigma[M]$ disebut sebagai modul miskin dalam $\sigma[M]$ jika U modul M –injektif dengan M semisederhana. Untuk selanjutnya jika U modul miskin dalam $\sigma[M]$, maka U disebut modul M –miskin. Berikut ini salah satu contoh dari modul M –miskin.

Contoh 3.7. Misalkan $R = \mathbb{Z}_4$ dan $M = R$ jelas bahwa R menjadi modul atas dirinya sendiri. Dengan demikian submodul-submodul dari M hanyalah $\{0\}, 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$, dan M . Selanjutnya $\sigma[M] = \{0 \oplus (\bigoplus_{J \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2) \oplus (\bigoplus_{\Lambda - J} \mathbb{Z}_4)\}$. Sementara modul-modul semisederhana dalam $\sigma[M]$ adalah $\{\bigoplus_{J \subseteq \Lambda} \mathbb{Z}_2\}$. Dipilih $U = \mathbb{Z}_2$, maka U injektif terhadap dirinya sendiri sehingga U injektif terhadap jumlahan langsung dari \mathbb{Z}_2 . Modul U tidak injektif terhadap \mathbb{Z}_4 , dengan demikian modul U tidak injektif terhadap suatu jumlahan langsung yang memuat unsur \mathbb{Z}_4 . Dengan demikian seluruh domain injektivitas dari U adalah jumlahan langsung dari \mathbb{Z}_2 yaitu seluruh modul semisederhana dalam $\sigma[M]$. Jadi U adalah modul M –miskin.

Menurut Teorema 2.5 jika P sebarang modul miskin maka untuk sebarang R –modul N , $P \oplus N$ adalah modul miskin. Selanjutnya akan diselidiki, jika P modul miskin dalam $\sigma[M]$ dan N sebarang modul dalam $\sigma[M]$, apakah $P \oplus N$ adalah modul miskin dalam $\sigma[M]$. Berikut teorema yang menjelaskan hal tersebut.

Teorema 3.8. *Diberikan P modul kiri atas R . Jika $P \in \sigma[M]$ adalah modul miskin di $\sigma[M]$, dan N adalah sebarang modul dalam $\sigma[M]$, maka $P \oplus N$ adalah modul miskin dalam $\sigma[M]$.*

Bukti. Diberikan P modul miskin dalam $\sigma[M]$. Diambil sebarang $N \in \sigma[M]$. Akan dibuktikan $P \oplus N$ adalah modul miskin dalam $\sigma[M]$. Dengan demikian ditunjukkan bahwa domain injektivitas dari modul $P \oplus N$ hanyalah modul semisederhana dalam $\sigma[M]$. Dalam [7] disebutkan bahwa $\sigma[M]$ tertutup terhadap sifat jumlahan langsung, maka $P \oplus N \in \sigma[M]$. Andaikan $P \oplus N$ adalah modul T -injektif dengan T modul non semisederhana dalam $\sigma[M]$. Dengan demikian M adalah T -injektif dalam $\sigma[M]$. Karena M modul miskin dalam $\sigma[M]$, maka T semisederhana. Kontradiksi dengan pemilihan T , dengan demikian T modul semisederhana. Jadi $P \oplus N$ hanya mempunyai domain injektivitas dalam $\sigma[M]$ berupa semua modul semisederhana saja, dengan kata lain $P \oplus N$ miskin dalam $\sigma[M]$. ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan penjelasan di atas dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut.

1. Sebarang ring R mempunyai modul miskin. Modul miskin dalam sebarang ring tersebut adalah jumlahan langsung dari submodul esensial dari semua kelas-kelas modul non semisederhana dan siklik dari ring R . Lebih lanjut jumlahan semua modul siklik dari R juga membentuk modul miskin. Salah satu hasil lain yang penting adalah sebarang jumlahan langsung dari sebarang R -modul dengan modul miskin menjadi modul miskin.
2. Ring semisederhana mempunyai pengaruh yang besar pada modul miskin. Diantaranya adalah semua modul miskin yang terbentuk atas ring semisederhana adalah modul semisederhana, submodul dan modul faktor dari modul miskin atas ring semisederhana juga merupakan modul miskin. Lebih lanjut ring semisederhana menyebabkan modul miskin sama saja dengan modul injektif. Akibatnya sifat-sifat yang berkaitan dengan modul injektif berlaku pula dalam modul miskin.
3. Semua modul dalam $\sigma[M]$ dapat menjadi modul miskin jika M modul miskin dan R semisederhana. Syarat tersebut dapat diperlemah dengan mengganti modul miskin M dengan modul semisederhana atas sebarang ring R . Lebih lanjut kondisi modul injektif dalam $\sigma[M]$ sama dengan kondisi dari modul miskin dalam $\sigma[M]$ jika M adalah modul semisederhana.

Daftar Pustaka

- [1] Alahmadi, A. N., Alkan, M., Lopez-Permouth, S., 2010, Poor Modules: *The Opposite of Injectivity*, Glasgow Math Journal, pp. 7-17.
- [2] Dung, N.V., Huynh, D.V., Smith, P.F., dan Wisbauer.R., 1994, *Extending Modules*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [3] Holston, C., Lopez-Permouth, S. Orhan, E.N., 2012, *Rings Whose Modules have Minimal or Maximal Projectivity Domain*, Journal of Pure and Applied Algebra, pp. 673-678.
- [4] Lam, T. Y., 1999, *Lectures on Modules and Rings*, Springer, New York.

[5] Noyan, E., Lopez-Permouth, S. Sokmez, N., 2011, *Ring Whose Modules have Maximal or Minimal Injectivity Domains*, Journal of Algebra, pp. 404-417.

[6] Osofsky, B.L, and Smith, P.F, 1991, *Cyclic Modules Whose Quotient have All Complement Submodules Direct Summands*, Journal of Algebra 139, 342-354

[7] Wisbauer, R., 1991, *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Publishers.

Beberapa Sifat Ideal Lie di Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi

Iwan Ernanto¹, Budi Surodjo²

^{1,2}Departemen Matematika FMIPA UGM

¹iwan.ernanto@ugm.ac.id, ²surodjo_b@ugm.ac.id

Abstrak

Diberikan ring $R(+, \cdot)$ dan monoid terurut tegas (S, \leq) . Dengan menggunakan operasi $[-, -]$ yang didefinisikan dengan $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ untuk setiap $x, y \in R$, akan diperoleh struktur baru yaitu $(R, +, [-, -])$ yang merupakan ring Lie. Subhimpunan U di R disebut ideal Lie jika U merupakan subgrup terhadap operasi jumlahan dan untuk setiap $u \in U$ dan untuk $r \in R$ berlaku $[u, r] \in U$. Selanjutnya, dengan memperhatikan ring deret pangkat tergeneralisasi $[[R^{S, \leq}]]$, akan diselidiki beberapa sifat ideal Lie pada $[[R^{S, \leq}]]$ dengan menganalogikan sifat-sifat ideal Lie pada R .

Kata Kunci: *ideal, ideal Lie, ring deret pangkat tergeneralisasi.*

1. Pendahuluan

Ring merupakan struktur aljabar yang memiliki subhimpunan-subhimpunan tertentu, diantaranya adalah subring, ideal, dan juga center. Pada literatur Herstein [1], dikemukakan bahwa pada ring R dengan menggunakan operasi Lie yang didefinisikan dengan $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ untuk setiap $x, y \in R$ diperoleh struktur baru yang merupakan ring Lie. Himpunan $U \subseteq R$ disebut ideal Lie di R jika U merupakan subgrup terhadap operasi jumlahan dan $[u, r] \in U$ untuk setiap $u \in U, r \in R$.

Di lain pihak, Ribenboim [4] mendefinisikan mengenai ring deret pangkat tergeneralisasi (RDPT), dan Muanah [3] membahas mengenai ideal pada RDPT. Dengan meninjau kedua hal tersebut, pada penelitian ini, penulis akan menyelidiki sifat-sifat ideal Lie di RDPT untuk R yang tidak komutatif dengan menganalogikan sifat-sifat ideal di RDPT yang dikemukakan oleh Muanah [3].

2. Ring Lie

Diketahui $R(+, \cdot)$ ring. Dengan menggunakan operasi $[-, -]$ yang didefinisikan dengan $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ untuk setiap $x, y \in R$, akan diperoleh struktur baru yaitu $(R, +, [-, -])$ yang merupakan Ring Lie.

Seperti pada teori ring, pada ring Lie juga didefinisikan suatu ideal, yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 1. Himpunan $U \subseteq R$ disebut ideal Lie jika U merupakan subgrup terhadap operasi jumlahan dan $[u, r] \in U$ untuk setiap $u \in U, r \in R$.

Berikut ini diberikan beberapa sifat berkaitan dengan ideal Lie.

Teorema 1. Jika U, V merupakan ideal Lie di R maka $U \cap V, UV = \{\sum_{i=1}^n u_i v_i\}$ dan $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$ merupakan ideal Lie di R .

Selanjutnya, pada teori ring telah diketahui bahwa jika I merupakan ideal di R maka dapat dibentuk ring faktor R/I . Pada bagian ini dijelaskan pembentukan ring Lie faktor.

Diketahui U merupakan ideal Lie di R . Berdasarkan definisi ideal Lie, telah diketahui bahwa U merupakan subgrup dalam grup kommutatif $(R, +)$, sehingga U merupakan subgrup normal. Dari teori grup, terbentuklah grup faktor $(R/U, +)$ yang merupakan grup kommutatif dengan

$$R/U = \{\bar{r} \mid r \in R\} = \{r + U \mid r \in R\}.$$

Selanjutnya, muncul pertanyaan apakah dapat di bentuk operasi Lie

$$[-, -] : R/U \times R/U \rightarrow R/U$$

sehingga $(R/U, +, [-, -])$ merupakan Ring Lie.

Diambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/U$ maka diperoleh $a, b \in R$. Dengan demikian, $[a, b] \in R$, dan dari fakta ini didefinisikan $[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{[a, b]}$ untuk setiap $a, b \in R$.

Mengingat operasi $[-, -]$ merupakan operasi antar koset, maka sebelum menunjukkan aksioma-aksioma ring Lie dipenuhi atau tidak, terlebih dahulu harus dicek apakah operasi tersebut *well-defined* atau tidak. Misalkan $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in R/U$ dengan $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ dan $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Akan dicek apakah

$$[\bar{a}_1, \bar{b}_1] = [\bar{a}_2, \bar{b}_2]$$

yang artinya $\overline{[a_1, b_1]} = \overline{[a_2, b_2]}$.

Diperhatikan bahwa $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 \Leftrightarrow a_1 + U = a_2 + U \Leftrightarrow a_1 - a_2 = u_1 \in U$ dan $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 \Leftrightarrow b_1 + U = b_2 + U \Leftrightarrow b_1 - b_2 = u_2 \in U$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] &= [a_2 + u_1, b_2 + u_2] \\ &= [a_2, b_2 + u_2] + [u_1, b_2 + u_2] \\ &= [a_2, b_2] + [a_2, u_2] + [u_1, b_2] + [u_1, u_2] \\ &= [a_2, b_2] + u \end{aligned}$$

karena U ideal Lie. Dengan demikian diperoleh $[a_1, b_1] - [a_2, b_2] = u \in U \Leftrightarrow \overline{[a_1, b_1]} = \overline{[a_2, b_2]}$, atau dengan kata lain operasi tersebut *well-defined*. Dengan menggunakan aksioma-aksioma ring Lie R dapat dibuktikan bahwa R/U merupakan ring Lie terhadap operasi penjumlahan dan braket Lie koset-koset sebagaimana dinyatakan dalam sifat berikut ini.

Teorema 2. Jika U merupakan ideal Lie dalam ring R maka R/U merupakan ring Lie terhadap operasi

- i) Penjumlahan $+$ yang didefinisikan sbb. : $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$
- ii) Braket Lie $[-, -]$ yang didefinisikan sbb. : $[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{[a, b]}$

untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in R/U$.

Selanjutnya, diberikan definisi mengenai homomorfisma ring Lie.

Definisi 2. Diketahui R, T merupakan ring. Pemetaan $\varphi : R \rightarrow T$ disebut homomorfisma ring Lie jika

- i) $\varphi(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- ii) $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$

untuk setiap $x, y \in R$.

Homomorfisma φ dikatakan epimorfisma (monomorfisma) jika φ surjektif (injektif). Homomorfisma φ dikatakan isomorfisma jika φ epimorfisma dan monomorfisma. Berikut ini diberikan teorema mengenai homomorfisma ring Lie.

Teorema 3. Diketahui R, T merupakan ring. Jika pemetaan $\varphi : R \rightarrow T$ merupakan homomorfisma ring Lie, maka $\ker(\varphi)$ merupakan ideal Lie di R .

Bukti. Diketahui $\varphi : R \rightarrow T$ merupakan homomorfisma ring Lie. Untuk sebarang $a, b \in \ker(\varphi)$ dan $r \in R$ berlaku

$$\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0 - 0 = 0$$

dan

$$\varphi([a, r]) = [\varphi(a), \varphi(r)] = [0, \varphi(r)] = 0.$$

Diperoleh $a - b, [a, r] \in \ker(\varphi)$. Jadi terbukti $\ker(\varphi)$ merupakan ideal Lie di R .

Teorema 4. Jika pemetaan $\varphi : R \rightarrow T$ merupakan homomorfisma ring Lie, maka $R/\ker(\varphi) \cong \text{im}(\varphi)$.

Bukti. Dibentuk pengaitan $\phi : R/\ker(\varphi) \rightarrow \text{im}(\varphi)$, $(r + \ker(\varphi)) \mapsto \varphi(r)$. Yang pertama dibuktikan terlebih dahulu bahwa ϕ merupakan pemetaan. Diambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/\ker(\varphi)$ dengan $\bar{a} = \bar{b}$. Karena $\bar{a} = \bar{b}$ maka $a - b \in \ker(\varphi)$. Dengan demikian, berlaku $\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0$. Dengan kata lain $\varphi(a) = \varphi(b)$. Dengan demikian diperoleh $\phi(\bar{a}) = \varphi(a) = \varphi(b) = \phi(\bar{b})$. Terbukti ϕ merupakan pemetaan.

Selanjutnya dibuktikan ϕ merupakan homomorfisma ring Lie. Untuk sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/\ker(\varphi)$ berlaku

$$\phi(\bar{a} + \bar{b}) = \phi(\overline{a + b}) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \phi(\bar{a}) + \phi(\bar{b})$$

dan

$$\phi([\bar{a}, \bar{b}]) = \phi(\overline{[a, b]}) = \varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] = [\phi(\bar{a}), \phi(\bar{b})].$$

Jadi terbukti ϕ merupakan homomorfisma ring Lie.

Selanjutnya, dibuktikan ϕ merupakan epimorfisma. Dibuktikan ϕ injektif dan surjektif. Diambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/\ker(\varphi)$ dengan $\phi(\bar{a}) = \phi(\bar{b})$. Dengan demikian, diperoleh $\varphi(a) = \varphi(b)$, atau dengan kata lain

$$\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0.$$

Karena $a - b \in \ker(\varphi)$, diperoleh $\bar{a} = \bar{b}$. Jadi ϕ injektif. Untuk sebarang $t \in \text{im}(\varphi)$, terdapat $x \in R$ sehingga $t = \varphi(x)$. Dengan demikian, terdapat $\bar{x} \in R/\ker(\varphi)$ sehingga $t = \varphi(x) = \phi(\bar{x})$. Jadi ϕ surjektif. Karena ϕ injektif dan surjektif, terbukti bahwa ϕ merupakan isomorfisma, dengan kata lain terbukti bahwa

$$R/\ker(\varphi) \cong \text{im}(\varphi).$$

Teorema 5. Jika U dan V merupakan ideal Lie di R , maka $(U + V)/V \cong U/(U \cap V)$.

Bukti. Sebelumnya, dibuktikan bahwa V merupakan ideal Lie di $(U + V)$. Diambil sebarang $v_1, v_2 \in V$ dan $x \in U + V$. Berlaku $v_1 - v_2 \in V$ dan $[v_1, x] \in V$ karena V merupakan ideal Lie di R . Dengan alasan yang sama, dapat dibuktikan $(U \cap V)$ merupakan ideal Lie di U . Jadi, dapat dibentuk ring Lie faktor $(U + V)/V$ dan $U/(U \cap V)$.

Selanjutnya, dibentuk pengaitan $\varphi : U \rightarrow (U + V)/V$, $u \mapsto u + V$. Dibuktikan bahwa φ merupakan homomorfisma ring Lie. Terlebih dahulu dibuktikan bahwa φ merupakan pemetaan. Diambil sebarang $u_1, u_2 \in U$ dengan $u_1 = u_2$, diperoleh $\varphi(u_1) = u_1 + V = u_2 + V = \varphi(u_2)$. Terbukti φ merupakan pemetaan.

Selanjutnya, dibuktikan bahwa φ merupakan homomorfisma ring Lie. Untuk sebarang $u_1, u_2 \in U$ berlaku

$$\varphi(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) + V = (u_1 + V) + (u_2 + V) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

dan

$$\varphi([u_1, u_2]) = [u_1, u_2] + V = [u_1 + V, u_2 + V] = [\varphi(u_1), \varphi(u_2)].$$

Jadi terbukti bahwa φ merupakan homomorfisma ring Lie.

Selanjutnya, dibuktikan bahwa $\ker(\varphi) = (U \cap V)$. Diperhatikan untuk sebarang $x \in (U \cap V)$ berlaku $\varphi(x) = x + V$. Karena $x \in (U \cap V) \subseteq V$ maka $\varphi(x) = x + V = 0$. Dengan demikian $x \in \ker(\varphi)$. Karena berlaku untuk sebarang $x \in (U \cap V)$ diperoleh $(U \cap V) \subseteq \ker(\varphi)$. Dilain pihak, untuk sebarang $y \in \ker(\varphi)$ berlaku $\varphi(y) = 0 = 0 + V$, atau dengan kata lain $y \in V$. Karena $y \in V$ dan $\ker(\varphi) \subseteq U$ diperoleh $y \in (U \cap V)$. Karena berlaku untuk sebarang $y \in \ker(\varphi)$ diperoleh $\ker(\varphi) \subseteq (U \cap V)$. Jadi terbukti bahwa $\ker(\varphi) = (U \cap V)$.

Selanjutnya, karena $\varphi : U \rightarrow (U + V)/V$ homomorfisma ring Lie dan $\ker(\varphi) = (U \cap V)$ maka berdasarkan Teorema 4, terbukti bahwa

$$U/(U \cap V) \cong (U + V)/V$$

3. Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi

Diketahui R ring dan (S, \leq) monoid terurut tegas. Selanjutnya dibentuk himpunan $A = \{f \mid f: S \rightarrow R, \text{supp}(f) \text{ Artin dan narrow}\}$ dengan $\text{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$. Menurut Ribenboim [1], A merupakan ring terhadap operasi

i) Penjumlahan $+$ yang didefinisikan sbb. : $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$

ii) Perkalian \cdot yang didefinisikan sbb. : $(f \cdot g)(s) = \sum_{a+b=s} f(a)g(b)$

untuk setiap $f, g \in A$ dan $s \in S$.

Selanjutnya, ring A disebut ring deret pangkat tergeneralisasi (RDPT) dan dinotasikan dengan $[[R^{S, \leq}]]$.

3.1. Ideal di Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi

Diketahui R ring, (S, \leq) monoid terurut tegas dan RDPT $A = [[R^{S, \leq}]]$. Pada bagian ini, diberikan beberapa sifat berkaitan dengan ideal di RDPT.

Teorema 6. Jika I ideal di R maka

$$[[I^{S, \leq}]] = \{f \in [[R^{S, \leq}]] \mid f(s) \in I, \forall s \in S\}$$

merupakan ideal di $[[R^{S, \leq}]]$.

Bukti. Diambil sebarang $f, g \in [[I^{S, \leq}]]$. Berarti $f, g \in [[R^{S, \leq}]]$ dan memenuhi $f(s), g(s) \in I, \forall s \in S$. Untuk sebarang $s \in S$ berlaku $(f - g)(s) = f(s) - g(s) \in I$ dengan demikian diperoleh $(f - g) \in [[I^{S, \leq}]]$.

Selanjutnya, untuk sebarang $f \in [[I^{S, \leq}]]$ dan $h \in [[R^{S, \leq}]]$. Untuk sebarang $s \in S$ berlaku

$$(f \cdot h)(s) = \sum_{a+b=s} f(a)h(b)$$

dan

$$(h \cdot f)(s) = \sum_{a+b=s} h(b)f(a)$$

Karena $f(a) \in I$ dan $h(b) \in R$ maka $f(a)h(b), h(b)f(a) \in I$. Dengan demikian

$$(f \cdot h)(s) = \sum_{a+b=s} f(a)h(b) \in I$$

dan

$$(h \cdot f)(s) = \sum_{a+b=s} h(b)f(a) \in I$$

Jadi, $f \cdot h$ dan $h \cdot f \in [[I^{S,\leq}]]$. Dari penjabaran di atas, terbukti $[[I^{S,\leq}]]$ merupakan ideal di $[[R^{S,\leq}]]$.

Teorema 7. [3, Teorema 3.1.1.] Jika $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ ideal di R maka

$$\bigcap_{i=1}^n [[I_i^{S,\leq}]] = [[(\bigcap_{i=1}^n I_i)^{S,\leq}]]$$

merupakan ideal di $[[R^{S,\leq}]]$.

Teorema 8. [3, Teorema 3.1.3.] Jika I ideal di R , maka

$$[[R^{S,\leq}]] / [[I^{S,\leq}]] \cong [(R/I)^{S,\leq}].$$

Teorema 9. [3, Teorema 3.1.6.] Diketahui I, J ideal di R . $[[I^{S,\leq}]] \subseteq [[J^{S,\leq}]]$ jika dan hanya jika $I \subseteq J$.

3.2. Ideal Lie di Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi

Dengan menggunakan analogi pada ideal Lie di ring R berikut diberikan definisi ideal Lie di RDPT.

Definisi 3. Diberikan RDPT $A = [[R^{S,\leq}]]$. Himpunan $L \subseteq [[R^{S,\leq}]]$. disebut ideal Lie di $[[R^{S,\leq}]]$ jika L merupakan subgrup terhadap operasi jumlahan dan untuk setiap $l \in L$ dan $f \in [[R^{S,\leq}]]$ berlaku $[l, f] \in L$, $[l, f](s) = (lf - fl)(s) = (lf)(s) - fl(s)$ untuk setiap $s \in S$.

Selanjutnya diberikan sifat-sifat ideal Lie di RDPT dengan menganalogikan sifat-sifat ideal di RDPT.

Teorema 11. Jika U merupakan ideal Lie di R maka

$$[[U^{S,\leq}]] = \{f \in [[R^{S,\leq}]] \mid f(s) \in U, \forall s \in S\}$$

merupakan ideal Lie di $[[R^{S,\leq}]]$.

Bukti. Yang pertama dibuktikan terlebih dahulu bahwa $[[U^{S,\leq}]]$ merupakan subgrup terhadap operasi jumlahan. Untuk sebarang $f, g \in [[U^{S,\leq}]]$ berlaku

$$(f - g)(s) = f(s) - g(s) \in U$$

untuk setiap $s \in S$. Dengan demikian, diperoleh $f - g \in [[U^{S,\leq}]]$. Dengan kata lain, $[[U^{S,\leq}]]$ merupakan subgrup terhadap operasi penjumlahan.

Selanjutnya, untuk sebarang $f \in [[U^{S,\leq}]]$ dan $h \in [[R^{S,\leq}]]$ dan $s \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} [f, h](s) &= (fh - hf)(s) \\ &= fh(s) - hf(s) \\ &= \sum_{a+b=s} f(a)h(b) - \sum_{a+b=s} h(b)f(a) \\ &= \sum_{a+b=s} (f(a)h(b) - h(b)f(a)) \\ &= \sum_{a+b=s} [f(a), g(b)] \in U \end{aligned}$$

karena untuk setiap a berlaku $f(a) \in U$, diperoleh $[f, h] \in [[U^{S,\leq}]]$. Dari penjabaran di atas, diperoleh bahwa $[[U^{S,\leq}]]$ merupakan ideal Lie di $[[R^{S,\leq}]]$.

Teorema 12. Jika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ merupakan ideal Lie di R maka

$$\bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}] = [(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}]$$

Bukti. Dibuktikan $\bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}] \subseteq [(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}]$. Diambil sebarang $f \in \bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}]$, artinya $f \in [U_i^{S, \leq}]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan kata lain, $f \in [R^{S, \leq}]$ dan untuk setiap $s \in S$ berlaku $f(s) \in U_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Dari sini, diperoleh bahwa untuk setiap $s \in S$ berlaku $f(s) \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, dengan kata lain $f \in [(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}]$. Karena berlaku untuk sebarang $f \in \bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}]$ maka terbukti $\bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}] \subseteq [(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}]$.

Selanjutnya dibuktikan $[(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}] \subseteq \bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}]$. Diambil sebarang $f \in [(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}]$, artinya $f \in [R^{S, \leq}]$ dan untuk setiap $s \in S$ berlaku $f(s) \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Diperoleh, $f \in [R^{S, \leq}]$ dan untuk setiap $s \in S$ berlaku $f(s) \in U_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan kata lain, $f \in [U_i^{S, \leq}]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Diperoleh $f \in \bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}]$. Karena berlaku untuk sebarang $f \in [(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}]$ maka terbukti $[(\bigcap_{i=1}^n U_i)^{S, \leq}] \subseteq \bigcap_{i=1}^n [U_i^{S, \leq}]$.

Teorema 13. Jika U ideal Lie di R , maka $[R^{S, \leq}]/[U^{S, \leq}] \cong [(R/U)^{S, \leq}]$.

Bukti. Karena U ideal Lie di R maka dapat dibentuk homomorfisma natural dari R ke R/U . Selanjutnya untuk setiap $f \in [R^{S, \leq}]$ terbentuk pemetaan $\pi \circ f: S \rightarrow R/U$. Karena $\text{supp}(\pi \circ f) \subseteq \text{supp}(f)$, maka $\text{supp}(\pi \circ f)$ Artin dan *narrow*, dengan demikian $\pi \circ f \in [(R/U)^{S, \leq}]$. Dibentuk pengaitan

$$\delta: [R^{S, \leq}] \rightarrow [(R/U)^{S, \leq}]: f \rightarrow \pi \circ f$$

1. Dibuktikan δ merupakan pemetaan

Diambil sebarang $f, g \in [R^{S, \leq}]$ dengan $f = g$. Untuk sebarang $s \in S$, berlaku $f(s) = g(s) \Rightarrow \pi(f(s)) = \pi(g(s)) \Leftrightarrow (\pi \circ f)(s) = (\pi \circ g)(s)$. Karena berlaku untuk sebarang $s \in S$, diperoleh $\pi \circ f = \pi \circ g$. Dengan kata lain $\delta(f) = \delta(g)$. Terbukti bahwa δ merupakan pemetaan.

2. Dibuktikan untuk setiap $f, g \in [R^{S, \leq}]$ berlaku $\delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g)$

Diambil sebarang $f, g \in [R^{S, \leq}]$. Untuk sebarang $s \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} (\pi \circ (f + g))(s) &= \pi((f + g)(s)) \\ &= \pi(f(s) + g(s)) \\ &= \pi(f(s)) + \pi(g(s)) \\ &= (\pi \circ f)(s) + (\pi \circ g)(s) \\ &= (\pi \circ f + \pi \circ g)(s) \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $s \in S$, diperoleh $\pi \circ (f + g) = \pi \circ f + \pi \circ g$. Dengan kata lain $\delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g)$.

3. Dibuktikan untuk setiap $f, g \in [R^{S, \leq}]$ berlaku $\delta([f, g]) = [\delta(f), \delta(g)]$

Diambil sebarang $f, g \in [R^{S, \leq}]$. Untuk sebarang $s \in S$, berlaku

$$\begin{aligned} (\pi \circ ([f, g]))(s) &= \pi([f, g](s)) \\ &= \pi(fg(s) - gf(s)) \\ &= \pi\left(\sum_{a+b=s} [f(a), g(b)]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{a+b=s} \pi([f(a), g(b)]) \\
 &= \sum_{a+b=s} [\pi(f(a)), \pi(g(b))] \\
 &= \sum_{a+b=s} [(\pi \circ f)(a), (\pi \circ g)(b)] \\
 &= ([\pi \circ f, \pi \circ g])(s)
 \end{aligned}$$

Karena Berlaku untuk sebarang $s \in S$, diperoleh $\pi \circ ([f, g]) = [\pi \circ f, \pi \circ g]$.

Dengan kata lain terbukti $\delta([f, g]) = [\delta(f), \delta(g)]$.

Dari (1),(2) dan (3) diperoleh bahwa δ merupakan homorfisma ring Lie. Selanjutnya dibuktikan $Im(\delta) = [[(R/U)^{S,\leq}]$. Telah diketahui bahwa $Im(\delta) \subseteq [[(R/U)^{S,\leq}]$. Tinggal dibuktikan $[[(R/U)^{S,\leq}] \subseteq Im(\delta)$. Diambil sebarang $\tau \in [[(R/U)^{S,\leq}]$. Artinya $\tau : S \rightarrow R/U$ dengan $supp(\tau)$ Artin dan *narrow*. Untuk masing-masing $s \in S$, terdapat $r \in R$ sehingga $\tau(s) = \pi(r)$. Jika $\tau(s) = 0$, maka $0 \in \pi^{-}(\tau(s))$; sedangkan jika $\tau(s) \neq 0$ maka dapat dipilih tepat satu $r_s \in \pi^{-}(\tau(s))$. Jelas $r_s \neq 0$. Didefinisikan pemetaan $f: S \rightarrow R$ dengan

$$f(s) = \begin{cases} r_s ; & s \in supp(\tau) \\ 0 ; & \text{untuk } s \text{ yang lainnya.} \end{cases}$$

Jelas bahwa $supp(f) \subseteq supp(\tau)$, jadi $supp(f)$ Artin dan *narrow*. Dengan demikian $f \in [[R^{S,\leq}]$. Untuk setiap $s \in supp(\tau)$ berlaku

$$(\delta(f))(s) = \pi(f(s)) = \pi(r_s) = \tau(s)$$

Dan untuk s yang lainnya, berlaku

$$(\delta(f))(s) = \pi(f(s)) = \pi(0) = \tau(s)$$

Karena berlaku untuk sebarang $s \in S$, diperoleh $\delta(f) = \tau$. Jadi δ surjektif.

Selanjutnya, dibuktikan $ker(\delta) = [[U^{S,\leq}]$.

1) Dibuktikan $ker(\delta) \subseteq [[U^{S,\leq}]$

Diambil sebarang $f \in ker(\delta)$. Artinya untuk setiap $s \in S$, $(\delta(f))(s) = \bar{0}$. Dengan demikian $\bar{0} = (\pi \circ f)(s) = \pi(f(s)) = \overline{f(s)}$, diperoleh $f(s) \in U$ untuk setiap S , akibatnya $f \in [[U^{S,\leq}]$. Karena berlaku untuk sebarang $f \in ker(\delta)$ maka terbukti $ker(\delta) \subseteq [[U^{S,\leq}]$.

2) Dibuktikan $[[U^{S,\leq}] \subseteq ker(\delta)$

Diambil sebarang $f \in [[U^{S,\leq}]$. Artinya untuk setiap $s \in S$, $f(s) \in U$. Dengan demikian diperoleh bahwa $\overline{f(s)} = \bar{0}$. Diperhatikan bahwa

$$(\delta(f))(s) = (\pi \circ f)(s) = \pi(f(s)) = \overline{f(s)} = \bar{0}$$

3) Karena $\delta(f) = 0$, diperoleh $f \in ker(\delta)$. Karena berlaku untuk sebarang $f \in [[U^{S,\leq}]$ maka terbukti bahwa $[[U^{S,\leq}] \subseteq ker(\delta)$.

Dari 1) dan 2) diperoleh $ker(\delta) = [[U^{S,\leq}]$.

Selanjutnya, berdasarkan teorema isomorfisma ring Lie, diperoleh bahwa

$$[[R^{S,\leq}]/ker(\delta) \cong [[(R/U)^{S,\leq}] \cong [[R^{S,\leq}]/[[U^{S,\leq}]] \cong [[(R/U)^{S,\leq}]$$

Teorema 14. Diketahui U, V ideal di R , maka $[[U^{S, \leq}]] \subseteq [[V^{S, \leq}]] \Leftrightarrow U \subseteq V$.

Bukti. Akan dibuktikan $[[U^{S, \leq}]] \subseteq [[V^{S, \leq}]] \Leftrightarrow U \subseteq V$.

1) \Rightarrow) Diketahui $[[U^{S, \leq}]] \subseteq [[V^{S, \leq}]]$. Dibuktikan $U \subseteq V$

Diambil sebarang $u \in U$. Dibentuk $f_u: S \rightarrow R$ dengan

$$f_u(s) = \begin{cases} u; & \text{untuk } s = s_u \\ 0; & \text{untuk } s \text{ lainnya} \end{cases}$$

Diperoleh bahwa $|supp(f_u)| \leq 1$, dengan demikian $supp(f_u)$ Artin dan *narrow*.

Dengan demikian $f_u \in [[R^{S, \leq}]]$. Berdasarkan pembentukan f_u , berlaku bahwa

$f_u(s) \in U$ untuk setiap $s \in S$. Jadi $f_u \in [[U^{S, \leq}]]$. Karena $[[U^{S, \leq}]] \subseteq [[V^{S, \leq}]]$

diperoleh $f_u \in [[V^{S, \leq}]]$. Dengan demikian $u = f_u(s_u) \in V$. Karena berlaku untuk sebarang $u \in U$, maka diperoleh $U \subseteq V$.

2) \Leftarrow) Diketahui $U \subseteq V$. Dibuktikan $[[U^{S, \leq}]] \subseteq [[V^{S, \leq}]]$. Diambil sebarang $f \in$

$[[U^{S, \leq}]]$. Artinya untuk sebarang $s \in S$ berlaku $f(s) \in U$. Karena $U \subseteq V$ maka

untuk sebarang $s \in S$ berlaku $f(s) \in V$. Diperoleh $f \in [[V^{S, \leq}]]$. Karena berlaku

untuk sebarang $f \in [[U^{S, \leq}]]$ maka $[[U^{S, \leq}]] \subseteq [[V^{S, \leq}]]$

Dari 1) dan 2) terbukti bahwa $[[U^{S, \leq}]] \subseteq [[V^{S, \leq}]] \Leftrightarrow U \subseteq V$.

3. Kesimpulan

Sifat-sifat ideal di RDPT berlaku juga untuk ideal Lie di RDPT.

Daftar Pustaka

- [1] Adkins, W.A. and Weintraub, S.H. 1992, *Algebra : An Approach Via Module Theory*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Herstein, I.N., 1969, *Topics in Ring Theory*, University of Chicago Press., Chicago
- [3] Muanah, Siti, Ideal dan Elemen Idempoten pada Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi, Tugas akhir Matematika UGM Yogyakarta, 2013.
- [4] Ribenboim, P., 1994, *Ring of Generalized Power Series, II: Units and Zero-Divisor*, Journal Algebra, vol 168, pp. 72-89

Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew T -Noether

Ahmad Faisol¹, Budi Surodjo², Sri Wahyuni²

¹Program Studi S3 Matematika, Universitas Gadjah Mada,
faisol_mathunila@yahoo.co.id

²Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada
b_surodjo@ugm.ac.id;

Abstrak

Misalkan R suatu ring dengan elemen satuan, M modul atas ring R , $(S, +, \leq)$ monoid terurut tegas dan $\omega: S \rightarrow \text{End}(R)$ suatu homomorfisma monoid. Himpunan semua fungsi dari S ke R dengan *support* Artin dan *narrow* terhadap operasi penjumlahan fungsi dan perkalian konvolusi merupakan suatu ring yang dikenal dengan nama Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew (RDPTS) dan dinotasikan dengan $R[[S, \omega]]$. Sedangkan himpunan semua fungsi dari S ke M dengan *support* Artin dan *narrow* terhadap operasi penjumlahan fungsi dan perkalian skalar konvolusi merupakan modul kanan atas RDPTS $R[[S, \omega]]$ yang selanjutnya disebut Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew (MDPTS) dan dinotasikan dengan $M[[S, \omega]]$.

Misalkan $T \subseteq R$ suatu himpunan multiplikatif. Modul M disebut T -berhingga jika $tM \subseteq F$ untuk suatu submodul F yang dibangun secara hingga di M dan suatu t di T . Modul M disebut modul Noether jika dan hanya jika memenuhi syarat rantai naik pada submodul-submodulnya, sedangkan disebut T -Noether jika setiap submodul dari M merupakan modul T -berhingga.

Pada makalah ini akan dibahas syarat perlu dan cukup MDPTS $M[[S, \omega]]$ sebagai modul Noether dan modul T -Noether.

Kata Kunci: *monoid terurut tegas, ring deret pangkat tergeneralisasi skew (RDPTS), modul deret pangkat tergeneralisasi skew (MDPTS), modul Noether dan modul T -Noether.*

1. Pendahuluan

Misalkan R suatu ring dengan elemen satuan, M modul atas ring R dan $T \subseteq R$ suatu himpunan multiplikatif. Telah diketahui bahwa, suatu modul M disebut modul Noether jika dan hanya jika memenuhi syarat rantai naik pada submodul-submodulnya. Anderson dan Dumitrescu [1] memperkenalkan konsep umum dari ring dan modul Noether, yang selanjutnya dikenal dengan istilah ring dan modul T -Noether. Suatu ring R dikatakan T -Noether jika setiap ideal dari R merupakan ideal T -berhingga, yaitu untuk setiap ideal I di R , terdapat $t \in T$ dan ideal J di R yang dibangun secara hingga sedemikian sehingga $tI \subseteq J \subseteq I$. Sedangkan, modul M dikatakan T -berhingga jika terdapat $t \in T$ dan R -submodul F di M yang dibangun secara hingga sedemikian sehingga $tM \subseteq F$. Suatu R -modul M dikatakan T -Noether, jika setiap submodulnya merupakan modul T -berhingga.

Lebih lanjut, Anderson dan Dumitrescu juga menunjukkan bahwa, jika $T \subseteq R$ merupakan himpunan multiplikatif *anti-Archimedean* dan R ring T -Noether, maka ring polinomial $R[X_1, \dots, X_n]$ juga merupakan ring T -Noether. Selain itu, jika $T \subseteq R$ merupakan himpunan multiplikatif *anti-Archimedean* yang tidak memuat pembagi nol

dan R ring T -Noether, maka ring deret pangkat $R[[X_1, \dots, X_n]]$ juga merupakan ring T -Noether.

Di dalam teorema basis Hilbert, telah ditunjukkan bahwa ring polinomial $R[X]$ merupakan ring Noether, jika R ring Noether. Sedangkan, Gilmer [4] mengkaji konsep ring Noether pada ring semigrup $R[S]$ yang merupakan perumuman dari ring polinomial $R[X]$. Gilmer menunjukkan bahwa, ring semigrup $R[S]$ merupakan ring Noether, jika R ring Noether dan semigrup S dibangun secara hingga. Selanjutnya, Ribenboim [7] mengkonstruksi bentuk umum dari ring polinomial dan ring semigrup, yaitu Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi (RDPT) $[[R^{S,\leq}]]$ dengan R suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan (S,\leq) suatu monoid terurut tegas. Di dalam tulisan ini, Ribenboim juga memberikan syarat perlu RDPT $[[R^{S,\leq}]]$ merupakan ring Noether. Memperkuat hasil yang diperoleh Ribenboim, Varadarajan [8] memberikan syarat perlu suatu modul atas RDPT $[[R^{S,\leq}]]$ merupakan modul Noether, modul ini disebut Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi (MDPT) dan dinotasikan dengan $[[M^{S,\leq}]]$. Di sisi lain, Brookfield [2] juga memberikan syarat perlu dan cukup RDPT $[[R^{S,\leq}]]$ merupakan ring kiriNoether, hanya saja pada struktur RDPT $[[R^{S,\leq}]]$ yang dikaji Brookfield, ring R tidak harus komutatif dan (S,\leq) monoid terurut tegas positif.

Di dalam [9], Zhongkui memperumum hasil yang diperoleh Anderson dan Dumitrescu, yaitu pada struktur RDPT $[[R^{S,\leq}]]$ yang dikaji Brookfield. Zhongkui menunjukkan RDPT $[[R^{S,\leq}]]$ merupakan ring T -Noether jika dan hanya jika R ring T -Noether dan S dibangun secara hingga, dengan T adalah himpunan multiplikatif *anti-Archimedean* yang tidak memuat pembagi nol dan (S,\leq) monoid terurut tegas positif.

Pada tahun 2007, Mazurek dan Ziemkowski [5] mengkonstruksi struktur ring yang lebih umum dari RDPT $[[R^{S,\leq}]]$ yang dikonstruksi oleh Ribenboim. Ring ini disebut Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew (RDPTS) dan dinotasikan dengan $R[[S, \omega]]$ dengan R suatu ring, (S,\leq) monoid terurut tegas dan $\omega: S \rightarrow \text{End}(R)$ suatu homomorfisma monoid. Kemudian pada tahun 2016, Padashnik, Moussavi dan Mousavi [6] mengkaji syarat perlu dan cukup RDPTS $R[[S, \omega]]$ merupakan ring Noether dan T -Noether.

Sejalan dengan konstruksi modul yang dilakukan oleh Varadarajan [8], dapat dibentuk suatu modul atas RDPTS $R[[S, \omega]]$ yang selanjutnya disebut Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew (MDPTS) dan dinotasikan dengan $M[[S, \omega]]$. Oleh karena itu, pada tulisan ini akan dikaji tentang syarat perlu dan cukup MDPTS $M[[S, \omega]]$ merupakan modul Noether dan T -Noether.

2. Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew (MDPTS)

Pada tulisan ini, struktur RDPTS $R[[S, \omega]]$ yang digunakan sama seperti yang dikonstruksi Mazurek dan Ziemkowski [5], dan konsep himpunan terurut yang Artin dan *narrow* dirujuk dari tulisan Ribenboim [3] dan [7]. Berikut diberikan struktur RDPTS $R[[S, \omega]]$.

Misalkan $(S,+)$ suatu monoid dan \leq suatu relasi urutan pada S , $(S,+,\leq)$ disebut monoid terurut jika untuk sebarang $s_1, s_2, t \in S$, $s_1 \leq s_2$ mengakibatkan $s_1 + t \leq s_2 + t$ dan $t + s_1 \leq t + s_2$. Selanjutnya, jika $s_1 < s_2$ mengakibatkan $s_1 + t < s_2 + t$ dan $t + s_1 < t + s_2$, maka $(S,+,\leq)$ disebut monoid terurut tegas.

Himpunan terurut parsial (S, \leq) disebut Artin jika setiap barisan turun tegas dari elemen-elemen S berhingga, sedangkan disebut *narrow* jika S tidak memuat suatu subhimpunan takhingga yang memuat pasangan elemen yang *incomparable*.

Misalkan R suatu ring, $(S, +, \leq)$ monoid terurut tegas, dan $\omega: S \rightarrow \text{End}(R)$ suatu homomorfisma monoid. Untuk sebarang $s \in S$, ω_s menotasikan peta dari s terhadap ω , yaitu $\omega_s = \omega(s)$.

Didefinisikan himpunan $A = \{f: S \rightarrow R \mid \text{supp}(f) \text{ Artin dan narrow}\}$ dengan $\text{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$. Untuk sebarang $s \in S$ dan $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$, himpunan $X_s(f_1, f_2, \dots, f_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{supp}(f_1) \times \dots \times \text{supp}(f_n) \mid s = x_1 + \dots + x_n\}$ berhingga. Sehingga untuk sebarang $f, g \in A$ dapat didefinisikan pergandaan $fg: S \rightarrow R$ sebagai berikut :

$$(fg)(s) = \begin{cases} \sum_{(x,y) \in X_s(f,g)} f(x)\omega_x(g(y)) & ; X_s(f,g) \neq \emptyset \\ 0 & ; X_s(f,g) = \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

Terhadap operasi penjumlahan fungsi dan pergandaan (1), A merupakan suatu ring yang disebut Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew (RDPTS) dan dinotasikan oleh $R[[S, \omega, \leq]]$ atau $R[[S, \omega]]$.

Untuk sebarang $r \in R$ dan $s \in S$ diasosiasikan fungsi-fungsi $c_r, e_s \in R[[S, \omega]]$ yang didefinisikan oleh

$$c_r(x) = \begin{cases} r & ; x = 0 \\ 0 & ; x \neq 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad e_s(x) = \begin{cases} 1 & ; x = s \\ 0 & ; x \neq s \end{cases} \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (2), dapat dilihat bahwa $r \mapsto c_r$ adalah suatu ring embedding dari R ke $R[[S, \omega]]$ dan $s \mapsto e_s$ adalah suatu monoid embedding dari S ke monoid multiplikatif dari $R[[S, \omega]]$ serta berlaku $e_s c_r = c_{\omega_s(r)} e_s$.

Setelah diberikan konstruksi RDPTS $R[[S, \omega]]$, berikut adalah konstruksi MDPTS $M[[S, \omega]]$ yang sejalan dengan konstruksi MDPT $M[[S]]$ yang dikonstruksi Varadarajan [8].

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan, M modul atas R , $(S, +, \leq)$ monoid terurut tegas dan $\omega: S \rightarrow \text{End}(R)$ suatu homomorfisma monoid. Didefinisikan himpunan $M[[S, \omega]] = \{\alpha: S \rightarrow M \mid \text{supp}(\alpha) \text{ Artin dan narrow}\}$ dengan $\text{supp}(\alpha) = \{s \in S \mid \alpha(s) \neq 0\}$. Terhadap operasi penjumlahan fungsi, himpunan $M[[S, \omega]]$ merupakan grup komutatif. Untuk setiap $f \in R[[S, \omega]]$, $\alpha \in M[[S, \omega]]$ dan $s \in S$, himpunan $X_s(\alpha, f) = \{(x, y) \in S \times S \mid s = x + y, \alpha(x) \neq 0, f(y) \neq 0\}$ berhingga. Sehingga dapat didefinisikan operasi pergandaan skalar konvolusi pada $M[[S, \omega]]$ sebagai berikut:

$$(\alpha f)(s) = \sum_{(x,y) \in X_s(\alpha,f)} \alpha(x)\omega_x(f(y)) \quad (3)$$

Terhadap operasi penjumlahan fungsi dan pergandaan skalar konvolusi (3), himpunan $M[[S, \omega]]$ merupakan modul kanan atas RDPTS $R[[S, \omega]]$, yang selanjutnya disebut Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew (MDPTS).

Untuk sebarang $m \in M$ dan $s \in S$ diasosiasikan fungsi $d_m^s \in M[[S, \omega]]$ yang didefinisikan oleh

$$d_m^s(x) = \begin{cases} m & ; x = s \\ 0 & ; x \neq s \end{cases} \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (4), dapat dilihat bahwa $m \mapsto d_m^0$ adalah suatu modul embedding dari M ke $M[[S, \omega]]$.

2.1. MDPTS Noether

Pada bagian ini, akan dibahas tentang syarat perlu MDPTS $M[[S, \omega]]$ merupakan modul Noether. Sebelumnya, diberikan sifat-sifat himpunan terurut yang Artin dan *narrow* sebagai berikut.

Lemma 2.1.1. [3] Untuk sebarang himpunan terurut (S, \leq) , berlaku sifat-sifat berikut:

- (1) Jika S Artin (Noether) dan $X \subseteq S$, maka X Artin (Noether).
- (2) Jika X_1, X_2, \dots, X_n subhimpunan-subhimpunan yang masing-masing Artin (Noether) di S , maka $\bigcup_{i=1}^n X_i$ Artin (Noether).

Lemma 2.1.2. [3] Untuk sebarang himpunan terurut (S, \leq) , berlaku sifat-sifat berikut:

- (1) Jika S *narrow* dan $X \subseteq S$, maka X *narrow*.
- (2) Jika X_1, X_2, \dots, X_n subhimpunan-subhimpunan yang masing-masing *narrow* di S , maka $\bigcup_{i=1}^n X_i$ *narrow*.

Lemma 2.1.3 [7] Jika X dan Y adalah subhimpunan-subhimpunan yang Artin dan *narrow* dari monoid terurut (S, \leq) , maka himpunan $X + Y = \{s + t \mid s \in X, t \in Y\}$ juga Artin dan *narrow*.

Lemma 2.1.4 [8]

Diberikan modul $M[[S, \omega]]$ atas RDPTS $R[[S, \omega]]$. Untuk sebarang $\alpha, \beta \in M[[S, \omega]]$ dan $f, g \in R[[S, \omega]]$ berlaku :

- (1) $\text{supp}(f + g) \subseteq \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$
- (2) $\text{supp}(-f) = \text{supp}(f)$
- (3) $\text{supp}(fg) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$
- (4) $\text{supp}(\alpha + \beta) \subseteq \text{supp}(\alpha) \cup \text{supp}(\beta)$
- (5) $\text{supp}(-\alpha) = \text{supp}(\alpha)$
- (6) $\text{supp}(\alpha\beta) \subseteq \text{supp}(\alpha) + \text{supp}(\beta)$

Proposisi 2.1.5. Jika N suatu R -submodul dari M , maka $N[[S, \omega]]$ merupakan $R[[S, \omega]]$ -submodul dari $M[[S, \omega]]$.

Bukti: Untuk sebarang $\alpha, \beta \in N[[S, \omega]]$ dan $f, g \in R[[S, \omega]]$, akan ditunjukkan $\alpha f + \beta g \in N[[S, \omega]]$. Dengan kata lain, cukup ditunjukkan $\text{supp}(\alpha f + \beta g)$ Artin dan *narrow*.

Berdasarkan Lemma 2.1.4 diperoleh $\text{supp}(\alpha f + \beta g) \subseteq \text{supp}(\alpha f) \cup \text{supp}(\beta g)$, $\text{supp}(\alpha f) \subseteq \text{supp}(\alpha) + \text{supp}(f)$ dan $\text{supp}(\beta g) \subseteq \text{supp}(\beta) + \text{supp}(g)$. Kemudian, berdasarkan Lemma 2.1.3 diperoleh $\text{supp}(\alpha) + \text{supp}(f)$ dan $\text{supp}(\beta) + \text{supp}(g)$ Artin dan *narrow*. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 2.1.1 dan 2.1.2 diperoleh $\text{supp}(\alpha f)$ dan $\text{supp}(\beta g)$ Artin dan *narrow* dan berakibat $\text{supp}(\alpha f) \cup \text{supp}(\beta g)$ juga Artin dan *narrow*. Terakhir, berdasarkan Lemma 2.1.1 dan 2.1.2 diperoleh $\text{supp}(\alpha f + \beta g)$ Artin dan *narrow*. Dengan kata lain terbukti $N[[S, \omega]]$ merupakan $R[[S, \omega]]$ -submodul dari $M[[S, \omega]]$. \square

Berdasarkan definisi $N[[S, \omega]]$ sebagai $R[[S, \omega]]$ -submodul dari $M[[S, \omega]]$, diperoleh fakta bahwa jika $N \subsetneq M$, maka $N[[S, \omega]] \subsetneq M[[S, \omega]]$. Berikut diberikan syarat perlu suatu MDPTS $M[[S, \omega]]$ merupakan modul Noether.

Teorema 2.1.6. Jika MDPTS $M[[S, \omega]]$ merupakan $R[[S, \omega]]$ -modul Noether, maka M juga merupakan R -modul Noether.

Bukti : Andaikan M bukan R -modul Noether, maka terdapat rantai naik tegas takhingga $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \dots$ dari submodul-submodul di M . Berdasarkan Akibat 2.1.6. diperoleh rantai naik tegas takhingga $M_1[[S, \omega]] \subsetneq M_2[[S, \omega]] \subsetneq M_3[[S, \omega]] \subsetneq \dots$ dari submodul-submodul $M[[S, \omega]]$. Sedangkan diketahui $M[[S, \omega]]$ merupakan $R[[S, \omega]]$ -modul Noether, jadi kontradiksi. Sehingga haruslah M merupakan R -modul Noether. \square

2.2. MDPTS T -Noether

Pada bagian ini akan dibahas konsep tentang modul T -Noether yang dikaji oleh Anderson dan Dumitrescu [1] dan pada bagian akhir akan diberikan syarat perlu suatu MDPTS $M[[S, \omega]]$ merupakan modul T -Noether.

Definisi 2.2.1. [1] Misalkan R suatu ring, M modul atas ring R dan $T \subseteq R$ suatu himpunan multiplikatif. Modul M dikatakan T -berhingga jika terdapat $t \in T$ dan R -submodul F di M yang dibangun secara hingga sedemikian sehingga $tM \subseteq F$. Suatu R -modul M dikatakan T -Noether, jika setiap submodulnya merupakan modul T -berhingga.

Contoh 2.2.2. Diberikan \mathbb{Z} -modul \mathbb{Z}_6 dan himpunan multiplikatif $T = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Karena untuk setiap submodul N di \mathbb{Z}_6 , terdapat $t \in T$ dan submodul F di N yang dibangun secara hingga sedemikian sehingga $tN \subseteq F \subseteq N$, maka \mathbb{Z} -modul \mathbb{Z}_6 merupakan modul T -Noether.

Berdasarkan persamaan (2) telah dijelaskan bahwa $r \mapsto c_r$ adalah suatu ring embedding dari R ke $R[[S, \omega]]$, dengan kata lain R isomorfik terhadap subring $\{c_r \mid r \in R\}$ di $R[[S, \omega]]$. Sehingga, jika T adalah himpunan multiplikatif di R , maka $C(T) = \{c_r \mid r \in T\}$ merupakan himpunan multiplikatif di $R[[S, \omega]]$.

Pada struktur MDPTS $M[[S, \omega]]$, yang dimaksud dengan modul T -Noether adalah $M[[S, \omega]]$ sebagai modul $C(T)$ -Noether. Berikut diberikan syarat perlu MDPTS $M[[S, \omega]]$ merupakan modul T -Noether.

Teorema 2.2. Jika MDPTS $M[[S, \omega]]$ merupakan $R[[S, \omega]]$ -modul T -Noether, maka M juga merupakan R -modul T -Noether.

Bukti : Misalkan $\Gamma = \{\alpha \in M[[S, \omega]] \mid \alpha(0) = 0\}$. Untuk sebarang $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan $f, g \in R[[S, \omega]]$,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(0) &= (\alpha f)(0) + (\beta g)(0) \\ &= \sum_{(x,y) \in X_0(\alpha,f)} \alpha(x)\omega_x(f(y)) + \sum_{(x,y) \in X_0(\beta,g)} \beta(x)\omega_x(g(y)) \\ &= \sum_{x+y=0} \alpha(x)\omega_x(f(y)) + \sum_{x+y=0} \beta(x)\omega_x(g(y)) \\ &= \alpha(0)\omega_0(f(0)) + \beta(0)\omega_0(g(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga $\alpha f + \beta g \in \Gamma$, dengan kata lain Γ merupakan submodul dari MDPTS $M[[S, \omega]]$.

Selanjutnya, didefinisikan $\varphi: M \rightarrow M[[S, \omega]]/\Gamma$ dengan

$$\varphi(m) = d_m^0 + \Gamma \quad ; \forall m \in M$$

Karena untuk sebarang $m_1, m_2 \in M$, $s \in S$ dan $r \in R$ berlaku $d_{m_1+m_2}^0 = d_{m_1}^0 + d_{m_2}^0$ dan $d_{rm_1}^0 = rd_{m_1}^0$, maka $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$ dan $\varphi(rm_1) = r\varphi(m_1)$. Dengan kata lain, φ merupakan homomorfisma modul. Untuk sebarang $\alpha + \Gamma \in M[[S, \omega]]/\Gamma$, terdapat $\alpha(0) \in M$ sedemikian sehingga $\alpha + \Gamma = d_{\alpha(0)}^0 + \Gamma = \varphi(\alpha(0))$. Sehingga φ merupakan epimorfisma. Selanjutnya, jika $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ maka $d_{m_1}^0 + \Gamma = d_{m_2}^0 + \Gamma$, yang berakibat $d_{m_1}^0 - d_{m_2}^0 \in \Gamma$. Lebih lanjut, $d_{m_1}^0 - d_{m_2}^0 = d_{m_1}^0 + d_{-m_2}^0 = d_{m_1-m_2}^0 \in \Gamma$. Sehingga diperoleh $d_{m_1-m_2}^0(0) = 0$, yang berakibat $m_1 = m_2$. Jadi φ merupakan monomorfisma. Oleh karena itu diperoleh $M \cong M[[S, \omega]]/\Gamma$. Karena $M[[S, \omega]]$ adalah modul T -Noether, maka $M[[S, \omega]]/\Gamma$ merupakan T -Noether dan berakibat M juga modul T -Noether. \square

Daftar Pustaka

- [1] Anderson, D., D., and Dumitrescu, T., 2002, S-Noetherian Rings, *Communications in Algebra*, 30, 4407 – 4416.
- [2] Brookfield, G., 2004, Noetherian Generalized Power Series Rings, *Communications in Algebra*, 32:3, 919 – 926.
- [3] Elliott, G.A, and Ribenboim, P., 1990, Fields of Generalized Power Series, *Arch. Math.*, Vol. 54, 365-371.
- [4] Gilmer, R., 1984, *Commutative Semigroup Rings*, The University of Chicago Press.
- [5] Mazurek, R., and Ziemkowski, M., 2007, Uniserial Rings of Skew Generalized Power Series, *Journal of Algebra*, 318, 737 – 764.
- [6] Padashnik, F., Moussavi, A., and Mousavi, H., 2016, S-Noetherian Generalized Power Series Rings, *arXiv:1605.09132v1 [math.RA]*, 30 May.
- [7] Ribenboim, P., 1992, Noetherian Rings of Generalized Power Series, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 79, 293 – 312.
- [8] Varadarajan, K., 2001, Generalized Power Series Modules, *Communications in Algebra*, 29(3), 1281 – 1294.
- [9] Zhongkui, L., 2007, On S-Noetherian Rings, *Archivum Mathematicum (BRNO)*, Tomus 43, 55 – 60.

Contoh Grup Perkalian Modulo n dengan Identitas Tidak Harus 1

Indriati Nurul Hidayah
Purwanto

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang

Abstrak

Sudah diketahui bahwa terdapat grup dengan operasi perkalian modulo, dan grup tersebut sudah banyak dipelajari. Pada awal mempelajari teori grup, kita belajar contoh-contoh grup. Terdapat grup perkalian modulo n dengan unsur identitas tidak harus 1, misalnya $\{4,16,28,52\}$ adalah grup perkalian modulo 60 dengan unsur identitas 16. Pada makalah ini disampaikan beberapa contoh grup tersebut dan cara mengkonstruksinya.

Kata Kunci: *grup perkalian modulo n , unsur identitas*

1. Pendahuluan

Pada awal mempelajari teori grup, kita belajar contoh-contoh grup. Terdapat grup perkalian modulo n dengan unsur identitas tidak harus 1, misalnya $\{5,15,25,35\}$ adalah grup perkalian modulo 40 dengan unsur identitas 25 [3, hal.52]. Timbul pertanyaan bagaimana cara mengkonstruksi grup seperti itu. Pada makalah ini disampaikan beberapa contoh lain grup seperti itu dengan cara mengkonstruksinya. Sebagai contoh $\{4,16,28,52\}$ adalah grup perkalian modulo 60 dengan unsur identitas 16.

Sebelum pembahasan lebih lanjut akan disampaikan dulu istilah dan definisi yang akan kita gunakan. Sebagian besar istilah dan definisi yang kita gunakan mengikuti yang ada pada Gallian [3]. Misalkan n adalah bilangan bulat positif tertentu, serta a and b adalah bilangan bulat. Kita nyatakan dengan $a \equiv b \pmod n$ jika n membagi $a - b$. Juga dapat kita nyatakan modulo n sebagai $\pmod n$. Operasi penjumlahan dan perkalian modulo n didefinisikan sebagai berikut. Bilangan $a + b \equiv c \pmod n$ jika n membagi $a + b - c$. Demikian juga, $a \times b \equiv c \pmod n$ jika n membagi $a \times b - c$. Perkalian $a \times b$ dinyatakan dengan ab .

Himpunan $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, $n \geq 1$ dinyatakan dengan \mathbb{Z}_n . Himpunan \mathbb{Z}_n adalah grup dengan operasi penjumlahan modulo n . Himpunan semua bilangan bulat positif kurang dari n yang relatif prima terhadap n , $U_n = \{a \in \mathbb{Z}_n | (a, n) = 1\}$, adalah grup terhadap operasi perkalian modulo n , dengan unsur identitas 1 [3].

Beberapa penulis sudah mempelajari grup perkalian modulo n , misalnya Brakes [1], Dennis [2], McLean [5], dan Hidayah dan Purwanto [4]. Teorema 1 berikut adalah dari Dennis [2].

Teorema 1 (Dennis). *Misalkan n dan q adalah bilangan bulat positif, $n > 1$, dan $k \equiv n^i \pmod{(1 + n + n^2 + \dots + n^{q-1})}$ untuk suatu bilangan bulat $i \geq 0$. Maka himpunan $\{k, kn, kn^2, \dots, kn^{q-1}\}$ membentuk grup dengan operasi perkalian $\pmod{(k + kn + kn^2 + \dots + kn^{q-1})}$.*

Pada Teorema 1, sebutlah $\text{mod}(k + kn + kn^2 + \dots + kn^{q-1})$, Hidayah dan Purwanto [4] menemukan kemungkinan nilai lain m pada Teorema 1 dengan $\{k, kn, kn^2, \dots, kn^{q-1}\}$ tetap membentuk grup dengan operasi perkalian modulo m , seperti pada Teorema 2 berikut ini.

Teorema 2. Misalkan n, d , dan q adalah bilangan bulat positif, $n > 1, q > 1$, d membagi $n - 1$, dan $s = \frac{n^q - 1}{d}$. Jika $k \equiv n^i \text{ mod } s$ untuk suatu $i \geq 0$, maka himpunan $\{k, kn, kn^2, \dots, kn^{q-1}\}$ membentuk grup dengan operasi kali modulo ks . Unsur identitasnya adalah e dengan $e \equiv 1 \text{ mod } s$

Hasil lain dari Hidayah dan Purwanto [4] adalah Teorema 3 dan 4 berikut ini.

Teorema 3. Misalkan n, d , dan q adalah bilangan bulat positif, $n > 1, q > 1$, dengan d membagi $n - 1$, dan $s = \frac{n^q - 1}{d}$. Jika $k \equiv n^i \text{ mod } s$ atau $k \equiv s - n^i \text{ mod } s$ untuk suatu bilangan bulat $i \geq 0$, maka himpunan $\{h \mid h = kn^j \text{ atau } h = k(s - n^j), j = 0, 1, \dots, q - 1\}$ membentuk grup dengan operasi kali modulo ks . Unsur identitasnya adalah e dengan $e \equiv 1 \text{ mod } s$

Teorema 4. Misalkan n, d , dan q adalah bilangan bulat positif, $n > 1, q > 1$, dengan d membagi $n + 1$, dan $s = \frac{n^q - (-1)^q}{d}$. Jika k adalah bilangan bulat positif dan $k \equiv (-n)^i \text{ mod } s$, untuk suatu bilangan bulat $i \geq 0$, maka himpunan $\{h \mid h = k(-n)^j, j = 0, 1, \dots, q - 1\}$ membentuk grup dengan operasi kali modulo ks . Unsur identitasnya adalah e dengan $e \equiv 1 \text{ mod } s$.

Teorema 1 - 4 akan digunakan untuk mengkonstruksi contoh-contoh grup modulo n dengan unsur satuan tidak harus 1.

2. Pembahasan

Contoh-contoh grup modulo n dengan unsur satuan tidak harus 1 yang akan kita konstruksi sesuai dengan Teorema 1, 2, 3, atau 4.

Contoh 1.

Pada Teorema 2 (atau Teorema 1) jika diambil $n = 5, q = 4$, maka akan didapat nilai $d = 1$ atau $d = 2$ atau $d = 4$ sehingga $s = 624$ atau $s = 312$ atau $s = 156$. Ketika $d = 2, s = 312$, jika $k = 1 \equiv 1 \text{ mod}(312)$ maka akan diperoleh himpunan

$$\{1, 5, 25, 125\}$$

yang merupakan grup terhadap perkalian modulo 312 dengan elemen identitas 1. Juga diperoleh jika $k = 625 \equiv 1 \text{ mod}(312)$ maka akan diperoleh himpunan

$$\{625, 3125, 15625, 78125\}$$

yang merupakan grup terhadap perkalian modulo 195000 dengan elemen identitas 625.

Contoh 2

Pada teorema 3, jika diambil $n = 5, q = 4$, maka akan didapat nilai $d = 1$ atau $d = 2$ atau $d = 3$ sehingga $s = 624$ atau $s = 312$ atau $s = 156$.

Sehingga ketika $d = 2, s = 312$, jika $k = 1 \equiv 1 \text{ mod}(312)$ maka akan diperoleh himpunan

$$\{1, 5, 25, 125, 187, 287, 307, 311\}$$

yang merupakan grup terhadap perkalian modulo 312 dengan elemen identitas 1. Juga diperoleh jika $k = 625 \equiv 1 \pmod{312}$ maka akan diperoleh himpunan

$$\{625, 3125, 15625, 78125, 116875, 179375, 191875, 194375\}$$

yang merupakan grup terhadap perkalian modulo 195000 dengan elemen identitas 625.

Contoh 3

Pada teorema 4, jika diambil $n = 5$, $q = 4$, maka akan didapat nilai $d = 1$ atau $d = 2$ atau $d = 3$ atau $d = 6$ sehingga $s = 624$ atau $s = 312$ atau $s = 208$ atau $s = 104$.

Ketika $d = 2$, $s = 312$, jika $k = 1 \equiv 1 \pmod{312}$ maka akan diperoleh himpunan

$$\{1, 25, 187, 307\}$$

yang merupakan grup terhadap perkalian modulo 312 dengan elemen identitas 1. Juga diperoleh jika $k = 625 \equiv 1 \pmod{312}$ maka akan diperoleh himpunan

$$\{625, 15625, 116875, 191875\}$$

yang merupakan grup terhadap perkalian modulo 195000 dengan elemen identitas 625.

Pada bagian ini diberikan beberapa fakta dari pengamatan berdasarkan Teorema 1 - 4. Pada Teorema 2 jika n diganti $n - 1$ diperoleh $\{1, n - 1\}$ adalah grup dengan operasi perkalian modulo an , a bilangan bulat positif yang membagi $n - 1$ sehingga diperoleh Fakta 1 berikut ini

Fakta 1

Untuk setiap bilangan asli n , $n \geq 3$ terdapat grup $\{1, n - 1\}$ dengan perkalian modulo an , a bilangan bulat positif yang membagi $n - 1$, khususnya untuk setiap bilangan asli n , $n \geq 5$ terdapat grup $\{1, n - 1\} \neq U_n$ dengan perkalian modulo n

Karena $n^a \equiv 1 \pmod{1 + n}$ untuk a genap positif dan $n^{a+1} \equiv 1 \pmod{1 + n}$ untuk a ganjil, $a \geq 3$ maka dari Teorema 2 diperoleh fakta 2 berikut

Fakta 2

Untuk setiap bilangan asli n , $n \geq 2$, $\{n^a, n^{a+1}\}$ adalah grup dengan perkalian modulo $c(n^a + n^{a+1})$, c bilangan bulat positif membagi $n - 1$ dengan elemen identitas e , dengan $e = \begin{cases} n^a, & \text{jika } a \text{ genap} \\ n^{a+1}, & \text{jika } a \text{ ganjil} \end{cases}$

Pada Teorema 2, jika n diganti $n - 1$ dan $n - 2 = ak$, a bilangan asli yang lebih dari 1 maka diperoleh fakta 3 berikut ini

Fakta 3

Misalkan n bilangan asli dan $n = ak + 2$ untuk a dan k bilangan asli, $a \geq 2$ maka $\{1, n - 1, an - n + 1, an - 1\}$ adalah grup dengan perkalian modulo an

Catatan

Pada Fakta 3, jika setiap anggota dikalikan bilangan bulat positif k dengan k ekuivalen dengan anggota grup maka akan tetap diperoleh grup dengan perkalian modulo yang juga dikalikan k .

Untuk Fakta 3 jika $a = 2$ maka akan didapat Fakta 4 berikut

Fakta 4

Misalkan n bilangan genap yang lebih dari 1 maka $\{1, 2n - 1, 2n + 1, 4n - 1\}$ adalah grup dengan operasi perkalian modulo $4n$

Contoh

Untuk $4n = 2016$, $2n = 1008$ maka $\{1, 1007, 2009, 2015\}$ adalah grup dengan perkalian modulo 2016

Untuk Fakta 3, jika $a = 3$ sehingga $n = 3k + 2$ maka akan diperoleh Fakta 5 berikut

Fakta 5

Misalkan n bilangan asli maka $\{1, 3n + 1, 6n + 5, 9n + 5\}$ adalah grup dengan operasi perkalian modulo $(9n + 6)$

Contoh

Untuk $n = 16$, diperoleh himpunan $\{1, 49, 101, 149\}$ yang merupakan grup perkalian modulo 150.

Untuk $n = 5$, diperoleh himpunan $\{1, 16, 35, 50\}$ yang merupakan grup perkalian modulo 51

Daftar Pustaka

- [1] Brakes, W. R. 1995. Unexpected Grups. *Math. Gaz.* 79, No.486, pp.513-520.
- [2] Denniss, John. 1979. Modular Grup Revisited. *Math. Gaz.* 63, No.424, pp.121-123.
- [3] Gallian, Joseph A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra*, 7th. Ed. Brooks/ Cole, Bellmont.
- [4] Hidayah, Indriati Nurul, and Purwanto. 2016. Constructing Multiplicative Grups In Modular Arithmetic. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol.99, No.4, pp.569-576.
- [5] McLean, K. Robin. 1978. Grups in Modular Arithmetic. *Math. Gaz.* 62, No.420, 94-104.

Dualisasi pada Modul Auto Invarian

Dewa Putu Wiadnyana Putra¹, Indah Emilia Wijayanti²

¹Prodi S1 Pendidikan Matematika Univeristas Sanata Dharma, dewa@usd.ac.id

²Departemen Matematika Universitas Gadjah Mada, ind_wijayanti@ugm.ac.id

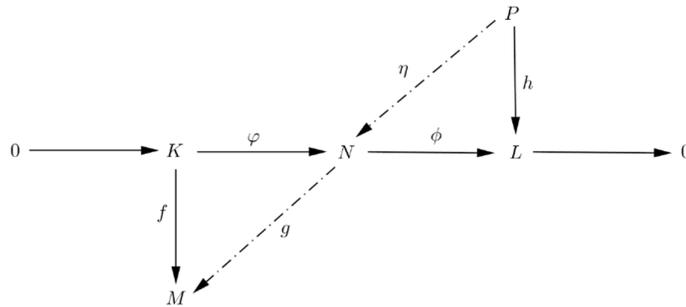
Abstrak

Modul M auto invarian jika untuk setiap isomorfisma pada dua buah submodul esensial dari M dapat diperluas menjadi endomorfisma pada M , yaitu untuk setiap isomorfisma $\alpha: K \rightarrow L$ dengan $K, {}_e M$ dan $L, {}_e M$ maka terdapat endomorfisma $\beta: M \rightarrow M$ sedemikian sehingga $\beta|_K = \alpha$. Setiap modul injektif merupakan modul auto invarian. Konsep proyektifitas suatu modul merupakan dualisasi dari konsep injektifitas. Bentuk dual dari modul auto invarian didefinisikan sebagai modul M dengan setiap epimorfisma kecil $\beta: M/X \rightarrow M/Y$ submodul kecil, $X, {}_s M$ dan $Y, {}_s M$ dapat diangkat menjadi endomorfisma pada M . Oleh sebab itu, dalam tulisan ini akan dikaji tentang dualisasi pada modul auto invarian beserta sifat-sifatnya. Selain itu, akan dilihat hubungan modul proyektif dengan hasil dari dualisasi dari modul auto invarian. Mengingat eksistensi amplop proyektif pada setiap modul belum tentu terjamin ada, gagasan yang menarik untuk diselidiki yaitu bagaimana mengkontruksi bentuk dual dari modul auto invarian. Pada akhir tulisan ini akan dibahas tentang karakterisasi dari setiap modul yang dibangun secara hingga agar merupakan bentuk dual dari modul auto invariant.

Kata Kunci: *modul auto invarian, modul auto ko-invarian, submodul esensial, submodul kecil, ring semisempurna.*

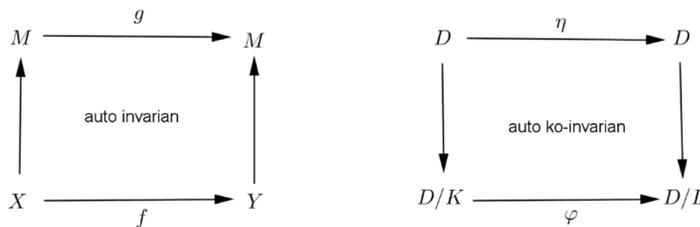
1. Pendahuluan

Pada keseluruhan tulisan ini, ring R adalah ring dengan elemen satuan dan R -modul M adalah modul kanan atas ring R . Konsep barisan eksak modul merupakan motivasi munculnya konsep modul injektif dan modul proyektif [1]. Modul M injektif relatif terhadap modul N (M N -injektif) jika untuk setiap barisan eksak $0 \rightarrow K \xrightarrow{\varphi} N$ dan setiap homomorfisma $f: K \rightarrow M$ terdapat homomorfisma $g: N \rightarrow M$ sedemikian sehingga $f = g\varphi$. Selanjutnya, modul M dikatakan modul injektif jika M N -injektif untuk setiap modul N [10]. Dualisasi pada modul injektif menghasilkan konsep modul proyektif. Proses ini dilakukan dengan “membalik arah” semua pemetaan pada konsep modul injektif. Oleh sebab itu, modul P merupakan modul proyektif jika untuk setiap barisan eksak $N \xrightarrow{\phi} L \rightarrow 0$ dan setiap homomorfisma $h: P \rightarrow L$ terdapat homomorfisma $\eta: P \rightarrow N$ sedemikian sehingga $h = \phi\eta$ [10]. Proses dual modul injektif dapat dilihat pada diagram berikut.



Gambar 1. Diagram Modul Injektif dan Modul Proyektif

Suatu sifat yang menarik dalam modul injektif yaitu sebarang modul pasti termuat dalam suatu modul injektif. Modul injektif terkecil Q yang memuat suatu modul M sekaligus merupakan perluasan esensial dari M disebut dengan amplop injektif dari modul M [3,5]. Dalam perkembangan modul injektif, Noyan [7] mendefinisikan suatu modul yang memenuhi setiap modul injektif dan quasi injektif termasuk ke dalam modul tersebut. Modul yang didefinisikan oleh Noyan tersebut adalah suatu modul M yang invarian terhadap setiap automorfisma pada amplop injektif dari M , yaitu $\varphi(M) \subseteq M$ untuk setiap $\varphi \in \text{Aut}_R(E(M))$. Dalam tulisan ini, modul M tersebut dinamakan modul auto invarian. Lee [6], memberikan karakterisasi dari modul auto invariant, yaitu modul M auto invariant jika dan hanya jika untuk setiap submodul esensial $X, {}_eM$ dan $Y, {}_eM$ dengan $f: X \rightarrow Y$ isomorfisma maka f dapat diperluas menjadi endomorfisma g pada M . Sifat-sifat dari modul auto invariant sudah banyak dibahas dalam [6,7] termasuk pembuktian sifat ekuivalensi modul auto invariant dengan modul pseudo injektif yang dibantu oleh beberapa sifat modul dalam tulisan Dung N.V. dkk [2]. Melalui karakteristik ini, Singh [8] mendualisasi modul auto invariant. Beberapa bentuk yang didualkan, selain “membalik arah” pemetaan juga bentuk dual dari submodul esensial adalah submodul kecil dan bentuk submodul menjadi modul faktor. Akibatnya bentuk dual dari modul auto invariant M adalah suatu modul D dimana untuk setiap submodul kecil $K, {}_sD$ dan $L, {}_sD$ dan epimorfisma $\varphi: D/K \rightarrow D/L$ dengan $\text{Ker}(\varphi), {}_sD/K$ maka terdapat endomorfisma $\eta: D \rightarrow D$ yang mengangkat φ , yaitu $\eta|_{M/K} = \varphi$. Selanjutnya, pada tulisan ini dual dari modul auto invariant disebut modul auto ko-invarian. Ilustrasi dualisasi modul auto invariant dapat dilihat pada gambar 2 berikut.



Gambar 2. Dualisasi Modul Auto Invarian

Dalam tulisan ini akan dibahas tentang beberapa sifat dari modul auto ko-invarian, yaitu karakterisasi modul auto ko-invarian dan hubungan modul auto ko-invarian dengan konsep modul proyektif. Penulis juga mencoba untuk mengembangkan karakteristik yang harus dimiliki suatu modul atau ring sedemikian sehingga dengan cara yang alamiah selalu dapat dibentuk modul auto koinvarian. Hal tersebut dirasa menarik oleh penulis sebab konsep modul auto koinvarian berasal dari konsep modul proyektif dan tentunya juga melibatkan amplop proyektif. Amplop proyektif sebarang modul tidak selalu eksis [4], oleh sebab itu

perlu upaya dalam mengkontruksi modul auto koinvarian. Dalam tulisan ini, yang baru bisa dihasilkan yaitu karakteristik untuk mengkonstruksi modul-modul yang dibangun secara hingga agar merupakan modul auto koinvarian.

2. Dualisasi Modul Auto Invarian

Dualisasi pada modul auto invarian dimotivasi dari dualisasi pada modul injektif. Proses dual pada modul auto invarian masih analog dengan dualisasi pada modul injektif. Semua pemetaan "berbalik arah" dan submodul esensial didualkan menjadi submodul kecil. Secara matematis modul auto ko-invarian didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1. Diberikan M modul atas ring R . Modul M dikatakan modul auto ko-invarian jika untuk setiap submodul kecil K_1 dan K_2 di M dan setiap epimorfisma kecil $\varphi : M/K_1 \rightarrow M/K_2$ diangkat menjadi endomorfisma η pada M .

Contoh. Modul-modul yang tidak mempunyai submodul kecil tak nol merupakan modul auto ko-invarian.

Lemma 2. Diberikan modul M atas ring R dan L_1, L_2 merupakan submodul-submodul kecil di M . Misalkan $\varphi : M/L_1 \rightarrow M/L_2$ merupakan epimorfisma dan endomorfisma $\eta : M \rightarrow M$ mengangkat φ . Jika φ injektif dan $\text{Ker}(\eta)$ merupakan penjumlahan langsung pada M maka η merupakan automorfisma.

Bukti. Diketahui bahwa φ epimorfisma maka $\eta(M) + L_2 = M$. Akibatnya, $\eta(M) = M$, sebab $L_2 \leq_s M$. Jadi η epimorfisma. Selanjutnya, diketahui bahwa $\text{Ker}(\eta) \oplus X = M$ untuk suatu $X \leq M$. Jelas bahwa $\text{Ker}(\eta) \subseteq L_1 \leq_s M$. Akibatnya, $\text{Ker}(\eta) = 0$, yaitu η monomorfisma. Terbukti bahwa η merupakan automorfisma pada M . ■

Proposisi 3. Diketahui P modul proyektif dan $K \leq_s P$. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.

1. Modul $M = P/K$ merupakan modul auto ko-invarian
2. Untuk setiap automorfisma σ pada P berlaku $\sigma(K) = K$.
3. Setiap submodul kecil K_1 dan K_2 di M dan setiap epimorfisma kecil $\varphi : M/K_1 \rightarrow M/K_2$ diangkat menjadi automorfisma η pada M .

Bukti. $(1 \Rightarrow 2)$ Misalkan $\sigma : P \rightarrow P$ merupakan automorfisma. Pemetaan σ membangkitkan epimorfisma $\bar{\sigma} : P/K \rightarrow \frac{P}{K+\sigma(K)}$ yang didefinisikan dengan $\bar{\sigma}(x + K) = \sigma(x) + K + \sigma(K)$. Diperoleh $\text{Ker}(\bar{\sigma}) = \frac{\sigma^{-1}(K)+K}{K} \leq_s P/K$ maka $\bar{\sigma}$ diangkat menjadi endomorfisma η pada M dan berlaku $\eta^{-1}\left(\frac{K+\sigma(K)}{K}\right) = \frac{\sigma^{-1}(K)+K}{K}$. Selanjutnya η dapat diangkat menjadi endomorfisma λ pada P . Berdasarkan Lemma 2 diperoleh λ merupakan automorfisma dan berlaku $\lambda(K) = K$. Diperoleh $\lambda(\sigma^{-1}(K) + K)$ sebab $\eta = \left(\frac{\sigma^{-1}(K)+K}{K}\right) = \frac{K+\sigma(K)}{K}$. Misalkan $C = \sigma^{-1}(K) \leq_s P$.

Didefinisikan pemetaan-pemetaan $\bar{\lambda} : P \rightarrow P/K$ dan $\bar{\mu} : P \rightarrow P/K$ dengan $\bar{\lambda}(x) = \lambda(x) + K$ dan $\bar{\mu}(x) = \sigma(x) + K$. Jelas bahwa $\bar{\mu}(C) = 0$ dan $\bar{\lambda}(C) = \frac{K+\sigma(K)}{K}$. Untuk $\bar{P} = P/K$ diperoleh $\frac{\bar{P}}{\bar{\lambda}(C)} \cong \frac{P}{\sigma(K)+K}$. Misalkan $\pi : \frac{P}{K} \rightarrow \frac{P}{K+\sigma(K)}$ merupakan pemetaan natural. Didefinisikan $\bar{\lambda}' = \pi\bar{\lambda}$ dan $\bar{\mu}' = \pi\bar{\mu}$. Untuk setiap $x \in P$ diperoleh $\bar{\lambda}'(x) = \pi(\lambda(x) + K) = \pi\eta(x + K)$. Misalkan $\eta(x + K) = y + K$ untuk suatu $y \in P$. Jadi $\bar{\lambda}'(x) = y + \sigma(K) + K = \bar{\sigma}(x + K) = \bar{\mu}'(x)$, yaitu $\bar{\lambda}' = \bar{\mu}'$. Berdasarkan Lemma 25 dalam [8] diperoleh $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$ sehingga $\sigma(K) \subseteq K$. Dengan cara yang analog, diperoleh $\sigma^{-1}(K) \subseteq K$. Jadi $\sigma(K) = K$.

(2 \Rightarrow 3) Misalkan $\sigma(K) = K$ untuk setiap $\sigma \in \text{Aut}_R(P)$. Diambil sebarang submodul-submodul kecil $\bar{L}_1 = \frac{L_1}{K}$ dan $\bar{L}_2 = \frac{L_2}{K}$ di modul M dan epimorfisma kecil $\sigma : \frac{M}{L_1} \rightarrow \frac{M}{L_2}$. Misalkan $\text{Ker}(\sigma) = \frac{\bar{L}}{L_1}$ dengan $L \leq P$ yang memuat K . Karena $\text{Ker}(\sigma) \leq_s \frac{M}{L_1}$ maka $L \leq_s P$. Diperhatikan bahwa σ membangkitkan epimorfisma $\sigma' : \frac{P}{L_1} \rightarrow \frac{P}{L_2}$ yang didefinisikan dengan $\sigma'(x + L_1) = y + L_2$ jika dan hanya jika $\sigma(\bar{x} + \bar{L}_1) = \bar{y} + \bar{L}_2$ dan $\text{Ker}(\sigma') = \frac{L}{L_1} \leq_s \frac{P}{L_1}$. Epimorfisma kecil σ' diangkat menjadi automorfisma η pada P . Berdasarkan hipotesis diperoleh $\eta(K) = K$. Automorfisma η membangkitkan automorfisma $\bar{\eta} : M \rightarrow M$. Jadi automorfisma $\bar{\eta}$ mengangkat σ .

(3 \Rightarrow 1) Jelas. ■

Modul auto invariant ekuivalen dengan modul pseudo-injektif [7]. Berdasarkan Definisi 1 ternyata diperoleh modul auto ko-invarian tidak ekuivalen dengan modul pseudo-proyektif. Pada bagian akhir tulisan ini diberikan contoh modul auto ko-invarian yang bukan merupakan modul pseudo-proyektif.

Proposisi 4. *Setiap modul pseudo-proyektif merupakan modul auto ko-invarian.*

Bukti. Misalkan M modul pseudo-proyektif. Diambil sebarang K_1 dan K_2 merupakan submodul-submodul kecil di M dan epimorfisma kecil $\sigma : \frac{M}{K_1} \rightarrow \frac{M}{K_2}$. Misalkan $\pi_1 : M \rightarrow \frac{M}{K_1}$ dan $\pi_2 : M \rightarrow \frac{M}{K_2}$ pemetaan-pemetaan proyeksi maka terdapat endomorfisma η pada M sedemikian sehingga $\sigma\pi_1 = \pi_2\eta$. Jadi $\pi_2\eta(K_1) = \sigma\pi_1(K_1) = 0$ sehingga $\eta(K_1) \subseteq K_2$. Dengan kata lain untuk setiap σ diangkat oleh η . Terbukti bahwa M merupakan modul auto ko-invarian. ■

Berikut ini akan dilihat sifat modul auto ko-invarian yang terkait dekomposisi modul tersebut.

Lemma 5. *Setiap suku jumlahan langsung dari modul auto ko-invarian merupakan modul auto ko-invarian.*

Bukti. Misalkan modul M auto ko-invarian dengan $M = A \oplus B$. Diambil sebarang submodul-submodul kecil K_1 dan K_2 di A dan epimorfisma $\sigma : \frac{A}{K_1} \rightarrow \frac{A}{K_2}$ dengan $\text{Ker}(\sigma) \leq_s \frac{A}{K_1}$. Jelas bahwa K_1 dan K_2 merupakan submodul-submodul kecil di M

dan $\sigma' = \sigma \oplus Id_B : M/K_1 \rightarrow M/K_2$ merupakan epimorfisma kecil. Akibatnya σ' diangkat menjadi endomorfisma η pada M . Misalkan $\iota : A \rightarrow M$ dan $\pi : M \rightarrow A$ berturut-turut merupakan inklusi dan proyeksi. Pemetaan $\pi\eta\iota : A \rightarrow A$ merupakan endomorfisma yang mengangkat σ . Jadi A merupakan modul auto ko-invarian. ■

Catatan : Tidak berlaku secara umum bahwa jumlahan langsung dari modul auto ko-invarian merupakan modul auto ko-invarian.

Contoh. Modul-modul \mathbb{Z}_2 dan \mathbb{Z}_4 merupakan modul auto ko-invarian atas ring \mathbb{Z} tetapi $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ bukan merupakan modul auto ko-invarian.

Bukti. Jelas bahwa \mathbb{Z}_2 merupakan modul auto ko-invarian. Submodul kecil tak nol di \mathbb{Z}_4 yaitu $A = \bar{2}\mathbb{Z}_4$. Cukup dibuktikan epimorfisma kecil $\sigma : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \frac{\mathbb{Z}_4}{A}$ dapat diangkat menjadi endomorfisma η pada \mathbb{Z}_4 . Satu-satunya epimorfisma kecil σ yang mungkin didefinisikan dengan $\sigma(\bar{0}) = \sigma(\bar{2}) = \bar{0} + A$ dan $\sigma(\bar{1}) = \sigma(\bar{3}) = \bar{1} + A$. Dipilih $\eta : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ dengan definisi $\eta(x) = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_4$ maka η mengangkat σ . Jadi \mathbb{Z}_4 merupakan modul auto ko-invarian.

Dipilih submodul-submodul $K_1 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})\} \leq_s M$ dan $K_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2})\} \leq_s M$. Didefinisikan pemetaan $\sigma : \frac{M}{K_1} \rightarrow \frac{M}{K_2}$ dengan $\sigma((\bar{0}, \bar{0}) + K_1) = (\bar{0}, \bar{0}) + K_2$ dan $\sigma((\bar{1}, \bar{0}) + K_1) = (\bar{0}, \bar{1}) + K_2$. Jelas σ merupakan epimorfisma kecil. Andaikan η merupakan automorfisma pada M yang mengangkat σ . Akibatnya peta-peta dari setiap elemen di K_1 terhadap η tepat satu diantara elemen-elemen dalam K_1 . Diperoleh $\eta((\bar{0}, \bar{1})) + \eta((\bar{0}, \bar{3})) = \eta((\bar{0}, \bar{0})) = (\bar{0}, \bar{0})$. Terjadi kontradiksi karena semua elemen-elemen di K_2 *self-inverse*. Jadi M bukan merupakan modul auto ko-invarian. ■

Selanjutnya Singh [8] memberikan syarat cukup agar jumlahan langsung dari dua buah modul auto ko-invarian merupakan modul auto ko-invarian dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 6. Jika P modul proyektif dengan P tidak memiliki submodul kecil tak nol dan M modul quasi-proyektif sedemikian sehingga $\text{Hom}_R(M/K, P) = 0$ untuk setiap $K \leq_s M$ maka $P \oplus M$ merupakan modul auto ko-invarian.

Bukti. Misalkan $P \oplus M = N$ dan $\pi_1 : N \rightarrow P$ pemetaan proyeksi. Untuk setiap submodul $K \leq_s N$ diperoleh $\pi_1(K) \leq_s P$ maka $\pi_1(K) = 0$. Akibatnya $K \leq M$. Diambil sebarang submodul-submodul kecil K_1 dan K_2 di N maka $N/K_1 = P \oplus M/K_1$ dan $N/K_2 = P \oplus M/K_2$. Misalkan sebarang epimorfisma kecil $\sigma : N/K_1 \rightarrow N/K_2$, maka σ dapat direpresentasikan dengan $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ dengan $\sigma_{11} : P \rightarrow P$, $\sigma_{12} : M/K_1 \rightarrow P$, $\sigma_{21} : P \rightarrow M/K_2$, dan $\sigma_{22} : M/K_1 \rightarrow M/K_2$.

Didefinisikan pemetaan $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} : N \rightarrow N$ dengan $\lambda_{11} = \sigma_{11}$, $\lambda_{12} : M \rightarrow P$ merupakan homomorfisma nol berdasarkan σ_{12} , $\lambda_{21} : P \rightarrow M$ yang diangkat dari σ_{21} , dan $\lambda_{22} : M \rightarrow M$ yang diangkat dari σ_{22} . Diambil sebarang $x \in K_1$, diperoleh

$$\lambda(x) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{12}(x) \\ \lambda_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{22}(x) \end{bmatrix} \subseteq K_2.$$

Jadi λ merupakan endomorfisma yang mengangkat σ . Dengan kata lain, $P \oplus M$ merupakan modul auto ko-invarian. ■

Grup G dikatakan grup torsi jika setiap elemen G memiliki order yang berhingga.

Akibat 7. Diberikan P dan M grup komutatif dengan M grup torsi. Jika P dan M masing-masing merupakan modul proyektif dan quasi-proyektif atas ring bilangan bulat \mathbb{Z} maka $P \oplus M$ merupakan modul auto ko-invarian.

Bukti. Modul P atas \mathbb{Z} merupakan modul bebas [1]. Diperoleh $P \cong \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ maka P tidak mempunyai submodul kecil yang tak nol. Misalkan K submodul kecil di M . Diperoleh M/K merupakan grup torsi sebab M grup torsi. Andaikan $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/K, \mathbb{Z}) \neq 0$. Misalkan $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/K, \mathbb{Z})$ dan $0 \neq \bar{m} \in M/K$ sedemikian sehingga $f(\bar{m}) = z \neq 0$. Grup faktor M/K merupakan grup torsi maka terdapat $p \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\bar{m}^p = 0$. Diperoleh $0 = f(\bar{m}^p) = f(\bar{m})^p = z^p$. Kontradiksi karena $z^p \neq 0$ untuk setiap $0 \neq z \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/K, P) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M/K, \mathbb{Z}) = 0$. Berdasarkan Proposisi 6 diperoleh $P \oplus M$ merupakan modul auto ko-invarian. ■

Lemma 8. Diberikan modul-modul M_1 dan M_2 atas ring R . Jika $M = M_1 \oplus M_2$ modul pseudo-proyektif maka M_1 M_2 -proyektif dan M_2 M_1 -proyektif.

Bukti. Misalkan barisan $M_2 \xrightarrow{\pi} M_2/N \rightarrow 0$ eksak dan $f : M_1 \rightarrow M_2/N$ homomorfisma. Homomorfisma f membangkitkan homomorfisma $\sigma : M \rightarrow M/N$ yang didefinisikan oleh $\sigma((m_1, m_2)) = ((m_1, m_2) + N) + f(m_1)$ untuk setiap $m_1 \in M_1$ dan $m_2 \in M_2$. Jelas bahwa σ merupakan epimorfisma. Berdasarkan hipotesis maka σ diangkat menjadi endomorfisma η pada M . Untuk setiap $x_1 \in M_1$ diperoleh $\eta(x_1) = (u_1, u_2)$ dengan $u_1 \in M_1$ dan $u_2 \in M_2$. Misalkan $f(x_1) = p_2 + N \in M_2/N$. Diperoleh $(u_1, u_2) + N = (x_1, p_2) + N$ maka $(u_1 - x_1, u_2 - p_2) \in N$. Akibatnya $u_2 + N = p_2 + N = f(x_1)$.

Misalkan $\pi_2 : M \rightarrow M_2$ pemetaan proyeksi. Dipilih $g = \pi_2 \eta|_{M_1} \in \text{Hom}_R(M_1, M_2)$. Untuk setiap $x_1 \in M_1$ diperoleh $\pi g(x_1) = \pi \pi_2 \eta(x_1) = u_2 + N = f(x_1)$, yaitu homomorfisma g mengangkat f . Jadi M_1 M_2 -proyektif. Dengan cara analog dapat dibuktikan M_2 M_1 -proyektif. ■

Contoh. Modul $M = \mathbb{Z} \oplus C$ dengan C merupakan grup siklik yang berhingga merupakan modul auto ko-invarian tetapi bukan merupakan modul pseudo-proyektif kecuali jika $C = 0$.

Penyelesaian. Modul \mathbb{Z} merupakan modul proyektif yang komutatif. Jelas bahwa grup C merupakan grup torsi dan komutatif. Berdasarkan Akibat 7 maka $M = \mathbb{Z} \oplus C$ merupakan modul auto ko-invarian.

Misalkan $C = \langle x \rangle$ untuk suatu $x \in C$ dan $|C| = n < \infty$. Dipilih barisan eksak $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$ dan pemetaan $f : C \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $f(x^i) = \bar{i}$ untuk setiap $x^i \in C$ dengan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jelas bahwa $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Andaikan terdapat $g \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z})$ yang mengangkat f . Untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ diperoleh $\pi(i + kn) = \bar{i}$ untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$. Jadi haruslah $g(x^i) = i + kn$ untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$. Kontradiksi dengan g merupakan pemetaan. Dengan kata lain C bukan \mathbb{Z} -proyektif. Akibatnya $M = \mathbb{Z} \oplus C$ bukan merupakan modul pseudo-proyektif berdasarkan Lemma 8. ■

Berdasarkan contoh di atas dapat dilihat bahwa jika $M = M_1 \oplus M_2$ modul auto ko-invarian maka tidak selalu berlaku M_1 M_2 -proyektif dan M_2 M_1 -proyektif. Berikut ini akan diberikan syarat cukup agar pernyataan tersebut selalu berlaku.

Proposisi 9. *Jika M_1 dan M_2 merupakan modul-modul yang setiap submodule sejatinya merupakan submodule kecil sedemikian sehingga $M = M_1 \oplus M_2$ modul auto ko-invarian maka M_1 M_2 -proyektif dan M_2 M_1 -proyektif.*

Bukti. Misalkan barisan $M_2 \xrightarrow{\pi} M_2/K \rightarrow 0$ eksak dan $f : M_1 \rightarrow M_2/K$ homomorfisma. Diperoleh $K \leq_s M_2$ dan $\text{Ker}(f) \leq_s M_1$ maka f membangkitkan epimorfisma $\sigma : M \rightarrow M_2/K$ yang didefinisikan oleh $\sigma((m_1, m_2)) = ((m_1, m_2) + K) + f(m_1)$ dan $\text{Ker}(\sigma) \subseteq \text{Ker}(f) \leq_s M$. Akibatnya σ diangkat menjadi automorfisma η pada M [8, Akibat 2]. Misalkan $x_1 \in M_1$ dan $\eta(x_1) = (u_1, u_2)$ dengan $u_1 \in M_1$ dan $u_2 \in M_2$. Diperoleh $u_2 + N = p_2 + N = f(x_1)$. Didefinisikan $g = \pi_2 \eta|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$ dengan $\pi_2 : M \rightarrow M_2$ pemetaan proyeksi natural. Jadi g mengangkat f dengan kata lain M_1 M_2 -proyektif. Dengan cara analog dapat dibuktikan M_2 M_1 -proyektif. ■

3. Modul Auto Ko-invarian atas Ring Semisempurna

Berbeda dengan konsep injektifitas suatu modul, setiap modul tidak selalu mempunyai amplop proyektif. Setiap modul M yang dibangun secara hingga atas ring R mempunyai amplop proyektif jika dan hanya jika R merupakan ring semisempurna [4, Teorema 10.4.8]. Radikal dari ring R didefinisikan sebagai irisan dari semua ideal kanan maksimal di R . Radikal ring R dinotasikan dengan $J(R)$. Suatu ring R dikatakan ring semiprimatif jika $J(R) = 0$. Selvaraj [9] juga telah mengkaji tentang karakteristik modul-modul siklik yang merupakan modul auto koinvarian. Berikut ini akan dibahas keterkaitan modul auto ko-invarian dengan ring semisempurna.

Teorema 12. *Jika ring R merupakan ring semisempurna yang semiprimatif maka setiap modul M yang dibangun secara hingga atas R merupakan modul auto ko-invarian.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 10.4.8 [4], amplop proyektif dari modul M berbentuk $P = P_{i_1} \oplus P_{i_2} \oplus \dots \oplus P_{i_m}$ dengan $P_{i_k} / P_{i_k} J(R) = U_{i_k}$ sedemikian sehingga $M / MJ(R) = U_{i_1} \oplus U_{i_2} \oplus \dots \oplus U_{i_m}$ merupakan dekomposisi dari modul semisederhana $M / MJ(R)$. Diketahui bahwa ring R merupakan ring semiprimatif, yaitu $J(R) = 0$

maka $M \cong P_{i_1} \oplus P_{i_2} \oplus \dots \oplus P_{i_m}$ dengan P_{i_k} adalah modul proyektif untuk setiap $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Modul M merupakan modul proyektif, sehingga berdasarkan Proposisi 4, modul M adalah modul ko-invarian.

Sifat berikutnya menyatakan karakterisasi ring untuk modul siklik atas ring tersebut merupakan modul auto ko-invarian.

Teorema 13. *Diberikan ring R merupakan ring semisempurna. Setiap modul siklik M atas R merupakan modul auto ko-invarian jika dan hanya jika setiap ideal kanan yang termuat di $J(R)$ merupakan submodul yang invarian terhadap setiap automorfisma modul pada R .*

Bukti. (\Rightarrow) Diambil sebarang ideal kanan $I \subseteq J(R)$, diperoleh bahwa $I, {}_e R$ sebab R semiprimatif. Oleh karena R/I siklik yang dibangun oleh $(1+I)$ maka R/I modul auto ko-invarian berdasarkan hipotesis. Berdasarkan Proposisi 3 diperoleh bahwa $f(I) \subseteq I$ untuk setiap $f \in \text{Aut}_R(R)$.

(\Leftarrow) Misalkan I adalah ideal kanan di R . Modul siklik R/I mempunyai amplop proyektif, yaitu $\phi: P \rightarrow R/I$ dan P dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari R . $\text{Ker}(\phi), {}_e P$ maka $\text{Ker}(\phi), {}_e R$ dan $\text{Ker}(\phi), {}_e J(R)$. Berdasarkan hipotesis diperoleh bahwa $\text{Ker}(\phi)$ merupakan submodul yang invarian terhadap setiap isomorfisma pada P . Berdasarkan Proposisi 3 maka modul siklik R/I adalah modul auto ko-invarian. +

Daftar Pustaka

- [1] Adkins, W.A. dan Weintraub, S.H., 1992, Algebra “An Approach via Module Theory”, Springer-Verlag New York, Inc., USA.
- [2] Dung, N.V. dkk. Extending Modules, *Pitman Research Notes in Mathematics Series* 313 (1994).
- [3] Goodearl, K. R. dan Warfield, R. B., 2004, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Springer-Verlag New York, Inc., USA.
- [4] Hazewinkel, Michiel dkk. 2004. *Algebras, Rings, and Modules*. Kluwer Academic Publisher : Dordrecht.
- [5] Lam, T.Y., 1999, *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag New York, Inc., USA.
- [6] Lee, T.K. dan Zhou, Y., Modules which are Invariant under Automorphism of Their Injective Hulss, *J. Algebra and Its Application*, 12, 2 (2013).
- [7] Noyan Er, Singh, S., dan Srivastava, A.K., Rings and Modules which are Stable under Automorphism of Their Injective Hulls, *J. Algebra*, 379 (2013), 223-229.

- [8] Singh, S. dan Srivastava, A. K., Dual Automorphism-Invariant Modules, *J. Algebra*, 371 (2012), 262-275.
- [9] Selvaraj, C. dan Santhakumar S. 2016. A Note on Dual Automorphism Invariant Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*.
- [10] Wisbauer, R., 1991. *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publisher, Reading, Düsseldorf.

Modul Dedekind Atas Gelanggang Tak Komutatif

Elvira Kusniyanti¹, Hanni Garminia, dan Pudji Astuti
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung
¹elvira@math.itb.ac.id

Abstrak

Tulisan ini membahas sifat modul Dedekind atas gelanggang tak komutatif yang terkait dengan order modul. Sifat yang dikaji dipandang sebagai perumuman dari sifat modul Dedekind atas gelanggang komutatif. Pengkajian yang dilakukan akan menunjukkan bahwa order dari suatu modul Dedekind atas gelanggang tak komutatif membentuk struktur gelanggang Dedekind. Sebagai hasil tambahan, dalam makalah ini akan dikaji pula penurunan sifat prima dari submodul kepada ideal order modulnya. Khususnya dapat ditunjukkan bahwa setiap submodul prima dari suatu modul Dedekind membentuk ideal prima dari order modulnya.

Kata Kunci: daerah Dedekind, modul Dedekind, ideal prima, submodul prima.

1. Pendahuluan

Kajian mengenai modul Dedekind pertama kali dilakukan oleh Naoum dan Al-Alwan [2]. Pada makalahnya, Naoum dan Al-Alwan memperumum konsep keterbalikan ideal pada daerah Dedekind dan gelanggang prima Dedekind menjadi keterbalikan submodul.

Seiring dengan perumuman konsep Dedekind pada teori modul, beberapa peneliti melakukan pengkajian sifat modul Dedekind yang dipandang sebagai perumuman sifat dari daerah Dedekind dan gelanggang prima Dedekind. Diantaranya penelitian yang telah dilakukan oleh Garminia, Astuti, dan Irawati [1] yang mengkaji keterkaitan antara modul Dedekind dan modul HNP (herediter, Noether, prima) dengan mengangkat sifat gelanggang prima Dedekind yang merupakan gelanggang HNP.

Perkembangan penelitian yang telah dilakukan masih terbatas pada sifat modul Dedekind atas gelanggang komutatif. Hal ini mendorong minat penulis untuk mengangkat konsep Dedekind pada area modul atas gelanggang tak komutatif termasuk menelaah perumuman sifat-sifat modul Dedekind dengan gelanggang tak komutatif sebagai gelanggang tumpuannya. Salah satu karakterisasi modul Dedekind atas gelanggang komutatif yang menarik untuk diperumum pada area gelanggang tak komutatif adalah terkait order modul. Sarac, Smith, dan Tiras [5] telah membuktikan bahwa suatu modul Dedekind atas gelanggang komutatif memiliki order modul yang membentuk struktur daerah Dedekind. Tujuan makalah ini adalah mengangkat karakterisasi tersebut pada area modul atas gelanggang tak komutatif. Khususnya akan ditelaah apakah order modul dari suatu modul Dedekind atas gelanggang tak komutatif juga bisa membentuk struktur Dedekind.

Pemaparan pada makalah ini akan diawali dengan penjelasan sifat modul Dedekind atas gelanggang komutatif terkait order modul. Pasal berikutnya merupakan inti pembahasan dari tulisan ini, yaitu perumuman definisi modul Dedekind untuk gelanggang tak komutatif serta pengkajian sifat order modul dari modul Dedekind tersebut. Pada pasal ini pula dibahas mengenai sifat prima pada ideal dari order modul yang dibentuk oleh suatu submodul prima. Terakhir, pembahasan ditutup dengan kesimpulan serta masalah yang dapat dilakukan untuk penelitian selanjutnya.

2. Modul Dedekind atas Gelanggang Komutatif

Pada pasal ini disajikan konsep awal keterkaitan antara modul Dedekind dan order modul. Karakterisasi yang dipaparkan dikaji pada kelas modul Dedekind atas gelanggang komutatif.

Pengkonstruksian konsep Dedekind pada area teori modul dilakukan oleh Naoum dan Al-Alwan dengan memperkenalkan keterbalikan submodul sebagai perumuman dari keterbalikan ideal di suatu daerah integral (lihat rujukan [2]). Misalkan R suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan M suatu R -modul. Misalkan himpunan,

$$S = \{r \in R \mid rs = 0, s \in R \Rightarrow s = 0\},$$

$$T = \{t \in S \mid tm = 0, m \in M \Rightarrow m = 0\}.$$

Maka akan diperoleh $Q = RT^{-1}$ adalah gelanggang hasil bagi dari R . Suatu R -modul M disebut **modul Dedekind** jika setiap submodul tak nol dari M **dapat dibalik**, yaitu $N^{-1}N = M$ dengan $N^{-1} = \{x \in RT^{-1} \mid xN \subseteq M\}$ untuk semua N submodul tak nol dari M .

Keterkaitan antara modul Dedekind dengan order modul dikemukakan oleh Sarac, Smith, dan Tiras pada rujukan [5]. Pada tulisan tersebut, *order modul* M didefinisikan sebagai $\mathcal{O}(M) = \{x \in RT^{-1} | xM \subseteq M\}$. Dapat dilihat bahwa order modul adalah subgelanggang terbesar dari Q yang masih mempertahankan struktur M sebagai modul.

Karakterisasi modul Dedekind terkait order modul ini dipaparkan dalam sifat berikut.
Teorema 2.1. *Misalkan M suatu R -modul Dedekind yang dibangun secara hingga, maka M adalah $\mathcal{O}(M)$ -modul Dedekind dan gelanggang $\mathcal{O}(M)$ merupakan daerah Dedekind.*

Bukti: Misalkan N adalah submodul dari M sebagai $\mathcal{O}(M)$ -modul, maka N juga submodul dari M sebagai R -modul. Karena M suatu R -modul Dedekind maka $N^{-1}N = M$. Jadi jelas M juga bersifat Dedekind sebagai $\mathcal{O}(M)$ -modul. Selanjutnya, misalkan I adalah suatu ideal tak nol dari $\mathcal{O}(M)$. Diperoleh IM adalah submodul dari M sebagai $\mathcal{O}(M)$ -modul. Perhatikan bahwa $(IM)^{-1} = \{x \in RT^{-1} | xIM \subseteq M\} = \{x \in RT^{-1} | xI \subseteq \mathcal{O}(M)\} = I^{-1}$, yaitu invers I di $\mathcal{O}(M)$. Sehingga diperoleh $\mathcal{O}(M)M = M = (IM)^{-1}IM = I^{-1}IM$. Karena M merupakan modul yang dibangun secara hingga, maka $\mathcal{O}(M) = I^{-1}I$. Jadi, $\mathcal{O}(M)$ suatu daerah Dedekind. ■

Teorema di atas bisa dipandang juga sebagai keterkaitann antara modul Dedekind dan daerah Dedekind. Dapat disimpulkan bahwa setiap modul Dedekind dapat dipandang sebagai modul atas suatu daerah Dedekind yang lebih besar dari gelanggang tumpuannya.

3. Modul Dedekind atas Gelanggang Tak Komutatif

Pasal ini merupakan inti bahasan dari makalah ini. Pembahasan diawali dengan pengkonstruksian definisi modul Dedekind dan order modul yang diperumum pada kelas yang lebih luas termasuk kelas modul dengan gelanggang tak komutatif sebagai tumpuannya. Selanjutnya, karakterisasi modul Dedekind terkait order modul yang dibahas pada pasal sebelumnya diangkat pada kelas modul atas gelanggang tak komutatif.

Konsep keterbalikan submodul dari suatu modul memerlukan kebedaradan gelanggang hasil bagi dari gelanggang tumpuan modul tersebut. Pada kelas gelanggang tak komutatif, keberadaan gelanggang hasil bagi kiri (kanan) akan dijamin jika gelanggang memenuhi kondisi ore kiri (kanan). Oleh karena itu, untuk menjamin keberadaan gelanggang hasil bagi dari gelanggang tumpuan suatu modul, pembahasan dibatasi pada area gelanggang tak komutatif yang memenuhi kondisi ore

kiri dan kanan sehingga terbentuk gelanggang hasil bagi kiri yang sama dengan gelanggang hasil bagi kanan, yaitu $RT^{-1} = T^{-1}R = Q$.

Misalkan R suatu domain dan M suatu R -modul kiri. Misalkan pula Q gelanggang hasil bagi dari R . Untuk setiap submodul kiri N dari M didefinisikan balikan kiri dari N sebagai $N_l^{-1} = \{x \in Q | xN \subseteq M\}$. Submodul kiri N disebut **mempunyai balikan kiri** jika berlaku $N_l^{-1}N = M$. Modul M disebut **modul Dedekind kiri** jika setiap submodul kiri tak nol dari M mempunyai balikan kiri. Begitu pula suatu R -modul kanan M disebut **modul Dedekind kanan** jika setiap submodul kanan tak nol N dari M mempunyai balikan kanan, yaitu $NN_r^{-1} = M$ dengan $N_r^{-1} = \{x \in Q | Nx \subseteq M\}$ balikan kanan dari N . Dengan demikian, untuk R -modul (kiri dan kanan) M jika kedua kondisi tersebut terpenuhi maka M disebut **modul Dedekind**.

Pengangkatan sifat keterkaitan antara modul Dedekind dan order modul yang dilakukan pada

penelitian ini juga memerlukan pendefinisian order modul untuk kelas gelanggang tak komutatif. Misalkan M suatu R -modul. **Order kiri** dan **order kanan** dari M didefinisikan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_l(M) &= \{x \in Q | xM \subseteq M\}, \\ \mathcal{O}_r(M) &= \{x \in Q | Mx \subseteq M\}. \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa modul M merupakan $\mathcal{O}_l(M)$ -modul kiri dan $\mathcal{O}_r(M)$ -modul kanan.

Definisi 3.1.

- (i) Suatu gelanggang Q disebut **gelanggang kuosien** jika setiap unsur reguler di Q mempunyai invers.
- (ii) Misalkan Q suatu gelanggang kuosien. Suatu subgelanggang $R \subseteq Q$ disebut **order kiri** dari Q jika setiap unsur di Q dapat ditulis sebagai $b^{-1}a$ untuk suatu unsur a, b di R , dan disebut **order kanan** dari Q jika setiap unsur di Q dapat ditulis sebagai ab^{-1} untuk suatu unsur a, b di R . Jika R merupakan order kiri dan juga order kanan dari Q maka R disebut **order** dari Q .

Berikut ini adalah teorema utama pada tulisan ini yang dapat dipandang sebagai perumuman dari sifat modul Dedekind terkait order modul yang dibahas pada pasal sebelumnya.

Teorema 3.2. Misalkan R suatu domain dan M suatu R -modul yang dibangun secara hingga dan bebas torsi. Jika M merupakan R -modul Dedekind maka diperoleh,

- (i) Modul M bersifat Dedekind kiri sebagai $\mathcal{O}_l(M)$ -modul dan $\mathcal{O}_l(M)$ bersifat Dedekind kiri sebagai order dari Q .
- (ii) Modul M bersifat Dedekind kanan sebagai $\mathcal{O}_r(M)$ -modul dan $\mathcal{O}_r(M)$ bersifat Dedekind kanan sebagai order dari Q .

Bukti:

- (i) Misalkan N adalah submodul dari M sebagai $\mathcal{O}_l(M)$ -modul kiri. Maka N juga merupakan submodul dari M sebagai R -modul kiri. Karena M adalah suatu R -modul Dedekind maka $N_l^{-1}N = M$. Jadi M merupakan $\mathcal{O}_l(M)$ -modul Dedekind kiri. Jelas bahwa gelanggang $\mathcal{O}_l(M)$ merupakan order dari Q . Kemudian, misalkan I adalah suatu ideal tak nol dari $\mathcal{O}_l(M)$. Maka IM adalah submodul dari M sebagai $\mathcal{O}_l(M)$ -modul kiri. Perhatikan bahwa $(IM)_l^{-1} = \{q \in Q | qIM \subseteq M\} = \{q \in Q | qI \subseteq \mathcal{O}_l(M)\} = I_l^{-1}$, yaitu balikan (kiri) dari I di $\mathcal{O}_l(M)$. Diperoleh $\mathcal{O}_l(M)M = M = (IM)_l^{-1}IM = I_l^{-1}IM$. Maka $\mathcal{O}_l(M) = I_l^{-1}I$ karena M merupakan modul yang dibangun secara hingga. Sehingga diperoleh $\mathcal{O}_l(M)$ bersifat Dedekind kiri sebagai order dari Q .
- (ii) Dibuktikan dengan cara serupa (i). ■

Sebagai hasil tambahan dari tulisan ini, berikut dijelaskan penurunan sifat prima dari suatu submodul pada ideal dari order modulnya.

Definisi 3.3. Misalkan R suatu gelanggang tak komutatif dan M suatu R -modul kiri.

- (i) Ideal P disebut **ideal prima** dari R jika untuk setiap unsur $a, b \in R$ dengan $aRb \subseteq P$ maka $a \in P$ atau $b \in P$
- (ii) Submodul kiri N dari M disebut **submodul prima** jika untuk setiap unsur $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rRm \subseteq N$ maka $m \in N$ atau $r \in (N:M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$.

Proposisi 3.4. Misalkan M suatu R -modul. Untuk setiap $\mathcal{O}_l(M)$ -submodul prima tak nol N dari M , himpunan $(N:_{\mathcal{O}_l(M)} M) = \{x \in \mathcal{O}_l(M) | xM \subseteq N\}$ merupakan suatu ideal prima dari $\mathcal{O}_l(M)$.

Bukti: Misalkan N submodul prima tak nol dari M sebagai $\mathcal{O}_l(M)$ -modul kiri dan $P = (N:_{\mathcal{O}_l(M)} M)$. Misalkan $a, b \in \mathcal{O}_l(M)$ sehingga $aRb \subseteq P$ artinya untuk setiap $m \in M$ berlaku $aRbm \subseteq N$. Karena N submodul prima maka $bm \in N$ atau $a \in P$. Jika $a \notin P$ maka haruslah $bm \in N$ untuk setiap $m \in M$, sehingga $bM \subseteq N$ yaitu $b \in P$. Jadi, P ideal prima dari $\mathcal{O}_l(M)$. ■

4. Kesimpulan

Penelitian yang dilakukan telah menunjukkan bahwa untuk R suatu domain dan M suatu R -modul yang dibangun secara hingga dan bebas torsi, berlaku jika M bersifat Dedekind kiri maka M merupakan $\mathcal{O}_l(M)$ -modul Dedekind kiri dan $\mathcal{O}_l(M)$ bersifat Dedekind kiri sebagai order dari gelanggang hasil bagi Q . Begitu pula untuk R -modul kanan M dengan sifat Dedekind kanan. Selain itu, telah dikemukakan pula penurunan sifat prima dari suatu submodul terhadap ideal dari order modulnya. Sebagai saran untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan pengkajian sifat balikan submodul N dari suatu R -modul (kiri dan kanan) M , khususnya melihat apakah jika submodul N mempunyai balikan kiri dan balikan kanan maka berlaku $N_l^{-1} = N_r^{-1}$. Di samping itu, dapat ditelaah pula perumusan sifat submodul prima dari suatu modul Dedekind atas gelanggang komutatif untuk kasus gelanggang tak komutatif, yaitu melihat apakah setiap submodul prima dari modul Dedekind atas gelanggang tak komutatif bersifat maksimal.

Daftar Pustaka

- [1] Garminia, H., Astuti, P., and Irawati, A Note on Dedekind Modules, International Journal of Algebra, vol. 5:10, 2011, pp. 491-498.
- [2] Naoum, A. G. and Al-Alwan, F. H., Dedekind Modules, Communications in Algebra, vol. 24:2, 1996, pp. 397-412.
- [3] Robson, J. C., A Note on Dedekind Prime Rings, Bull. London Math. Soc, vol. 3, 1971, pp. 42-46.
- [4] Robson, J.C., Noncommutative Dedekind Rings, Journal of Algebra, vol. 9, 1968, pp. 249-265.
- [5] Sarac, B., Smith, P. F., and Tiras, Y., On Dedekind Modules, Communications in Algebra, vol. 35:5, 2007, pp. 1533-1538.

Representasi Ring R Pada Modul M Atas Ring R'

Na'imah Hijriati^{1,2}, Sri Wahyuni³, Indah Emilia Wijayanti⁴

¹Mahasiswa S3 Matematika Universitas Gadjah Mada

²Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat,
naimah.hijriati@mail.ugm.ac.id

³Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, swahyuni@ugm.ac.id

⁴Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, ind.wijayanti@ugm.ac.id

Abstrak

Representasi ring atas ruang vektor adalah homomorfisma ring dari ring tersebut ke himpunan semua transformasi linear ruang vektor. Salah satu contoh dari representasi ring adalah representasi ring polinomial melalui suatu transformasi linear ruang vektor. Dari representasi ring polinomial tersebut muncul ide untuk memperumum representasi ring atas ruang vektor ke representasi ring atas modul. Pada paper ini akan dipresentasikan beberapa konsep dasar pada representasi ring atas modul yang merupakan perumuman konsep dasar pada representasi ring atas ruang vektor, yang terdiri dari ekuivalensi dua representasi, submodul R -invarian, R' - R -modul, dan representasi ring terdekomposisi, dan memberikan sifat representasi ring R atas R -modul yang berkaitan dengan konsep dasar tersebut.

Kata Kunci: *representasi ring, homomorfisma ring, endomorfisma modul.*

1. Pendahuluan

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan, V ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan F . Diketahui himpunan semua transformasi linear dari V ke V ($\text{End}_F(V)$) merupakan ring terhadap operasi penjumlahan fungsi dan operasi komposisi fungsi ([1]). Representasi ring dari R atas ruang vektor V adalah homomorfisma ring $\rho : R \rightarrow \text{End}_F(V)$. Selanjutnya V disebut ruang representasi, dan derajat dari ρ didefinisikan sebagai dimensi V . Untuk setiap $r \in R$, ρ_r merupakan transformasi linear pada V , dan untuk setiap $v \in V$ diperoleh $\rho(r)(v) \in V$. Untuk menyederhanakan penulisan selanjutnya dituliskan $\rho(r)$ dengan notasi ρ_r ([2]).

Pada representasi ring atas ruang vektor terdapat beberapa konsep dasar, yaitu R -invarian, ekuivalensi dua representasi, subrepresentasi, representasi faktor, representasi jumlah langsung dua representasi dan morfisma representasi. Misalkan $\rho : R \rightarrow \text{End}_F(V)$ representasi ring R . Subruang $U \subseteq V$ disebut R -invarian jika $\rho_r(U) \subseteq U$ untuk setiap $r \in R$. Jika terdapat subruang R -invarian $U \subseteq V$, maka selalu dapat dikonstruksi representasi ring $\rho' : R \rightarrow \text{End}_F(U)$ dengan $\rho'_r = \rho_r|_U$ dan representasi ring $\bar{\rho} : R \rightarrow \text{End}_F(V/U)$ dengan $\bar{\rho}_r(v + U) = \rho_r(v) + U$ untuk setiap $v \in V$ dan untuk setiap $r \in R$. Representasi ρ' disebut subrepresentasi dari ρ dan $\bar{\rho}$ disebut representasi faktor. Misalkan $\varphi : R \rightarrow \text{End}_F(W)$ juga merupakan representasi dari R , maka ρ ekuivalen dengan φ jika terdapat F -isomorfisma $T : V \rightarrow W$ yang memenuhi

$T\rho_r = \varphi_r T$. Selanjutnya transformasi linear T yang memenuhi $T\rho_r = \varphi_r T$ untuk setiap $r \in R$ disebut morfisma representasi ring dari ρ ke φ . Representasi jumlah langsung $\rho \oplus \varphi : R \rightarrow \text{End}_F(V \oplus W)$ adalah homomorfisma ring dengan definisi

$(\rho \oplus \varphi)_r(v, w) = (\rho_r(v), \varphi_r(w))$ untuk setiap $(v, w) \in V \oplus W$ dan untuk setiap $r \in R$ ([2]).

Berdasarkan definisi representasi ring di atas jelas bahwa sifat representasi bergantung pada ruang representasi dan ring-nya. Terkait dengan ruang representasi antara lain sifat terdekomposisi, ireduisible dan tereduksi lengkap. Representasi ring R terhadap ruang vektor V atas lapangan F , dikatakan bersifat terdekomposisi jika V dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung (direct sum) subruang R -invarian U_1, U_2 . Jika subruang R -invarian V hanyalah $\{0\}$ dan V , maka V disebut ireduisible dan ρ disebut representasi ireduisible. Jika V dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung berhingga dari subruang R -invarian yang ireduisible, maka ρ disebut tereduksi lengkap ([2]).

Diketahui modul merupakan perumuman dari ruang vektor, yaitu terhadap operasi pergandaan skalar tidak harus atas suatu lapangan, tetapi cukup atas ring dengan elemen satuan ([1]). Sehingga dengan memperumum ruang vector V atas lapangan F menjadi modul kiri M atas ring komutatif dengan elemen satuan R' (R' -modul M), maka diperoleh definisi representasi ring R atas R' -modul M sebagai berikut:

Definisi 1.1. Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan, R' adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah R' -modul. Representasi ring R atas R' -modul M adalah homomorfisma ring

$$\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M).$$

Perumuman representasi ring $\rho : R \rightarrow \text{End}_F(V)$ menjadi $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ tentu secara global muncul permasalahan, yaitu apakah konsep dasar beserta sifat-sifatnya dan sifat terdekomposisi, ireduisible, dan tereduksi lengkap pada representasi ring $\rho : R \rightarrow \text{End}_F(V)$ masih berlaku pada representasi ring $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$. Diketahui jika M merupakan modul atas ring R , maka selalu terdapat homomorfisma ring $\mu : R \rightarrow \text{End}_R(M)$ dengan $\mu_r(m) = r \cdot m$ untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $m \in M$ ([3]). Sehingga berdasarkan Definisi 1.1, maka diketahui setiap ring R memiliki representasi ring atas R -modul M . Dalam paper ini akan dipresentasikan beberapa konsep dasar representasi ring R pada modul M atas R' yang merupakan perumuman konsep dasar dari representasi ring R pada ruang vektor V atas lapangan F , yaitu ekuivalensi dua representasi, subruang R -invarian, dan hubungan antara representasi ring dengan bimodul representasi, serta sifat terdekomposisi dari representasi ring tersebut. Kemudian dari perumuman tersebut diberikan sifat representasi ring R pada R -modul.

2. Hasil dan Pembahasan

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan, R' ring komutatif dengan elemen satuan dan M, N adalah modul atas R' . Jika $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ adalah representasi ring R dan T adalah R' -isomorfisma modul dari M ke N , maka untuk sebarang $r \in R$, $T\mu_r T^{-1} : N \rightarrow N$ adalah R' -homomorfisma modul dengan $T\mu_r T^{-1}(n) = T(\mu_r(T^{-1}(n)))$ untuk setiap $n \in N$. Sehingga dapat dikonstruksi homomorfisma ring $\varphi : R \rightarrow \text{End}_{R'}(N)$ dengan $\varphi_r = T\mu_r T^{-1}$. Selanjutnya jika terdapat R' -isomorfisma

modul $S: M \rightarrow N$, maka dapat dikonstruksi homomorfisma ring $\varphi' : R \rightarrow \text{End}_{R'}(N)$ dengan $\varphi'_r = S\mu_r S^{-1}$. Hubungan antara φ dan φ' adalah $\varphi' = ST^{-1}\varphi_r T S^{-1} = ST^{-1}\varphi_r (ST^{-1})^{-1}$ untuk setiap $r \in R$. Akibatnya μ , φ dan φ' dapat dinyatakan sebagai representasi yang serupa melalui relasi ekuivalensi yang didefinisikan dengan $\mu \sim \varphi$ jika dan hanya jika terdapat R' -isomorfisma modul $T: M \rightarrow N$ yang memenuhi $\varphi'_r = T\mu_r T^{-1}$ untuk setiap $r \in R$. Berdasarkan hal ini maka diperoleh definisi ekuivalensi dua representasi ring R atas R' -modul M sebagai berikut

Definisi 2.1. Representasi $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ dan representasi $\varphi : R \rightarrow \text{End}_{R'}(N)$ disebut ekuivalen, jika terdapat R' -isomorfisma modul $T: M \rightarrow N$ yang memenuhi $T\mu_r = \varphi_r T$ untuk setiap $r \in R$. Selanjutnya representasi μ yang ekuivalen dengan representasi φ dinotasikan dengan $\mu \sim \varphi$.

Jika $T : M \rightarrow N$ isomorfisma modul atas R , maka untuk setiap $m \in M$ dan untuk setiap $r \in R$ berlaku

$$T(r \cdot m) = r \cdot T(m) \text{ dan } \text{Ker}(T) = \{0_M\} \quad (2)$$

Sehingga berdasarkan Definisi 2.1 dan persamaan (2) diperoleh proposisi berikut

Proposisi 2.2. Misalkan $\mu : R \rightarrow \text{End}_R(M)$ dan $\varphi : R \rightarrow \text{End}_R(N)$ dua representasi ring R dengan $\mu_r(m) = r \cdot m$ dan $\varphi_r(n) = r \cdot n$ untuk setiap $r \in R$, untuk setiap $m \in M$, dan untuk $n \in N$.

$\mu \sim \varphi$ jika dan hanya jika terdapat isomorfisma $T : M \rightarrow N$.

Bukti. Jika $\mu \sim \varphi$ maka berdasarkan Definisi 2.1 terdapat isomorfisma $T: M \rightarrow N$ yang memenuhi $T\mu_r = \varphi_r T$ untuk setiap $r \in R$. Sebaliknya jika terdapat isomorfisma $T: M \rightarrow N$, maka berdasarkan (2), diperoleh untuk setiap $r \in R$, untuk setiap $m \in M$, dan untuk $n \in N$

$$(T\mu_r)(m) = T(\mu_r(m)) = T(r \cdot m) = r \cdot T(m) = \varphi_r(T(m)) = (\varphi_r T)(m) \quad (3)$$

Dari (3) diperoleh $T\mu_r = \varphi_r T$ untuk setiap $r \in R$

Jadi terbukti $\mu \sim \varphi$. ■

Misalkan $\rho : R \rightarrow \text{End}_F(V)$ representasi ring R atas ruang vektor V . Diketahui subruang $U \subseteq V$ disebut R -invarian jika $\rho_r(U) \subseteq U$ untuk setiap $r \in R$. Sehingga dengan memperumum ruang representasi diperoleh definisi berikut

Definisi 2.3. Misalkan $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ representasi ring R . Submodul $P \subseteq M$ disebut R -invarian jika $\mu_r(P) \subseteq P$ untuk setiap $r \in R$.

Berdasarkan Definisi 2.3 diperoleh proposisi berikut

Proposisi 2.4. Misalkan $\mu : R \rightarrow \text{End}_R(M)$ dan $\varphi : R \rightarrow \text{End}_R(N)$ representasi ring R dengan $\mu_r(m) = r \cdot m$ untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $m \in M$, maka setiap submodul $P \subseteq M$ merupakan R -invarian.

Bukti. Misalkan $P \subseteq M$ sebarang submodul dari M , maka berdasarkan definisi submodul pada [3] P merupakan subgrup terhadap operasi penjumlahan dan tertutup terhadap operasi perkalian skalar atas R , sehingga $r \cdot p \in P$ untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $p \in P$.

Akibatnya diperoleh $\mu_r(p) \in P$ untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $p \in P$. Jadi terbukti P adalah submodul R -invarian. ■

Berikut contoh dari submodul R -invarian dari modul invarian M atas ring R

1. Diketahui $M = \mathbb{Z}^2$ adalah \mathbb{Z} -modul. Homomorfisma ring $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2)$ dengan $\mu_r(a, b) = r(a, b) = (ra, rb)$ untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ adalah representasi ring R . Misalkan $P = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a = b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Karena P adalah submodul dari \mathbb{Z}^2 , maka berdasarkan Proposisi 2.4, P adalah submodul R -invarian.

2. Diketahui $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah \mathbb{Z} -modul. Homomorfisma ring $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ dengan $\mu_r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}$ untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan untuk setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ adalah representasi ring \mathbb{Z} . Misalkan $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq M$. Karena N submodul dari M , maka berdasarkan Proposisi 2.4, N adalah submodul R -invarian.

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan, R' ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah R' -modul. Jika terdapat representasi $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ dari ring R , maka M merupakan modul R' - R - (bi)modul, yang dinyatakan pada proposisi berikut :

Proposisi 2.5.

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan, R' ring komutatif dengan elemen satuan, M adalah R' -modul (modul kiri atas R'). Modul kiri M atas R' adalah R' - R - (bi)modul, jika R ring komutatif dan terdapat representasi $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ dari ring R . Sebaliknya jika R adalah ring komutatif dan M adalah R' - R -modul, maka terdapat secara tunggal representasi ring R .

Bukti. Diketahui M adalah modul kiri atas R' . Jika R ring komutatif dan terdapat representasi $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ dari ring R , maka untuk sebarang $r_1, r_2 \in R$ dan sebarang $m_1, m_2 \in M$, berlaku $\mu_{r_1+r_2} = \mu_{r_1} + \mu_{r_2}$, $\mu_{r_1 r_2} = \mu_{r_2 r_1} = \mu_{r_1} \mu_{r_2}$, $\mu_{r_1}(m_1 + m_2) = \mu_{r_1}(m_1) + \mu_{r_1}(m_2)$, dan $\mu_{r_1}(am_1) = a\mu_{r_1}(m_1)$ untuk setiap $a \in R'$. Didefinisikan perkalian skalar pada M atas R sebagai berikut

$$m \cdot r = \mu_r(m) \tag{4}$$

untuk setiap $m \in M$ dan untuk setiap $r \in R$.

1. Diberikan sebarang $r_1, r_2 \in R$ dan sebarang $m_1, m_2 \in M$ dengan $r_1 = r_2$ dan $m_1 = m_2$. Karena diketahui μ adalah representasi ring R , maka diperoleh

$$m_1 \cdot r_1 = \mu_{r_1}(m_1) = \mu_{r_1}(m_2) = \mu_{r_2}(m_2) = m_2 \cdot r_2$$

Jadi terbukti *well defined*

2. Diberikan sebarang $r, r_1, r_2 \in R$ dan sebarang $m, m_1, m_2 \in M$. Karena diketahui μ adalah representasi ring R , maka diperoleh

a. $(m_1 + m_2) \cdot r = \mu_r(m_1 + m_2) = \mu_r(m_1) + \mu_r(m_2) = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$

b. $m \cdot (r_1 + r_2) = \mu_{r_1+r_2}(m) = \mu_{r_1}(m) + \mu_{r_2}(m) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$

c. $m \cdot (r_1 r_2) = \mu_{r_1 r_2}(m) = \mu_{r_2 r_1}(m) = (\mu_{r_2} \mu_{r_1})(m) = \mu_{r_2}(\mu_{r_1}(m)) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$

d. $m \cdot 1_R = \mu_{1_R}(m) = m$

Jadi terbukti M merupakan modul kanan atas R . Selanjutnya karena $(am) \cdot r = \mu_r(am) = a\mu_r(m) = a(m \cdot r)$ untuk setiap $r \in R$, untuk setiap $m \in M$ dan untuk setiap $a \in R'$, maka M merupakan R' - R -modul,

Sebaliknya jika M adalah R' - R -modul, maka dapat didefinisikan pemetaan $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ dengan $\mu_r(m) = m \cdot r$ untuk setiap $m \in M$ dan untuk setiap $r \in R$, sehingga diperoleh

1. Diberikan sebarang $r_1, r_2 \in R$ dan sebarang $m_1, m_2 \in M$ dengan $r_1 = r_2$ dan $m_1 = m_2$. Karena diketahui μ adalah representasi ring R , maka diperoleh

$$\mu_{r_1}(m_1) = m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2 = \mu_{r_2}(m_2)$$

di terbukti *well defined*

2. Diberikan sebarang $r \in R$ dan sebarang $m, m_1, m_2 \in M$. Karena diketahui M adalah modul kanan atas R , maka diperoleh

a. $\mu_r(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r = \mu_r(m_1) + \mu_r(m_2)$

b. $\mu_r(am) = am \cdot r = a(m \cdot r) = a\mu_r(m)$

Jadi terbukti $\mu_r \in \text{End}_{R'}(M)$ untuk setiap $r \in R$

3. Diberikan sebarang $r, r_1, r_2 \in R$ dan sebarang $m, m_1, m_2 \in M$. Karena diketahui M adalah modul kanan atas R , maka diperoleh

a. $\mu_{r_1+r_2}(m) = m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2 = \mu_{r_1}(m) + \mu_{r_2}(m)$

b. $\mu_{r_1 r_2}(m) = m \cdot (r_1 r_2) = m \cdot (r_2 r_1) = (m \cdot r_2) \cdot r_1 = \mu_{r_1}(\mu_{r_2}(m)) = (\mu_{r_1} \mu_{r_2})(m)$

Jadi terbukti μ adalah homomorfisma ring atau dengan kata lain terbukti $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ representasi ring R . ■

Diketahui jika R ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah R -modul, maka M merupakan modul kanan atas R ([1]). Sehingga jika M adalah modul representasi dari representasi ring R , maka M merupakan R - R -(bi)modul. Selanjutnya dengan menggunakan sifat ini akan ditunjukkan sifat terdekomposisi dari representasi ring R atas R -modul.

Selanjutnya diberikan definisi representasi terdekomposisi, ireduisibel dan tereduksi lengkap dari representasi ring R atas R' -modul M , yang merupakan perumuman dari representasi ring R atas F -ruang vektor V sebagai berikut:

Definisi 2.6. Misalkan R ring dengan elemen satuan, R' ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah R' -modul. Jika $\mu : R \rightarrow \text{End}_{R'}(M)$ adalah representasi ring R , maka

1. μ disebut representasi terdekomposisi jika M dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung (direct sum) $M = N_1 \oplus N_2$ dengan N_1, N_2 submodul R -invarian dari M .
2. μ disebut representasi ireduisibel, jika submodul R -invarian M hanyalah $\{0\}$ dan M ,
3. μ disebut representasi tereduksi lengkap, jika M dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung berhingga dari submodul R -invarian yang ireduisibel.

Dari Proposisi 2.4, diketahui jika R -modul M adalah modul representasi R , maka setiap submodul $N \subseteq M$ merupakan submodul R -invarian. Sehingga berdasarkan Definisi 2.7, diperoleh

Proposisi 2.7. Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah R -modul. Representasi ring R atas M , yaitu homomorfisma ring $\mu : R \rightarrow \text{End}_R(M)$ dengan $\mu_r(m) = r \cdot m$ untuk setiap $m \in M$ dan untuk setiap $r \in R$ bersifat terdekomposisi jika M dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung $M = N_1 \oplus N_2$ dengan N_1, N_2 submodul dari M

Bukti. Diketahui $M = N_1 \oplus N_2$ dengan N_1, N_2 submodul dari M . karena setiap submodul dari M merupakan submodul R -invarian, maka berdasarkan Definisi 2.6 μ terdekomposisi. ■

Berikut adalah syarat cukup suatu representasi ring R atas R -modul M terdekomposisi

Proposisi 2.8 Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan dan $\mu : R \rightarrow \text{End}_R(M)$ representasi ring R atas R -modul M . Jika modul representasi terdekomposisi, maka terdapat $\theta \in \text{End}_R(M)$ dengan θ bukan automorfisma dan bukan nilpoten ($\theta^n = 0$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$).

Bukti. Diketahui $M = N_1 \oplus N_2$ dengan N_1, N_2 submodul R -invarian dari M , maka berdasarkan Proposisi 2.4 N_1, N_2 submodul M . Didefinisikan θ_i dengan $\theta_i(m) = \theta_i(m_1 + m_2) = m_i$ untuk $i=1,2$. Untuk sebarang $m, m' \in M$ dengan $m = m_1 + m_2$ dan $m' = m'_1 + m'_2$, dan sebarang $r, r_1, r_2 \in R$ berlaku

1. Jika $m = m'$ dan $r_1 = r_2$, maka diperoleh

$$\theta_i(m) = \theta_i(m_1 + m_2) = m_i = m'_i = \theta_i(m'_1 + m'_2) = \theta_i(m')$$

2. Diketahui $m + m' = (m_1 + m_2) + (m'_1 + m'_2) = (m_1 + m'_1) + (m_2 + m'_2)$ dan $rm = r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, maka diperoleh

$$\theta_i(m + m') = (m_i + m'_i) = \theta_i(m) + \theta_i(m') \text{ dan } \theta_i(rm) = rm_i = r \theta_i(m)$$

Jadi terbukti $\theta_i \in \text{End}_R(M)$.

Selanjutnya karena $m_1 = m_1 + 0$ dan $m_2 = 0 + m_2$, maka diperoleh

$$\theta_i(m_i) = m_i = \theta_i^2(m) \text{ dan } \theta_i \theta_j(m) = 0 \quad (5)$$

Dari (5) maka $\theta_i, i = 1,2$ bukan automorfisma dan bukan suatu nilpoten. ■

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa (1) dua representasi ring R atas R' -modul M dan N yaitu μ dan φ , disebut ekuivalen jika terdapat isomorfisma modul $T : M \rightarrow N$ yang memenuhi $T\mu_r = \varphi_r T$ untuk setiap $r \in R$. Untuk kasus $R = R'$, dua representasi ring R atas R -modul M dan R -modul N ekuivalen jika dan hanya jika terdapat R -isomorfisma $T : M \rightarrow N$. (2) Setiap submodul dari R -modul M merupakan submodul R -invarian. (3) Setiap modul representasi M atas R' dari representasi ring R adalah R - R' -(bi)modul. (4) Jika modul representasi M atas R dari representasi ring R terdekomposisi maka terdapat $\theta \in \text{End}_R(M)$ dengan θ bukan automorfisma dan bukan nilpoten.

Daftar Pustaka

- [1] Adkins, W. A., and Weintraub, S. H., 1992, *Algebra : An Approach Via Module Theory*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Burrow, M., 1965, *Representation Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York
- [3] Dummit, D.S., & Foote, R., 1999, *Abstract Algebra*, John Wiley & Sons Inc, New York.
- [4] Wahyuni, S., Wijayanti, I.E., Hijriati, N., 2016, *On Representation Of Polynomial Ring On A Vector Space Via A Linear Transformation*, Seminar Intenasional AMC 2016, Nusa Dua Bali.

Penentuan Penjadwalan Pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung dengan Sistem Persamaan Linear atas Aljabar Maks-Plus

Casilda Reva Kartika, Siswanto, dan Sutrima
Program Studi Matematika FMIPA UNS

Abstrak

Abstrak. Aljabar maks-plus merupakan cabang dari ilmu matematika dalam bidang aljabar. Aljabar maks-plus yang dinotasikan dengan \mathbb{R}_{max} merupakan himpunan dari $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dua operasi hitung maksimum (\oplus) dan penjumlahan (\otimes). Aljabar maks-plus dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu permasalahan yaitu masalah penjadwalan yang merupakan contoh dari Sistem Kejadian Diskrit (SKD). Tujuan dari penelitian ini adalah mengaplikasikan aljabar maks-plus pada sistem penjadwalan transit pesawat di Bandung dengan menentukan waktu kedatangan pesawat. Waktu kedatangan pesawat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ dengan x merupakan waktu keberangkatan pesawat dari bandara asal dan A merupakan matriks yang elemennya berupa penjumlahan durasi penerbangan dengan durasi transit. Hasil dari penelitian ini adalah diperolehnya jadwal keberangkatan setiap pesawat dari masing-masing bandar udara asal dan jadwal kedatangan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung yaitu pada pukul 07:30 WIB, 07:40 WIB, dan 08:30 WIB. Selain itu, diperoleh waktu penutupan *gate 1* dan *gate 2* yaitu masing-masing pada pukul 09:10 WIB dan 09:15 WIB.

Kata Kunci: *aljabar maks-plus, penerbangan, penjadwalan, sistem kejadian diskrit, sistem persamaan linear.*

1. Pendahuluan

Seiring dengan berkembangnya zaman, masalah yang timbul pada suatu sistem semakin berkembang menjadi lebih rumit atau kompleks. Para ahli baik di dunia industri maupun dunia akademik pun tertarik untuk memodelkan, menganalisa, dan mengontrol sistem-sistem yang kompleks. Sistem manufaktur fleksibel, jaringan telekomunikasi, sistem proses paralel, sistem kontrol lalu lintas, serta sistem logistik merupakan contoh dari sistem kompleks dan juga merupakan contoh dari sistem kejadian diskrit (SKD). Suatu SKD adalah sistem yang mempunyai jumlah komponen berhingga yang digunakan oleh para pengguna untuk mencapai suatu tujuan bersama (de Schutter dan van den Boom [7]). Salah satu contoh dari masalah SKD yang dapat diselesaikan dengan menggunakan aljabar maks-plus adalah masalah penjadwalan transportasi [8].

Aljabar maks-plus merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika bidang aljabar yang mempunyai struktur semi lapangan dan dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu operasi maksimum (\oplus) dan penjumlahan (\otimes). Menurut Goverde [4], aljabar maks-plus merupakan contoh khusus dari semiring idempoten, atau dioid, sebagai suatu struktur aljabar formal untuk memecahkan berbagai masalah *path* dalam teori graf dan mempunyai notasi $(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes)$ dengan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Salah satu bidang yang membutuhkan penerapan aljabar maks-plus adalah transportasi. Transportasi mempunyai peranan penting dalam kehidupan bermasyarakat. Tidak hanya transportasi darat, pada zaman ini transportasi udara pun sangat dibutuhkan untuk mendukung manusia dalam bermobilitas. Durasi yang cenderung lebih singkat serta harga tiket yang relatif murah serta stabil menyebabkan masyarakat mulai beralih untuk menggunakan pesawat. Selain itu, dengan berbagai aktivitas yang dimiliki masyarakat, kebutuhan untuk menggunakan alat transportasi seperti pesawat pun semakin beragam.

Sistem penjadwalan penerbangan dapat direpresentasikan dalam bentuk graf berarah, dengan waktu sebagai *vertex*, jarak penerbangan sebagai *edge* serta durasi penerbangan sebagai bobot dari *edge*. Selanjutnya, graf tersebut diubah ke dalam bentuk matriks dan diselesaikan dengan menggunakan sistem persamaan linear atas aljabar maks-plus. Pada penelitian ini, aljabar maks-plus diaplikasikan dalam sistem penjadwalan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung yang mengacu pada Heidergott [6] dan Baccelli [2] yang menerapkan aljabar maks-plus pada masalah penjadwalan transportasi serta Andersen [1] dan Subiono [8] yang secara khusus menerapkan aljabar maks-plus pada masalah penjadwalan pesawat secara di suatu bandara.

2. Aljabar Maks-Plus

Menurut Heidergott [5], aljabar maks-plus dinotasikan sebagai $(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes)$ dengan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Aljabar maks-plus mempunyai dua operasi yaitu maksimum (\oplus) dan penjumlahan (\otimes), didefinisikan oleh

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \text{ dan } \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

untuk semua $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}_{max}$.

Mengacu pada Farlow [3], sifat-sifat dasar dari aljabar maks-plus adalah asosiatif, komutatif, distributif, terdapat elemen identitas yaitu \mathbf{e} terhadap (\oplus) dan $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ terhadap (\otimes) serta idempoten. Untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$ dan untuk semua $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan

$$\begin{aligned} x^{\otimes n} &= \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n \text{ kali}} \\ &= \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ kali}} \\ &= n \times x \end{aligned}$$

Sedangkan untuk $n = \mathbf{0}$ didefinisikan $x^n = \mathbf{e} = \mathbf{0}$.

3. Matriks dalam \mathbb{R}_{max}

Menurut Farlow [3], himpunan matriks berukuran $n \times m$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$ dalam \mathbb{R}_{max} dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{max}^{n \times m}$. Operasi matriks dalam \mathbb{R}_{max} didefinisikan sebagai

(1) untuk $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$,

$$[\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}]_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \oplus \mathbf{b}_{ij} = \max(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij})$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$,

(2) untuk $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times p}$ dan $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{max}^{p \times m}$,

$$[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p \mathbf{a}_{ik} \otimes \mathbf{b}_{kj} = \max_{k \in \{1, 2, \dots, p\}} (\mathbf{a}_{ik} + \mathbf{b}_{kj})$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$.

4. Sistem Persamaan Linear

Menurut Tam [9], jika diberikan $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dan $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, maka diperoleh

$$A \otimes x = b \tag{4.1}$$

yang merupakan sistem persamaan linear aljabar maks-plus satu sisi atau sistem persamaan linear aljabar maks-plus. Dengan menggunakan notasi pada aljabar konvensional, sistem (4.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \max_{j=1, \dots, n} (a_{ij} + x_j) &= b_i, \quad i \in M \\ \max_{j=1, \dots, n} (a_{ij} + x_j - b_i) &= 0, \quad i \in M. \end{aligned}$$

Jika diberikan matriks $\bar{A} = (a_{ij}) = (a_{ij} - b_i)$, maka akan diperoleh suatu sistem baru dengan sisi kanan dari sistem persamaan (4.1) adalah nol, seperti

$$\bar{A} \otimes x = 0 \tag{4.2}$$

sehingga dapat dikatakan bahwa sistem (4.2) telah dinormalisasi. Jika diberikan $B = \text{diag}(-b_1, -b_2, \dots, -b_m)$, maka akan diperoleh

$$B \otimes A \otimes x = \bar{A} \otimes x = 0.$$

5. Hasil dan Pembahasan

5.1. Sistem Penjadwalan Pesawat

Pada aplikasi ini akan dibahas mengenai penerbangan domestik yang terdapat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung. Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung memiliki rute atau relasi penerbangan dengan kota Denpasar, Balikpapan, Bandar Lampung, Banjarmasin, Batam, Makassar, Medan, Padang, Palembang, Pekanbaru, Semarang, Solo, Surabaya dan Yogyakarta. Sedangkan maskapai penerbangan yang melayani rute penerbangan domestik antara Bandung dengan empat belas kota tersebut adalah Lion Air (JT), AirAsia (QZ), Citilink (QG), Garuda Indonesia (GA), NAM (IN), Wings Air (IW), Kalstar (KD) dan XpressAir (XN). Kemudian dicari waktu perjalanan atau durasi masing-masing penerbangan dalam satuan menit. Berikut ini diberikan data berupa rute dan durasi penerbangan yang diambil dari situs traveloka [10] yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Data Penerbangan Domestik menuju BDO

Dari	Maskapai	Durasi (menit)	Dari	Maskapai	Durasi (menit)
Denpasar	JT	105	Palembang	QG	85
Denpasar	QZ	115	Pekanbaru	QG	110
Denpasar	QG	85	Pekanbaru	QZ	100
Denpasar	GA	105	Semarang	IW	70
Balikpapan	JT	120	Semarang	KD	60
Lampung	IW	60	Solo	IW	70
Lampung	XN	65	Surabaya	JT	75
Banjarmasin	JT	90	Surabaya	IN	80
Batam	JT	105	Surabaya	QZ	75
Batam	QG	100	Surabaya	QG	90
Makassar	JT	130	Surabaya	GA	80
Medan	JT	140	Surabaya	IW	155

Lanjutan dari Tabel 1.					
Dari	Maskapai	Durasi (menit)	Dari	Maskapai	Durasi (menit)
Medan	QG	150	Yogyakarta	JT	65
Padang	XN	115	Yogyakarta	IW	70
Palembang	XN	70			

Untuk lebih memudahkan dalam membuat model, dilakukan pemisalan terhadap durasi penerbangan dan waktu keberangkatan pesawat dari bandar udara asal yaitu masing-masing d_i dan x_i dengan $i = 1, 2, \dots, 29$ seperti yang dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Pemisalan Durasi dan Waktu Keberangkatan

Dari	Maskapai	d_i	x_i	Dari	Maskapai	d_i	x_i
Denpasar	JT	d_1	x_1	Palembang	QG	d_{16}	x_{16}
Denpasar	QZ	d_2	x_2	Pekanbaru	QG	d_{17}	x_{17}
Denpasar	QG	d_3	x_3	Pekanbaru	QZ	d_{18}	x_{18}
Denpasar	GA	d_4	x_4	Semarang	IW	d_{19}	x_{19}
Balikpapan	JT	d_5	x_5	Semarang	KD	d_{20}	x_{20}
Lampung	IW	d_6	x_6	Solo	IW	d_{21}	x_{21}
Lampung	XN	d_7	x_7	Surabaya	JT	d_{22}	x_{22}
Banjarmasin	JT	d_8	x_8	Surabaya	IN	d_{23}	x_{23}
Batam	JT	d_9	x_9	Surabaya	QZ	d_{24}	x_{24}
Batam	QG	d_{10}	x_{10}	Surabaya	QG	d_{25}	x_{25}
Makassar	JT	d_{11}	x_{11}	Surabaya	GA	d_{26}	x_{26}
Medan	JT	d_{12}	x_{12}	Surabaya	IW	d_{27}	x_{27}
Medan	QG	d_{13}	x_{13}	Yogyakarta	JT	d_{28}	x_{28}
Padang	XN	d_{14}	x_{14}	Yogyakarta	IW	d_{29}	x_{29}
Palembang	XN	d_{15}	x_{15}				

Oleh karena Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung hanya mempunyai dua *gate* untuk keberangkatan domestik, maka b_1 dan b_2 masing-masing menyatakan waktu penutupan *gate 1* dan *gate 2* pada Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung. Sedangkan durasi transfer diantara dua puluh sembilan kedatangan dan dua keberangkatan pesawat adalah a_{ij} dengan $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, \dots, 29$. Untuk durasi transfer pesawat diambil waktu sebesar 40 menit baik untuk a_{1j} maupun a_{2j} . Waktu transit sebesar 40 menit sendiri diambil dari standar waktu transit maskapai Garuda Indonesia yang merupakan *Full Board Airlines* dan memiliki waktu transit lebih lama jika dibandingkan maskapai penerbangan lainnya yang merupakan *Low Cost Airlines*. Untuk waktu penutupan *gate 1* (b_1) dan *gate 2* (b_2) diperoleh dari penambahan dua waktu penerbangan yang memiliki durasi paling lama yaitu 150 menit dan 155 menit dengan durasi transfer pesawat yaitu 40 menit. Diketahui terdapat dua pesawat terhubung yang sudah menanti masing-masing di *gate 1* dan *gate 2*.

5.2. Model Aljabar Maks-Plus

Berdasarkan data yang terdapat pada Tabel 1 dan pemisalan, model aljabar maks-plus pada penentuan waktu kedatangan pesawat diberikan dalam persamaan berikut

$$\begin{aligned} \max(d_1 + a_{11} + x_1, d_2 + a_{12} + x_2, \dots, d_{29} + a_{129} + x_{29}) &= b_1 \\ \max(d_1 + a_{21} + x_1, d_2 + a_{22} + x_2, \dots, d_{29} + a_{229} + x_{29}) &= b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(d_1 \otimes a_{11} \otimes x_1, d_2 \otimes a_{12} \otimes x_2, \dots, d_{29} \otimes a_{129} \otimes x_{29}) &= b_1 \\ \max(d_1 \otimes a_{21} \otimes x_1, d_2 \otimes a_{22} \otimes x_2, \dots, d_{29} \otimes a_{229} \otimes x_{29}) &= b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d_1 \otimes a_{11} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{12} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{129} \otimes x_{29}) &= b_1 \\ (d_1 \otimes a_{21} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{22} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{229} \otimes x_{29}) &= b_2 \end{aligned}$$

dan mempunyai bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} (d_1 \otimes a_{11} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{12} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{129} \otimes x_{29}) \\ (d_1 \otimes a_{21} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{22} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{229} \otimes x_{29}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ((d_1 \otimes a_{11}) \otimes x_1) \oplus ((d_2 \otimes a_{12}) \otimes x_2) \oplus \dots \oplus ((d_{29} \otimes a_{129}) \otimes x_{29}) \\ ((d_1 \otimes a_{21}) \otimes x_1) \oplus ((d_2 \otimes a_{22}) \otimes x_2) \oplus \dots \oplus ((d_{29} \otimes a_{229}) \otimes x_{29}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \otimes a_{11} & d_2 \otimes a_{12} & \dots & d_{29} \otimes a_{129} \\ d_1 \otimes a_{21} & d_2 \otimes a_{22} & \dots & d_{29} \otimes a_{229} \end{pmatrix} \otimes (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{29})^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 + a_{11} & d_2 + a_{12} & \dots & d_{29} + a_{129} \\ d_1 + a_{21} & d_2 + a_{22} & \dots & d_{29} + a_{229} \end{pmatrix} \otimes (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{29})^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu, diperoleh matriks A dan b sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} d_1 + a_{11} & d_2 + a_{12} & \dots & d_{29} + a_{129} \\ d_1 + a_{21} & d_2 + a_{22} & \dots & d_{29} + a_{229} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 195 \end{pmatrix}.$$

dengan matriks x adalah $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{29})^T$ sehingga diperoleh model aljabar maks-plusnya adalah

$$A \otimes x = b \tag{5.1}$$

dengan x merupakan waktu keberangkatan pesawat dari bandara asal. Banyaknya pesawat yang melayani rute penerbangan domestik menuju Bandung sebanyak empat belas dan banyaknya *gate* keberangkatan di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung adalah dua. Hal ini sama dengan dimensi matriks A yang berukuran 2×29 . Sedangkan matriks b merupakan waktu penutupan *gate 1* dan *gate 2*.

5.3. Jadwal Kedatangan Pesawat

Menurut Subiono [8], waktu keberangkatan pesawat dapat diperoleh dengan menyelesaikan model aljabar maks-plus pada persamaan (5.1). Mengacu pada Tam [9], untuk menyelesaikan persamaan (5.1) digunakan sistem persamaan linear. Pertama-tama yaitu dengan menormalisasikan persamaan (5.1) menjadi $\bar{A} \otimes x = 0$ dengan matriks \bar{A} diperoleh dari hasil $B \otimes A$ dan matriks B

$$B = \text{diag}(-b_1, -b_2) = \begin{pmatrix} -190 & \epsilon \\ \epsilon & -195 \end{pmatrix}.$$

Setelah proses normalisasi, diperoleh dua persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \max & \quad (-45 + x_1, \quad -35 + x_2, \quad -65 + x_3, \quad -45 + x_4, \quad -30 + x_5, \\
 & \quad -90 + x_6, \quad -85 + x_7, \quad -60 + x_8, \quad -45 + x_9, \quad -50 + x_{10}, \\
 & \quad -20 + x_{11}, \quad -10 + x_{12}, \quad 0 + x_{13}, \quad -35 + x_{14}, \quad -80 + x_{15}, \quad = 0, \\
 & \quad -65 + x_{16}, \quad -40 + x_{17}, \quad -50 + x_{18}, \quad -80 + x_{19}, \quad -90 + x_{20}, \\
 & \quad -80 + x_{21}, \quad -75 + x_{22}, \quad -70 + x_{23}, \quad -75 + x_{24}, \quad -60 + x_{25}, \\
 & \quad -70 + x_{26}, \quad -5 + x_{27}, \quad -85 + x_{28}, \quad -80 + x_{29}) \\
 \max & \quad (-50 + x_1, \quad -40 + x_2, \quad -70 + x_3, \quad -50 + x_4, \quad -35 + x_5, \\
 & \quad -95 + x_6, \quad -90 + x_7, \quad -65 + x_8, \quad -50 + x_9, \quad -55 + x_{10}, \\
 & \quad -25 + x_{11}, \quad -15 + x_{12}, \quad 5 + x_{13}, \quad -40 + x_{14}, \quad -85 + x_{15}, \quad = 0, \\
 & \quad -70 + x_{16}, \quad -45 + x_{17}, \quad -55 + x_{18}, \quad -85 + x_{19}, \quad -95 + x_{20}, \\
 & \quad -85 + x_{21}, \quad -80 + x_{22}, \quad -75 + x_{23}, \quad -80 + x_{24}, \quad -65 + x_{25}, \\
 & \quad -75 + x_{26}, \quad 0 + x_{27}, \quad -90 + x_{28}, \quad -85 + x_{29})
 \end{aligned}$$

Sebagai contoh, jika diperhatikan x_1 dari dua persamaan, maka diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
 -45 + x_1 &\leq 0 \text{ atau } x_1 \leq 45, \\
 -50 + x_1 &\leq 0 \text{ atau } x_1 \leq 50
 \end{aligned}$$

oleh karena itu, diperoleh persamaan sebagai berikut

$$x_1 \leq \min(45,50) = -\max(-45, -50) = -(-45) = 45 = x_1^-$$

dengan x_1^- adalah *column maximum* dari kolom pertama. Untuk mencari *column maximum* dari kolom-kolom berikutnya, dapat digunakan cara penyelesaian seperti pada kolom pertama sehingga diperoleh matriks x

$$x = \begin{pmatrix} 45 & 35 & 65 & 45 & 30 & 90 & 85 & 60 & 45 & 50 & 20 & 10 & 0 & 35 & 80 \\ 65 & 45 & 50 & 80 & 90 & 80 & 75 & 70 & 75 & 60 & 70 & -5 & 85 & 80 \end{pmatrix}^T.$$

Keberangkatan awal pesawat dari bandara asal dimulai pada pukul 06.00 WIB untuk kota Bandar Lampung, Batam, Medan, Padang, Palembang, Pekanbaru, Semarang, Solo, Surabaya serta Yogyakarta dan pukul 06.00 WITA untuk kota Denpasar, Balikpapan, Banjarmasin dan Makassar sehingga menit ke-0 dimulai pada spukul tersebut. Untuk lebih jelas, jadwal keberangkatan pesawat dari bandara asal dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Jadwal Keberangkatan Pesawat menuju BDO

Dari	Maskapai	x_i^-	Pukul (WIB)	Dari	Maskapai	x_i^-	Pukul (WIB)
Denpasar	JT	45	05.45	Palembang	QG	65	07.05
Denpasar	QZ	35	05.35	Pekanbaru	QG	40	06.40
Denpasar	QG	65	06.05	Pekanbaru	QZ	50	06.50
Denpasar	GA	45	05.45	Semarang	IW	80	07.20
Balikpapan	JT	30	05.30	Semarang	KD	90	07.30
Lampung	IW	90	07.30	Solo	IW	80	07.20
Lampung	XN	85	07.25	Surabaya	JT	75	07.15

Lanjutan dari Tabel 3.

Dari	Maskapai	\bar{x}_i	Pukul (WIB)	Dari	Maskapai	\bar{x}_i	Pukul (WIB)
Banjarmasin	JT	60	06.00	Surabaya	IN	70	07.10
Batam	JT	45	06.45	Surabaya	QZ	75	07.15
Batam	QG	50	06.50	Surabaya	QG	60	07.00
Makassar	JT	20	05.20	Surabaya	GA	70	07.10
Medan	JT	10	06.10	Surabaya	IW	-5	05.55
Medan	QG	0	06.00	Yogyakarta	JT	85	07.25
Padang	XN	35	06.35	Yogyakarta	IW	80	07.20
Palembang	XN	80	07.20				

Selanjutnya dari jadwal pada Tabel 3 akan dicari jadwal kedatangan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung dengan cara menjumlahkan \bar{x}_i dengan durasi penerbangan d_i . Untuk lebih jelasnya, jadwal kedatangan pesawat dapat dilihat pada Tabel 4. Sedangkan $b_1 = 190$ memiliki arti bahwa *gate 1* ditutup pada pukul 09.10 WIB dan $b_2 = 195$ memiliki arti bahwa *gate 2* ditutup pada pukul 09.15 WIB.

Tabel 4. Jadwal Kedatangan Pesawat di BDO

Dari	Maskapai	Pukul (WIB)	Dari	Maskapai	Pukul (WIB)
Denpasar	JT	07.30	Palembang	QG	08.30
Denpasar	QZ	07.40	Pekanbaru	QG	08.30
Denpasar	QG	07.30	Pekanbaru	QZ	08.30
Denpasar	GA	07.30	Semarang	IW	08.30
Balikpapan	JT	07.30	Semarang	KD	08.30
Lampung	IW	08.30	Solo	IW	08.30
Lampung	XN	08.30	Surabaya	JT	08.30
Banjarmasin	JT	07.30	Surabaya	IN	08.30
Batam	JT	08.30	Surabaya	QZ	08.30
Batam	QG	08.30	Surabaya	QG	08.30
Makassar	JT	07.30	Surabaya	GA	08.30
Medan	JT	08.30	Surabaya	IW	08.30
Medan	QG	08.30	Yogyakarta	JT	08.30
Padang	XN	08.30	Yogyakarta	IW	08.30
Palembang	XN	08.30			

6. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan sebelumnya, diperoleh jadwal keberangkatan pesawat dari bandara asal menuju Bandung seperti yang terlihat pada Tabel 3. Untuk jadwal kedatangan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung dapat dilihat pada Tabel 4. Sedangkan untuk $b_1 = 190$ memiliki arti bahwa *gate 1* ditutup pada pukul 09.10 WIB dan $b_2 = 195$ memiliki arti bahwa *gate 2* ditutup pada pukul 09.15 WIB.

Daftar Pustaka

- [1] Andersen, Maria H., 2002, *Max-Plus Algebra: Properties and Applications*, Master's thesis, Laramie, WY.
- [2] Bacelli, Francois, G. Cohen, G. J. Olsder, and J. P. Quadrat, 1992, *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*, J. Wiley and Sons, New York.
- [3] Farlow, Kasie G., 2009, *Max-Plus Algebra*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.
- [4] Goverde, Rob M. P., 2005, *Punctuality of Railway Operations and Timetable Stability Analysis*, Delft University of Technology, Netherlands.
- [5] Heidergott, B., 2006, *Max Plus Algebra and Queues*, EURANDOM research fellow Vrije Universiteit Departemen of Econometrics and Operations Research De Boelelaan, The Netherlands.
- [6] Heidergott, B., G. Olsder, and J. Van de Woude, 2006, *Max Plus at Work*, Princeton University Press, New Jersey.
- [7] Schutter, B. de, and T. Van den Boom, 2008, *Max-Plus Algebra and Max-Plus Linear Discrete Systems: An Introduction*. Proceedings of The 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08), Sweden, pp. 36-42.
- [8] Subiono, 2014, *Aljabar Maxplus dan Terapannya*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [9] Tam, Kin Po, 2010, *Optimizing and Approximating Eigenvectors in Max-Algebra*, The University of Birmingham, UK, pp. 18-21.
- [10] www.traveloka.com. Diakses pada hari Rabu, tanggal 20 Juli 2016.

Pemodelan Jaringan dan Analisa Penjadwalan Kereta Api Komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus

^[1]Scolastika Lintang Rengganis Radityani, ^[2]Marcellinus Andy Rudhito
Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sanata Dharma
Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta
^[1]justlintang@gmail.com
^[2]rudhito@usd.ac.id

Abstrak

Saat ini, penjadwalan kereta api komuter di Daerah Operasi VI (DAOP VI) Yogyakarta dibuat berdasarkan kebutuhan penumpang (konsumen), sehingga belum terjadi proses sinkronisasi. Proses sinkronisasi dalam jaringan transportasi penting untuk dilakukan guna menjamin tersedianya sarana transportasi, dalam hal ini kereta api komuter, pada saat penumpang dari suatu kereta api dengan rute tertentu ingin berpindah ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda. Oleh karena itu, pada penelitian ini dibuat suatu desain penjadwalan untuk keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan memperhatikan proses sinkronisasi. Salah satu cara untuk memudahkan penyusunan jadwal berdasarkan aturan sinkronisasi adalah menggunakan aljabar max-plus.

Penelitian ini bertujuan untuk menyusun suatu model jaringan dan menganalisa penjadwalan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta menggunakan aljabar max-plus. Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi pustaka yang didukung dengan data lapangan dan proses komputasi dengan program *MATLAB*.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa matriks dari model jaringan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta dinyatakan sebagai matriks yang tidak *irreducible* (tereduksi). Hal ini diduga karena tidak semua lintasan terdapat kereta api komuter yang siap melayani sehingga lintasan tersebut seperti dianggap tidak ada. Berdasarkan hasil perhitungan dengan program *MATLAB*, didapatkan nilai eigen maksimum yaitu $\lambda(A) = 786$ dan vektor eigen yang berupa bilangan real, sehingga dapat dibuat penjadwalan kereta api komuter yang tersinkronisasi. Nilai eigen tersebut menyatakan periode keberangkatan kereta api komuter dari masing-masing stasiun, yaitu setiap 786 menit sekali atau setiap 13 jam 6 menit sekali. Sedangkan waktu keberangkatan awal kereta api komuter di setiap stasiun diperoleh dari vektor eigen.

Kata Kunci: *aljabar max-plus, nilai eigen, vektor eigen, jadwal, kereta api komuter*

1. Pendahuluan

Saat ini, pembuatan jadwal keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta didasarkan pada kebutuhan penumpang (konsumen), sehingga belum terjadi proses sinkronisasi. Proses sinkronisasi dalam jaringan transportasi penting untuk dilakukan guna menjamin tersedianya sarana transportasi pada saat penumpang ingin berpindah rute. Menurut Subiono (2015: 1), sinkronisasi memerlukan ketersediaan beberapa sumber pada saat yang bersamaan, dalam hal ini memerlukan ketersediaan kereta api untuk menjamin terjadinya perpindahan penumpang dari suatu kereta api dengan rute tertentu ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda.

Melihat pentingnya sinkronisasi dalam jaringan transportasi, maka pada penelitian ini dibuat suatu desain penjadwalan untuk keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan memperhatikan proses sinkronisasi.

Salah satu cara untuk memudahkan penyusunan jadwal berdasarkan aturan sinkronisasi adalah menggunakan aljabar max-plus. Langkah awal dalam melakukan penelitian ini adalah mengumpulkan data yang diperlukan seperti denah lintas DAOP VI Yogyakarta, jadwal keberangkatan, dan rute yang dilewati oleh kereta api komuter. Selanjutnya, dibuat aturan sinkronisasi untuk graf rute pilihan yang menjamin terjadinya perpindahan penumpang dari suatu kereta api dengan rute tertentu ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda. Kemudian, dibentuk suatu model matematika berdasarkan aturan sinkronisasi tersebut. Berdasarkan model ini, sistem dianalisis untuk membuat suatu desain penjadwalan yang memperhatikan sinkronisasi dan menentukan kesesuaiannya dengan kondisi real.

Penelitian ini memiliki beberapa asumsi, yaitu yang pertama kecepatan kereta api komuter dianggap tetap sehingga waktu tempuh kereta api komuter dari suatu stasiun ke stasiun yang lain dianggap tetap. Waktu tempuh inilah yang menjadi bobot pada graf rute pilihan. Rata-rata waktu tempuh merupakan hasil perhitungan dari total waktu yang diambil dari selisih jadwal waktu kedatangan dan waktu keberangkatan kereta api komuter, dan dari penelitian 2 kereta api komuter Prambanan Ekspres yang beroperasi pada pagi hari pukul 09.10-10.25 dan pada sore hari pada pukul 17.00-18.15 WIB. Selanjutnya, asumsi kedua yaitu distribusi jumlah kereta api pada setiap lintasan dianggap tetap sehingga distribusi jumlah kereta api pada waktu acuan yaitu pukul 09:42 dianggap tetap. Distribusi dan posisi kereta api pada waktu acuan tersebut ditentukan dari jadwal kereta api komuter yang sudah ada. Kemudian, asumsi yang ketiga yaitu jenis kereta api komuter yang digunakan dalam model tidak dibedakan. Dalam penelitian ini, proses komputasi untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks A yang didapatkan dari hasil pemodelan dilakukan dengan program *MALTB*. Nilai eigen menyatakan periode keberangkatan kereta api komuter dari masing-masing stasiun, sedangkan waktu keberangkatan awal kereta api komuter di setiap stasiun diperoleh dari vektor eigen.

Dalam penelitian ini, masalah yang ditemukan memiliki perbedaan dengan dua penelitian serupa sebelumnya, dimana kedua penelitian tersebut memiliki persamaan yaitu terdapat minimal satu kereta api pada setiap lintasan dan tidak terdapat perbedaan intensitas pada suatu lintasan tertentu. Sedangkan dalam penelitian ini, terjadi perbedaan kerapatan artinya tidak semua lintasan yang dimodelkan dilewati oleh kereta api komuter dan terjadi perbedaan kepadatan atau intensitas pada rute Yogyakarta – Solo Balapan PP. Hal ini terlihat dari jadwal keberangkatan kereta api komuter yang telah ada. Dua penelitian serupa yang berhubungan dengan aplikasi aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api tersebut, yaitu penelitian yang dilakukan oleh Geert Jan Olsder, Subiono, dan Michael Mc Gettrick (2000, dalam Subiono, 2002) yang membentuk sebuah model dari seluruh sistem kereta api di Belanda menggunakan aljabar max-plus dan penelitian yang dilakukan oleh Ahmad Afif (2015) untuk membuat penjadwalan kereta api yang tepat demi mengurangi kelemahan kereta api dalam melayani ketepatan waktu kedatangan dan keberangkatan.

2. Landasan Teori

2.1. Definisi dan Sifat Dasar Aljabar Max-Plus

Secara singkat, aljabar max-plus dapat didefinisikan sebagai himpunan semua bilangan real $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dilengkapi dengan operasi maksimum (disingkat *max*) yang dinotasikan dengan \oplus (dibaca *o-plus*) dan operasi

penjumlahan (atau *plus*) yang dinotasikan dengan \oplus (dibaca *o-times*), serta membentuk semilapangan idempoten. Seperti dalam aljabar biasa, prioritas urutan operasi dalam \mathbb{R}_{\max} juga penting untuk diperhatikan. Apabila tidak diberikan tanda kurung, maka operasi \otimes mempunyai prioritas yang lebih tinggi daripada operasi \oplus .

Operasi lainnya dalam \mathbb{R}_{\max} yang memiliki prioritas tertinggi dibandingkan dengan operasi \oplus dan \otimes adalah operasi pangkat. Pangkat $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dengan \mathbf{N} adalah himpunan semua bilangan asli, dari elemen $x \in \mathbb{R}_{\max}$ yang dinotasikan dengan $x^{\otimes n}$. Notasi $x^{\otimes n}$ kemudian didefinisikan sebagai berikut: $x^{\otimes 0} := 0$ dan $x^{\otimes n} := x \otimes x^{\otimes n-1}$, untuk $n = 1, 2, \dots$.

Didefinisikan juga $\varepsilon^{\otimes 0} := 0$ dan $\varepsilon^{\otimes n} := \varepsilon$, untuk $n = 1, 2, \dots$.

Diperhatikan bahwa $x^{\otimes k} := \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_k = \underbrace{x + x + \dots + x}_k = kx$, dengan operasi perkalian pada bilangan real.

2.2. Matriks dan Vektor di \mathbb{R}_{\max}

2.2.1. Matriks di \mathbb{R}_{\max}

Definisi 1. Diberikan $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n} := \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}, i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$.

a. Diketahui $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, didefinisikan

$A \oplus B$ adalah matriks yang unsur ke- ij -nya:

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$$

b. Diketahui $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$, $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, didefinisikan

$\alpha \otimes A$ adalah matriks yang unsur ke- ij -nya:

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes a_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$$

c. Diketahui $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, didefinisikan

$A \otimes B$ adalah matriks yang unsur ke- ij -nya:

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$$

$(\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah matriks ε dan elemen satuan adalah matriks E . Matriks E disebut juga sebagai *matriks identitas max-plus* dan matriks ε disebut sebagai *matriks nol max-plus*.

Definisi 2. Pangkat $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dengan \mathbf{N} adalah himpunan semua bilangan asli, dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dinotasikan dengan $A^{\otimes k}$. Notasi $A^{\otimes n}$ kemudian didefinisikan sebagai berikut:

$$A^{\otimes 0} := E_n \text{ dan } A^{\otimes k} := A \otimes A^{\otimes k-1}, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots$$

Jadi, untuk sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ berlaku :

$$(\alpha \oplus A)^{\otimes k} = \alpha^{\otimes k} \otimes A^{\otimes k}; \text{ untuk } k = 1, 2, \dots$$

Untuk sebarang $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ didefinisikan $\text{trace}(A) := \bigoplus_{i=1}^n a_{ii}$.

2.2.2. Vektor di \mathbb{R}_{\max}

Definisi 3. Diberikan semiring komutatif $(\mathbf{S}, +, \times)$ dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1 . Semimodul \mathbf{M} atas \mathbf{S} adalah semigrup komutatif $(\mathbf{M}, +)$ bersama operasi perkalian skalar $\bullet : \mathbf{S} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, yang dituliskan dengan $(\alpha, x) \mapsto \alpha \bullet x$, yang memenuhi aksioma berikut:

$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{S}$ dan $\forall x, y \in \mathbf{M}$ berlaku:

- a. $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$
- b. $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$
- c. $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \bullet \beta) \bullet x$
- d. $1 \bullet x = x$
- e. $0 \bullet x = 0$

Suatu elemen dalam semimodul disebut **vektor**.

Diberikan vektor-vektor x_1, x_2, \dots, x_n di dalam semimodul \mathbf{M} dan skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ di dalam semiring komutatif \mathcal{S} . Didefinisikan *kombinasi linear* dari vektor-vektor x_1, x_2, \dots, x_n adalah suatu bentuk aljabar $\alpha_1 \bullet x_1 + \alpha_2 \bullet x_2 + \dots + \alpha_n \bullet x_n$.

2.3. Matriks dan Graf di \mathbb{R}_{\max}

Definisi 4. (Graf Bobot (*Precedence Graph*), Schutter, 1996 dalam Rudhito, 2016)

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Graf bobot atau preseden dari A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, D)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $D = \{(j, i) | w(i, j) = a_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Definisi 5. (M. Andy Rudhito, 2016)

Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, bobot suatu lintasan $\rho = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l$ dalam graf bobot $G(A)$ adalah $|\rho|_w = a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}}$. Bobot rata-rata lintasan ρ , dinotasikan dengan $|\bar{\rho}|$, didefinisikan sebagai $\frac{1}{|\rho|_l} \cdot |\rho|_w$ (dengan operasi perkalian dan pembagian pada bilangan real).

$(A^{\otimes k})_{st}$ adalah bobot maksimum semua lintasan dalam $G(A)$ dengan panjang k , dengan t sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya. Namun, apabila tidak ada lintasan dengan panjang k dari t ke s , maka bobot maksimum didefinisikan sama dengan ε . Selanjutnya, dijelaskan mengenai bobot rata-rata maksimum untuk sirkuit elementer, dengan maksimum diambil atas semua sirkuit elementer dalam suatu graf.

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, dengan graf bobotnya $G(A) = (V, E)$. Bobot maksimum dari semua sirkuit yang memiliki panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $G(A)$ dinotasikan sebagai $(A^{\otimes k})_{ii}$. Maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit yang memiliki panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $G(A)$ atas seluruh titik i adalah $\bigoplus_{k=1}^n (A^{\otimes k})_{ii} = \text{trace}(A^{\otimes k})$ dan bobot rata-ratanya adalah $\frac{1}{k} \text{trace}(A^{\otimes k})$. Kemudian, diambil maksimum atas sirkuit dengan panjang $k \leq n$, yaitu semua sirkuit elementer, diperoleh suatu rumus untuk bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $G(A)$, yang dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(A)$, yaitu

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \text{trace}(A^{\otimes k}) \right)$$

2.4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen di \mathbb{R}_{\max}

Seperti halnya pada matriks real, konsep nilai eigen dan vektor eigen juga dipelajari pada matriks di \mathbb{R}_{\max} . Penjelasan diawali dengan membahas kembali konsep dalam aljabar max-plus dan graf yang berkaitan dengan

pembahasan nilai eigen dan vektor eigen. Berikut didefinisikan terlebih dahulu suatu matriks yang graf bobotnya terhubung kuat.

Definisi 6. (Subiono, 2015)

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dikatakan irreducible (tak-tereduksi) jika graf $G(A)$ adalah strongly connected (terhubung kuat). Lebih lanjut, matriks tak-tereduksi adalah matriks yang tidak dapat dikonstruksi menjadi bentuk matriks segitiga atas.

Teorema 1. *Matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ irreducible (tak-tereduksi) jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.*

Selanjutnya, dibahas mengenai konsep nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks di \mathbb{R}_{\max} .

Definisi 7. (Schutter, 1996 dalam M. Andy Rudhito, 2016)

Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ disebut nilai eigen max-plus matriks A jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{\max}^n$ dengan $v \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Vektor v tersebut disebut vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ .

Berikut diberikan teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen aljabar max-plus. Untuk setiap matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $\lambda_{\max}(A)$ adalah nilai eigen \mathbb{R}_{\max} .

Lemma 1. *Jika matriks irreducible (tak-tereduksi) $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ mempunyai nilai eigen λ dengan x adalah vektor eigen \mathbb{R}_{\max} yang bersesuaian dengan λ , maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Teorema 2. *Jika matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ irreducible (tak-tereduksi), maka matriks A mempunyai nilai eigen \mathbb{R}_{\max} tunggal.*

3. Pemodelan Jaringan Kereta Api Komuter

3.1. Sistem Transportasi Kereta Api Komuter di DAOP VI Yogyakarta dan Penentuan Rute Pilihan

Sebelum menentukan rute pilihan yang digunakan dalam pemodelan penelitian ini, berikut dijelaskan tujuh rute yang dilalui oleh kereta api komuter (kereta api lokal) yang berada di DAOP VI Yogyakarta. Data ini diperoleh dari PT Kereta Api Indonesia Daerah Operasi (DAOP) VI Yogyakarta.

Rute 1 (Kereta Api Prambanan Ekspres): Stasiun Kutoarjo – Stasiun Jenar – Stasiun Wates – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Maguwo – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Maguwo – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Wates – Stasiun Jenar – Stasiun Kutoarjo.

Rute 2 (Kereta Api Prambanan Ekspres): Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Maguwo – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Maguwo – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta.

Rute 3 (Kereta Api Sidomukti): Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan.

Rute 4 (Kereta Api Madiun Jaya): Stasiun Madiun – Stasiun Walikukun – Stasiun Sragen – Stasiun Solo Jebres – Stasiun Solo Balapan – Stasiun

Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Maguwo – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Maguwo – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Solo Jebres – Stasiun Sragen – Stasiun Walikukun – Stasiun Madiun.

Rute 5 (Kereta Api Joglo Kerto): Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari – Stasiun Klaten – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Wates – Stasiun Jenar – Stasiun Kutoarjo – Stasiun Kebumen – Stasiun Gombong – Stasiun Sumpiuh – Stasiun Kroya – Stasiun Purwokerto – Stasiun Kroya – Stasiun Sumpiuh – Stasiun Gombong – Stasiun Kebumen – Stasiun Kutoarjo – Stasiun Jenar – Stasiun Wates – Stasiun Yogyakarta – Stasiun Lempuyangan – Stasiun Klaten – Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan.

Rute 6 (Kereta Api Kalijaga): Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Salem – Stasiun Gundih – Stasiun Telawa – Stasiun Kedungjati – Stasiun Brumbung – Stasiun Semarang Tawang – Stasiun Semarang Poncol – Stasiun Semarang Tawang – Stasiun Brumbung – Stasiun Kedungjati – Stasiun Telawa – Stasiun Gundih – Stasiun Salem – Stasiun Solo Balapan – Stasiun Purwosari.

Rute 7 (Kereta Api Bathara Kresna): Stasiun Purwosari – Stasiun Solo Kota – Stasiun Sukoharjo – Stasiun Pasar Nguter – Stasiun Wonogiri – Stasiun Pasar Nguter – Stasiun Sukoharjo – Stasiun Solo Kota – Stasiun Purwosari.

Selanjutnya, dilakukan pemilihan rute dalam penelitian ini dengan menentukan stasiun yang akan menjadi stasiun transfer, yaitu stasiun-stasiun besar dan menengah yang memungkinkan penumpang berpindah dari suatu kereta api dengan rute tertentu ke kereta api lainnya dengan rute yang berbeda. Stasiun-stasiun tersebut adalah Stasiun Purwokerto (A), Stasiun Wates (1), Stasiun Kutoarjo (B), Stasiun Yogyakarta (C), Stasiun Lempuyangan (2), Stasiun Klaten (3), Stasiun Purwosari (4), Stasiun Solo Balapan (D), Stasiun Sragen (5), Stasiun Madiun (E), Stasiun Wonogiri (6), Stasiun Semarang Tawang (F), dan Stasiun Semarang Poncol (G). Pemilihan rute ini menggunakan semua rute kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta yaitu rute 1 sampai dengan rute 7 yang telah dijelaskan di atas, kecuali rute 3. Hal ini dikarenakan kereta api Sidomukti yang beroperasi pada rute 3 hanya beroperasi pada hari Minggu saja, sehingga rute kereta api Sidomukti pada rute 3 tidak diikutsertakan sebagai rute pilihan. Penelitian ini hanya memperhitungkan rute kereta api komuter yang beroperasi pada hari efektif (Senin-Sabtu dan bukan hari libur).

3.2. Sinkronisasi dan Penyusunan Model Matematika

Sebelum membentuk model matematika dari jaringan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, terlebih dahulu dibuat aturan sinkronisasi waktu keberangkatan kereta api komuter dari suatu stasiun yang harus menunggu datangnya kereta api komuter lainnya yang menuju ke stasiun tersebut. Hal ini bertujuan untuk menjamin bahwa penumpang dapat berpindah dari suatu kereta pada rute tertentu ke kereta yang lain dengan rute yang berbeda. Setelah itu, dilakukan tahap awal dalam proses memodelkan, yaitu mendefinisikan variabel untuk setiap busur yang menghubungkan stasiun satu dengan stasiun yang lain pada keenam rute yang telah ditetapkan.

Tabel 1. Definisi Variabel Kereta Api Komuter

Variabel	Definisi Keberangkatan Kereta Api Komuter dari:
$x_1(k-1)$	B menuju 1 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_2(k-1)$	1 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_3(k-1)$	C menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_4(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_5(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_6(k-1)$	4 menuju D pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_7(k-1)$	D menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_8(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_9(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_{10}(k-1)$	2 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_{11}(k-1)$	C menuju 1 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_{12}(k-1)$	1 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 1
$x_{13}(k-1)$	C menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{14}(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{15}(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{16}(k-1)$	4 menuju D pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{17}(k-1)$	D menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{18}(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{19}(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{20}(k-1)$	2 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 2
$x_{21}(k-1)$	E menuju 5 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{22}(k-1)$	5 menuju D pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{23}(k-1)$	D menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{24}(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{25}(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{26}(k-1)$	2 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{27}(k-1)$	C menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{28}(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{29}(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{30}(k-1)$	4 menuju D pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{31}(k-1)$	D menuju 5 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{32}(k-1)$	5 menuju E pada saat ke- $(k-1)$ di rute 3
$x_{33}(k-1)$	D menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{34}(k-1)$	4 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{35}(k-1)$	3 menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{36}(k-1)$	2 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{37}(k-1)$	C menuju 1 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{38}(k-1)$	1 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{39}(k-1)$	B menuju A pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{40}(k-1)$	A menuju B pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{41}(k-1)$	B menuju 1 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{42}(k-1)$	1 menuju C pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{43}(k-1)$	C menuju 2 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{44}(k-1)$	2 menuju 3 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{45}(k-1)$	3 menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4
$x_{46}(k-1)$	4 menuju D pada saat ke- $(k-1)$ di rute 4

$x_{47}(k-1)$	4 menuju D pada saat ke- $(k-1)$ di rute 5
$x_{48}(k-1)$	D menuju F pada saat ke- $(k-1)$ di rute 5
$x_{49}(k-1)$	F menuju G pada saat ke- $(k-1)$ di rute 5
$x_{50}(k-1)$	G menuju F pada saat ke- $(k-1)$ di rute 5
$x_{51}(k-1)$	F menuju D pada saat ke- $(k-1)$ di rute 5
$x_{52}(k-1)$	D menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 5
$x_{53}(k-1)$	4 menuju 6 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 6
$x_{54}(k-1)$	6 menuju 4 pada saat ke- $(k-1)$ di rute 6

Berdasarkan data waktu tempuh antar stasiun dan banyak kereta api komuter pada waktu acuan (pukul 09.42), aturan sinkronisasi, dan Tabel 1 di atas, maka dapat disusun model aljabar max-plus dari setiap rute yang telah ditentukan, yaitu jika $x_i(k), i = 1, 2, 3, \dots, 54$ adalah keberangkatan kereta api komuter ke- $(k-1)$, maka persamaan-persamaan hasil pemodelan dapat dinyatakan dalam model umum \mathbb{R}_{\max} yaitu $x(k) = A \otimes x(k-1)$ untuk $k = 1, 2, 3, \dots$ dan $x(k-1) = (x_1(k-1), x_2(k-1), \dots, x_{54}(k-1))$, dengan A adalah matriks yang berukuran 54×54 dan vektor $x(k-1)$ adalah waktu keberangkatan yang ke- $(k-1)$ dari semua kereta api. Untuk memudahkan penulisan, elemen-elemen matriks A yang sama dengan ε dituliskan sebagai $\varepsilon = .$

4. Desain Penjadwalan Kereta Api Komuter

Matriks A yang didapatkan dari hasil pemodelan kemudian dianalisis dengan cara menghitung nilai eigen dan vektor eigen matriks A . Kemudian, berdasarkan nilai eigen dan vektor eigen tersebut dibuat suatu desain penjadwalan keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta.

Dalam penelitian ini, untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A digunakan bantuan aplikasi dari program *MATLAB*. Dengan menggunakan program tersebut, diperoleh bahwa matriks A tidak ireduksibel (tereduksi). Matriks tidak ireduksibel memiliki arti bahwa nilai eigennya mungkin tidak tunggal dan vektor eigennya mungkin tidak merupakan bilangan real. Berdasarkan hasil komputasi dengan program *MATLAB*, didapatkan nilai eigen maksimum yaitu $\lambda(A) = 786$ dan vektor eigen matriks A berupa bilangan real yang berukuran 1×54 , yaitu:

8	-55	-276	-441	-564	60
44	-29	-180	-394	-532	-574
-715	71	-124	-124	-509	-119
-711	75	-119	-119	-505	-14
-680	-680	-91	-97	-483	
-652	-652	-60	-75	-461	
-124	-124	-509	-55	-119	
-119	-119	-505	-32	-114	
-877	-91	-474	0	46	
-846	-59	-446	-685	53	

Nilai eigen dalam penelitian ini diartikan sebagai periode keberangkatan kereta api di setiap stasiun asal adalah setiap $\lambda(A)$ sekali, yaitu setiap 786 menit sekali atau 13 jam 6 menit sekali. Sedangkan vektor eigen matriks A digunakan sebagai keadaan awal keberangkatan kereta api komuter di setiap stasiun. Untuk mempermudah penyusunan jadwal keberangkatan awal kereta api komuter, maka didefinisikan vektor keberangkatan awal yang baru yaitu v' sebagai berikut.

$$v' = v \otimes (-\min(v))$$

dengan

$$\min(v) = \min_{1 \leq i \leq 54} [v]_{i,1}$$

Sehingga diperoleh vektor akhir keberangkatan v' yang berukuran 1×54 adalah:

885	822	601	436	313	937
921	848	697	483	345	303
162	948	753	753	368	758
166	952	758	758	372	863
197	197	786	780	394	
225	225	817	802	416	
753	753	368	822	758	
758	758	372	845	763	
0	786	403	877	923	
31	818	431	192	930	

Vektor v' tersebut kemudian dinyatakan sebagai waktu keberangkatan awal penjadwalan. Selanjutnya, disusun jadwal periodik keberangkatan kereta api komuter dari setiap stasiun dengan periodik antar keberangkatan kereta api komuter di setiap stasiun adalah $\lambda(A) = 786$. Karena hasil $[v]_{9,1} = [0]$, maka keberangkatan kereta api komuter x_9 yaitu keberangkatan dari Stasiun Klaten menuju ke Stasiun Lempuyangan dijadikan sebagai titik acuan penjadwalan. Keberangkatan awal yang sebenarnya dari Stasiun Klaten menuju ke Stasiun Lempuyangan adalah pada pukul 05.53 WIB. Oleh karena itu, waktu keberangkatan awal pada setiap stasiun akan berubah menyesuaikan titik acuan tersebut.

Berikut ini disajikan desain keberangkatan kereta api yang dipilih setelah melakukan proses sinkronisasi di enam rute yang telah dibahas. Diasumsikan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta beroperasi selama 24 jam.

Tabel 2. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 1:
Kutoarjo – Solo Balapan PP

Rute		Jadwal Keberangkatan I	Jadwal Keberangkatan II
Kutoarjo	Wates	5:26	18:32
Wates	Yogyakarta	6:02	19:08
Yogyakarta	Lempuyangan	6:29	19:35
Lempuyangan	Klaten	6:33	19:39
Klaten	Purwosari	7:04	20:10
Purwosari	Solo Balapan	7:32	20:38

Solo Balapan	Purwosari	7:32	20:38
Purwosari	Klaten	7:37	20:43
Klaten	Lempuyangan	8:05	21:11
Lempuyangan	Yogyakarta	8:36	21:42
Yogyakarta	Wates	8:41	21:47
Wates	Kutoarjo	9:07	22:13

Tabel 3. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 2:
Yogyakarta – Solo Balapan PP

Rute		Jadwal Keberangkatan I	Jadwal Keberangkatan II
Yogyakarta	Lempuyangan	6:29	19:35
Lempuyangan	Klaten	6:33	19:39
Klaten	Purwosari	7:04	20:10
Purwosari	Solo Balapan	7:32	20:38
Solo Balapan	Purwosari	7:32	20:38
Purwosari	Klaten	7:37	20:43
Klaten	Lempuyangan	8:05	21:11
Lempuyangan	Yogyakarta	8:27	21:33

Tabel 4. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 3:
Madiun – Solo Balapan PP

Rute		Jadwal Keberangkatan I	Jadwal Keberangkatan II
Madiun	Sragen	0:42	13:48
Sragen	Solo Balapan	2:18	15:24
Solo Balapan	Purwosari	3:14	16:20
Purwosari	Klaten	3:39	16:45
Klaten	Lempuyangan	3:42	16:48
Lempuyangan	Yogyakarta	4:18	17:24
Yogyakarta	Lempuyangan	5:31	18:37
Lempuyangan	Klaten	5:35	18:41
Klaten	Purwosari	6:06	19:12
Purwosari	Solo Balapan	6:34	19:40
Solo Balapan	Sragen	6:39	19:45
Sragen	Madiun	7:26	20:32

Tabel 5. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 4:
Solo Balapan – Purwokerto PP

Rute		Jadwal Keberangkatan I	Jadwal Keberangkatan II
------	--	------------------------	-------------------------

Solo Balapan	Purwosari	3:14	16:20
Purwosari	Klaten	3:19	16:25
Klaten	Lempuyangan	3:41	16:47
Lempuyangan	Yogyakarta	4:03	17:09
Yogyakarta	Wates	4:25	17:31
Wates	Kutoarjo	4:46	17:52
Kutoarjo	Purwokerto	5:18	18:24
Purwokerto	Kutoarjo	6:59	20:05
Kutoarjo	Wates	9:00	22:06
Wates	Yogyakarta	9:32	22:38
Yogyakarta	Lempuyangan	9:55	23:01
Lempuyangan	Klaten	9:59	23:05
Klaten	Purwosari	10:21	23:27
Purwosari	Solo Balapan	10:43	23:49

Tabel 6. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 5:
Puwosari – Semarang Poncol PP

Rute		Jadwal Keberangkatan I	Jadwal Keberangkatan II
Purwosari	Solo Balapan	2:59	16:05
Solo Balapan	Semarang Tawang	3:04	16:10
Semarang Tawang	Semarang Poncol	6:04	19:10
Semarang Poncol	Semarang Tawang	6:11	19:17
Semarang Tawang	Solo Balapan	6:18	19:24
Solo Balapan	Purwosari	8:50	21:56

Tabel 7. Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Rute 6:
Puwosari – Wonogiri PP

Rute		Jadwal Keberangkatan I	Jadwal Keberangkatan II
Purwosari	Wonogiri	2:59	16:05
Wonogiri	Purwosari	5:04	18:10

Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa adanya perbedaan kondisi dengan dua penelitian serupa sebelumnya, yaitu terjadi perbedaan kerapatan artinya tidak semua lintasan yang dimodelkan dilewati oleh kereta api komuter dan terjadi perbedaan kepadatan atau intensitas pada rute Yogyakarta – Solo Balapan PP, diduga menyebabkan kesimpulan matriks oleh program *MATLAB* menjadi matriks yang tidak ireduzibel (tereduksi). Meskipun tidak

ireduisibel ternyata tetap didapatkan vektor eigen yang berupa bilangan real. Kemudian, terlihat bahwa nilai keperiodikan untuk sistem ini relatif besar, yaitu $\lambda(A) = 786$ menit atau 13 jam 6 menit, sehingga dalam satu hari hanya dapat terjadi dua kali keberangkatan apabila mempertimbangkan proses sinkronisasi dan diasumsikan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta beroperasi selama 24 jam. Oleh karena itu, apabila desain penjadwalan yang tersinkronisasi tersebut akan digunakan oleh PT KAI untuk membuat jadwal keberangkatan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, maka pembuatan jadwal keberangkatannya adalah dengan menambahkan salah satu jadwal keberangkatan yang terbentuk ke jadwal keberangkatan yang saat ini sudah ada. Pemilihan jadwal keberangkatan yang tersinkronisasi tersebut disesuaikan dengan jadwal keberangkatan yang telah ada dan mengacu pada kebutuhan penumpang (konsumen) sehingga diperoleh jadwal keberangkatan yang optimal.

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan penelitian dan hasil pembahasan yang telah dilakukan pada pemodelan jaringan dan analisis penjadwalan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Jaringan kereta api komuter di Daerah Operasi VI (DAOP VI) Yogyakarta dapat dimodelkan menggunakan aljabar max-plus dengan bentuk umum \mathbb{R}_{\max} yaitu $x(k) = A \otimes x(k-1)$, dimana A adalah matriks yang berukuran 54×54 dan vektor $x(k-1)$ adalah waktu keberangkatan yang ke- $(k-1)$ dari semua kereta api.
2. Penjadwalan kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta memiliki periode keberangkatan masing-masing stasiun, yaitu setiap $\lambda(A)$ menit sekali, dengan $\lambda(A) = 786$. Sedangkan, waktu keberangkatan awal kereta api komuter di setiap stasiun diperoleh dari vektor eigen.

Adapun beberapa saran yang dapat penulis berikan bagi penelitian selanjutnya, yaitu:

1. Penelitian ini menentukan stasiun-stasiun transfer untuk memodelkan sistem kereta api komuter di DAOP VI Yogyakarta, sehingga ada beberapa stasiun pemberhentian kecil yang tidak diikutsertakan dalam pemodelan. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya dapat memperhitungkan stasiun-stasiun pemberhentian kecil tersebut agar didapatkan penjadwalan yang lebih sesuai dengan kondisi realnya.
2. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa matriks hasil pemodelan merupakan matriks yang tidak ireduisibel. Dalam penelitian ini penulis masih memberikan dugaan mengenai penyebab terjadinya hal tersebut. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya dapat meneliti lebih jauh guna mencari tahu penyebab yang sebenarnya.
3. Penelitian ini menghasilkan suatu desain penjadwalan yang mempertimbangkan proses sinkronisasi. Bagi penelitian selanjutnya, selain dapat membuat desain penjadwalan yang tersinkronisasi juga dapat memberikan hasil penelitian untuk menentukan di stasiun mana penumpang turun dan menggunakan kereta api apa saja, apabila dikehendaki waktu optimal yang dapat ditempuh saat penumpang ingin berpindah jalur.
4. Penelitian ini menunjukkan bahwa matriks hasil pemodelan adalah matriks yang tidak ireduisibel dan memiliki vektor eigen yang berupa bilangan real. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya dapat meneliti ciri-ciri keadaan

dari suatu sistem yang matriks hasil pemodelannya tidak ireduabel tetapi dapat menghasilkan vektor eigen berupa bilangan real.

Daftar Pustaka

- [1] Afif Ahmad, 2015, *Aplikasi Petri Net dan aljabar Max-Plus Pada Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur*, Tesis, Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [2] Kereta Api Prambanan Ekspres, (tanggal akses: 17 Juni 2016), https://id.m.wikipedia.org/wiki/Kereta_api_Prambanan_Ekspres.
- [3] M. Andy Rudhito, 2016, *Aljabar Max-plus dan Penerapannya*, Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.
- [4] Subiono, 2002, *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, TRAIL Thesis Series, The Netherlands: Delft University Press.
- [5] Subiono, 2015, *Aljabar Max-Plus dan Terapannya*, Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penerapan Kriptografi Kurva Eliptik atas Lapangan Berhingga Prima pada Algoritma ElGamal

Ila Nurlaila Setyowati^{*,1}, Nikken Prima Puspita^{*}, Harjito^{*}
Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang, Semarang

¹ila.nurlaila20@gmail.com

Abstrak

Algoritma ElGamal merupakan algoritma kriptografi asimetris yang menggunakan dua jenis kunci, yaitu kunci publik dan kunci privat. Tingkat keamanan algoritma ini didasarkan pada masalah logaritma diskrit yang membutuhkan kunci dengan ukuran yang cukup besar sehingga menimbulkan masalah penyimpanan dan proses perhitungan. Pengimplementasian kurva eliptik pada algoritma ElGamal dapat mengurangi besarnya bilangan prima yang digunakan tanpa mengurangi tingkat keamanan data. Algoritma ini mengubah plainteks dalam bentuk titik kemudian dilakukan proses enkripsi yang menghasilkan cipherteks berupa pasangan titik. Hasil dekripsi dari cipherteks yang juga berupa titik akan diubah kembali ke dalam plainteks aslinya. Kriptografi kurva eliptik dapat diterapkan pada lapangan berhingga prima dan lapangan berhingga biner. Pada makalah ini pembahasan akan difokuskan pada algoritma ElGamal yang digunakan dalam proses enkripsi dan dekripsi kriptografi kurva eliptik atas lapangan berhingga prima, beserta konsep-konsep matematis yang melandasinya, yang meliputi teori bilangan dan struktur aljabar. Hasil dari penelitian ini berupa Algoritma Kriptografi Kurva Eliptik ElGamal dan bagaimana menggunakan Algoritma Kriptografi Kurva Eliptik ElGamal untuk melakukan proses enkripsi dan dekripsi sebuah pesan.

Kata Kunci: *kriptografi, kurva eliptik, ElGamal, lapangan berhingga prima*

1. Pendahuluan

Algoritma ElGamal pertama kali diperkenalkan oleh Taher ElGamal pada tahun 1985. Pada umumnya, algoritma ini digunakan untuk tanda tangan digital, namun kemudian dimodifikasi sehingga bias juga digunakan untuk enkripsi dan dekripsi. Keamanan Algoritma ElGamal terletak pada kesulitan perhitungan logaritma diskrit pada bilangan modulo prima yang besar sehingga upaya untuk menyelesaikan masalah logaritma ini menjadi sangat sukar.

Kriptografi kurva eliptik adalah algoritma kriptografi kunci publik yang menggunakan konsep matematika kurva eliptik. Kunci publik dari kriptografi kurva eliptik berupa titik sedangkan kunci privatnya berupa bilangan integer. Kunci publik didapatkan dengan mengalikan kunci privat dengan titik dasar yang merupakan elemen pembangun grup eliptik. Kekuatan kurva eliptik terletak pada perkalian titik dengan skalar. Mudah untuk mengalikan titik dengan skalar, namun jika hanya

diketahui 2 titik, sulit untuk menebak bilangan integer yang merupakan kunci privat itu.

2. Dasar Teori

2.1. Invers Modulo

Dalam aritmetika bilangan riil, invers dari perkalian adalah pembagian. Misalnya invers dari 4 adalah $\frac{1}{4}$, karena $4 \times \frac{1}{4} = 1$. Namun, dalam aritmetika modulo masalah menghitung inversnya lebih rumit. Salah satu algoritma yang sering digunakan untuk mencari nilai invers modulo adalah Teorema Perluasan Euclid (Teorema *Extended Euclid*).

Teorema 2.1[1] *Jika a dan m relatif prima dan $m > 1$, maka invers dari $a \pmod{m}$ ada. Invers dari $a \pmod{m}$ adalah bilangan bulat a^{-1} sedemikian hingga*

$$a \times a^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

Bukti:

Diketahui a dan m relatif prima, maka $PBB(a, m) = 1$ dan terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian hingga

$$xa + ym = 1$$

Yang mengimplikasikan bahwa $xa + ym \equiv 1 \pmod{m}$. Karena $ym \equiv 0 \pmod{m}$, maka $xa \equiv 1 \pmod{m}$. Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa x adalah invers dari $a \pmod{m}$. ■

Pembuktian Teorema 2.1 menunjukkan bahwa untuk mencari invers dari $a \pmod{m}$, harus dibuat kombinasi linier dari a dan m sama dengan 1. Koefisien x dari kombinasi linier tersebut merupakan invers dari $a \pmod{m}$.

2.2. Lapangan Berhingga

Definisi 2.2 [1] Lapangan berhingga (*Finite Field*) adalah lapangan dengan jumlah elemen yang terbatas atau berhingga. Jika jumlah elemen himpunan adalah n , maka notasiya F_n atau $GF(n)$.

Lapangan berhingga disebut juga *Galois Fields* untuk menghormati matematikawan Perancis, Evariste Galois (1811-1832), orang pertama yang mempelajari lapangan berhingga secara menyeluruh dan lengkap. Lapangan berhingga yang digunakan dalam kriptografi umumnya adalah lapangan berhingga prima dan lapangan berhingga primer. Berikut diberikan beberapa definisi untuk memperjelas pembagian antara keduanya:

Definisi 2.3 [2] $GF(q)$ disebut lapangan berhingga dengan order q dan q merupakan pangkat prima (*prime power*). Jika $q = p^m$ dimana p bilangan prima dan m bilangan integer positif, maka p disebut sebagai karakteristik dari $GF(q)$ dan m disebut derajat perluasan dari $GF(q)$.

Definisi 2.4 [2] $GF(q)$ adalah lapangan berhingga dengan $q = p^m$. Jika $m = 1$, maka $GF(p)$ disebut *Galois Prime Field* atau lapangan berhingga prima.

Definisi 2.5 [2] $GF(q)$ adalah lapangan berhingga dengan $q = p^m$. Jika $p = 2$, maka $GF(2^m)$ disebut *Galois Binnery Field* atau lapangan berhingga biner.

Definisi 2.6 [3] Lapangan berhingga prima $GF(p)$ adalah suatu lapangan berhingga yang berisi p elemen. Anggota-anggota dari $GF(p)$ direpresentasikan sebagai himpunan bilangan bulat dari 0 sampai $p - 1$ atau ditulis $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai berikut:

- Operasi penjumlahan, yaitu jika $a, b \in GF(p)$, maka $a + b = r$ dalam $GF(p)$, dengan $r \in [0, p - 1]$ adalah sisa pembagian dari bilangan bulat $a + b$ dibagi dengan p . Operasi tersebut dinamakan operasi penjumlahan modulo p dan ditulis: $a +_p b = r(mod p)$.
- Operasi perkalian, yaitu jika $a, b \in GF(p)$, maka $a \cdot b = s$ dalam $GF(p)$, dengan $s \in [0, p - 1]$ adalah sisa pembagian dari bilangan bulat $a \cdot b$ dibagi dengan p . Operasi tersebut dinamakan operasi perkalian modulo p dan ditulis: $a \times_p b = s(mod p)$.
- Invers penjumlahan, yaitu jika $a \in GF(p)$, maka b invers dari a dalam $GF(p)$ adalah solusi tunggal untuk persamaan $a +_p b = 0(mod p)$.
- Invers Perkalian, yaitu jika $a \in GF(p)$, maka b invers dari a dalam $GF(p)$ adalah solusi tunggal untuk persamaan $a \times_p b = 1(mod p)$.

Dari Definisi 2.6 diketahui bahwa elemen identitas penjumlahan adalah 0 dan elemen identitas perkalian adalah 1.

2.3. Grup Eliptik atas $GF(p)$

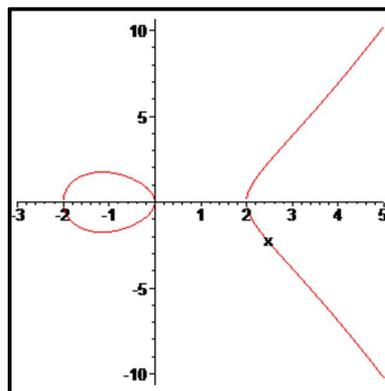
Diberikan definisi kurva eliptik atas $GF(p)$ sebagai berikut:

Definisi 2.7 [2] Misalkan $a, b \in GF(p)$ merupakan konstanta yang memenuhi $4A^3 + 27B^2 \neq 0(mod p)$ dan $p > 3$ dengan p merupakan bilangan prima. Kurva eliptik E atas $GF(p)$ didefinisikan dengan persamaan:

$$y^2 = x^3 + Ax + B(mod p) \tag{1}$$

bersama dengan titik khusus \mathcal{O} yang disebut titik *infinity*.

Hanya persamaan kurva eliptik pada bilangan riil yang dapat direpresentasikan dalam gambar. Berikut gambar kurva eliptik $y^2 = x^3 - 4x$.



Gambar 1. Kurva eliptik $y^2 = x^3 - 4x$

Grup eliptik dapat dipandang sebagai himpunan yang terdiri dari titik-titik kurva eliptik atas $GF(p)$. Pasangan (x, y) dimana $x, y \in GF(p)$ adalah titik pada kurva. Jika (x, y) memenuhi persamaan (1), termasuk titik \mathcal{O} . Himpunan semua titik pada E dinotasikan dengan $E(GF(p))$ atau $E_p(A, B)$.

Operasi penjumlahan kurva eliptik pada $GF(p)$ sesuai dengan operasi penjumlahan pada \mathbb{Z}_p . Operasi penjumlahan kurva eliptik pada $GF(p)$ didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.8 [2] Jika $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, dan $R = (x_3, y_3)$ maka $P + Q = R$ dapat dihitung sebagai berikut:

- a. Jika P dan Q adalah titik yang berbeda dengan $x_1 \neq x_2$, maka operasi penjumlahan $P + Q = R$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$$

- b. Jika P dan Q adalah titik yang sama atau $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$, maka bisa ditulis $R = P + P$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + A}{2y_1}$$

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$$

- c. Jika P adalah titik pada kurva eliptik, maka operasi perkalian P didefinisikan dengan penjumlahan yang berulang kali.

$$kP = P + P + P + \dots \text{ (sebanyak } k \text{)}$$

- d. Jika Q adalah refleksi P atau $P = -Q$ dengan $x_1 = x_2$ dan $y_1 \neq y_2$, maka menghasilkan titik *invinity*.

$$P + (-P) = \mathcal{O}$$

Dari Definisi 2.8 dapat disimpulkan bahwa

- Penjumlahan menghasilkan titik yang merupakan anggota E (himpunan titik kurva eliptik dan titik *invinity*).
- Penjumlahan bersifat asosiatif, yaitu $(P + Q) + R = P + (Q + R)$.
- Penjumlahan bersifat komutatif, yaitu $P + Q = Q + P$.
- Terdapat elemen identitas, yaitu titik *invinity* (\mathcal{O}).
- Terdapat invers penjumlahan untuk tiap titik $P \in E$.

Oleh karena itu, himpunan titik-titik pada kurva eliptik dan titik *invinity* beserta operasi penjumlahan membentuk grup Abelian.

Sebelum membahas tentang residu kuadrat dan perhitungan pada kurva eliptik, dibahas dulu tentang grup pergandaan.

Definisi 2.9[4] Himpunan bilangan bulat modulo n ditulis \mathbb{Z}_n , adalah himpunan atas bilangan bulat $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ dengan operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian modulo n .

Definisi 2.10[4] Grup pergandaan dari \mathbb{Z}_n adalah $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(a, n) = 1\}$. Khususnya, jika n prima maka $\mathbb{Z}_n^* = \{a \mid 1 \leq a \leq n - 1\}$.

Berikut diberikan definisi dari residu kuadrat:

Definisi 2.11 [4] Diberikan $a \in \mathbb{Z}_n^*$. Bilangan a disebut residu kuadrat modulo n atau akar kuadrat modulo n jika terdapat $x \in \mathbb{Z}_n^*$ sedemikian sehingga $x^2 \equiv a \pmod{n}$. Jika tidak ada nilai x yang memenuhi, maka a disebut non-residu kuadrat modulo n .

Himpunan dari semua residu kuadrat modulo n dinotasikan dengan Q_n . Sedangkan himpunan dari semua non-residu modulo n dinotasikan dengan \overline{Q}_n .

Contoh 2.1

Diberikan $A = 1$, $B = 2$ dan $p = 23$. Maka persamaan kurva eliptik yang dimaksud adalah $y^2 = x^3 + x + 2$.

Kemudian diperiksa apakah nilai A dan B memenuhi persyaratan $4A^3 + 27B^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

$$\begin{aligned} 4A^3 + 27B^2 &= 4(1^3) + 27(2^2) \\ &= 112 \\ &\equiv 20 \pmod{23} \\ &\not\equiv 0 \pmod{23} \end{aligned}$$

Selanjutnya dicari residu kuadrat modulo 23.

Tabel 1. Mencari Q_{23}

$x^2 \pmod{23}$	$(n - x)^2 \pmod{23}$	Hasil
$1^2 \pmod{23}$	$22^2 \pmod{23}$	1
$2^2 \pmod{23}$	$21^2 \pmod{23}$	4
$3^2 \pmod{23}$	$20^2 \pmod{23}$	9
$4^2 \pmod{23}$	$19^2 \pmod{23}$	16
$5^2 \pmod{23}$	$18^2 \pmod{23}$	2
$6^2 \pmod{23}$	$17^2 \pmod{23}$	13
$7^2 \pmod{23}$	$16^2 \pmod{23}$	3
$8^2 \pmod{23}$	$15^2 \pmod{23}$	18
$9^2 \pmod{23}$	$14^2 \pmod{23}$	12
$10^2 \pmod{23}$	$13^2 \pmod{23}$	8
$11^2 \pmod{23}$	$12^2 \pmod{23}$	6

Didapatkan $Q_{23} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$

Untuk mencari elemen dari $E_{23}(1, 2)$, dihitung nilai dari $y^2 = x^3 + x + 2$ untuk $0 \leq x \leq 23$ dan ditentukan apakah y^2 berada pada Q_{13} .

Berikut tabel untuk mencari elemen dari $E_{23}(1, 2)$:

Tabel 2. Mencari $E_{23}(1, 2)$

x	y^2	$y^2 \in Q_{13}$	y_1	y_2	x	y^2	$y^2 \in Q_{13}$	y_1	y_2
0	2	Ya	5	18	12	17	Tidak	-	-
1	4	Ya	2	21	13	4	Ya	2	21
2	12	Ya	9	14	14	0	Tidak	-	-
3	9	Ya	3	20	15	11	Tidak	-	-
4	1	Ya	1	22	16	20	Tidak	-	-
5	17	Tidak	-	-	17	10	Tidak	-	-
6	17	Tidak	-	-	18	10	Tidak	-	-
7	7	Tidak	-	-	19	3	Ya	7	16
8	16	Ya	4	19	20	18	Ya	8	15
9	4	Ya	2	21	21	15	Tidak	-	-
10	0	Tidak	-	-	22	0	Tidak	-	-
11	10	Tidak	-	-	23	2	Ya	5	18

Jadi, himpunan solusi persamaan kurva eliptik $E_{23}(1, 2)$ memuat titik-titik:

$$E_{23}(1,2) = \left\{ \begin{array}{l} (0,5), (0,18), (1,2), (1,21), (2,9), \\ (2,14), (3,3), (3,20), (4,1), (4,22), \\ (8,4), (8,19), (13,2), (13,21), (19,7), \\ (19,6), (20,8), (20,15), (23,5), (23,18) \end{array} \right\}$$

Definisi 2.12 [5] Parameter-parameter domain kurva eliptik atas $GF(p)$ didefinisikan sebagai six-tuple T .

$$T = (p, GF(p), A, B, G, n, h)$$

- p : bilangan prima
- $GF(p)$: lapangan berhingga prima yang memiliki elemen $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$
- A, B : koefisien persamaan kurva eliptik $y^2 = x^3 + Ax + B \pmod{p}$. $A, B \in GF(p)$
- G : titik dasar, yaitu elemen pembangun grup eliptik $E_p(A, B)$.
- n : order dari G , yaitu bilangan bulat positif terkecil dengan $n.G = \mathcal{O}$.
- h : kofaktor. $h = \# E/n$, $\# E$ adalah jumlah titik dalam grup eliptik $E_p(A, B)$.

2.4. Algoritma ElGamal

Menurut Menezes [6], ada 3 tahapan dalam algoritma ElGamal, yaitu pembentukan kunci, enkripsi dan dekripsi.

- a. **Pembentukan Kunci**
Setiap pengguna berhak menentukan kunci publik dan kunci privat yang akan digunakan bersama. Berikut langkah-langkah yang harus dilakukan:
 - i) Menentukan elemen G yang berupa titik sebagai elemen pembangun dari $E_p(A, B)$.
 - ii) Memilih bilangan bulat $\alpha \in [1, p - 1]$ secara random, p merupakan bilangan prima.
 - iii) Menghitung $\beta = G^\alpha$
 - iv) β adalah kunci publik dan α adalah kunci privat.
- b. **Enkripsi**
Diasumsikan bahwa Ani mengirim plainteks yang dienkripsi kepada Budi dan Ani telah mendapatkan kunci publik Budi, yaitu β . Untuk mengenkripsi plainteks dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
 - i) Merepresentasikan plainteks menjadi bilangan bulat, misalnya m
 - ii) Memilih bilangan bulat k secara random, $k \in [1, p - 1]$
 - iii) Menghitung $C_1 = G^k$ dan $C_2 = m(\beta^k)$
 - iv) Mengirim cipherteks $C_k = (C_1, C_2)$ kepada Budi
- c. **Dekripsi**
 - i) Menghitung $(C_1)^{-\alpha}$. α adalah kunci privat Budi
 - ii) Menghitung $m = C_2 \cdot (C_1)^{-\alpha}$. m adalah representasi dari plainteks
 - iii) Mengkonversi m menjadi plainteks

3. Kurva Eliptik ElGamal

3.1. Algoritma Kurva Eliptik ElGamal

Ada 5 algoritma dalam Kurva Eliptik ElGamal [7], yaitu

1. **Algoritma penentuan kunci**
Jika Ani hendak mengirim pesan kepada Budi, maka yang akan mereka gunakan adalah kunci privat dan kunci public milik Budi. Berikut langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mendapatkan kunci public dan kunci privat:
 - a. Menentukan bilangan bulat $n_B \in [1, n - 1]$ secara random.
 - b. Menghitung $P_B = n_B \cdot G$.
 - c. n_B adalah kunci privat Budi dan P_B adalah kunci public Budi.
2. **Algoritma representasi plainteks ke titik**
Diasumsikan s_j suatu bilangan bulat dalam $GF(p)$ dan peluang sebuah bilangan random untuk menjadi bilangan kuadrat adalah $1/2$. Sehingga kemungkinan tidak menemukan sebuah bilangan kuadrat untuk ϵ percobaan adalah $2^{-\epsilon}$. Berikut langkah-langkah untuk merepresentasikan plainteks ke titik berdasarkan asumsi-asumsi di atas

- a. Merepresentasikan plainteks menjadi bilangan bulat $m > 0$ dimana $m \cdot \varepsilon < p$.
 - b. Diasumsikan $x_j = m \cdot \varepsilon + j$, untuk $j \in [0, \varepsilon - 1]$ dan menghitung $s_j = x_j^3 + Ax_j + B$ sampai diperoleh nilai $s_j^{(p-1)/2} = 1 \pmod{p}$.
 - c. Titik $P_M(x_j, y_j)$ adalah representasi dari plainteks.
3. Algoritma enkripsi
- Untuk mengenkripsi pesan sebelum dikirim ke penerima, langkah-langkah yang harus dilakukan adalah
- a. Memilih bilangan bulat k secara random, dimana $k \in [1, n - 1]$.
 - b. Menghitung $P_1 = k \cdot G$ dan $P_2 = P_M + k \cdot P_B$.
 - c. Kirim cipherteks berupa pasangan titik $P_C = (P_1, P_2)$ kepada penerima
4. Algoritma dekripsi
- Berikut langkah-langkah yang harus dilakukan untuk dapat mendekripsi cipherteks:
- a. Mengalikan P_1 dengan kunci privat penerima (n_B) dan menyimpan hasilnya sebagai $M_1 = n_B \cdot P_1$.
 - b. Menghitung $P_2 - M_1$, sehingga diperoleh P_M
5. Algoritma representasi titik ke plainteks
- Diasumsikan $P_M(x_j, y_j)$ adalah representasi dari plainteks. Langkah-Langkah untuk mendapatkan plainteks kembali adalah sebagai berikut
- a. Menghitung $m = \left\lfloor \frac{x_j}{\varepsilon} \right\rfloor$.
 - b. Mengubah bilangan bulat m menjadi plainteks.

3.2. Contoh Enkripsi dan Dekripsi Dengan Kriptografi Kurva Eliptik

Untuk mengenkripsi pesan, akan digunakan panjang kunci 32 bit. Berikut parameter-parameter yang digunakan[8]:

p : 3946183951
 A : 537680305
 B : 1059676324
 G : [1152222263 3133703258]
 n : 3946206427
 ε : 100
 P_B : [3539395206 1802765602]

Misalkan Ani akan mengirim pesan “Hai” kepada Budi.
 Berikut ditentukan banyaknya karakter untuk setiap blok
 l_{pesan} =Panjang pesan = 3 (banyaknya karakter plainteks)
 b_{pesan} =Ceil((32/8)-1) = 3 (dipotong setiap 3 karakter)
 i_{pesan} = Ceil(l_{pesan}/b_{pesan}) = Ceil(3/3) = 1 (pemotongan pesan)

1. Algoritma representasi plainteks ke titik

Tabel 3. Representasi pesan ke karakter biner

Karakter	ASCII	Biner	Biner 8 bit
H	72	1001000	01001000
A	97	1100001	01100001
I	105	1101001	01101001

Sejalanjutnya, 01001000 01100001 01101001 diubah ke bilangan desimal menjadi 4743529. Bilangan desimal tersebut merupakan m .

Kemudian dihitung x_j dan y_j . Diketahui $x_j = m \cdot \varepsilon + j$, $j \in [0, \varepsilon - 1]$, $s_j = x_j^3 + Ax_j + B \pmod{p}$, $y_j = \text{akar dari } s_j$ dan $P_M = (x_j, y_j)$.

Untuk $j = 0$, $x_0 = 4743529(100) + 0 = 474352900$
 $s_0 = 2527581596$
 $y_0 = 950415041$ dan 2995768910
 $(x_0, y_0) = (474352900, 474352900)$ dan
 $(474352900, 2995768910)$

Untuk $j = 1$, $x_1 = 4743529(100) + 1 = 474352901$
 $s_1 = 3715591472$
 $y_1 = 2684027860$ dan 1262156091
 $(x_3, y_3) = (474352901, 2684027860)$ dan
 $(474352901, 1262156091)$

Untuk $j = 2$, $x_2 = 4743529(100) + 2 = 474352902$
 $s_2 = 972857296$
 $y_2 = \text{tidak ada}$

Untuk $j = 3$, $x_3 = 4743529(100) + 3 = 474352903$
 $s_3 = 1471644855$
 $y_3 = 3333277882$ dan 612906069
 $(x_3, y_3) = (474352903, 3333277882)$ dan
 $(474352903, 612906069)$

Lakukan sampai $j = \varepsilon - 1 = 99$. Selanjutnya dipilih 1 titik sebagai P_M .

Misalkan saya ambil $j = 8$, maka $P_M = (474352908, 208492396)$

2. Algoritma enkripsi

Dipilih bilangan bulat k secara random, dimana $k \in [1, n - 1]$. $k = 912120288$

$P_1 = k \cdot P_m = (2123769813, 1535698828)$

$P_2 = P_M + k \cdot P_B = P_M + (736261778, 2068514041) =$
 $(22013756, 3435967186)$

Jadi, ciphertekstnya adalah

$P_C = ((2123769813, 1535698828), (22013756, 3435967186))$

$P_C = (2123769813 \ 1535698828 \ 22013756 \ 3435967186)$

3. Algoritma dekripsi

Kunci Privat Budi adalah $P_B = 2759936539$.

$$P_1 = (P_C(1), P_C(2)) = (2123769813, 1535698828)$$

$$P_2 = (P_C(3), P_C(3)) = (22013756, 3435967186)$$

$$M_1 = P_B \cdot P_1 = (1970269411, 185835105)$$

$$P_M = P_2 - M_1 = P_2 + (-M_1) = (474352908, 208492396)$$

4. Algoritma representasi titik ke plainteks

$$P_M = (x, y) = (474352908, 208492396)$$

$$m = \text{floor}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 4743529$$

Selanjutnya nilai m direpresentasikan ke dalam bentuk biner menjadi
01001000 01100001 01101001 → Hai

4. Kesimpulan dan Saran

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa dalam Algoritma Kriptografi Kurva Eliptik ElGamal, plainteks perlu direpresentasikan dalam bentuk titik dan cipherteks yang dihasilkan merupakan pasangan titik. Banyaknya cipherteks bergantung pada panjang kunci yang digunakan serta panjang pesan plainteks. Selain itu, pesan yang sama dapat dienkripsi menjadi beberapa cipherteks yang berbeda, tergantung pada pemilihan bilangan random k dan titik plainteksnya.

Mengingat proses perhitungan yang panjang dan rumit, langkah baiknya jika dibuat program untuk perhitungan algoritma ini. Program dapat dibuat pada Java, Matlab, Turbo Pascal, maupun program perhitungan yang lain.

Daftar Pustaka

- [1] Sadikin, Rifki. 2012. *Kriptografi untuk Keamanan Jaringan*. Yogyakarta: Andi.
- [2] Hankerson. Darrel, Menezes, A., Vanstone, Scott, *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. Springer, 2004.
- [3] Certicom, *Standards for Efficient Cryptography 1: Elliptic Curve Cryptography*, http://www.secg.org/collateral/sec1_final.pdf, September 2016
- [4] Riyanto, Zaki. 2007. *Pengamanan Pesan Rahasia Menggunakan Algoritma Kriptografi ElGamal atas Grup Pergandaan Z_p^** . Skripsi. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- [5] Certicom, *Standards for Efficient Cryptography 2: Recommended Elliptic Curve Domain Parameter*, http://www.secg.org/collateral/sec2_final.pdf, September 2016
- [6] Menezes, A. J., P. C. V. Oorschot and S. A. Vanstone, *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press LLC, 1997.

- [7] Khudri, Wan. 2005. *Enkripsi dan Dekripsi Data Menggunakan Algoritma Elgamal ECC (Elgamal Elliptic Curve Cryptography)*. Skripsi. Surakarta: Universitas Sebelas Maret.
- [8] Khudri, Wan. *Example ElGamal ECC Encryption ECC Encryption*, http://wan.khudri.com/my_files/skripsi/presentation/Example_ElGamal_ECC_Encryption.pps, September 2016.

Penerapan Aljabar Max-Plus pada Sistem Produksi Sederhana Tas Kulit

Maria Rettian Anggita Sari ¹⁾
Paskalia Pradanti ²⁾

¹⁾²⁾ Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
¹⁾rettian.anggitasari@gmail.com
²⁾paskaliapradanti@gmail.com

Abstrak

Tas kulit merupakan salah satu kerajinan Indonesian yang telah diekspor ke beberapa negara. Pada saat tingkat pemesanan tinggi, produsen terkadang mengalami kesulitan dalam mengatur waktu produksi tas kulit. Hal ini menyebabkan target produksi yang telah direncanakan tidak tercapai. Dengan demikian, dilakukan penelitian untuk mengoptimalkan waktu produksi. Proses produksi tas kulit dimodelkan dengan menggunakan aljabar max-plus. Kemudian, dihitung nilai eigen dan vektor eigen untuk menentukan waktu produksi tas kulit. Hasil penelitian dibandingkan dengan data waktu proses produksi yang digunakan oleh produsen.

Kata kunci : *aljabar, aljabar max-plus, sistem produksi sederhana, produksi tas kulit*

1. Pendahuluan

Tas merupakan salah satu produk yang digunakan atau dikenakan dalam kegiatan sehari-hari, mulai dari tas yang berukuran kecil seperti tas tangan hingga tas yang berukuran besar seperti tas ransel. Bahan yang digunakan untuk membuat tas pun bermacam-macam seperti kain, vinil, dan kulit. Tas kulit merupakan salah satu tas yang mempunyai harga jual yang tinggi karena bahan dasar tas yang digunakan.

Banyak industri rumahan yang memproduksi tas kulit dan telah diekspor ke beberapa negara, salah satunya produk tas kulit Bapak Sarjio yang bertempat di Wirobajan, Yogyakarta. Dalam proses produksi tas, mesin yang digunakan adalah mesin untuk menjahit dan untuk proses pengecapan kulit, sedangkan proses lainnya dikerjakan secara manual. Dengan demikian, produsen harus mengatur waktu proses produksi agar target produksi dapat tercapai.

Pengaturan waktu yang dilakukan yaitu dengan menargetkan jumlah produksi setiap hari yaitu 10 buah tas kulit yang dikerjakan selama 11 jam. Pengaturan waktu seperti ini kurang efisien karena produsen tidak dapat memaksimalkan waktu kerja. Disamping itu jika jumlah tas yang ingin diekspor mencapai ratusan maka dibutuhkan waktu yang cukup lama. Dengan demikian, agar waktu produksi optimal dan produsen dapat selalu memenuhi target produksi maka waktu proses produksi tas kulit dapat ditentukan dengan menggunakan aljabar max-plus dengan memodelkan proses produksi tas kulit. Dalam penelitian ini, model tas kulit yang diproduksi adalah tas kulit ember karena bentuknya yang paling sederhana sehingga waktu proses pengerjaannya pun lebih cepat dibandingkan model tas lainnya. Dinamakan tas ember karena bentuknya menyerupai ember dengan bagian atas lebih lebar daripada bagian bawah tas. Selain itu, produsen juga banyak menerima pesanan untuk model tas ember tersebut.

2. Aljabar Max-Plus

Definisi 1

Aljabar max-plus terdiri dari dua operasi, \oplus dan \otimes yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_{max}$:

$$a \oplus b = \max(a, b),$$

$$a \otimes b = a + b.$$

Operasi \oplus disebut penjumlahan aljabar max-plus dan operasi \otimes disebut perkalian aljabar max-plus. Elemen netral penjumlahan max-plus adalah $-\infty$ yang dinotasikan dengan ε . Elemen netral perkalian adalah 0 yang dinotasikan dengan e .

Operasi \oplus dan \otimes pada \mathbb{R}_{max} dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$.

$$\mathbb{R}_{max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) | A_{ij} \in \mathbb{R}_{max}, i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Definisi 2 (Subiono, 2015, hal 8)

Penjumlahan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$, didefinisikan oleh:

$$[A \oplus B]_{ji} = [A]_{ji} \oplus [B]_{ji} = \max\{[A]_{jk}, [B]_{ki}\} \quad \text{untuk } i \in n \text{ dan } j \in m$$

Definisi 3 (Subiono, 2015, hal 1)

Hasil kali matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times l}$ dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{l \times m}$ didefinisikan oleh:

$$[A \otimes B]_{ji} = \bigoplus_{k=1}^l ([A]_{jk} \otimes [B]_{ki}) = \max_{k=1, \dots, l} \{[A]_{jk} + [B]_{ki}\}$$

Definisi 4 (Schutter dalam Rudhito, 2016, hal 37-38)

Sistem Linear Max-Plus Waktu Invarian (SLMI) adalah Sistem Kejadian Diskrit (SKD) yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A \otimes \mathbf{x}(k) \oplus B \otimes \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C \otimes \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

untuk $k = 1, 2, 3, \dots$, dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{max}^{1 \times n}$. Vektor $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}_{max}^n$ menyatakan keadaan, $\mathbf{u}(k)$ adalah vektor input, dan $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}_{max}^1$ adalah vektor output saat waktu ke- k .

Definisi 5 (Schutter dalam Rudhito, 2016, hal 112-113)

Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ disebut nilai eigen max plus matriks A jika terdapat suatu vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{max}$ dengan $\mathbf{v} \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes \lambda = \lambda \otimes \mathbf{v}$, dengan vektor \mathbf{v} adalah vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ .

2.1. Teori Graf

Graf berarah adalah suatu pasangan $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dimana \mathcal{V} adalah suatu himpunan titik dan $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ adalah suatu himpunan pasangan titik-titik berorde, yang disebut rusuk atau busur. Graf berbobot adalah graf berarah dengan bilangan real (bobot) $w_{ji} \in \mathbb{R}$ yang bersesuaian dengan setiap busur $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$. Graf

berbobot dapat direpresentasikan oleh matriks $W \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dengan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dan n adalah jumlah banyaknya titik pada graf.

Masukan matriks W mewakili bobot dari busur. Jika tidak ada busur dari titik v_i ke titik v_j maka bobot dari w_{ji} adalah $-\infty$. $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ bersama dengan fungsi bobot $w = \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut graf preseden dari W . Jika bobot $w_{ji} \in \mathbb{R}$ merupakan waktu, graf berarah bersesuaian juga merupakan jaringan preseden jendela waktu sedangkan titik mewakili kejadian dan busur mewakili waktu minimum *offset* antara berlangsungnya kejadian.

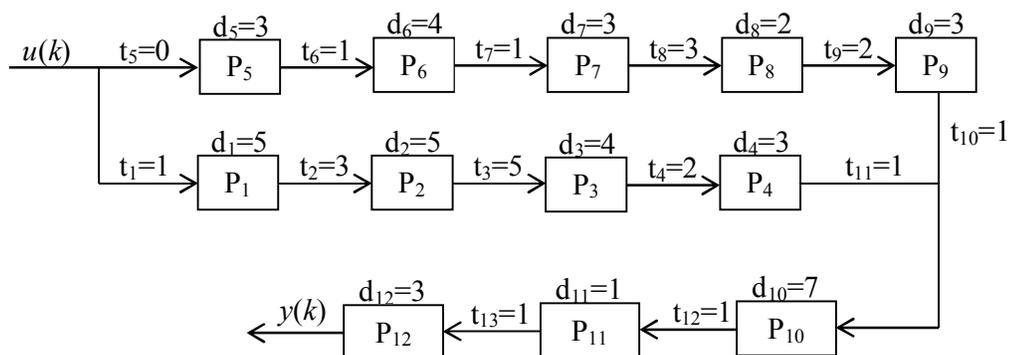
3. Sistem Produksi Sederhana Tas Kulit

Tas kulit yang diproduksi dalam penelitian ini adalah tas ember. Pembuatan tas kulit ini terdiri dari beberapa proses yaitu mulai dari proses pewarnaan kulit sesuai kebutuhan hingga membuat pola dan menjait menjadi tas. Dalam memodelkan proses produksi, proses pewarnaan kulit tidak diikutsertakan. Hal ini dikarenakan waktu yang dibutuhkan untuk proses pewarnaan kulit sangat bergantung pada cuaca. Jika cuaca panas, maka warna pada kulit akan semakin cepat kering dan dapat segera dibentuk pola untuk membuat tas.

Setelah proses pewarnaan kulit, langkah selanjutnya adalah pembuatan pola tas meliputi badan tas, bagian dasar, dan bagian atas tas yaitu tempat ritsleting dan lidah tas. Kemudian proses pengecapan badan tas sesuai motif yang diinginkan, lalu perkatkan bagian-bagian pola dengan lem yaitu bagian badan dan bagian dasar tas dan penjahitan bagian badan dan dasar tas. Selanjutnya adalah pembuatan kain pelapis tas (*furing*), penjahitan kain pelapis tas dan ritsleting bagian dalam tas, penjahitan ritsleting utama, proses pembuatan tali tas, pewarnaan bagian tepi tali tas dan terakhir adalah proses *finishing* dengan menyemprot tas agar tampak mengkilap.

3.1. Bagan Produksi Tas Kulit

Berikut ini adalah proses produksi tas kulit yang disajikan dalam graf.



Gambar 1. Graf Sistem Produksi Sederhana Tas Kulit

Keterangan :

t_i = waktu produksi pemindahan bahan yang akan diproses , $i = 1,2,3, \dots, 13$

d_1 = waktu saat pembuatan pola tas

d_2 = waktu saat pengecapan bagian badan tas

d_3 = waktu saat pengeleman pola bagian badan dan dasar tas

- d_4 = waktu saat penjahitan pola bagian badan dan dasar tas
- d_5 = waktu saat pembuatan kain pelapis tas
- d_6 = waktu saat penjahitan kain pelapis dan ritsleting bagian dalam tas
- d_7 = waktu saat pembuatan pola tali tas
- d_8 = waktu saat pengeleman tali tas dan pemasangan gesper tali tas
- d_9 = waktu saat penjahitan tali tas
- d_{10} = waktu saat penjahitan ritsleting utama dan lidah tas
- d_{11} = waktu saat pewarnaan bagian tepi tali dan lidah tas
- d_{12} = waktu saat finishing
- P_1 = pembuatan pola tas
- P_2 = pengecapan bagian badan tas
- P_3 = pengeleman pola bagian badan dan dasar tas
- P_4 = penjahitan pola bagian badan dan dasar tas
- P_5 = pembuatan kain pelapis tas
- P_6 = penjahitan kain pelapis dan ritsleting bagian dalam tas
- P_7 = pembuatan pola tali tas
- P_8 = pengeleman tali tas dan pemasangan gesper tali tas
- P_9 = penjahitan tali tas
- P_{10} = penjahitan ritsleting utama dan lidah tas
- P_{11} = pewarnaan bagian tepi tali dan lidah tas
- P_{12} = finishing

3.2. Pemodelan Produksi Tas Kulit

Pemodelan ini bertujuan untuk mencari waktu proses P_1, P_2, P_3 , hingga P_{12} mulai bekerja untuk saat yang ke- $(k+1)$. Proses produksi tas kulit didefinisikan sebagai berikut:

- i) $u(k)$: waktu saat bahan baku dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke- $(k+1)$
- ii) $x_i(k)$: waktu saat pemrosesan ke- i mulai bekerja untuk pemrosesan ke- k
- iii) $y_i(k)$: waktu saat produk ke- k diselesaikan meninggalkan sistem

Pemroses P_1 mulai bekerja pada waktu saat ke- $(k+1)$ ketika bahan baku telah dimasukkan ke sistem saat ke- $(k+1)$ sebagai input pemroses P_1 pada waktu $t = u(k) + 1$. Disamping itu, proses P_1 membutuhkan waktu $d_1=5$ satuan waktu, sehingga produk diantara yang ke- k akan meninggalkan P_1 pada saat $t = x_1(k) + 5$. Dengan demikian diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(u(k) + 1, x_1(k) + d_1) \\ x_1(k+1) &= \max(u(k) + 1, x_1(k) + 5) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Pada saat $k = 0$ maka proses 1 yaitu $x_1(0)$, bahan baku telah tersedia dan masuk di proses 1 yaitu $u(0)$ sehingga proses 1 dapat dijalankan. Unit pemroses P_2, P_3, P_4 , hingga P_{12} dapat ditentukan dengan pendekatan yang sama seperti pada unit pemroses P_1 . Dengan demikian diperoleh sistem produksi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(u(k) + 1, x_1(k) + 5) \\ x_2(k+1) &= \max(x_1(k+1) + 5 + 3, x_2(k) + 5) \\ &= \max(\max(u(k) + 1, x_1(k) + 5) + 8, x_2(k) + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \max(u(k) + 9, x_1(k) + 13, x_2(k) + 5) \\
 x_3(k + 1) &= \max(x_2(k + 1) + 5 + 5, x_3(k) + 4) \\
 &= \max(\max(u(k) + 9, x_1(k) + 13, x_2(k) + 5) + 10, x_3(k) + 4) \\
 &= \max(u(k) + 19, x_1(k) + 23, x_2(k) + 15, x_3(k) + 4) \\
 &= \max(x_3(k + 1) + 4 + 2, x_4(k) + 3) \\
 x_4(k + 1) &= \max(\max(u(k) + 19, x_1(k) + 23, x_2(k) + 15, x_3(k) + 4) + \\
 &\quad 6, x_4(k) + 3) \\
 &= \max(u(k) + 25, x_1(k) + 29, x_2(k) + 21, x_3(k) + 10, x_4(k) + 3) \\
 x_5(k + 1) &= \max(u(k) + 0, x_5(k) + 2) \\
 x_6(k + 1) &= \max(x_5(k + 1) + 3 + 1, x_6(k) + 4) \\
 &= \max(\max(u(k) + 0, x_5(k) + 2) + 4, x_6(k) + 4) \\
 &= \max(u(k) + 4, x_5(k) + 6, x_6(k) + 4) \\
 x_7(k + 1) &= \max(x_6(k + 1) + 4 + 1, x_7(k) + 3) \\
 &= \max(\max(u(k) + 4, x_5(k) + 6, x_6(k) + 4) + 5, x_7(k) + 3) \\
 &= \max(u(k) + 9, x_5(k) + 11, x_6(k) + 9, x_7(k) + 3) \\
 x_8(k + 1) &= \max(x_7(k + 1) + 3 + 3, x_8(k) + 2) \\
 &= \max(\max(u(k) + 9, x_5(k) + 11, x_6(k) + 9, x_7(k) + 3) + \\
 &\quad 6, x_8(k) + 2) \\
 &= \max(u(k) + 15, x_5(k) + 17, x_6(k) + 15, x_7(k) + 9, x_8(k) + 2) \\
 x_9(k + 1) &= \max(x_8(k + 1) + 2 + 2, x_9(k) + 3) \\
 &= \max(\max(u(k) + 15, x_5(k) + 17, x_6(k) + 15, x_7(k) + 9, x_8(k) + \\
 &\quad 2) + 4, x_9(k) + 3) \\
 &= \max(u(k) + 19, x_5(k) + 21, x_6(k) + 19, x_7(k) + 13, x_8(k) + \\
 &\quad 6, x_9(k) + 3) \\
 x_{10}(k + 1) &= \max(x_4(k + 1) + 3 + 1, x_9(k + 1) + 3 + 1, x_{10}(k) + 7) \\
 &= \max(\max(u(k) + 25, x_1(k) + 29, x_2(k) + 21, x_3(k) + \\
 &\quad 10, x_4(k) + 3) + 4, \max(u(k) + 19, x_5(k) + 21, x_6(k) + \\
 &\quad 19, x_7(k) + 13, x_8(k) + 6, x_9(k) + 3) + 4, x_{10}(k) + 7) \\
 &= \max(u(k) + 29, x_1(k) + 33, x_2(k) + 25, x_3(k) + 14, x_4(k) + \\
 &\quad 7, x_5(k) + 25, x_6(k) + 23, x_7(k) + 17, x_8(k) + 10, x_9(k) + \\
 &\quad 7, x_{10}(k) + 7) \\
 x_{11}(k + 1) &= \max(x_{10}(k + 1) + 7 + 1, x_{11}(k) + 1) \\
 &= \max(\max(u(k) + 37, x_1(k) + 33, x_2(k) + 25, x_3(k) + \\
 &\quad 14, x_4(k) + 7, x_5(k) + 25, x_6(k) + 23, x_7(k) + 17, x_8(k) + \\
 &\quad 10, x_9(k) + 7, x_{10}(k) + 7) + 8, x_{11}(k) + 1) \\
 &= \max(u(k) + 37, x_1(k) + 41, x_2(k) + 33, x_3(k) + 22, x_4(k) + \\
 &\quad 15, x_5(k) + 33, x_6(k) + 31, x_7(k) + 25, x_8(k) + 18, x_9(k) + \\
 &\quad 15, x_{10}(k) + 15), x_{11}(k) + 1) \\
 x_{12}(k + 1) &= \max(x_{11}(k + 1) + 1 + 1, x_{12}(k) + 3) \\
 &= \max(\max(u(k) + 37, x_1(k) + 41, x_2(k) + 33, x_3(k) + \\
 &\quad 22, x_4(k) + 15, x_5(k) + 33, x_6(k) + 31, x_7(k) + 25, x_8(k) + \\
 &\quad 18, x_9(k) + 15, x_{10}(k) + 15), x_{11}(k) + 1) + 2, x_{12}(k) + 3) \\
 &= \max(u(k) + 39, x_1(k) + 43, x_2(k) + 35, x_3(k) + 24, x_4(k) + \\
 &\quad 17, x_5(k) + 35, x_6(k) + 33, x_7(k) + 27, x_8(k) + 20, x_9(k) + \\
 &\quad 17, x_{10}(k) + 17, x_{11}(k) + 3, x_{12}(k) + 3) \\
 y_k &= x_{12}(k) + 3 \qquad \text{untuk } k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Pada kondisi awal semua *buffer* adalah kosong sehingga $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dots = x_{12}(0) = \varepsilon$. Persamaan evolusi dari sistem produksi tas kulit dengan menggunakan simbol \otimes dan \oplus menjadi:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= u(k) \otimes 1 \oplus x_1(k) \otimes 5 \\
 x_2(k+1) &= u(k) \otimes 9 \oplus x_1(k) \otimes 13 \oplus x_2(k) \otimes 5 \\
 x_3(k+1) &= u(k) \otimes 19 \oplus x_1(k) \otimes 23 \oplus x_2(k) \otimes 15 \oplus x_3(k) \otimes 4 \\
 &\vdots \\
 x_{12}(k+1) &= u(k) \otimes 39 \oplus x_1(k) \otimes 43 \oplus x_2(k) \otimes 35 \oplus x_3(k) \otimes 24 \oplus \\
 &\quad x_4(k) \otimes 17 \oplus x_5(k) \otimes 35 \oplus x_6(k) \otimes 33 \oplus x_7(k) \otimes 27 \oplus \\
 &\quad x_8(k) \otimes 20 \oplus x_9(k) \otimes 17 \oplus x_{10}(k) \otimes 17 \oplus x_{11}(k) \otimes 3 \oplus \\
 &\quad x_{12}(k) \otimes 3 \\
 y_k &= x_{12}(k) \otimes 3 \qquad \qquad \qquad \text{untuk } k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan evolusi terakhir ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks aljabar max-plus agar lebih mudah untuk diselesaikan sebagai berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ 13 & 5 & \varepsilon \\ 23 & 15 & 4 & \varepsilon \\ 29 & 21 & 10 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & 9 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & 15 & 9 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 & 19 & 13 & 6 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 33 & 25 & 14 & 7 & 25 & 23 & 17 & 10 & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ 41 & 33 & 22 & 15 & 33 & 31 & 25 & 18 & 15 & 15 & 1 & \varepsilon \\ 43 & 35 & 24 & 17 & 35 & 33 & 27 & 20 & 17 & 17 & 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 19 \\ 25 \\ 0 \\ 4 \\ 9 \\ 15 \\ 19 \\ 29 \\ 37 \\ 39 \end{bmatrix} \otimes u(k)$$

$$y(k) = [\varepsilon \ 3] \otimes \mathbf{x}(k)$$

dimana

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k) \ x_5(k) \ x_6(k) \ x_7(k) \ x_8(k) \ x_9(k) \ x_{10}(k) \ x_{11}(k) \ x_{12}(k)]^T$$

selanjutnya bentuk aljabar max plus di atas dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= A \otimes \mathbf{x}(k) \oplus B \otimes u(k) \\
 y(k) &= C \otimes \mathbf{x}(k)
 \end{aligned}$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ 13 & 5 & \varepsilon \\ 23 & 15 & 4 & \varepsilon \\ 29 & 21 & 10 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & 9 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & 15 & 9 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 & 19 & 13 & 6 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 33 & 25 & 14 & 7 & 25 & 23 & 17 & 10 & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ 41 & 33 & 22 & 15 & 33 & 31 & 25 & 18 & 15 & 15 & 1 & \varepsilon \\ 43 & 35 & 24 & 17 & 35 & 33 & 27 & 20 & 17 & 17 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 19 \\ 25 \\ 0 \\ 4 \\ 9 \\ 15 \\ 19 \\ 29 \\ 37 \\ 39 \end{bmatrix},$$

dan $C = [\varepsilon \varepsilon 3]$.

Dengan asumsi yaitu bahan baku dimasukkan ke sistem setelah produk selesai diproduksi atau ditawarkan ke pemesan ($u(k) = y(k)$), diperoleh evolusi dari keadaan sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) \\ &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes y(k) \\ &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes C \otimes y(k) \\ &= \bar{A} \otimes x(k) \end{aligned}$$

dengan $\bar{A} = A \otimes B \otimes C$

\bar{A} dihitung menggunakan perangkat lunak *Scilab 5.5.2* dengan *Max-Plus Algebra Toolbox*, ver.1.0.1 diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 4 \\ 13 & 5 & \varepsilon & 12 \\ 23 & 15 & 4 & \varepsilon & 22 \\ 29 & 21 & 10 & 3 & \varepsilon & 28 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 11 & 9 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 & 15 & 9 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 & 19 & 13 & 6 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 22 \\ 33 & 25 & 14 & 7 & 25 & 23 & 17 & 10 & 7 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & 32 \\ 41 & 33 & 22 & 15 & 33 & 31 & 25 & 18 & 15 & 15 & 1 & \varepsilon & 40 \\ 43 & 35 & 24 & 17 & 35 & 33 & 27 & 20 & 17 & 17 & 3 & \varepsilon & 42 \end{bmatrix}$$

Kemudian sistem di atas disimulasikan menggunakan *scilab* untuk mengetahui kedinamikan dari sistem dengan 10 iterasi, yaitu sebagai berikut:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 47 & 89 & 131 & 173 & 215 & 257 & 299 & 341 \\ 0 & 13 & 55 & 97 & 139 & 181 & 223 & 265 & 307 & 349 \\ 0 & 23 & 65 & 107 & 149 & 191 & 233 & 275 & 317 & 359 \\ 0 & 29 & 71 & 113 & 155 & 197 & 239 & 281 & 323 & 365 \\ 0 & 3 & 46 & 88 & 130 & 172 & 214 & 256 & 298 & 340 \\ 0 & 7 & 50 & 92 & 134 & 176 & 218 & 260 & 302 & 344 \\ 0 & 12 & 55 & 97 & 139 & 181 & 223 & 265 & 307 & 349 \\ 0 & 18 & 61 & 103 & 145 & 187 & 229 & 271 & 313 & 355 \\ 0 & 22 & 65 & 107 & 149 & 191 & 233 & 275 & 317 & 359 \\ 0 & 33 & 75 & 117 & 159 & 201 & 243 & 285 & 327 & 369 \\ 0 & 41 & 83 & 125 & 167 & 209 & 251 & 293 & 335 & 377 \\ 0 & 43 & 85 & 127 & 169 & 211 & 253 & 295 & 337 & 379 \end{bmatrix}$$

$$y = [3 \ 46 \ 88 \ 130 \ 172 \ 214 \ 256 \ 289 \ 340 \ 382 \ 424]$$

Hasil yang diperoleh belum periodik untuk keadaan saat waktu awal dengan $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Oleh karena itu dapat dihitung vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen dari matriks \bar{A} untuk menentukan keadaan saat waktu awal yang dapat menghasilkan jadwal yang periodik. Vektor eigen (v) dan nilai eigen (λ) dari matriks \bar{A} yaitu:

$$v = [47 \ 55 \ 65 \ 71 \ 46 \ 50 \ 55 \ 61 \ 65 \ 75 \ 83 \ 85]^T \text{ dan } \lambda = 42$$

Sehingga keadaan sistem akan periodik dengan periode sama dengan 42 (nilai eigen). Tabel 1 di bawah ini menunjukkan keadaan saat waktu awal yang terbaik untuk memulai masing-masing proses P_1 , P_2 , P_3 , hingga P_{12} aktif bekerja.

Tabel 1. Keadaan saat waktu awal sistem aktif

Proses	Fase ke- (dalam menit)			
	1	2	3	4
P_1	1	43	85	127
P_2	9	51	93	135
P_3	19	61	103	145
P_4	25	67	109	151
P_5	0	42	82	124
P_6	4	46	88	130
P_7	9	52	94	136
P_8	15	57	99	141
P_9	19	61	103	145
P_{10}	29	71	113	155
P_{11}	37	79	121	163
P_{12}	39	81	123	165

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dengan keadaan awal pada Tabel 1 di atas proses P_{12} mulai aktif bekerja pada waktu $t = 39$ menit dan proses P_{12} memerlukan waktu $t = 3$ menit, sehingga diperoleh suatu jadwal dari setiap mesin aktif secara teratur dengan periode yaitu 42. Produsen memproduksi 10 tas kulit dengan menghabiskan waktu sekitar 11 jam, sehingga setiap tas dikerjakan selama 65 menit. Namun, dengan pemodelan ini produsen hanya membutuhkan waktu 42 menit untuk memproduksi 1 tas. Dalam hal ini produsen dapat menghemat waktu sebanyak 23 menit. Jika dalam satu hari produsen bekerja dalam 11 jam maka produsen dapat memproduksi 15 buah tas kulit.

Daftar Pustaka

- [1] Imaev, Aleksey and Robert P. Judd, 2008, *Hierarchical Modeling of Manufacturing Systems Using Max-Plus Algebra*, American Control Conference (Juni), pp. 471-476.
- [2] Rafflesia, Ulfasari, 2012, *Penerapan Aljabar Max-Plus pada Sistem Produksi Meubel*, Jurnal Gradien Vol 8, No. 1, (Januari), pp. 775-779.
- [3] Rudhito, M. Andy, 2016, *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*, Yogyakarta, Universitas Sanata Dharma.
- [4] Shutter, B. De and B. De Moor, 2008, *Max-Plus Algebra and Max-Plus Linear Discrete Event System : An Introduction*, Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08) (May), pp. 36-42.
- [5] Subiono, 2009, *Max-Plus Algebra Toolbox*, ver.1.0.1.
- [6] Subiono, 2015, *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya Version 3.0.0*, Surabaya, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Simulasi Pemodelan Jalur Bus Rute Kenteng-Sleman-Prambanan dengan Menggunakan Model PetriNet dan Aljabar Max-Plus

Yulius Wahyu Putranto¹⁾

Yokhanan Ardika²⁾

A. Tatak Handaya Kurniawan³⁾

¹⁾²⁾³⁾Program Studi Magister pendidikan matematika, Universitas sanata Dharma, Yogyakarta

¹⁾juligoza808@gmail.com

²⁾ardikayo@gmail.com

³⁾athk60@gmail.com

Abstrak

Transportasi umum merupakan salah satu solusi untuk mengatasi kemacetan, karena jadwal kedatangan dan keberangkatan yang tidak menentu sehingga membuat masyarakat lebih memilih kendaraan pribadi daripada transportasi umum. Pada artikel ini dibuat simulasi model petrinet untuk melihat pergerakan dari jalannya bus jurusan kenteng-sleman-prambanan dengan posisi awal bus yang diberhentikan pada waktu tertentu. Penjadwalan secara periodik dihitung menggunakan aljabar max-plus. Dalam kasus ini model yang telah dibuat dengan petrinet akan diubah dalam model aljabar max-plus dan dicari vektor eigen dan nilai eigen dari matriks yang dihasilkan. Hasil dari makalah ini merupakan pengetahuan dasar dalam memodelkan sistem transportasi umum dalam hal ini penjadwalan kedatangan dan keberangkatan bus jurusan Kenteng-Sleman-Prambanan dengan aljabar max-plus, serta model simulasi model petrinet dari jalur tersebut.

Kata Kunci: *petrinet, aljabar, max-plus, penjadwalan.*

1. Pendahuluan

- Latar belakang

Transportasi umum mulai ditinggalkan oleh masyarakat karena ketidakjelasan penjadwalan yang ada sehingga membuat waktu beraktivitas kurang maksimal. Hal ini tentu membuat pemerintah berpikir untuk membuat transportasi umum dapat datang tepat waktu sehingga masyarakat tidak ragu untuk memilih transportasi umum sebagai moda transportasi yang digunakan untuk beraktivitas sehari-hari. Subiono (2015) dan Rudhito (2016) pernah melakukan penelitian tentang sinkronisasi penjadwalan bus yang tertulis dalam teori-teori yang ada dalam buku masing-masing. Pada penelitian ini membahas tentang sinkronisasi penjadwalan bus yang belum pernah diteliti oleh siapapun. Data yang diambil berasal dari jalur bus yang sudah ada di Yogyakarta tetapi belum diteliti.

Berdasarkan artikel *Spectral analysis for performance evaluation in a bus network*, peneliti membuat desain sebagian jalur bus kota dan pedesaan disekitar daerah Yogyakarta. Pada penelitian ini, dibuat desain sebagian penjadwalan untuk keberangkatan bus kota di Yogyakarta jurusan Prambanan yang diintegrasikan bus angkutan desa Sleman-jombor-kenteng (kulon progo) menggunakan aljabar maxplus dan model Petrinet. Langkah awal dalam penelitian ini mengumpulkan data yang diperlukan, yaitu jalur angkutan pedesaan Sleman-Jombor-Kenteng dan bus kota jurusan Prambanan. Setelah

itu dibuat graf berarah dari jalur ini dengan bobot waktu yang ada. Langkah selanjutnya dibuat aturan sinkronisasi yang menjamin penumpang berpindah dari sebarang pemberhentian awal ke sebarang pemberhentian bus kota atau angkutan pedesaan tujuannya yang ada pada jalur tersebut. Berdasarkan graff yang telah dibuat, selanjutnya dibentuk model penjadwalan untuk keberangkatan bus kots dan angkutan pedesaan dengan aljabar max plus. Dengan model ini, sistem dapat dianalisis sehingga didapat desain penjadwalan yang sesuai dengan aturan sinkronisasi yang telah dibuat.

- **Pentingnya**
Masyarakat dapat memperkirakan kedatangan dan keberangkatan bus dengan memperhitungkan jadwal bus sehingga sehingga waktu lebih efektif.
- **Rumusan masalah**
 - Bagaimana model petrinet dari jalur bus Kenteng-Sleman-Prambanan yang telah dibuat berdasarkan data yang diambil?
 - Bagaimana Penggunaan Aljabar Max Plus Dalam Menentukan Penjadwalan Periodik Bus jurusan Kenteng-Sleman-Prambanan?
- **Tujuan**
 - Mengetahui model petrinet dari jalur bus Kenteng-Sleman-Prambanan yang telah dibuat berdasarkan data yang diambil.
 - Menentukan waktu keberangkatan periodik bus pada tiap-tiap pada tiap halte menggunakan aljabar max-plus.

2. Landasan Teori

- **Model Petrinet**

Petri net adalah salah satu model untuk merepresentasikan sistem terdistribusi diskret. Sebagai sebuah model, Petri net merupakan grafik 2 arah yang terdiri dari *place*, *transition*, dan tanda panah yang menghubungkan keduanya. Di samping itu, untuk merepresentasikan keadaan sistem, *token* diletakkan pada *place* tertentu. Ketika sebuah *transition* terpantik, *token* akan bertransisi sesuai tanda panah (Wikipedia 2013). Petrinet dikembangkan pertama kali oleh C.A petri pada awal 1960-an. pada petrinet, event berkaitan dengan transisi dan keadaan berkaitan dengan place. Dalam system event diskrit, perubahan keadaan terjadi karena adanya perubahan event. Agar suatu event dapat terjadi, beberapa keadaan harus terpenuhi terlebih dahulu. Place dapat berfungsi sebagai input menyatakan keadaan yang harus dipehuni agar transisi dapat terjadi. Setelah transisi terjadi maka keadaan akan berubah. Place yang menyatakan keadaan tersebut adalah output dari transisi. Berikut adalah definisi petrinet :

Definisi 1 .(Subiono, 111:2015)

Petrinet adalah 4-tuple (P, T, A, w) dengan

P : himpunan berhingga place, $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$

T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_m\}$

A : himpunan arc, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,

W : fungsi bobot, $W : A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$

Petrinet dapat digambarkan sebagai graf berarah. Node dari graf berupa place yang diambil dari himpunan place P atau transisi yang diambil dari himpunan transisi T . pada graf petrinet diperbolehkan menggunakan beberapa arc untuk menghubungkan dua node atau ekuivalen dengan memberikan bobot ke setiap arc yang menyatakan jumlah arc. Struktur ini

dikenal dengan struktur multi graf. Dalam membahas representasi petrinet secara grafik akan digunakan notasi $I(t_j)$ dan $O(t_j)$ yang masing-masing menyatakan himpunan place input ke transisi t_j dan output dari transisi t_j . Secara matematis definisi tersebut dapat ditulis menjadi persamaan berikut (Cassandras, 1993) dalam Winarni (2011) :

$$I(t_j) = \{p_i : (p_i, t_j) \in A\}$$

$$O(t_j) = \{p_i : (t_j, p_i) \in A\}$$

Definisi 2

Penanda (making) x pada petrinet adalah fungsi $x: P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definisi 3

Petrinet bertanda (marked) adalah 5-tuple (P, T, A, w, x_0) dimana (P, T, A, w) adalah petrinet dan X_0 adalah penanda awal.

Definisi 4

Keadaan (*state*) petrinet bertanda adalah

$$x = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T$$

Definisi 5

Transisi $t_j \in T$ pada petrinet bertanda dikatakan enabled jika

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j)$$

Definisi 6

Fungsi perubahan keadaan,

$$F: \{0, 1, 2, 3, \dots\}^n \times T \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}^n$$

Pada petrinet bertanda (P, T, A, w, X_0) terdefinisi untuk transisi $t_j \in T$ jika dan hanya jika

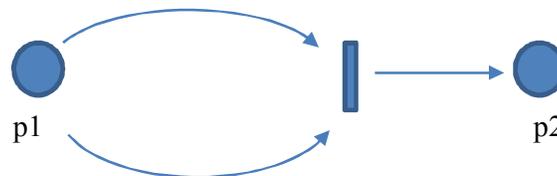
$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j)$$

jika $f(x, t_j)$ terdefinisi maka ditulis $x' = f(x, t_j)$, dimana

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Contoh model petrinet sederhana dari Subiono (112:2015) :



Gambar 1. Model petrinet sederhana

Pada gambar 1 terdapat dua Place pada petri net yaitu p_1 dan p_2 yang dapat ditulis $P = \{p_1, p_2\}$. Untuk menyatakan terdapat sebuah transisi t_1 maka ditulis $T = \{t_1\}$. Arc dinyatakan dalam pasangan berurutan. elemen pertama menyatakan asal dan elemen kedua menyatakan tujuan misalnya arc dari place p_1 ke transisi t_1 ditulis (p_1, t_1) dan (t_1, p_2) menyatakan arc dari transisi t_1 ke place p_2 . secara lengkap ditulis $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2)\}$. bobot arc dari place p_1 ke transisi t_1 adalah dua yaitu $w(p_1, t_1) = 2$ dan bobot dari transisi t_1 ke place p_2 adalah satu yaitu $w(t_1, p_2) = 1$. pada contoh ini $I(t_1) = \{p_1\}$ dan $O(t_1) = \{p_2\}$.

- Model Aljabar Max Plus

Sistem transportasi dapat dikatakan sebagai Sistem Dinamik Event Diskrit (SDED). Kedinamikan dari sistem tersebut digambarkan sebagai

evolusi perlakuan sistem selma diberikan waktu periodenya. Sistem transportasi dinamik diatur dengan sinkronisasi, paralelisasi dan kejadian yang serentak (Nait-Sidi-Moh, A., dkk, 2007).

Penggunaan pendekatan aljabar max – plus dalam sistem even diskrit dinamik adalah karena ajabar max-plus dapat menangani dengan mudah proses sinkronisasi (Braker, 1990) dalam Winarni (2011). Pendekatan dengan aljabar max-plus terkenal dengan kemampuannya untuk diadaptasikan pada masalah yang dapat dimodelkan dengan *event-graph* (Nait-Sidi-Moh, A., dkk, 2007).

Sebelum menyusun model aljabar max-plus, berikut diberikan konsep dasar mengenai struktur aljabar R_{\max} oleh Baccelli, dkk (1992) dalam Winarni (2011) sebagai berikut:

R_{\max} menotasikan himpunan bilangan real $R \cup \{\varepsilon = -\infty\}$ dengan dua operasi biner max dan plus yang masing-masing dinotasikan dengan \oplus dan \otimes . Untuk setiap $a, b \in R_{\max}$ didefinisikan operasi \oplus dan \otimes dengan

$$a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} \max(a, b) \quad \text{dan} \quad a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} a + b$$

Elemen netral untuk operasi \oplus adalah $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$

Dan elemen netral untuk operasi \otimes adalah $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Operasi \oplus dibaca *o-plus* dan operasi \otimes dibaca *o-times*. Himpunan R_{\max} dengan operasi \oplus dan \otimes disebut aljabar max-plus dan didefinisikan sebagai $R_{\max} = \{R_{\max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e\}$.

Adapun bentuk umum model aljabar max-plus adalah sebagai berikut:

Suatu barisan $(x(k): k \in N)$ dapat dibangun oleh

$$(x(k + 1) = A \otimes x(k)) \quad (1)$$

Untuk $k \geq 0$, dimana $A \in R_{\max}^{n \times n}$, $x \in R^n$ dan $x(0) = x_0$ adalah kondisi awal. Secara ekuivalen barisan $x(k)$ dapat ditulis

$$x(k) = A^{\otimes k} \quad (2)$$

Untuk semua $k \geq 0$. (Heidergottm B., dkk, 2006 dalam Winarni 2011) Dalam hal ini, $x(k)$ adalah waktu keberangkatan bus yang ke- k di suatu halte.

- Nilai eigen dan vektor eigen

Pada sub-bab ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen yang lebih jelasnya dapat dilihat di dalam Rudhito (2016). Pada nilai eigen dan vektor eigen ini akan dibahas terlebih dahulu tentang konsep aljabar max-plus dan graf.

Definisi 4.1.1 (Irreduisibilitas, Schutter,1996 dalam Rudhito 2016)

Suatu matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ dikatakan irreduisibel jika graf bobotnya terhubung kuat. Teorema berikut memberikan syarat perlu dan cukup matriks irreduisibel.

Teorema 4.1.2

Matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ irreduisibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

Definisi 4.1.4 (Nilai eigen dan vektor eigen max-plus, Schutter,1996 dalam Rudhito 2016)

Diberikan $A \in R$. Skalar $\lambda \in R_{\max}$ disebut nilai eigen max-plus matriks A jika terdapat suatu vektor $v \in R_{\max}^n$ dengan $v \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes v =$

$\lambda \otimes v$. Vektor v tersebut disebut vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ .

Berikut diberikan teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen aljabar max-plus untuk setiap $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$.

Teorema 4.1.5

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda_{\max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit

elementer dalam $G(A)$, merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A .

Karena definisi matriks $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, maka sirkuit kritis ρ_0 dalam $G(A)$ juga merupakan sirkuit kritis dalam $G(B)$. Dari bukti Teorema 4.1.5 di atas, jika titik i menyusun busur dalam sirkuit kritis ρ_0 , maka kolom ke- i matriks B^* merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Kolom ke- i matriks B^* di atas, yang merupakan vektor-vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$, disebut vektor eigen max-plus fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen max-plus $\lambda_{\max}(A)$. Dapat ditunjukkan bahwa kombinasi linear max-plus vektor-vektor eigen max-plus fundamental matriks A juga merupakan vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$.

Teorema 4.1.7

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}$, merupakan nilai eigen aljabar max-plus matriks A , maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam $G(A)$.

Dari Teorema 4.1.5 dan 4.1.7 dapat disimpulkan bahwa untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, $\lambda_{\max}(A)$ merupakan nilai eigen aljabar max-plus maksimum matriks A . Berikut diberikan lemma yang menyatakan bahwa untuk matriks irreduisibel semua komponen vektor eigen max-plusnya berupa bilangan real. Lemma 4.1.8 berikut juga akan digunakan untuk membuktikan Teorema 4.1.9.

Lemma 4.1.8

Jika matriks irreduisibel $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ mempunyai nilai eigen aljabar max-plus λ dengan x vektor eigen aljabar max-plus yang bersesuaian dengan λ , maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Matriks irreduisibel mempunyai nilai eigen aljabar max-plus tunggal seperti diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.9

Jika matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ irreduisibel, maka A mempunyai nilai eigen aljabar max-plus tunggal.

Dengan menggunakan program matlab dalam Rudhito (2016) dapat ditentukan nilai eigen maksimum dan vektor eigen yang bersesuaian untuk matriks seperti dalam contoh berikut.

Pada penerapannya, selanjutnya dibahas sifat periodik SLMI autonomous berdasarkan pengertian nilai eigen dan vektor eigen aljabar max-plus. Sebelumnya didefinisikan pengertian sifat periodik suatu SLMI.

Definisi 4.2.1

Suatu SLMI (A, B, C, x_0) dikatakan periodik dengan periode λ , jika $x(k) = \lambda^{\otimes k} \otimes x(0)$, untuk $k = 1, 2, 3 \dots$

Teorema 4.2.2

Diberikan SLMI autonomous $(A, C, x \neq \varepsilon)$ dengan A matriks irreduisibel yang mempunyai nilai eigen aljabar max-plus λ . Jika $x_0 = x(0)$,

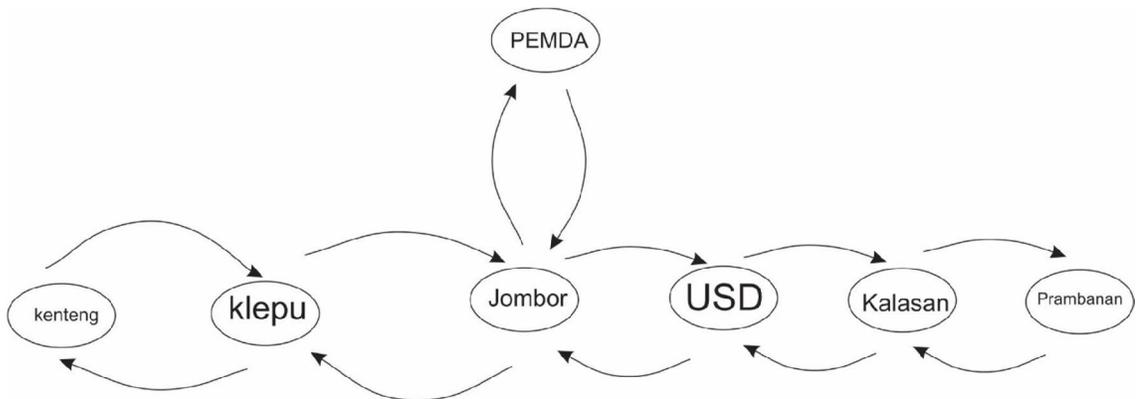
merupakan vektoreigen aljabar max-plus yang bersesuaian dengan λ maka $x(k) = \lambda^{\otimes k} \otimes x(0)$, untuk $k = 1, 2, 3 \dots$.
 Selanjutnya $y(k) = C \otimes \lambda^{\otimes k} \otimes x(0)$, untuk $k = 1, 2, 3 \dots$.

Dengan kata lain teorema di atas mengatakan bahwa setelah kondisi awal kejadian berikutnya muncul secara periodik dengan periode λ .

3. Pembahasan

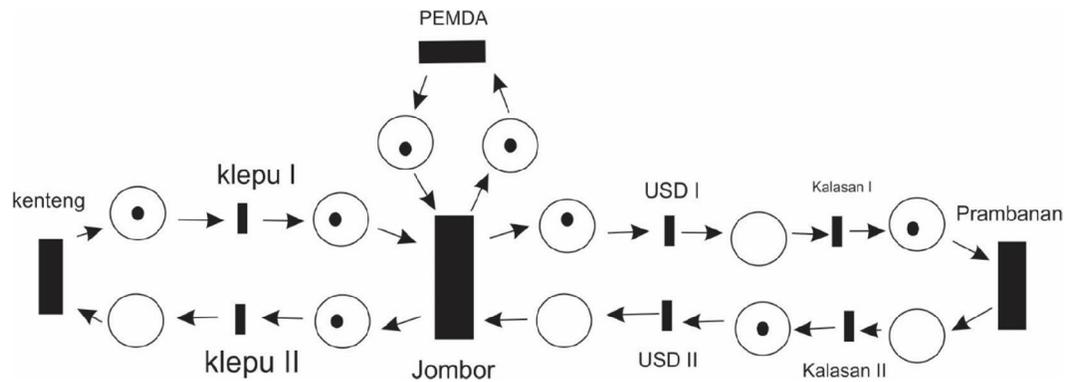
- Model Petri Net Jaringan Bus

Kasus jaringan bus yang dimodelkan terdapat 3 jalur bus yang tersinkronisasi pada sebuah terminal yang merupakan satu-satunya penghubung dari ketiga jalur. Jalur I merupakan jaringan bus berawal dari daerah Kenteng menuju Jombor dengan terdapat satu pemberhentian yaitu pada halte Klepu. Jalur II merupakan jalur dari arah Jombor menuju PEMDA sleman dengan tidak ada halte antara Jombor dan PEMDA. Jalur III merupakan jalur dari Jombor menuju ke Prambanan. Pemberhentian antara Jombor dan Prambanan ada 2 yaitu halte USD dan Kalasan. Setiap halte pemberhentian akan dinamai dengan 2 macam nama seperti Klepu I dan Klepu II. Pada dasarnya kedua nama tersebut menunjukkan halte yang sama tetapi untuk membedakan arah tujuan bus, misalkan untuk Klepu I untuk bus dari arah Kenteng menuju Jombor dan Klepu II merupakan pemberhentian untuk bus dari arah Jombor menuju Kenteng. Berikut merupakan simulasi rute bus dengan graf berarah :



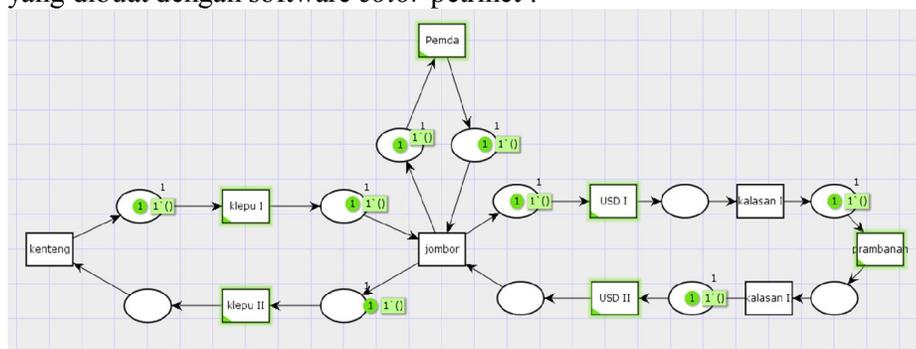
Gambar 2. Graf berarah dari simulasi model yang dibuat

Dari graf tersebut dapat dilihat rute asal dan tujuan dari masing-masing jalur yang dibuat. Waktu tempuh dari masing-masing keberangkatan akan ditentukan berdasarkan perkiraan ketika peneliti melewati rute-rute tersebut. Jumlah bus dapat ditentukan dengan cara menentukan waktu tertentu sehingga dapat ditentukan posisi bus berada dimana saja. Contoh pada simulasi ini posisi bus ditentukan ketika pukul 07.00 WIB. Posisi bus ini pada petrinet dinamakan *place*, halte atau pemberhentian dinamakan *transition* dan bus sendiri dinamakan token pada model petrinet yang dibuat. Anak panah pada petrinet menunjukkan tujuan dari bus sendiri. Dengan demikian model petrinet dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3. Model petrinet dari kasus yang dibuat

Model petrinet yang dibuat perlu disimulasikan dengan software untuk memastikan token dapat berjalan atau tidak. Software yang digunakan adalah *color petrinet*, dengan software ini simulasi dapat terlihat adanya penumpukan bus karena saling menunggu dan terjadi sinkronisasi pada terminal jombor. Berikut adalah gambaran simulasi Model jaringan petrinet berdasarkan kasus yang dibuat dengan software *color petrinet* :



Gambar 4. Simulasi Model petrinet jaringan bus dengan software color petrinet

• **Model Aljabar Max Plus Keberangkatan Dan Kedatangan Bus Tiap Halte**

Jalur bus yang peneliti buat merupakan jalur bus kota dari Kenteng ke Jombor dengan asumsi pemberhentian di Klepu. Dari jombor menuju PEMDA sleman merupakan jalur angkutan bus tersendiri dan dianggap tidak ada pemberhentian seperti halte. Dalam kasus ini diasumsikan juga bus transjogja memiliki rute kearah prambanan melewati halte USD-Kalasan-Prambanan. Dengan demikian kasus dapat dibuat berdasarkan gambaran lokasi nyata, walaupun beberapa rute dan pemberhentian sengaja dibuat untuk memudahkan model. Model yang telah digambarkan dengan petrinet akan dibawa ke dunia symbol matematika dengan aljabar max plus. Berikut merupakan tabel rute bus yang akan dimodelkan dengan memberi nama variabel pada tiap rute :

Table 1. Daftar rute bus dengan variabel

No	Variabel	Dari	Ke	Waktu	Jumlah bus
1	X ₁	Kenteng	Klepu I	5	1
2	X ₂	Klepu I	Jombor	45	1
3	X ₃	Jombor	Klepu II	48	1

4	X ₄	Klepu II	Kenteng	6	0
5	X ₅	Jombor	PEMDA	15	1
6	X ₆	PEMDA	Jombor	20	1
7	X ₇	Jombor	USD I	15	1
8	X ₈	USD I	Kalasan I	12	0
9	X ₉	Kalasan I	Prambanan	10	1
10	X ₁₀	Prambanan	Kalasan II	14	0
11	X ₁₁	Kalasan II	USD II	15	1
12	X ₁₂	USD II	Jombor	20	0

Berdasarkan gambar 3 diatas, cara memodelkan menggunakan aljabar max-plus dimulai dengan x_1, x_2, x_3 dan seterusnya. Hal tersebut dimaksudkan agar pemodelan dapat teratur dan tidak ada yang terlewatkan. Misalkan dari $x_1(k)$ merupakan pemberangkatan sekarang dari halte x_1 sehingga harus menunggu keberangkatan sebelumnya dari halte sebelum x_1 yaitu x_4 ditambah waktu tempuh dari x_4 ke x_1 . Hal yang sama dilakukan ketika bus tidak menunggu yang lain. Sinkronisasi terjadi pada halte di jombor dimana bus akan berangkat ketika menunggu bus yang lain dari masing-masing jalus sudah datang. Sehingga model aljabar max plus yang dibuat sedemikian hingga seperti dibawah ini :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= 6 \otimes x_4(k) \\
 x_2(k) &= 5 \otimes x_1(k-1) \\
 x_3(k) &= 15 \otimes x_6(k-1) \oplus 20 \otimes x_{12}(k) \oplus 45 \otimes x_2(k-1) \\
 x_4(k) &= 48 \otimes x_3(k-1) \\
 x_5(k) &= 15 \otimes x_6(k-1) \oplus 20 \otimes x_{12}(k) \oplus 45 \otimes x_2(k-1) \\
 x_6(k) &= 20 \otimes x_5(k-1) \\
 x_7(k) &= 15 \otimes x_6(k-1) \oplus 20 \otimes x_{12}(k) \oplus 45 \otimes x_2(k-1) \\
 x_8(k) &= 15 \otimes x_7(k-1) \\
 x_9(k) &= 27 \otimes x_8(k) \\
 x_{10}(k) &= 10 \otimes x_9(k-1) \\
 x_{11}(k) &= 14 \otimes x_{10}(k) \\
 x_{12}(k) &= 15 \otimes x_{11}(k-1)
 \end{aligned}$$

Dari model tersebut $x_i(k)$ pada ruas kanan akan disubstitusi sehingga variabel akan menjadi $x_i(k-1)$. Jadi diperoleh model aljabar max plus yang baru sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= 54 \otimes x_3(k-1) \\
 x_2(k) &= 5 \otimes x_1(k-1) \\
 x_3(k) &= 15 \otimes x_6(k-1) \oplus 35 \otimes x_{11}(k-1) \oplus 45 \otimes x_2(k-1) \\
 x_4(k) &= 48 \otimes x_3(k-1) \\
 x_5(k) &= 15 \otimes x_6(k-1) \oplus 35 \otimes x_{11}(k-1) \oplus 45 \otimes x_2(k-1) \\
 x_6(k) &= 20 \otimes x_5(k-1) \\
 x_7(k) &= 15 \otimes x_6(k-1) \oplus 35 \otimes x_{11}(k-1) \oplus 45 \otimes x_2(k-1) \\
 x_8(k) &= 15 \otimes x_7(k-1) \\
 x_9(k) &= 27 \otimes x_7(k-1) \\
 x_{10}(k) &= 10 \otimes x_9(k-1) \\
 x_{11}(k) &= 24 \otimes x_9(k-1) \\
 x_{12}(k) &= 15 \otimes x_{11}(k-1)
 \end{aligned}$$

Diperoleh matriks konstruksi dari model aljabar max plus diatas dimana matriks A sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} -inf & -inf & 54 & -inf \\ 5 & -inf \\ -inf & 45 & -inf & -inf & -inf & 15 & -inf & -inf & -inf & -inf & 35 & -inf \\ -inf & -inf & 48 & -inf \\ -inf & 45 & -inf & -inf & -inf & 15 & -inf & -inf & -inf & -inf & 35 & -inf \\ -inf & -inf & -inf & -inf & 20 & -inf \\ -inf & 45 & -inf & -inf & -inf & 15 & -inf & -inf & -inf & -inf & 35 & -inf \\ -inf & -inf & -inf & -inf & -inf & -inf & 15 & -inf & -inf & -inf & -inf & -inf \\ -inf & -inf & -inf & -inf & -inf & -inf & 27 & -inf & -inf & -inf & -inf & -inf \\ -inf & 10 & -inf & -inf & -inf \\ -inf & 24 & -inf & -inf & -inf \\ -inf & 15 & -inf \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan program matlab dalam Rudhito (2016 : 117) dapat dicari nilai eigen dan vektor eigennya sebagai berikut :

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MAX-PLUS MATRIKS

```
A=[-inf -inf 54 -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf;5 -inf -inf;
-inf -inf;
-inf 45 -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf;
-inf -inf 48 -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf;
-inf 45 -inf -inf;
-inf -inf;
-inf -inf;
-inf -inf;
-inf -inf;
-inf -inf;
-inf -inf;
-inf -inf]
```

HASIL PERHITUNGAN :
Matriks A =

0	0	54	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	45	0	0	0	15	0	0	0	0	35	0
0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	45	0	0	0	15	0	0	0	0	35	0
0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0
0	45	0	0	0	15	0	0	0	0	35	0
0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Matriks A tidak IRREDUSIBEL. Hal ini menunjukkan bahwa nilai eigennya tidak tunggal.

Berdasarkan program matlab didapat NILAI EIGEN max-plus maksimum matriks A =

$$\lambda_{max} = 34,6667$$

VEKTOR EIGEN max-plus yang bersesuaian =

0.0000	-	-
-	29.6	15.0
64.00	667	000
00	-	-
-	0.00	10.3
19.33	00	333
33	-	-
-	24.0	0.00
6.000	000	00
0	-	-
-	23.6	21.0
19.33	667	000
33	-	-
-	24.0	0.00
34.00	000	00
00	-	-
-	4.33	49.0
19.33	33	000
33	-	-
-	24.0	0.00
39.00	000	00
00	-	-
-	9.33	54.0
27.00	33	000
00	-	-
-	2.66	42.0
86.00	67	000
00	-	-
-	22.0	32.3
72.00	000	333
00	-	-
-	8.00	18.3
57.33	00	333
33	-	-
	62.0	38.0
	000	000

Matriks yang tidak irreduisibel mengakibatkan vektor eigennya tidak tunggal namun dalam kasus ini tetap dapat dibuat jadwal periodiknya sehingga kita dapat memilih dengan vektor eigen mana akan dibuat jadwal periodiknya. Berikut contoh membuat jadwal periodik dengan salah satu jadwal periodik yang didapat :

X_0 = waktu awal

X_1 = keberangkatan ke 1,

X_2 = keberangkatan ke 2,

x(0)	x(1)	x(2)
86.0000	120.6667	155.3334
22.0000	56.6667	91.3334
66.6667	101.3334	136.0001
80.0000	114.6667	149.3334
66.6667	101.3334	136.0001
52.0000	86.6667	121.3334
66.6667	101.3334	136.0001
47.0000	81.6667	116.3334
59.0000	93.6667	128.3334
0	34.6667	69.3334
14.0000	48.6667	83.3334
28.6667	63.3334	98.0001

4. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Aljabar max plus dapat digunakan untuk menentukan jadwal keberangkatan periodik bus dengan periode λ . Pada pemodelan ini matriks yang diperoleh tidak irreduabel sehingga setiap jalur tidak terhubung kuat, tetapi tetap dapat dibuat jadwal secara periodik dengan berbagai vektor eigen yang didapat.

Saran

Diharapkan penulis selanjutnya untuk mencari data kasus secara real untuk hasil yang lebih baik.

Daftar Pustaka

- [1] Nait-Sidi-moh, A. dkk. 2007. *Spectral analysis for performance evaluation in a bus network*. European journal of operational research 193.
- [2] Rudhito, Andy. 2016. *Aljabar Max Plus Dan Penerapannya*. Yogyakarta : JPMIPA.
- [3] Subiono. 2015. *Aljabar Max Plus Dan Terapannya*. Surabaya : Jurusan Matematika ITS.
- [4] Winarni. 2011. *Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota Dengan Model Petrinet Dan Aljabar Max-Plus (Studi Kasus Busway Transakarta)*. Jurnal CAUCHY vol 1 no. 4 mei 2011.

Penggunaan Aljabar Max-Plus dalam Pengaturan Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas

Paskalia Pradanti ¹⁾

Maria Rettian Anggita Sari ²⁾

¹⁾²⁾ Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta

¹⁾paskaliapradanti@gmail.com

²⁾rettian.anggitasari@gmail.com

Abstrak

Waktu nyala lampu lalu lintas yang terdapat di suatu persimpangan dapat dimodelkan menggunakan aljabar max-plus. Dari model aljabar max-plus yang disusun, dapat diperoleh pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas dan keperiodikannya berdasarkan hasil perhitungan vektor eigen dan nilai eigen model tersebut. Waktu nyala lampu lalu lintas yang diperoleh dari hasil perhitungan berdasarkan model aljabar max-plus yang disusun kemudian dibandingkan dengan data waktu nyala lampu lalu lintas yang diterapkan pada lampu lalu lintas di simpang Museum BRI Purwokerto yang diperoleh dari hasil pengamatan secara langsung. Setelah dibandingkan, diperoleh bahwa waktu nyala hijau hasil perhitungan berdasarkan model aljabar max-plus lebih lama daripada waktu nyala hijau yang diterapkan pada lampu lalu lintas di simpang Museum BRI Purwokerto.

Kata kunci: *aljabar, aljabar max-plus, lampu lalu lintas, pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas*

1. Pendahuluan

Salah satu lampu lalu lintas pada persimpangan jalan di Purwokerto, Banyumas, Jawa Tengah yang menggunakan sistem kendali *fixed-time* yaitu Simpang Museum BRI. Karena menggunakan sistem kendali *fixed-time*, maka waktu nyala lampu lalu lintas pada simpang tiga Museum BRI tersebut sudah diatur dan tidak dapat diubah sewaktu-waktu sesuai dengan keadaan dan tingkat kepadatan arus lalu lintas sehingga antrian kendaraan cukup panjang pada waktu-waktu tertentu. Hal tersebut dapat diatasi dengan mengatur waktu nyala lampu lalu lintas agar waktu tunggu kendaraan pada masing-masing simpang dapat dipersingkat sehingga tidak terjadi antrian panjang.

Pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas dapat dilakukan menggunakan aljabar max-plus. Model aljabar max-plus dari waktu nyala lampu lalu lintas dapat disusun sehingga dapat ditentukan waktu nyala lampu dan diperoleh suatu pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas yang dapat mengatasi masalah antrian kendaraan yang panjang. Vektor eigen dan nilai eigen dari model max-plus yang dibuat dapat dicari untuk menentukan waktu nyala lampu lalu lintas pada persimpangan dan keperiodikannya.

2. Aljabar Max-plus

Aljabar max-plus merupakan struktur aljabar pada himpunan bilangan real yang terdiri atas penjumlahan aljabar max-plus dan perkalian aljabar max-plus.

Definisi 1

Operasi \oplus yang disebut penjumlahan aljabar max-plus dan operasi \otimes yang disebut perkalian aljabar max-plus didefinisikan sebagai:

$$a \oplus b = \max (a, b),$$

$$a \otimes b = a + b$$

pada himpunan $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \forall a, b \in \mathbb{R}_{\max}$.

Elemen netral penjumlahan aljabar max-plus yaitu $-\infty$ dan dinotasikan dengan ε , sedangkan elemen netral perkalian yaitu 0 dan dinotasikan dengan e .

Definisi 2

Penjumlahan aljabar max-plus untuk matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ didefinisikan:

$$[A \oplus B]_{ji} = [A]_{ji} \oplus [B]_{ji}.$$

Definisi 3

Perkalian aljabar max-plus untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times l}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{l \times m}$ didefinisikan oleh:

$$[A \otimes B]_{ji} = \otimes_{k=1}^l ([A]_{jk} \otimes [B]_{ki}) = \max_{k=1, \dots, l} \{[A]_{jk} + [B]_{ki}\}.$$

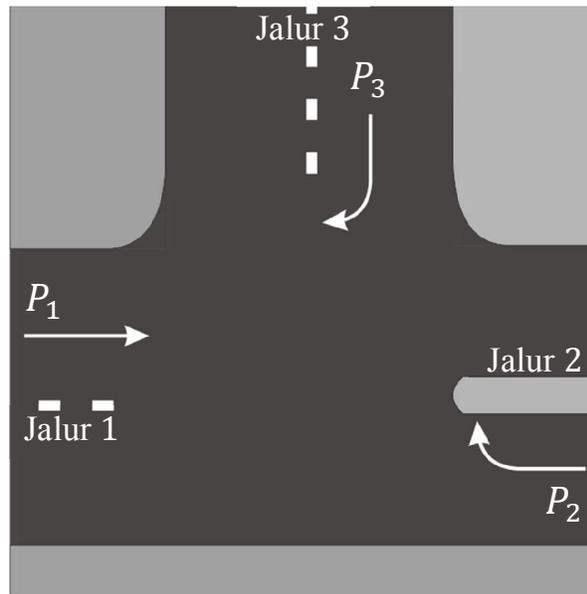
Dalam pemodelan menggunakan aljabar max-plus, terdapat nilai eigen dan vektor eigen yang berkaitan dengan matriks yang dapat digunakan untuk menganalisis keperiodikannya.

Definisi 4

Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ adalah nilai eigen max-plus matriks A jika terdapat suatu vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ dengan $\mathbf{v} \neq \mathbf{\varepsilon}_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$ dengan vektor \mathbf{v} adalah vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ .

3. Model Aljabar Max-Plus Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas

Pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas dapat dilakukan dengan memodelkan waktu nyala lampu lalu lintas menggunakan aljabar max-plus. Dalam artikel ini, dibahas pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas di simpang Museum BRI Purwokerto. Persimpangan jalan ini terdiri dari tiga jalur dua arah yang masing-masing terdiri atas dua lajur. Visualisasi dari persimpangan tersebut dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Visualisasi Simpang Museum BRI.

Persimpangan tersebut terdiri atas dua aliran kendaraan untuk masing-masing jalur sehingga secara keseluruhan terdapat enam aliran kendaraan. Dari keenam aliran kendaraan pada tiga lajur yang terdapat pada simpang Museum BRI, hanya terdapat tiga aliran kendaraan yang mengikuti isyarat lampu lalu lintas. Ketiga aliran kendaraan masuk persimpangan yang dikendalikan oleh lampu lalu lintas pada setiap jalur tersebut yaitu aliran kendaraan pada jalur 1 yang berjalan lurus dari jalur 1 menuju jalur 2, aliran kendaraan pada jalur 2 yang berbelok ke kanan dari jalur 2 menuju jalur 3, serta aliran kendaraan pada jalur 3 yang berbelok ke kanan dari jalur 3 menuju jalur 1.

Aliran kendaraan yang dimodelkan adalah aliran kendaraan masuk ke persimpangan yang mengikuti isyarat lampu lalu lintas pada setiap jalur di simpang Museum BRI tersebut, yaitu P_1 , P_2 , dan P_3 . Waktu nyala lampu lalu lintas yang digunakan dalam model hanya waktu nyala hijau. Selang waktu nyala hijau antara dua jalur atau selanjutnya disebut waktu selang juga digunakan dalam model yang disusun.

Dalam memodelkan waktu nyala lampu lalu lintas ini, didefinisikan:

- P_i : aliran kendaraan pada jalur i , $i = 1,2,3$
- $x_i(k)$: waktu awal nyala hijau ke- k pada jalur i , $i = 1,2,3$
- $t_i(k)$: waktu nyala hijau ke- k pada jalur i , $i = 1,2,3$
- m_{ij} : waktu selang antara jalur i dan j , $i, j = 1,2,3, i \neq j$

Model aljabar max-plus dari waktu nyala lampu lalu lintas yang diperoleh yaitu:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(t_3(k) + m_{13} + x_3(k), -\infty), \\ x_2(k+1) &= \max(t_1(k) + m_{21} + x_1(k), -\infty), \\ x_3(k+1) &= \max(t_2(k) + m_{32} + x_2(k), -\infty), \end{aligned} \quad (1)$$

untuk $k = 0,1,2, \dots$

Model (1) juga dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= t_3(k) \otimes m_{13} \otimes x_3(k) \oplus -\infty \\ x_2(k+1) &= t_1(k) \otimes m_{21} \otimes x_1(k) \oplus -\infty \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_3(k+1) = t_2(k) \otimes m_{32} \otimes x_2(k) \oplus -\infty$$

untuk $k = 0, 1, 2, \dots$

Model (2) dapat dituliskan dalam persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & t_3(k) + m_{13} \\ t_1(k) + m_{21} & -\infty & -\infty \\ -\infty & t_2(k) + m_{32} & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}$$

untuk $k = 0, 1, 2, \dots$ atau dapat dituliskan:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & t_3(k) + m_{13} \\ t_1(k) + m_{21} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_2(k) + m_{32} & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3)$$

untuk $k = 0, 1, 2, \dots$, dengan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T$.

Persamaan (3) juga dapat dituliskan:

$$\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k) \oplus B \quad (4)$$

untuk $k = 0, 1, 2, \dots$, dengan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & t_3(k) + m_{13} \\ t_1(k) + m_{21} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_2(k) + m_{32} & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

4. Pengaturan Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas

Dari model waktu nyala lampu lalu lintas yang diperoleh, dicari vektor eigen dan nilai eigen dengan bantuan perangkat lunak *Scilab 5.5.2* menggunakan data yang diperoleh dari pengamatan langsung. Data yang digunakan berupa waktu nyala hijau untuk setiap aliran kendaraan yang memasuki persimpangan dari ketiga jalur pada simpang tiga tersebut serta selang waktu nyala hijau antara dua jalur. Pada data ini, waktu nyala kuning dimasukkan ke dalam waktu nyala hijau sehingga data waktu nyala hijau merupakan data yang sudah ditambah dengan waktu nyala kuning. Waktu nyala hijau untuk setiap aliran kendaraan dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Waktu Nyala Hijau.

Aliran Kendaraan pada Jalur i (P_i)	Waktu Nyala Hijau ($t_i(k)$, dalam detik)
P_1	22
P_2	23
P_3	23

Sedangkan selang waktu nyala hijau antara dua jalur atau disebut waktu selang dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Waktu Selang antara Dua Jalur.

Jalur	Waktu Selang
1 dan 2	3
2 dan 3	3
3 dan 1	3

Berdasarkan data tersebut dan persamaan (4), diperoleh model waktu nyala lampu lalu lintas sebagai berikut:

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B$$

untuk $k = 0, 1, 2, \dots$, dengan $x(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 22+3 \\ 23+3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 23+3 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 25 \\ 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Untuk penghitungan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan bantuan *Scilab* 5.5.2, maka digunakan matriks $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 25 \\ 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Perhitungan menggunakan *Scilab* 5.5.2 dengan bantuan *Max-plus Algebra and Petrinet Toolbox ver. 1.1.0* [6] memberikan hasil nilai eigen 25,666667 dan

vektor eigen yang bersesuaian adalah $\begin{bmatrix} 51,333333 \\ 51,666667 \\ 52 \end{bmatrix}$. Vektor eigen yang

diperoleh digunakan untuk menentukan waktu awal nyala lampu lalu lintas. Waktu awal nyala lampu lalu lintas ini ditentukan dengan mengurangkan setiap elemen vektor eigen dengan elemen terkecil. Sedangkan, nilai eigen yang diperoleh digunakan untuk menentukan keperiodikan waktu nyala lampu lalu lintas tersebut. Maka, diperoleh keadaan awal waktu nyala lampu lalu lintas untuk fase ke-1 yaitu untuk aliran kendaraan P_1 , P_2 , dan P_3 berturut-turut yaitu 0 detik, 0,333334 detik, dan 0,666667 detik. Setelah dilakukan pembulatan terhadap durasi tersebut menjadi berturut-turut 0 detik, 0 detik, dan 1 detik, diperoleh suatu waktu awal nyala lampu lalu lintas untuk fase ke-1. Pembulatan juga dilakukan terhadap nilai eigen yang menggambarkan periode waktu nyala lampu lalu lintas sehingga diperoleh periode 26 detik. Pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas untuk setiap fase dituliskan pada Tabel 3 dengan waktu awal nyala lampu lalu lintas aliran kendaraan pada fase ke-1 yaitu 0:00:00. Pada Tabel 3, waktu nyala hijau ditandai dengan warna gelap dan waktu nyala merah ditandai dengan warna terang.

Tabel 3. Pengaturan Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas.

Aliran Kendaraan pada Jalur i (P_i)	Fase ke-			
	1	2	3	4
P_1	0:00:00	0:00:26	0:00:52	0:01:18
P_2	0:00:00	0:00:26	0:00:52	0:01:18
P_3	0:00:01	0:00:27	0:00:53	0:01:19

Waktu nyala hijau aliran kendaraan jalur 1, jalur 2, dan jalur 3 ditentukan berdasarkan hasil pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas tersebut. Waktu nyala hijau aliran kendaraan P_1 diperoleh dengan menghitung selisih waktu nyala hijau P_2 pada fase ke-2 dengan P_1 pada fase ke-1, yaitu 26 detik. Waktu nyala hijau aliran kendaraan P_2 diperoleh dengan menghitung selisih waktu nyala hijau P_3 pada fase ke-3 dengan P_2 pada fase ke-2, yaitu 27 detik. Waktu nyala hijau aliran kendaraan P_3 diperoleh dengan menghitung selisih waktu nyala hijau P_1 pada fase ke-4 dengan P_3 pada fase ke-3, yaitu 25 detik. Dari penghitungan ini, diperoleh perbandingan waktu nyala hijau hasil perhitungan dengan waktu nyala hijau yang diterapkan pada lampu lalu lintas di simpang Museum BRI yang dituliskan pada Tabel 4.

Tabel 4. Perbandingan Waktu Nyala Hijau Lampu Lalu Lintas di Simpang Museum BRI.

Aliran Kendaraan pada Jalur i (P_i)	P_1	P_2	P_3
Waktu Nyala Hijau Hasil Perhitungan (dalam detik)	26	27	25
Waktu Nyala Hijau yang Diterapkan pada Lampu Lalu Lintas (dalam detik)	22	23	23

5. Kesimpulan dan Saran

5.1. Kesimpulan

Waktu nyala lampu lalu lintas di persimpangan dapat dimodelkan menggunakan aljabar max-plus. Dari model aljabar max-plus tersebut serta data yang diperoleh dari pengamatan langsung, dapat ditentukan vektor eigen dan nilai eigen yang digunakan untuk menentukan waktu nyala lampu serta keperiodikannya. Pada penelitian ini, digunakan data waktu nyala lampu hijau pada lampu lalu lintas di simpang Museum BRI Purwokerto.

Waktu nyala hijau lampu lalu lintas jalur 1, jalur 2 dan jalur 3 yang diperoleh berdasarkan vektor eigen dan nilai eigen hasil perhitungan lebih lama jika dibandingkan waktu nyala hijau yang diterapkan pada lampu lalu lintas di simpang Museum BRI. Dengan waktu nyala hijau yang lebih lama, diharapkan dapat mengurangi panjang antrian pada jalur-jalur di persimpangan yang merupakan simpang tiga tersebut.

5.2. Saran

Waktu nyala hijau yang diperoleh berdasarkan hasil perhitungan lebih lama dibanding waktu nyala hijau yang diterapkan pada lampu lalu lintas di simpang Museum BRI. Di samping dapat mengurangi panjang antrian pada persimpangan tersebut dengan waktu nyala hijau yang lebih lama, hal ini bisa saja mengakibatkan waktu nyala merah yang tidak diperhitungkan dalam penelitian ini juga menjadi lebih lama sehingga dapat menambah waktu tunggu kendaraan. Oleh karena itu, dapat digunakan metode lain untuk mengetahui waktu nyala lampu lalu lintas yang dapat mengurangi waktu tunggu serta panjang antrian kendaraan di simpang Museum BRI.

Penggunaan aljabar max-plus juga dapat diterapkan untuk menentukan pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas pada suatu persimpangan dengan melakukan sinkronisasi terhadap persimpangan lain yang berada di sekitarnya. Dengan melakukan sinkronisasi, dapat diperoleh suatu pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas yang dapat mengurangi waktu tunggu kendaraan di suatu simpang yang terkoordinasi dengan persimpangan di sekitarnya.

Daftar Pustaka

- [1] Gaubert, Stéphane, 1998, *Two Lectures on Max-plus Algebra*, INRIA.
- [2] Lazuardi, Rizki, Musthofa, 2013, *Pengaturan Durasi Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas di Persimpangan Gondomanan dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus*, Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains Edisi 4, Volume II (Juli-Agustus 2013).
- [3] Peško, Stefan, Turek, Michal & Turek, Richard, 2012, *Max-plus algebra at road transportation*, Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics.
- [4] Rudhito, M. Andy, 2016, *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*, Yogyakarta, Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma.
- [5] Subiono, 2015, *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya Ver 3.0.0*, Surabaya, Jurusan Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh November.
- [6] Subiono, Dieky Adzkiya & Kistosil Fahim, 2013, *Maxplus Algebra and Petrinet Toolbox ver. 1.1.0*, Institut Teknologi Sepuluh November, diunduh dari https://atoms.scilab.org/toolboxes/maxplus_petrinet/1.1.0

Penerapan Aljabar Max-Plus dalam Penjadwalan Durasi Waktu Nyala Lampu Lalu-lintas Untuk Mengurangi Kemacetan Jalan di Persimpangan Janti Yogyakarta

Farkhatu Sikha, Nur Hidayah
Mahasiswa Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma,
Yogyakarta
Farkhatusikha@gmail.com, Nurhidayahabdillah18@gmail.com

Abstrak

Aljabar *Max-Plus* merupakan cabang ilmu matematika bidang aljabar. Dalam penerapannya pada kehidupan sehari-hari Aljabar *Max-Plus* dapat menyelesaikan beberapa masalah, diantaranya masalah sistem produksi, sistem transportasi dan sistem penjadwalan. Penerapan Aljabar *Max-Plus* pada sistem penjadwalan, salah satunya adalah penjadwalan durasi waktu nyala lampu lalu lintas pada perjalanan jalan. Perjalanan Janti merupakan jalur tiga dimana terjadi antrian panjang kendaraan pada waktu-waktu tertentu. Penjadwalan yang tepat akan sangat membantu dalam memperlancar lalu-lintas kendaraan sehingga dapat mengurangi waktu tunggu dan panjang antrian kendaraan pada saat lampu merah menyala. Penelitian ini akan menghasilkan sebuah model Aljabar *Max-Plus*. Hasil penelitian ini akan dianalisis dan dibandingkan dengan data yang ada yang diterapkan pada saat ini oleh Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika Daerah Istimewa Yogyakarta.

Kata Kunci: *aljabar, aljabar max-plus, penjadwalan durasi waktu nyala lampu lalu-lintas.*

1. Pendahuluan

Alat Transportasi merupakan alat yang digunakan manusia dalam berpindah tempat. Manusia berpindah tempat untuk memenuhi kebutuhan sehari-hari seperti ke tempat kerja, ke sekolah dan lainnya. Peningkatan volume alat transportasi sekarang ini meningkat secara drastis baik kendaraan pribadi maupun kendaraan umum baik di wilayah perkotaan maupun wilayah pedesaan. Peningkatan volume alat transportasi yang signifikan yang tidak sebanding dengan perluasan ruas jalan akan menimbulkan masalah-masalah transportasi seperti kemacetan, tundaan, atau bahkan terjadinya kecelakaan.

Permasalahan pergerakan transportasi khususnya masalah kemacetan di perkotaan sering terjadi pada daerah persimpangan jalan. Persimpangan adalah tempat pertemuan ruas-ruas jalan dan tempat terjadinya konflik lalu-lintas, berfungsi sebagai tempat kendaraan melakukan perubahan pergerakan arah lalu-lintas. Persimpangan merupakan bagian yang sangat penting dalam jaringan jalan, hal ini sehubungan dengan pengaruhnya terhadap pergerakan dan keselamatan dari arus lalu-lintas kendaraan. Yuniarti dalam Amalia kiki (2015: 2).

Kota Yogyakarta mempunyai peran dan ditetapkan sebagai kota pelajar, dan dari sinilah pasti banyak orang yang menggunakan transportasi baik yang umum maupun yang pribadi. Kota Yogyakarta merupakan salah satu kota yang tidak luput

dari pemasalahan kemacetan lalu lintas khususnya persimpangan jalan. Persimpangan Janti merupakan salah satu persimpangan yang pada waktu-waktu tertentu terjadi kemacetan panjang kendaraan.

Menurut Rizki (2013) salah satu usaha untuk mengurangi tingkat kemacetan di persimpangan jalan adalah dengan dipasang lampu lalu-lintas (*traffic light*). Fungsi lampu lalu-lintas hampir sama di semua kota di dunia, yakni untuk memberi tanda kapan kendaraan harus berjalan dan berhenti secara bergantian dari berbagai arah. Lampu ini menggunakan warna yang diakui secara universal, yaitu warna hijau, kuning dan merah.

Menurut Webster dan Cobbe (1956) dalam Lazuardi, Rizki (2013: 2), system perlampuan lalu-lintas menggunakan jenis nyala lampu sebagai berikut:

1. Lampu hijau: kendaraan yang mendapatkan isyarat harus bergerak maju.
2. Lampu kuning: kendaraan yang mendapatkan isyarat harus melakukan antisipasi, apabila memungkinkan harus mengambil keputusan untuk berlakunya lampu yang berikutnya. Kendaraan yang mendapat isyarat tersebut harus waspada, boleh berhenti atau terus maju.
3. Lampu merah: kendaraan yang mendapatkan isyarat harus berhenti.

Menurut *Highway Capacity Manual Project (HCL)* (1997) pada umumnya sinyal lalu-lintas dipergunakan untuk satu atau lebih alasan berikut:

1. Untuk menghindari kemacetan jalur akibat adanya konflik arus lalu-lintas, sehingga terjamin bahwa suatu kapasitas tertentu dapat dipertahankan, bahkan selama kondisi lalu-lintas jam puncak.
2. Untuk memberikan kesempatan pada kendaraan dan/atau pejalan kaki dari jalan jalur (kecil) untuk memotong jalan utama.
3. Untuk mengurangi jumlah kecelakaan lalu-lintas akibat tabrak antara kendaraan dari arah yang bertentangan.

Penggunaan lampu lalu-lintas pada saat ini masih monoton, sehingga masih menimbulkan kemacetan di beberapa persimpangan terutama pada waktu-waktu tertentu seperti saat pagi waktu berangkat ke kantor dan sore hari waktu pulang kantor. Sehingga dibutuhkan suatu perhitungan yang dapat memaksimalkan kerja lampu lalu-lintas yang dapat memecahkan masalah kemacetan. Aljabar Max-Plus merupakan salah satu solusi yang dapat digunakan untuk memaksimalkan kinerja lampu lalu-lintas.

Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\mathcal{R} \cup \{-\infty\}$ dengan \mathcal{R} himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan \oplus dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan \otimes . Selanjutnya $(\mathcal{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan \mathcal{R}_{max} dan $-\infty$ dinotasikan dengan ε . Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi \oplus dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi \otimes .

Kelebihan dari aljabar Max-Plus adalah dalam perhitungannya hanya menggunakan dua operasi saja, yaitu operasi maksimum dan operasi penjumlahan. Pemodelan dan analisa suatu jaringan dengan menggunakan aljabar Max-Plus dapat memberikan hasil analitis dan perhitungan yang lebih mudah.

2. Metode Penelitian

Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dengan pengembangan ilmu aljabar Max-Plus yang menggunakan metode pengumpulan langsung di lapangan.

Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di perjaluran Janti, Daerah Istimewa Yogyakarta dengan data durasi nyala lampu lalu-lintas yang diterapkan di perjaluran Janti sebagai data acuan. Penelitian ini dilakukan pada bulan Agustus tahun 2016.

Untuk mendapatkan data, penulis mengambil data di perjaluran Janti. Pengambilan data dilakukan dengan cara pengamatan langsung di lapangan. Penelitian ini dilakukan sebanyak dua kali, penelitian yang pertama dilakukan pada tanggal 14 Agustus 2016 pada pukul 08.15 sampai dengan 09.11 WIB, penelitian yang pertama ini dilakukan untuk mengetahui durasi nyala lampu hijau untuk masing-masing persimpangan. Dalam pengambilan data, penulis menggabungkan waktu menyala lampu kuning ke dalam nyala lampu hijau, sehingga data yang digunakan adalah lamanya waktu nyala lampu hijau dan merah.

Pengambilan data yang kedua dilakukan pada tanggal 25 Agustus 2016 pada pukul 17.32 sampai dengan 18.12 WIB. Pengambilan data yang kedua untuk memastikan bahwa waktu yang terjadi di persimpangan Janti berlangsung secara kontinu.

Objek Penelitian

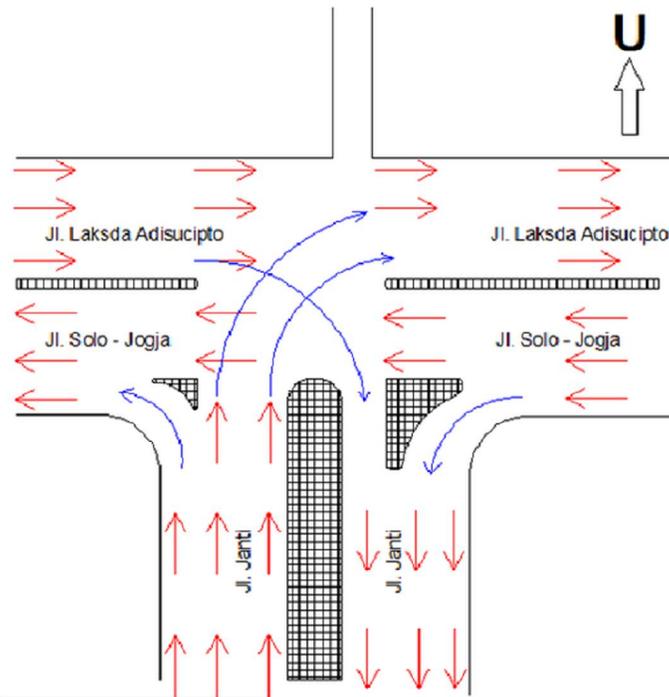
Objek penelitian ini adalah data durasi waktu nyala lampu lalu-lintas di perjaluran Janti Yogyakarta.

Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini adalah dengan pengamatan langsung di lapangan. Yang diamati adalah durasi waktu nyala lampu hijau dan lampu merah yang diberlakukan di sistem pengaturan lampu lalu-lintas di persimpangan Janti Yogyakarta.

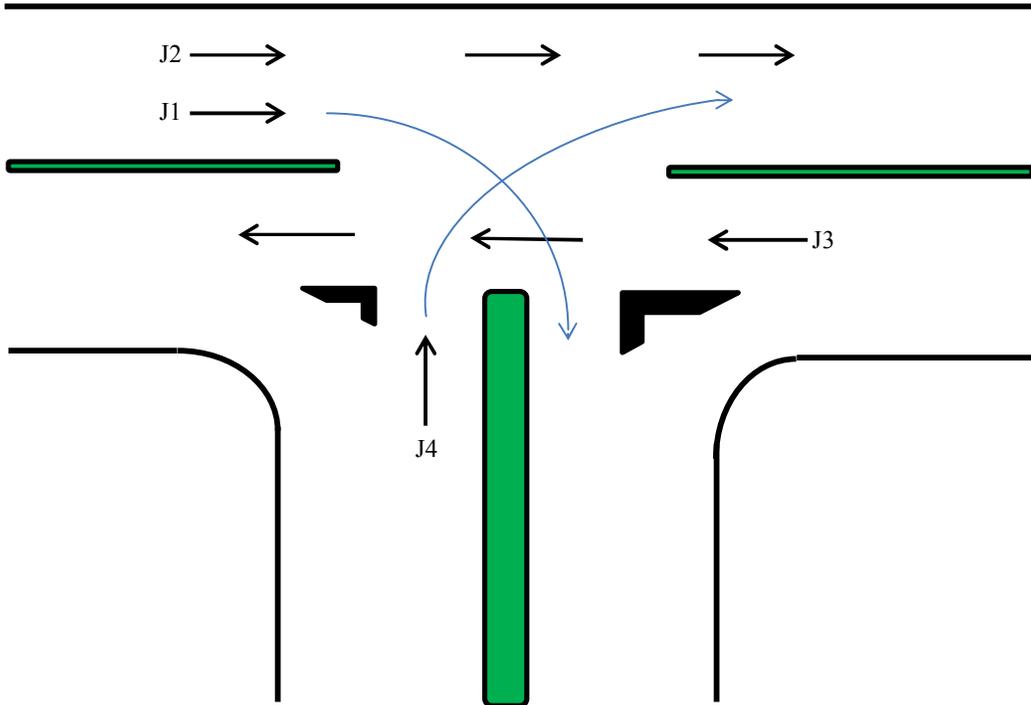
3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Penelitian ini berlokasi di persimpangan Janti Yogyakarta. Persimpangan janti adalah jalur tiga yang menghubungkan antara jalan Laksda Adisucipto, jalan Solo dan jalan Janti. Denah dari persimpangan tersebut bisa dilihat pada Gambar 1, berikut ini:



Gambar 1: Jalur Janti

Persimpangan Janti tidak semua jalur diberlakukan lampu lalu-lintas. Gambar 2 merupakan denah persimpangan Janti yang menggunakan lampu lalu-lintas. Peneliti hanya mengambil data lampu lalu-lintas pada gambar 2.



Gambar 2: Denah Persimpangan Janti yang Menggunakan Lampu Lalu-Lintas

Penelitian ini terdiri dari beberapa langkah, yaitu langkah pertama pengambilan data durasi nyala lampu hijau dan fase *clear* antarjalur yang saling berkaitan. Berdasarkan penelitian di lapangan didapatkan data seperti pada tabel.1 dan tabel.2 berikut:

Tabel 1: Data Durasi Waktu Menyala Fase Hijau (dalam detik)

Jalur kendaraan	J1	J2	J3	J4
Lama fase hijau	34	34	25	18

Tabel 2. Durasi Waktu Fase Clear Antar Jalur (dalam detik)

Hubungan Jaluran	Lama face <i>Clear</i>
Jalur 1 dengan jalur 3	3
Jalur 2 dengan jalur 3	3
Jalur 3 dengan jalur 4	3
Jalur 4 dengan jalur 1	3
Jalur 4 dengan jalur 2	3

Langkah selanjutnya adalah menyusun model matematika dari kasus di atas berdasarkan aturan aljabar *Max-Plus*. Sebelum menyusun model matematika, akan dijelaskan terlebih dahulu variabel – variabel yang digunakan dalam pembentukan model matematika. Variabel – variabel yang digunakan adalah sebagai berikut :

J_i = aliran kendaraan suatu jalur ke- i , $i = 1,2,3,4$

$L_i(k)$ = waktu awal nyala lampu hijau ke- k pada jalur i , $i = 1,2,3,4$

$t_i(k)$ = waktu nyala lampu hijau ke- k pada jalur i , $i = 1,2,3,4$

M_{ij} = waktu selang antar dua jalur i dan j , i dan $j = 1,2,3,4$, $i \neq j$

Berdasarkan variabel tersebut, dapat dibentuk model matematika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L_1(k + 1) &= \max(t_4(k) + L_4(k) + M_{14}, -\infty), \\
 L_2(k + 1) &= \max(t_4(k) + L_4(k) + M_{24}, -\infty), \\
 L_3(k + 1) &= \max(t_1(k) + L_1(k) + M_{13}, -\infty), \\
 L_4(k + 1) &= \max(t_2(k) + L_2(k) + M_{24}, t_3(k) + L_3(k) + M_{34})
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Model matematika (1) di atas dapat dimodelkan dalam model aljabar Max-plus sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L_1(k + 1) &= \max(t_4(k) \otimes L_4(k) \otimes M_{14} \oplus -\infty), \\
 L_2(k + 1) &= \max(t_4(k) \otimes L_4(k) \otimes M_{24} \oplus -\infty),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$$L_3(k + 1) = \max(t_1(k) \otimes L_1(k) \otimes M_{13} \oplus - \infty),$$

$$L_4(k + 1) = \max(t_2(k) \otimes L_2(k) \otimes M_{24} \oplus t_3(k) \otimes L_3(k) \otimes M_{34})$$

Model matematika tersebut selanjutnya diubah ke dalam bentuk matriks untuk mempermudah perhitungan output dari model matematika. Bentuk matriks dari model matematika di atas seperti pada tabel 3 berikut.

$$A = \begin{bmatrix} t_1 + M_{11} & t_2 + M_{21} & t_3 + M_{31} & t_4 + M_{41} \\ t_2 + M_{12} & t_2 + M_{22} & t_3 + M_{32} & t_4 + M_{42} \\ t_3 + M_{13} & t_3 + M_{23} & t_3 + M_{33} & t_4 + M_{43} \\ t_4 + M_{14} & t_4 + M_{24} & t_4 + M_{34} & t_4 + M_{44} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Data-data yang telah didapatkan dari hasil pengamatan, dimasukkan ke dalam persamaan matriks pada tabel 1. Cara pengisian elemen matriks diatas adalah dengan menjumlahkan durasi menyala lampu hijau dari masing-masing elemen baris dengan fase *clear* antar jalur yang saling berkaitan. Jika jalur di elemen baris tidak memiliki hubungan dengan jalur di elemen kolom, maka elemen matriks di kolom dan baris tersebut di isi dengan angka 0 yang berarti tidak ada hubungan. Setelah data-data yang ada dimasukkan ke dalam matriks, didapatkan matriks sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 + 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 + 3 \\ 34 + 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 34 + 3 & 25 + 3 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 \\ 37 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 37 & 28 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (4)$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung output dari matriks yang telah diketahui. Perhitungan dilakukan dengan menggunakan software *Scilab* untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen dan vektor eigen ini digunakan untuk menentukan durasi waktu nyala lampu lalu lintas di suatu perjalanan. Berdasarkan perhitungan menggunakan software *Scilab* didapatkan hasil sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} 116 \\ 116 \\ 124 \\ 124 \end{bmatrix}, l = 29, d = 2 \quad (5)$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, *d* merupakan fase ideal untuk persimpangan Janti, *J* merupakan vektor eigen dari model matematika dan *l* merupakan lamda atau nilai eigen dari matriks model matematika.

Vektor eigen dari masing-masing jalur diatas dikurangkan dengan nilai vektor eigen suatu jalur yang terkecil. Hal ini dilakukan untuk menentukan nilai awal dalam penentuan waktu penyalaaan lampu lalu-lintas dari masing-masing jalur.

Nilai eigen yang didapat dari hasil digunakan untuk menentukan periodisasi waktu penyalaaan lampu lalu-lintas. Berdasarkan perhitungan, didapatkan periodisasi penyalaaan lampu lalu lintas seperti berikut.

Tabel 3 Waktu Menyala Lampu Hijau masing-masing jalur berdasarkan fase

Jalur	Fase Ke-		
	1	2	3
J1	0:00:00	0:00:29	0:00:58
J2	0:00:00	0:00:29	0:00:58
J3	0:00:08	0:00:37	0:01:06
J4	0:00:08	0:00:37	0:01:06

Keterangan:

1. Warna putih menunjukkan lampu hijau mulai menyala di suatu jalur.
2. Warna cokelat menunjukkan bahwa jalur yang bersangkutan sedang mengalami fase lampu merah.

Selanjutnya, akan dicari lamanya waktu menyala lampu hijau dari masing-masing jalur berdasarkan data hasil perhitungan pada tabel 3 sebagai berikut.

1. Jalur 1

Lamanya nyala lampu hijau di jalur J_1 adalah selisih dari waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_3 dikurangi dengan waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_1 .

$$J_1 = 37 - 00 = 37 \text{ detik}$$

2. Jalur 2

Lamanya nyala lampu hijau di jalur J_2 adalah selisih dari waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_3 dikurangi dengan waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_2 .

$$J_2 = 37 - 00 = 37 \text{ detik}$$

3. Jalur 3

Lamanya nyala lampu hijau di jalur J_3 adalah selisih dari waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_4 dikurangi dengan waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_3 .

$$J_3 = 66 - 37 = 29 \text{ detik}$$

4. Jalur 4

Lamanya nyala lampu hijau di jalur J_4 adalah selisih dari waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_1 dan J_2 dikurangi dengan waktu menyala lampu hijau pertama di jalur J_4 .

$$J_4 = 66 - 00 = 66 \text{ detik}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa aljabar *max-plus* dapat diaplikasikan dalam pengaturan durasi waktu nyala lampu lalu lintas. Penentuan durasi waktu nyala lampu lalu lintas menggunakan aljabar *max-plus* memerlukan dua input, yaitu durasi waktu menyala lampu hijau dari masing-masing simpang dan fase *clear* antar simpang. Langkah – langkah yang ditempuh untuk mendapatkan hasil perhitungan adalah menyusun model matematika, merubah model

matematika dalam bentuk matriks, melakukan perhitungan, dan menganalisa hasil perhitungan.

Saran

Diharapkan peneliti selanjutnya dapat mengembangkan penelitian penggunaan aljabar *max-plus* pada sistem lain yang dapat membantu menemukan solusi dari masalah kehidupan sehari-hari.

Daftar Pustaka

- [1] Amalia, Kiki Putri. 2015. *Penanganan Masalah Lalu Lintas pada Persimpangan (Studi Kasus di Simpang 3 Karingau-Soekarno-Hatta Km 5,5 Balikpapan)*. Balikpapan: ITK.
- [2] A. Seleim, H. Elmaraghy. 2014. *Generating Max-plus Equations for Efficient Analysis of Manufacturing Flow Lines*. Journal of Manufacturing Systems. Vol.11 No. JMSY-314
- [3] Bernaldy, CES. (1997). *Manual Kapasitas Jalan Indonesia*. Jakarta: PT. Bina KaryaPersero.
- [4] MJKI. 1997. Highway Capacity Manual Project. Jakarta Selatan. Direktorat Jendral Bina Marga.
- [5] Lazuardi, Rizki, Musthofa, 2013, *Pengaturan Durasi Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas di Persimpangan Gondomanan dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus*, Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains Edisi 4, Volume II (Juli-Agustus 2013).
- [6] Rudhito, M. Andy, 2016, *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*, Yogyakarta: Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma.

Suatu Pemodelan Estimasi Waktu Pemrosesan Sistem Dengan Sejumlah Loker Menggunakan Aljabar Max-Plus

Maria Kristin Sondang Sihombing

Magister Pendidikan Matematika,
Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
mariakristinsihombing@yahoo.co.id

Abstrak

Setiap pemilik kendaraan bermotor khususnya roda dua, diwajibkan untuk membayar pajak beserta memperbaharui plat nomor kendaraannya setiap lima tahun sekali. Pada proses pelaksanaan pembayaran pajak, pemilik kendaraan kesulitan untuk memperkirakan estimasi waktu, sehingga kemungkinan akan mengganggu jadwal bekerja pada hari pemajakan. Artikel ini akan membahas pembuatan model dan perhitungan estimasi waktu pemajakan sepeda motor periode lima tahunan. Model yang akan dibuat berbentuk persamaan matrik menggunakan Sistem Linear Max-Plus Waktu Invariant (SLMI). Tujuan dari pembuatan model dan perhitungannya adalah untuk membantu pemilik kendaraan memperkirakan estimasi waktu untuk kembali ketempat kerjanya. Hasil dari perhitungan model ini adalah estimasi waktu selesai yang dihitung secara rekursif yang dilihat dari nomor antrian yang diperoleh pemilik kendaraan. Waktu yang dibutuhkan oleh setiap wajib pajak dalam satu siklus pemrosesan diperoleh dari perhitungan $y(k)$. Selisih waktu selesai antar pemajak sebelum dan sesudahnya diperoleh dengan menghitung selisih $y(k) - y(k - 1)$.

Kata Kunci: *Estimasi waktu, Pemajakan, Sisten Linear Max-Plus Waktu Invariant*

1. Pendahuluan

Pengguna kendaraan bermotor khususnya sepeda motor di Indonesia saat ini sangatlah banyak. Kendaraan bermotor ini banyak diminati untuk mendukung aktifitas para penggunanya, maka tak jarang kita dapat melihat para siswa SMA juga sudah banyak yang menggunakan kendaraan bermotor. Kendaraan bermotor ini tidak dengan bebas dapat berkeliaran di jalan-jalan. Setiap pengguna khususnya pemilik kendaraan bermotor diwajibkan untuk membayar pajak kepemilikan kendaraan bermotor setiap tahunnya. Setiap periode lima tahunan setiap pemilik kendaraan bermotor juga diwajibkan untuk membayar pajak lima tahunan beserta melakukan pembaharuan STNK dan TNKB.

Proses pembayaran serta pembaharuan STNK dan TNKB ini tidak jarang menjadi hal yang mengganggu aktifitas para pemilik kendaraan bermotor atau biasa disebut wajib pajak. Proses pembaharuan ini berbeda dengan pemajakan tahunan yang dilakukan, pembaharuan itu sendiri membutuhkan waktu yang relatif jauh lebih lama dibandingkan pemajakan tahunan biasanya. Pemilik kendaran bermotor yang akan memajakan kendaraan bermotor terkadang susah meperkirakan waktu untuk menyelesaikan segala proses pemajakan kendaraan bermotor. Hal ini mengakibatkan gangguan dalam kegiatan harian yang dilakukan oleh pemilik kendaraan bermotor. Seperti yang diketahui bersama bahwa kantor SAMSAT tutup pada akhir pekan,

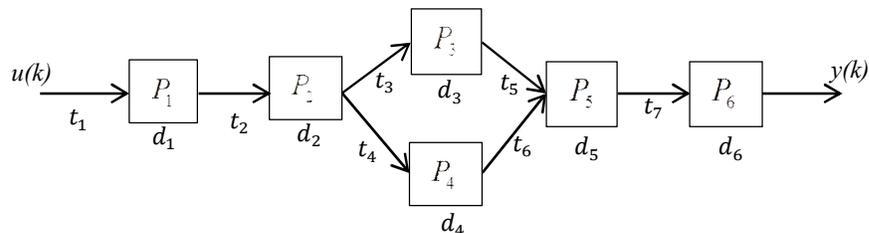
sehingga memang pemilik kendaraan bermotor harus meluangkan waktunya untuk memajakan kendaraannya pada hari-hari aktif bekerja.

Pemilik kendaraan bermotor merasa perlu untuk mengetahui estimasi waktu selesai dari segala proses pemajakan, sehingga dapat kembali ketempat bekerja tepat pada waktunya. Untuk itu akan dibuat suatu model proses pemajakan kendaraan bermotor menggunakan aljabar max-plus. Bentuk dari model tersebut adalah Sistem Linear Max-Plus Waktu Invarian (SLMI). Perhitungan rekrusif model ini akan memberikan hasil estimasi waktu selesainya proses pemajakan berdasarkan nomor antrian yang diperoleh para wajib pajak. Solusi ini diharapkan akan sedikit membantu para wajib pajak untuk memperkirakan waktu mengambil ijin di tempat bekerja.

2. Proses Pemodelan dan Perhitungan

Pada pembuatan model proses pemajakan, terlebih dahulu akan dijelaskan serangkaian proses pemajakan. Proses pemajakan akan terjadi di dua tempat yaitu di luar dan di dalam gedung dan yang akan dibahas dalam artikel ini adalah pemrosesan yang terjadi di dalam gedung. Proses yang terjadi di luar gedung diperkirakan 15 menit setiap kendaraannya. Sesudahnya para wajib pajak akan melakukan kegiatan pemajakan serta pembaharuan STNK dan TNKB di dalam gedung. Proses didalam gedung terdiri dari 6 loket yang masing-masing para wajib pajak harus melewati setiap loket dari awal sampai akhir secara berturutan untuk menerima layanan disetiap loket. Loker 1 adalah loket pengembalian formulir yang sudah diisi beserta segala syarat dan ketentuannya. Loker 2 adalah loket pemeriksaan syarat dan pemeberian notice. Loker 3 dan Loker 4 adalah kasir untuk pembayaran pajak kendaraan bermotor. Loker 5 adalah loket pembaharuan dan pencetakan STNK baru. Loker 6 adalah loket pembaharuan dan pencetakan TNKB yang baru.

Satu siklus pemajakan kendaraan bermotor adalah proses dari tibanya wajib pajak di Loker 1 hingga meninggalkan Loker 6. Saat wajib pajak pertama akan memulai satu siklus pemajakan semua loket belum memberikan layanan. Setiap loket hanya dapat memproses satu wajib pajak saja. Berikut akan digambarkan sistem pemrosesan pemajakan serta pembaharuan STNK dan TNKB:



Gambar 1. Sistem Pemrosesan dan Pemajakan

Sistem ini terdiri dari 6 unit pemrosesan $P_1 =$ Loker 1, $P_2 =$ Loker 2, $P_3 =$ Loker 3, $P_4 =$ Loker 4, $P_5 =$ Loker 5 dan $P_6 =$ Loker 6. Waktu pemrosesan $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ adalah $d_1 = 5, d_2 = 1, d_3 = 3, d_4 = 3, d_5 = 3, d_6 = 10$. Para wajib pajak membutuhkan waktu untuk menuju P_1 selama $t_1 = 15$ menit, dari P_1 ke P_2 dibutuhkan waktu $t_2 = 3$ menit, dari P_2 ke P_3 dibutuhkan waktu $t_3 = 0$ menit, dari P_2 ke P_4 dibutuhkan waktu

$t_4 = 1$ menit, dari P_3 ke P_5 dibutuhkan waktu $t_5 = 0$ menit, dari P_4 ke P_5 dibutuhkan waktu $t_6 = 1$ menit dan dari P_6 ke P_6 dibutuhkan waktu $t_7 = 5$ menit. Setiap unit pemrosesan mulai bekerja setelah setiap wajib pajak sampai di loket.

Didefinisikan:

(i) $u(k + 1)$: Waktu saat formulir dimasukkan ke sistem pemrosesan ke- $(k + 1)$

(ii) $x_i(k)$: Waktu saat pemrosesan ke- i mulai bekerja untuk pemrosesan ke- k

(iii) $y(k)$: Waktu saat wajib pajak ke- k meninggalkan sistem
 $x_i(k)$ adalah komponen dari vektor $x(k)$

Setelah semua proses didefinisikan, baru akan dibuat pemodelan serta perhitungan estimasi waktu selesai proses pemajakan kendaraan bermotor.

2.1. Pembuatan Model

Formulir ke- $(k + 1)$ akan tersedia pada P_1 pada waktu $t = u(k + 1) + 15$, tetapi P_1 dapat mulai bekerja setelah pemrosesan ke- k selesai. Karena waktu pemrosesan di P_1 adalah $d_1 = 5$ menit, maka proses ke- k akan meninggalkan P_1 pada saat $t = x_1(k) + 5$. Hal ini dapat dituliskan dengan:

$$x_1(k + 1) = \max(u(k + 1) + 15, x_1(k) + 5) \quad (1)$$

Wajib pajak akan tiba di loket P_2 pada waktu $t = x_1(k + 1) + 8$, tetapi P_2 dapat mulai bekerja setelah pemrosesan ke- k selesai. Karena waktu pemrosesan di P_2 adalah $d_2 = 1$ menit, maka proses ke- k akan meninggalkan P_2 pada saat $t = x_2(k) + 1$. Hal ini dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} x_2(k + 1) &= \max(x_1(k + 1) + 8, x_2(k) + 1) \\ &= \max(\max(u(k + 1) + 15, x_1(k) + 5) + 8, x_2(k) + 1) \\ &= \max(u(k + 1) + 23, x_1(k) + 13, x_2(k) + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

Wajib pajak akan tiba di loket P_3 pada waktu $t = x_2(k + 1) + 1$, tetapi P_3 dapat mulai bekerja setelah pemrosesan ke- k selesai. Karena waktu pemrosesan di P_3 adalah $d_3 = 3$ menit, maka proses ke- k akan meninggalkan P_3 pada saat $t = x_3(k) + 3$. Hal ini dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} x_3(k + 1) &= \max(x_2(k + 1) + 1, x_3(k) + 3) \\ &= \max(\max(u(k + 1) + 23, x_1(k) + 13, x_2(k) + 1) + 1, x_3(k) + 3) \\ &= \max(u(k + 1) + 24, x_1(k) + 14, x_2(k) + 2, x_3(k) + 3) \end{aligned} \quad (3)$$

Wajib pajak akan tiba di loket P_4 pada waktu $t = x_3(k + 1) + 2$, tetapi P_4 dapat mulai bekerja setelah pemrosesan ke- k selesai. Karena waktu pemrosesan di P_4 adalah $d_4 = 3$ menit, maka proses ke- k akan meninggalkan P_4 pada saat $t = x_4(k) + 3$. Hal ini dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned}
 x_4(k+1) &= \max(x_2(k+1) + 2, x_4(k) + 3) \\
 &= \max(\max(u(k+1) + 23, x_1(k) + 13, x_2(k) + 1) + 2, x_4(k) + 3) \\
 &= \max(u(k+1) + 25, x_1(k) + 15, x_2(k) + 3, x_4(k) + 3) \\
 &\quad (4)
 \end{aligned}$$

Wajib pajak akan tiba di loket P_5 pada waktu $t = x_3(k+1) + 3, x_4(k+1) + 4$, tetapi P_5 dapat mulai bekerja setelah pemrosesan ke- k selesai. Karena waktu pemrosesan di P_5 adalah $d_5 = 3$ menit, maka proses ke- k akan meninggalkan P_5 pada saat $t = x_5(k) + 3$. Hal ini dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned}
 x_5(k+1) &= \max(x_3(k+1) + 3, x_4(k+1) + 4, x_5(k) + 3) \\
 &= \max((\max(u(k+1) + 24, x_1(k) + 14, x_2(k) + 2, x_3(k) + 3) + 3), (\max(u(k+1) + 25, x_1(k) + 15, x_2(k) + 3, x_4(k) + 3) + 4), x_5(k) + 3) \\
 &= \max(u(k+1) + 27, x_1(k) + 17, x_2(k) + 5, x_3(k) + 6, u(k+1) + 29, x_1(k) + 19, x_2(k) + 7, x_4(k) + 7, x_5(k) + 3) \\
 &= \max(u(k+1) + 29, x_1(k) + 19, x_2(k) + 7, x_3(k) + 6, x_4(k) + 7, x_5(k) + 3) \\
 &\quad (5)
 \end{aligned}$$

Wajib pajak akan tiba di loket P_6 pada waktu $t = x_5(k+1) + 8$, tetapi P_6 dapat mulai bekerja setelah pemrosesan ke- k selesai. Karena waktu pemrosesan di P_6 adalah $d_6 = 10$ menit, maka proses ke- k akan meninggalkan P_6 pada saat $t = x_6(k) + 10$. Hal ini dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned}
 x_6(k+1) &= \max(x_5(k+1) + 8, x_6(k) + 10) \\
 &= \max(\max(u(k+1) + 29, x_1(k) + 19, x_2(k) + 7, x_3(k) + 6, x_4(k) + 7, x_5(k) + 3) + 8, x_6(k) + 10) \\
 &= \max(u(k+1) + 37, x_1(k) + 27, x_2(k) + 15, x_3(k) + 14, x_4(k) + 15, x_5(k) + 11, x_6(k) + 10) \\
 &\quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Maka } y(k) &= x_6(k) + 10 \\
 &\quad (7)
 \end{aligned}$$

Jika operasi \max dinotasikan dengan \oplus , operasi penjumlahan dengan \otimes maka dapat dituliskan dalam sistem persamaan linear max-plus, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= 15 \otimes u(k+1) \oplus 5 \otimes x_1(k) \\
 &\quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2(k+1) &= 23 \otimes u(k+1) \oplus 13 \otimes x_1(k) \oplus 1 \otimes x_2(k) \\
 &\quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3(k+1) &= 24 \otimes u(k+1) \oplus 14 \otimes x_1(k) \oplus 2 \otimes x_2(k) \oplus 3 \otimes x_3(k) \\
 &\quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_4(k+1) &= 25 \otimes u(k+1) \oplus 15 \otimes x_1(k) \oplus 3 \otimes x_2(k) \oplus 3 \otimes x_4(k) \\
 &\quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_5(k+1) &= 29 \otimes u(k+1) \oplus 19 \otimes x_1(k) \oplus 7 \otimes x_2(k) \oplus 6 \otimes x_3(k)
 \end{aligned}$$

$$\oplus 7 \otimes x_4(k) \oplus 3 \otimes x_5(k)$$

(12)

$$x_6(k+1) = 37 \otimes u(k+1) \oplus 27 \otimes x_1(k) \oplus 15 \otimes x_2(k) \oplus 14 \otimes x_3(k)$$

$$\oplus 15 \otimes x_4(k) \oplus 11 \otimes x_5(k) \oplus 10 \otimes x_6(k)$$

(13)

$$y(k) = 10 \otimes x_6(k)$$

(14)

Jika ditulis dalam persamaan matriks menjadi:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \otimes x(k) \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \otimes u(k+1)$$

(15)

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1)$$

(16)

$$y(k) = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10] \otimes x(k)$$

(17)

$$y(k) = C \otimes x(k)$$

(18)

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$C = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10], \text{ Serta } x_i(k) \text{ adalah komponen dari vektor } x(k)$$

2.2. Perhitungan Model

Terlebih dahulu akan dihitung nilai eigen dari sistem untuk memeriodikkan siklus proses pemajakan serta pembaharuan STNK dan TNKB. Nilai eigen dicari untuk menentukan kapan pemrosesan siklus berikutnya dari suatu sistem akan dimulai. Perhitungannya sebagai berikut:

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 33 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 34 & 14 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 35 & 15 & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon \\ 39 & 19 & 18 & 19 & 15 & \varepsilon \\ 67 & 55 & 54 & 55 & 51 & 50 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 38 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 39 & 17 & 18 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 40 & 18 & \varepsilon & 18 & \varepsilon & \varepsilon \\ 44 & 22 & 21 & 22 & 18 & \varepsilon \\ 77 & 65 & 64 & 65 & 61 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda \max &= \max(\text{trace}A, \text{trace}A^{\otimes 2}, \text{trace}A^{\otimes 3}, \text{trace}A^{\otimes 4}, \text{trace}A^{\otimes 5}, \text{trace}A^{\otimes 6}) \\ &= \max(\max(\frac{5}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{1}, \frac{10}{1}), \max(\frac{10}{2}, \frac{2}{2}, \frac{6}{2}, \frac{6}{2}, \frac{6}{2}, \frac{20}{2}), \max(\frac{15}{3}, \frac{3}{3}, \frac{9}{3}, \frac{9}{3}, \frac{9}{3}, \frac{30}{3}), \\ &\quad \max(\frac{20}{4}, \frac{4}{4}, \frac{12}{4}, \frac{12}{4}, \frac{12}{4}, \frac{40}{4}), \max(\frac{25}{5}, \frac{5}{5}, \frac{15}{5}, \frac{15}{5}, \frac{15}{5}, \frac{50}{5}), \max(\frac{30}{6}, \frac{6}{6}, \frac{18}{6}, \frac{18}{6}, \frac{18}{6}, \frac{60}{6})) \\ &= \max(10, 10, 10, 10, 10, 10) \\ \lambda \max &= 10 \end{aligned}$$

Setelah memperoleh nilai eigen, maka nilai eigen ini yang digunakan untuk memperiodikan siklus. Berikut akan diberikan perhitungan rekursif untuk perhitungan waktu estimasi selesai menggunakan (15) dan (17):

Perhitungan estimasi orang pertama akan selesai dalam satu siklus perosesan akan ditunjukkan dari hasil perhitungan $y(1)$, dengan $x(0) = [0 \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon]^T$ hal ini dikarenakan diasumsikan pada pemrosesan orang pertama loket pertama mulai bekerja pada waktu ke nol dan loket kedua sampai keenam masi belum bekerja. $u(1) = 0$ hal ini dikarenakan pemrosesan diasumsikan dimulai pada waktu sama dengan 0:

$$x(1) = A \otimes x(0) \oplus B \otimes u(1)$$

$$\begin{aligned} x(1) &= \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \otimes u(1) \\ &= \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \otimes 0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \\ y(1) &= [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10] \otimes x(1) \end{aligned}$$

$$y(1) = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10] \otimes [15 \ 23 \ 24 \ 25 \ 29 \ 37]^T = 47 \text{ menit}$$

Perhitungan estimasi orang kedua akan selesai dalam satu siklus perosesan akan ditunjukkan dari hasil perhitungan $y(2)$, dengan $x(1) = [15 \ 23 \ 24 \ 25 \ 29 \ 37]^T$ vektor $x(1)$ diperoleh dari perhitungan yang sebelumnya. $u(2) = 10$ hal ini dikarenakan nilai eigen yang diperoleh dari perhitungan adalah 10, sehingga waktu mulai berproses pada siklus pertama dan kedua berjarak 10 menit:

$$\begin{aligned} x(2) &= A \otimes x(1) \oplus B \otimes u(2) \\ x(2) &= \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \otimes x(1) \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \otimes u(2) \\ &= \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \otimes 10 = \begin{bmatrix} 20 \\ 28 \\ 29 \\ 30 \\ 34 \\ 47 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 25 \\ 33 \\ 34 \\ 35 \\ 39 \\ 47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 33 \\ 34 \\ 35 \\ 39 \\ 47 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y(2) = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10] \otimes x(2)$$

$$y(2) = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10] \otimes [25 \ 33 \ 34 \ 35 \ 39 \ 47]^T = 57 \text{ menit}$$

Perhitungan estimasi orang ketiga akan selesai dalam satu siklus perosesan akan ditunjukkan dari hasil perhitungan $y(3)$, dengan $x(2) = [25 \ 33 \ 34 \ 35 \ 39 \ 57]^T$ vektor $x(2)$ diperoleh dari perhitungan yang sebelumnya. $u(3) = 20$ hal ini dikarenakan nilai eigen yang diperoleh dari perhitungan adalah 10, sehingga waktu mulai berproses pada siklus kedua dan ketiga berjarak 10 menit:

$$x(3) = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \otimes x(2) \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \otimes u(3)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 13 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 14 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 3 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 19 & 7 & 6 & 7 & 3 & \varepsilon \\ 27 & 15 & 14 & 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 25 \\ 33 \\ 34 \\ 35 \\ 39 \\ 47 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix} \otimes 20 = \begin{bmatrix} 30 \\ 38 \\ 39 \\ 40 \\ 44 \\ 57 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 35 \\ 43 \\ 44 \\ 45 \\ 49 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 44 \\ 45 \\ 49 \\ 49 \\ 57 \end{bmatrix} \\
 y(3) &= [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10] \otimes x(3) \\
 y(3) &= [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 10] \otimes [35 \ 43 \ 44 \ 45 \ 49 \ 57]^T = 67 \text{ menit} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\text{dst.}
 \end{aligned}$$

Perhitungan estimasi orang ke- k akan selesai dalam satu siklus perosesan akan ditunjukkan dari hasil perhitungan $y(k)$, dengan vektor $x(k-1)$, vektor $x(k-1)$ diperoleh dari perhitungan yang sebelumnya. $u(k) = u(k-1) + 10$ hal ini dikarenakan nilai eigen yang diperoleh dari perhitungan adalah 10, sehingga waktu mulai berproses pada siklus kedua dan ketiga berjarak 10 menit.

Melihat hasil perhitungan yang di kembalikan kepada definisi, maka setiap wajib pajak membutuhkan waktu 47 menit dalam proses pemajakan serta pembaharuan STNK dan TNKB. Selisih waktu selesai dari wajib pajak sebelum dan sesudahnya adalah 10 menit. Proses perhitungan dapat dilakukan secara rekursif untuk mengetahui estimasi waktu selesai terhadap nomor antrian yang diperoleh. Sistem kerjanya adalah ketika wajib pajak memperoleh antrian ke-10 maka dapat dihitung secara rekursif untuk memperoleh estimasi waktu selesai pada saat $y(10)$.

3. Kesimpulan

Estimasi waktu selesai pemajakan serta pembaharuan STNK dan TNKB dapat dimodelkan dalam bentuk Sistem Persamaan Linear Max-Plus Waktu Invariant (SLMI). Hasil dari perhitungan rekursif model tersebut dapat memberikan estimasi waktu selesai secara periodik terhadap antrian yang diperoleh para wajib pajak. Waktu yang dibutuhkan oleh tiap wajib pajak dalam satu siklus pemrosesan dari awal hingga akhir diperoleh dari nilai $y(k)$. Selisih waktu selesai proses pemajakan serta pembaharuan STNK dan TNKB antara wajib pajak pertama dan kedua dalam sistem ini sama nilai eigennya. Perhitungan rekursif model tersebut memang tidak efisien saat antrian sangat panjang, untuk itu kedepannya model perhitungan rekursif ini bisa dihitung secara mudah menggunakan aplikasi MATLAB. Selain itu saat waktu yang dibutuhkan dalam perosesan pada tiap loket ini dirubah maka perhitungan dan kesimpulannya akan ikut berubah.

Daftar Pustaka

[1] Rudhito, M. A. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Program Studi Pendidikan Matematika FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

- [2] D. De Voluceau. March , 1998. *Two Lectures on Max-plus Algebra*. INRIA, Domaine de Voluceau, 78153 Le Chesnay C'edex
- [3] Satlantas Polres Malang. 2016. <http://www.satlantasresmalang.com/samsat-link.php> diakses tanggal 10 September 2016, Pk. 14.24.

Konstruksi Sistem Kripto Menggunakan *General Linear Group*

Ari Dwi Hartanto¹
Diah Junia Eksi Palupi²

^{1,2}Departemen Matematika FMIPA UGM
¹ari@ugm.ac.id, ²diah_yunia@ugm.ac.id

Abstrak

Dalam paper ini dibahas beberapa sistem kripto kunci publik yang dalam konstruksinya melibatkan grup matriks invertibel atau yang biasa dikenal dengan nama *general linear group*. RSA merupakan salah satu contoh sistem kripto kunci publik yang cukup terkenal. Sistem kripto RSA menggunakan ring bilangan bulat modulo sebagai himpunan plainteks dan chiperteksnya. Sistem ini dapat dimodifikasi dengan mengganti himpunan plainteks dan chiperteks tersebut dengan suatu *general linear group* [3]. Sebagai hasilnya, sistem kripto ini mempunyai ruang kunci dan ruang plainteks yang lebih besar daripada yang dimiliki sistem kripto RSA biasa. Dalam paper ini, diberikan ide pembentukan matriks plainteks, yakni membentuk matriks segitiga atas dengan entri-entri diagonal utamanya adalah 1 dan menempatkan blok karakter pesan asli di atas diagonal utama.

Kata Kunci: *general linear group*, sistem kripto RSA.

1. Pendahuluan

Teknologi informasi yang berkembang semakin pesat berpengaruh pada hampir semua aspek kehidupan manusia, salah satunya dalam hal berkomunikasi. Berbagai media komunikasi dapat digunakan untuk berkomunikasi jarak jauh, sebagai contoh adalah media internet. Akan tetapi internet bukanlah media komunikasi yang aman sebab internet merupakan media komunikasi umum yang dapat digunakan oleh siapapun sehingga sangat rawan terhadap penyadapan informasi pesan oleh pihak-pihak yang tidak berhak mengetahui pesan tersebut. Oleh karena itu, salah satu cara untuk menjaga keamanan pesan tersebut adalah dengan menyandikan pesan menjadi pesan bersandi yang tidak mudah dimengerti. Jadi, apabila pada saat pesan tersebut dikirim melalui media internet dan berhasil disadap, maka penyadap pesan akan kesulitan untuk mengetahui isi pesan yang sebenarnya.

Ilmu matematika, khususnya aljabar, mempunyai peranan yang sangat besar dalam pengembangan sistem-sistem kripto/penyandian yang ada. Dalam teori aljabar, himpunan semua matriks invertibel berukuran $k \times k$ atas suatu ring berhingga R membentuk suatu struktur grup berhingga [4],[5]. Grup ini dikenal dengan nama *general linear group*, dan dinotasikan $GL(k, R)$. Grup ini cukup aplikatif dalam pengembangan atau konstruksi sistem kripto.

2. Generalisasi Sistem Kripto RSA Menggunakan *General Linear Group*

Sistem kripto RSA merupakan suatu sistem kripto yang bekerja pada himpunan bilangan bulat modulo n atau biasa ditulis \mathbf{Z}_n , dengan n adalah suatu bilangan hasil kali dari dua bilangan prima ganjil yang berbeda. Dalam sistem ini, himpunan plainteks Π dan cipherteks X diambil himpunan \mathbf{Z}_n . [6]

2.1 Sistem Kripto RSA

Sistem kripto RSA merupakan sistem kripto kunci publik. Oleh karena itu, ada dua macam kunci yang digunakan, yaitu kunci publik dan kunci rahasia. Himpunan kunci K sistem kripto RSA terdiri dari kemungkinan semua kunci RSA yang merupakan 2-tuple atas bilangan bulat, yaitu (n, e) untuk kunci publik dan (n, d) untuk kunci rahasia, dengan n, e, d adalah suatu bilangan bulat tertentu. Untuk setiap kunci publik (n, e) mempunyai tepat satu pasangan kunci rahasia (n, d) .

Algoritma Pembentukan Kunci RSA:

Input : Bilangan prima p dan q , sehingga diperoleh bilangan $n = pq$ yang cukup besar dan sulit untuk difaktorkan.

Output : Kunci publik RSA (n, e) dan kunci rahasia RSA (n, d) .

Langkah :

1. Hitung $n = pq$ dan $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
2. Pilih bilangan bulat e dengan $1 < e < \varphi(n)$ dan $\text{gcd}(e, \varphi(n)) = 1$.
3. Cari bilangan bulat d dengan $1 < d < \varphi(n)$ dan $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.
4. Diperoleh kunci publik RSA (n, e) dan kunci rahasia RSA (n, d) .
5. Publikasikan kunci publik (n, e) dan rahasiakan nilai d , p , dan q .

Untuk setiap pasangan kunci publik RSA dan kunci rahasia RSA yang telah dijelaskan di atas, dapat dibentuk fungsi enkripsi RSA dan dekripsi RSA. Berikut ini adalah suatu teorema yang mendasari pembentukan fungsi enkripsi RSA dan dekripsi RSA.

Teorema 2.1 [2] *Jika (n, e) adalah kunci publik RSA dan (n, d) adalah kunci rahasia RSA yang berkorespondensi dengan (n, e) , maka*

$$(x^e)^d \bmod n = x,$$

untuk setiap $x \in \mathbf{Z}_n$.

Misalkan (n, e) dan (n, d) berturut-turut adalah kunci publik RSA dan kunci rahasia RSA yang saling berkorespondensi. Berdasarkan Teorema 2.1, dapat dibentuk fungsi enkripsi RSA f dan dekripsi RSA g , dengan $f(x) = x^e \bmod n$ dan

$g(f(x)) = (f(x))^d \bmod n$, untuk setiap $x \in P$, sehingga memenuhi fungsi enkripsi dan dekripsi pada definisi sistem kripto.

Misalkan Bob akan mengirim pesan rahasia kepada Alice, maka pesan tersebut harus dienkrip dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diambil kunci publik RSA (n, e) milik Alice.
2. Konversikan pesan rahasia yang akan dikirim sebagai bilangan $x \in \mathbf{Z}_n$.
3. Hitung $y = x^e \bmod n$.
4. Kirimkan cipherteks y ke Alice.

Selanjutnya, jika Alice telah menerima ciperteks y , maka Alice dapat mendekrip cipherteks tersebut menggunakan kunci rahasia RSA (n, d) miliknya, yaitu dengan perhitungan $x = y^d \bmod n$. Konversikan x menjadi karakter pesan, sehingga diperoleh pesan asli.

Selanjutnya, dengan menggunakan suatu *general linear group*, sistem RSA yang telah dipaparkan di atas dilakukan generalisasi. Dalam paper ini, sistem kripto pengembangan RSA selanjutnya dinyatakan dengan nama sistem kripto RSA*.

2.2 Sistem Kripto RSA*

Misalkan p adalah bilangan prima, maka \mathbf{Z}_p merupakan lapangan. Berikut ini adalah suatu teorema yang menjelaskan tentang order *general linear group* dari matriks-matriks berukuran $k \times k$ atas lapangan \mathbf{Z}_p .

Teorema 2.2 [1] *Jika p adalah bilangan prima maka*

$$|GL(k, \mathbf{Z}_p)| = (p^k - 1)(p^k - p) \cdots (p^k - p^{k-1}).$$

Teorema selanjutnya menjelaskan tentang order *general linear group* dari matriks-matriks berukuran $k \times k$ atas ring \mathbf{Z}_{pq} , dengan p, q dua bilangan prima berbeda.

Teorema 2.3 [3] *Jika p, q adalah dua bilangan prima yang berbeda maka*

$$|GL(k, \mathbf{Z}_{pq})| = (p^k - 1)(p^k - p) \cdots (p^k - p^{k-1})(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

Dengan memanfaatkan Teorema 2.3 di atas, dibentuk algoritma pembentukan kunci sebagai berikut.

Algoritma Pembentukan Kunci RSA*:

Input : Bilangan prima p dan q sehingga diperoleh bilangan $n = pq$ yang cukup besar dan sulit untuk difaktorkan; Ukuran matriks $k > 1$.

Output : Kunci publik (n, k, e) dan kunci rahasia (n, k, d) .

Langkah :

1. Hitung $n = pq$.
2. Hitung $|GL(k, \mathbf{Z}_n)| = (p^k - 1)(p^k - p) \cdots (p^k - p^{k-1})(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})$.
3. Dipilih $e \in \mathbf{Z}$ dengan $1 < e < |GL(k, \mathbf{Z}_n)|$ dan $\gcd(e, |GL(k, \mathbf{Z}_n)|) = 1$.
4. Dicari bilangan $d \in \mathbf{Z}$ dengan $1 < d < |GL(k, \mathbf{Z}_n)|$ dan $ed \equiv 1 \pmod{|GL(k, \mathbf{Z}_n)|}$.
5. Diperoleh kunci publik RSA* (n, k, e) dan kunci rahasia RSA* (n, k, d) .
6. Publikasikan kunci publik (n, k, e) dan rahasiakan nilai p, q , dan d .

Contoh 2.1 Misalkan Bob akan mengirim pesan rahasia kepada Alice menggunakan sistem kripto RSA*. Oleh karena itu, Alice harus membentuk kunci RSA* terlebih dahulu. Alice memilih bilangan prima $p = 337$, $q = 577$, dan ukuran matriks $k = 3$.

Diperoleh $n = 337 \cdot 577 = 194449$ dan

$$\begin{aligned} |GL(3, \mathbf{Z}_{194449})| &= (337^3 - 1)(337^3 - 337) \cdots (337^3 - 337^2)(577^3 - 1)(577^3 - 577) \cdots (577^3 - 577^2) \\ &= 395550857989631575818793954236457095460483497984. \end{aligned}$$

Dapat dipilih eksponen enkripsi RSA* $e = 313$, sebab

$$1 < e = 313 < |GL(3, \mathbf{Z}_{194449})| \text{ dan } \gcd(313, |GL(3, \mathbf{Z}_{194449})|) = 1.$$

Menggunakan algoritma Euclide diperluas, dapat diperoleh bilangan $d \in \mathbf{Z}$, dengan

$$1 < d < |GL(3, \mathbf{Z}_{194449})| \text{ dan } ed \equiv 1 \pmod{|GL(3, \mathbf{Z}_{194449})|}, \text{ yaitu}$$

$$d = 345001227575621150794027953695056827670006373641.$$

Jadi, kunci RSA* milik Alice adalah

- Kunci publik RSA* : $(n, k, e) = (194449, 3, 313)$
- Kunci rahasia RSA* : $(n, k, d) = (194449, 3, d)$ dengan $d = 345001227575621150794027953695056827670006373641$.

Fungsi enkripsi dan dekripsi RSA* dapat dibentuk dengan dasar Teorema 2.4 berikut ini.

Teorema 2.4 Jika (n, k, e) adalah kunci publik RSA* dan (n, k, d) adalah kunci rahasia RSA* yang berkorespondensi dengan (n, k, e) , maka

$$(P^e)^d \pmod{n} = P,$$

untuk setiap $P \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$.

Bukti. Diambil sebarang $P \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$. Karena $ed \equiv 1 \pmod{|GL(k, \mathbf{Z}_n)|}$ maka terdapat $r \in \mathbf{Z}$ sehingga $ed = 1 + r \cdot |GL(k, \mathbf{Z}_n)|$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 (P^e)^d \bmod n &= P^{ed} \bmod n \\
 &= P^{1+r|GL(k, \mathbf{Z}_n)|} \bmod n \\
 &= P \cdot (P^{|GL(k, \mathbf{Z}_n)|})^r \bmod n \\
 &= P \cdot I^r \bmod n \\
 &= P \bmod n.
 \end{aligned}$$

■

Misalkan (n, k, e) dan (n, k, d) berturut-turut adalah kunci publik dan kunci rahasia RSA* yang saling berkorespondensi. Berdasarkan Teorema 2.4, dapat dibentuk fungsi enkripsi RSA* f_E dan dekripsi RSA* g_E , dengan $f_E(P) = P^e \bmod n$ dan $g_E(f_E(P)) = (f_E(P))^d \bmod n$, untuk setiap $P \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$.

Jika diketahui kunci publik yang akan digunakan untuk proses enkripsi adalah (n, k, e) , maka pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa himpunan plainteks Π pada sistem kriptografi RSA* adalah $GL(k, \mathbf{Z}_n)$. Oleh karena itu, pesan rahasia harus direpresentasikan menjadi matriks-matriks invertibel berukuran $k \times k$ atas \mathbf{Z}_n . Untuk membentuk matriks-matriks tersebut, pesan dengan panjang t karakter harus dipotong-potong terlebih dahulu menjadi blok-blok pesan dengan banyaknya karakter di setiap blok sama, misalkan setiap blok dibuat terdiri dari r karakter sehingga diperoleh $b = \left\lceil \frac{t}{r} \right\rceil$ blok pesan. Jika $r \nmid t$, maka banyaknya karakter pada blok terakhir kurang dari r sehingga perlu adanya tambahan karakter sebanyak $br - t$ karakter. Karakter tambahan tersebut dapat dipilih sesuai kesepakatan.

Setelah diperoleh blok-blok pesan, setiap karakter di setiap blok dikonversikan menjadi bilangan plainteks $x_{ij} \in \mathbf{Z}_n$, $1 \leq i \leq b$, $1 \leq j \leq r$, sehingga akan diperoleh blok-blok plainteks $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\}$. Cara untuk mengkonversikan karakter menjadi bilangan cipherteks ini sesuai dengan kesepakatan antara pengirim dan penerima pesan.

Selanjutnya, untuk setiap blok plainteks direpresentasikan menjadi matriks $P_i \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$. Bentuk representasi blok plainteks menjadi matriks ini dapat dibuat sesuai kesepakatan antara pengirim dan penerima pesan. Untuk mempermudah pemahaman, dalam makalah ini bentuk representasi blok plainteks ke- i menjadi matriks P_i akan dibuat tetap, yaitu

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\} \rightarrow P_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_{k-1}} \\ 0 & 1 & x_{i_k} & \cdots & x_{i_{2k-3}} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & x_{i_r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, perlu diperhatikan dalam pemotongan pesan menjadi blok-blok pesan yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa banyaknya karakter disetiap blok harus sebanyak entri-entri di atas diagonal utama matriks P_i , yaitu sebanyak

$r = \sum_{i=1}^{k-1} (k-i)$ karakter pesan. Perhatikan bahwa $\det(P_i) = 1 \in U(\mathbf{Z}_n)$, untuk setiap i , $1 \leq i \leq b$. Oleh karena itu, matriks P_i invertibel atau dengan kata lain matriks $P_i \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$.

Selanjutnya, untuk setiap P_i dienkrip menggunakan fungsi enkripsi RSA* menjadi C_i , $1 \leq i \leq b$, yaitu menggunakan perhitungan sebagai berikut:

$$C_i = P_i^e \text{ mod } n. \quad (2.1)$$

Untuk mempermudah perhitungan pada Persamaan (2.1), dapat digunakan metode *fast exponentiation*. Langkah terakhir, untuk setiap i , $1 \leq i \leq b$, dibentuk

$$y_i = [C_i]_{12} \cdots [C_i]_{1k} [C_i]_{23} \cdots [C_i]_{2k} \cdots [C_i]_{j(j+1)} \cdots [C_i]_{jk} \cdots [C_i]_{(k-1)k},$$

$1 \leq j \leq k-1$, sehingga diperoleh cipherteks $y = y_1 y_2 \cdots y_b$.

Algoritma Enkripsi RSA*

Input : Suatu pesan (panjangnya t karakter) dan kunci publik RSA* (n, k, e) .

Output : Cipherteks y .

Langkah :

1. Pesan dipotong-potong menjadi blok-blok pesan, dengan setiap blok terdiri dari

$$r = \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \text{ karakter pesan. Oleh karena itu, diperoleh } b = \left\lceil \frac{t}{r} \right\rceil$$

blok pesan.

2. Jika $r \nmid t$, maka pada blok terakhir diberi karakter tambahan sesuai kesepakatan, yaitu sebanyak $br - t$ karakter.

3. Untuk i dari 1 sampai b dikerjakan :

- 3.1. Konversikan karakter-karakter pada blok ke- i menjadi bilangan plainteks

$$x_{ij} \in \mathbf{Z}_n, 1 \leq j \leq r, \text{ sehingga diperoleh blok plainteks } \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir}\}.$$

- 3.2. Representasikan blok plainteks ke- i menjadi matriks $P_i \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$, dengan

$$P_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{i_{k-1}} \\ 0 & 1 & x_{ik} & \cdots & x_{i_{2k-3}} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & x_{ir} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 3.3. $C_i = P_i^e \text{ mod } n$.

- 3.4. Dibentuk

$$y_i = [C_i]_{12} \cdots [C_i]_{1k} [C_i]_{23} \cdots [C_i]_{2k} \cdots [C_i]_{j(j+1)} \cdots [C_i]_{jk} \cdots [C_i]_{(k-1)k},$$

dengan $1 \leq j \leq k-1$.

4. Diperoleh cipherteks $y = y_1 y_2 \dots y_b$.

Contoh 2.2 Dari Contoh 2.1, misalkan Bob telah mengetahui kunci public RSA* milik Alice, yaitu $(n, k, e) = (194449, 3, 313)$. Kemudian Bob ingin mengirim suatu pesan rahasia kepada Alice, pesan tersebut adalah "Besok kita bertemu di kampus jam 7 pagi.". Karena sifat pesan tersebut rahasia, maka pesan tersebut harus dienkripsi. Bob mengenkripsi pesan menggunakan kunci publik RSA* $(194449, 3, 313)$ milik Alice. Dalam contoh ini, proses enkripsi akan menggunakan kode ASCII untuk mengkonversikan karakter-karakter pesan menjadi bilangan plainteks. Langkah pertama, pesan dipotong menjadi blok-blok karakter dengan banyaknya karakter di setiap blok sama, yaitu $r = (3-1) + (3-2) = 3$ karakter setiap blok.

Bes | ok_ | kit | a_b | ert | emu | _di
_ka | mpu | s_j | am_ | 7_p | agi | ___

Selanjutnya, setiap karakter pesan dikonversikan menjadi bilangan plainteks menggunakan kode ASCII.

Tabel 1: Konversi Pesan ke Kode ASCII pada algoritma RSA*

Blok (i)	j	Karakter	$x_{i,j}$	ASCII
1	1	B	$x_{1,1}$	66
	2	e	$x_{1,2}$	101
	3	s	$x_{1,3}$	115
2	1	o	$x_{2,1}$	111
	2	k	$x_{2,2}$	107
	3	<space>	$x_{2,3}$	32
3	1	k	$x_{3,1}$	107
	2	i	$x_{3,2}$	105
	3	t	$x_{3,3}$	116
4	1	a	$x_{4,1}$	97
	2	<space>	$x_{4,2}$	32
	3	b	$x_{4,3}$	98
5	1	e	$x_{5,1}$	101
	2	r	$x_{5,2}$	114
	3	t	$x_{5,3}$	116
6	1	e	$x_{6,1}$	101
	2	m	$x_{6,2}$	109
	3	u	$x_{6,3}$	117
7	1	<space>	$x_{7,1}$	32
8	1	<space>	$x_{8,1}$	32
	2	k	$x_{8,2}$	107
	3	a	$x_{8,3}$	97
9	1	m	$x_{9,1}$	109
	2	p	$x_{9,2}$	112
	3	u	$x_{9,3}$	117
10	1	s	$x_{10,1}$	115
	2	<space>	$x_{10,2}$	32
	3	j	$x_{10,3}$	106
11	1	a	$x_{11,1}$	97
	2	m	$x_{11,2}$	109
	3	<space>	$x_{11,3}$	32
12	1	7	$x_{12,1}$	55
	2	<space>	$x_{12,2}$	32
	3	p	$x_{12,3}$	112
13	1	a	$x_{13,1}$	97
	2	g	$x_{13,2}$	103
	3	i	$x_{13,3}$	105
14	1	.	$x_{14,1}$	46

	2	d	x_{7_2}	100		2	<space>	x_{14_2}	32
	3	i	x_{7_3}	105		3	<space>	x_{14_3}	32

Plainteks pada blok ke-1 direpresentasikan menjadi matrik $P_1 \in GL(3, \mathbf{Z}_{194449})$, yaitu

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 66 & 101 \\ 0 & 1 & 115 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks P dienkrip menjadi C_1 menggunakan kunci publik RSA* milik Alice seperti berikut:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 66 & 101 \\ 0 & 1 & 115 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{313} \text{ mod } 194449 = \begin{bmatrix} 1 & 20658 & 16339 \\ 0 & 1 & 35995 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $y_1 = 20658-16339-35995$.

Dengan cara yang sama, blok ke-2 sampai 14 dienkrip sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y_2 &= 34743-22039-10016 & y_9 &= 34117-112842-36621 \\ y_3 &= 33491-18291-36308 & y_{10} &= 35995-14947-33178 \\ y_4 &= 30361-19221-30674 & y_{11} &= 30361-120458-10016 \\ y_5 &= 31613-35572-36308 & y_{12} &= 17215-172342-35056 \\ y_6 &= 31613-104410-36621 & y_{13} &= 30361-139326-32865 \\ y_7 &= 10016-172873-32865 & y_{14} &= 14398-133151-10016 \\ y_8 &= 10016-119832-30361 \end{aligned}$$

Diperoleh cipherteks $y = y_1-y_2-\dots-y_{14}$, yaitu:

20658-16339-35995-34743-22039-10016-33491-18291-36308-30361-19221-30674-31613-35572-36308-31613-104410-36621-10016-172873-32865-10016-119832-30361-34117-112842-36621-35995-14947-33178-30361-120458-10016-17215-172342-35056-30361-139326-32865-14398-133151-10016.

Jika suatu pesan telah dienkrip menggunakan kunci rahasia (n, k, e) menjadi cipherteks, maka kunci rahasia (n, k, d) yang berkorespondensi dengan (n, k, e) dapat digunakan untuk mendekrip cipherteks tersebut, sehingga dapat diperoleh kembali pesan aslinya. Untuk mendekrip cipherteks tersebut, dapat menggunakan fungsi dekripsi RSA*.

Jika diterima suatu cipherteks, maka untuk mendekrip cipherteks tersebut harus mengubahnya menjadi matriks-matriks invertibel berukuran $k \times k$ atas \mathbf{Z}_n terlebih dahulu.

Misalkan diterima cipherteks y yang terdiri dari t bilangan. Cipherteks dipotong-potong menjadi blok-blok bilangan dengan banyaknya bilangan di setiap blok sama, misalkan setiap blok dibuat terdiri dari r bilangan cipherteks sehingga

diperoleh $b = \frac{t}{r}$ blok cipherteks. Misalkan diperoleh blok-blok cipherteks ke- i

$$\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_r}\}, 1 \leq i \leq b.$$

Selanjutnya, untuk setiap blok cipherteks direpresentasikan menjadi matriks $C_i \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$. Bentuk representasi matriks ini harus sesuai dengan kesepakatan antara pengirim dan penerima pesan sebelumnya. Perhatikan kembali representasi blok plainteks menjadi matriks invertibel pada bagian enkripsi RSA*. Untuk proses dekripsinya, setiap blok cipherteks juga harus direpresentasikan menjadi matriks invertibel dengan bentuk matriks seperti pada bagian enkripsi RSA* tersebut. Jadi, blok cipherteks ke- i $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_r}\}$ direpresentasikan menjadi matriks $C_i \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$ seperti berikut.

$$\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_r}\} \rightarrow C_i = \begin{bmatrix} 1 & y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_{k-1}} \\ 0 & 1 & y_{i_k} & \dots & y_{i_{2k-3}} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & y_{i_r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, perlu diperhatikan dalam pemotongan cipherteks menjadi blok-blok cipherteks yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa banyaknya bilangan cipherteks disetiap blok harus sebanyak entri-entri di atas diagonal utama matriks C_i , yaitu

$$\text{sebanyak } r = \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \text{ bilangan cipherteks.}$$

Selanjutnya, untuk setiap matriks C_i didekrip menggunakan fungsi dekripsi RSA* menjadi matriks P_i , $1 \leq i \leq b$, yaitu menggunakan perhitungan sebagai berikut:

$$P_i = C_i^d \text{ mod } n. \tag{2.2}$$

Untuk mempermudah perhitungan pada Persamaan (2.2) di atas, dapat menggunakan metode *fast exponentiation*.

Untuk mengubah matriks-matriks P_i , $1 \leq i \leq b$, menjadi pesan asli, terlebih dahulu dibentuk

$$x_i = [P_i]_{12} \dots [P_i]_{1k} [P_i]_{23} \dots [P_i]_{2k} \dots [P_i]_{j(j+1)} \dots [P_i]_{jk} \dots [P_i]_{(k-1)k},$$

$1 \leq j \leq k-1$, yang merupakan bilangan-bilangan plainteks blok ke- i . Bilangan-bilangan plainteks tersebut dikonversikan menjadi karakter menggunakan cara yang telah disepakati antara pengirim dan penerima sebelumnya, kemudian hasilnya digabungkan sehingga diperoleh pesan aslinya.

Algoritma Dekripsi RSA*

Input : Cipherteks dan kunci rahasia RSA* (n, k, d) .

Output : Pesan asli.

Langkah :

1. Cipherteks dipotong-potong menjadi blok-blok cipherteks, dengan setiap blok terdiri dari $r = \sum_{i=1}^{k-1} (k-i)$ bilangan cipherteks. Oleh karena itu, diperoleh $b = \frac{t}{r}$ blok cipherteks. Misalkan $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_r}\}$ merupakan blok cipherteks ke- i , $1 \leq i \leq b$.

2. Untuk i dari 1 sampai b dikerjakan :

2.1. Representasikan blok cipherteks ke- i menjadi matriks $C_i \in GL(k, \mathbf{Z}_n)$, dengan

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_{k-1}} \\ 0 & 1 & y_{i_k} & \dots & y_{i_{2k-3}} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & y_{i_r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Hitung $P_i = C_i^d \text{ mod } n$.

2.3. Dibentuk

$$x_i = [P_i]_{12} \dots [P_i]_{1k} [P_i]_{23} \dots [P_i]_{2k} \dots [P_i]_{j(j+1)} \dots [P_i]_{jk} \dots [P_i]_{(k-1)k},$$

dengan $1 \leq j \leq k-1$.

3. Setiap bilangan-bilangan cipherteks x_i , $1 \leq i \leq b$ dikonversikan menjadi karakter, kemudian digabungkan hasilnya sehingga diperoleh pesan aslinya.

Contoh 2.3 Dari Contoh 2.1 dan Contoh 2.2, misalkan Alice telah menerima cipherteks dari Bob, yaitu

20658-16339-35995-34743-22039-10016-33491-18291-36308-30361-19221-30674-31613-35572-36308-31613-104410-36621-10016-172873-32865-10016-119832-30361-34117-112842-36621-35995-14947-33178-30361-120458-10016-17215-172342-35056-30361-139326-32865-14398-133151-10016.

Kemudian Alice ingin mengetahui arti dari cipherteks tersebut. Oleh karena itu, Alice harus mendekrip cipherteks tersebut terlebih dahulu menggunakan kunci rahasianya, yaitu $(194449, 3, d)$, dengan

$$d = 345001227575621150794027953695056827670006373641.$$

Langkah pertama, cipherteks dipotong menjadi blok-blok cipherteks dengan banyaknya bilangan di setiap blok sama, yaitu $r = (3-1) + (3-2) = 3$ bilangan cipherteks. Perhatikan Tabel di bawah ini.

Tabel 2: Blok-Blok Cipherteks RSA*

Blok	Bilangan-Bilangan Cipherteks	Blok	Bilangan-Bilangan Cipherteks
1	20658-16339-35995	8	10016-119832-30361
2	34743-22039-10016	9	34117-112842-36621

3	33491-182917-36308	10	35995-14947-33178
4	30361-19221-30674	11	30361-120458-10016
5	31613-35572-36308	12	17215-172342-35056
6	31613-104410-36621	13	30361-139326-32865
7	10016-172873-32865	14	14398-133151-10016

Cipherteks pada blok ke-1 direpresentasikan menjadi matriks $C_1 \in GL(3, \mathbf{Z}_{194449})$ yaitu

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 20658 & 16339 \\ 0 & 1 & 35995 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks C_1 didekrip menjadi P_1 menggunakan kunci rahasia milik Alice seperti berikut

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 20658 & 16339 \\ 0 & 1 & 35995 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{345001227575621150794027953695056827670006373641} \pmod{194449} = \begin{bmatrix} 1 & 66 & 101 \\ 0 & 1 & 115 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $x_2 = 66-101-115$. Dengan cara yang sama, blok ke-2 sampai 14 didekrip sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x_2 &= 111-107-32 & x_9 &= 109-112-117 \\ x_3 &= 107-105-116 & x_{10} &= 115-32-106 \\ x_4 &= 97-32-98 & x_{11} &= 97-109-32 \\ x_5 &= 101-114-116 & x_{12} &= 55-32-112 \\ x_6 &= 101-109-117 & x_{13} &= 97-103-105 \\ x_7 &= 32-100-105 & x_{14} &= 46-32-32 \\ x_8 &= 32-107-97 \end{aligned}$$

Diperoleh plainteks $x_1-x_2-\dots-x_{14}$, yaitu

66-101-115-111-107-32-107-105-116-97-32-98-101-114-116-101-109-117-32-100-105-32-107-97-109-112-117-115-32-106-97-109-32-55-32-112-97-103-105-46-32-32.

Oleh karena pada Contoh 2.2 menggunakan kode ASCII, maka pada proses dekripsi ini juga harus menggunakan kode ASCII. Bilangan-bilangan plainteks $x = x_1-x_2-\dots-x_{14}$ yang telah diperoleh dikonversikan menjadi karakter menggunakan Tabel ASCII, sehingga diperoleh pesan aslinya yaitu

"Besok kita bertemu di kampus jam 7 pagi. "

3. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas, dapat diambil beberapa kesimpulan. *General linear group* dapat dimanfaatkan untuk konstruksi suatu sistem kriptografi kunci publik, yakni suatu sistem kriptografi yang merupakan generalisasi sistem kriptografi RSA. Hal tersebut dilakukan dengan cara memanfaatkannya untuk mengganti Π dan X pada sistem

kripto RSA. Karena Π dan X diganti dengan *general linear group*, maka berakibat pembentukan kunci RSA* berbeda dengan pembentukan kunci RSA. Eksponen enkripsi e dan dekripsi d pada sistem kripto RSA berada pada interval $1 < e, d < (p-1)(q-1)$, sedangkan pada sistem kripto RSA* berada pada interval

$$1 < e, d < (p^k - 1)(p^k - p) \cdots (p^k - p^{k-1})(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}),$$

dengan $k \in \mathbf{Z}$, $k > 1$ dan p, q bilangan-bilangan prima ganjil yang berbeda. Oleh karena itu, kemungkinan kunci dari sistem kripto RSA* jauh lebih besar jika dibandingkan sistem kripto RSA. Jadi, sistem kripto RSA* mempunyai keamanan yang lebih baik daripada sistem kripto RSA. Walaupun demikian, kelemahan dari sistem kripto RSA* ini adalah komputasinya yang cukup berat. Perhitungan enkripsi atau dekripsi dengan menghitung pemangkatan suatu matriks dengan pangkat yang cukup besar memerlukan waktu yang cukup lama.

Daftar Pustaka

- [1] Brown, W. C., 1993, *Matrices over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [2] Buchmann, J. A., 2000, *Introduction to Cryptography*, Springer-Verlag New York, Inc., USA.
- [3] El-Naowk, F. R., 2005, A Generalized of The RSA "Elatrash Scheme", http://www.alaqsa.edu.ps/ar/aqsa_magazine/files/92.pdf, 24 November 2009, 19:55.
- [4] Lang, S., 1972, *Linear Algebra*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA.
- [5] Malik, D. S., 1997, *Fundamentals of Abstract Algebra*, McGraw-Hill Companies, Inc., Singapore.
- [6] Stinson, D.R., 2006, *Cryptography Theory and Practice*, Third Edition, CRC Press, Inc., Florida.

Penjadwalan Proses Produksi Topeng Batik Menggunakan Aljabar Max-Plus

Cecilia Heru Purwitaningsih¹ dan Anindiati Praminto Putri²
Universitas Sanata Dharma
¹cecilia.purwita@gmail.com
²eanindiatipp@gmail.com,

Abstrak

Sebuah produksi topeng batik memerlukan pengaturan waktu dalam proses produksinya agar proses pengerjaan tidak menyisakan bahan dan waktu yang terbuang. Artikel ini membahas penjadwalan produksi topeng batik. Proses produksi yang terjadi meliputi pemahatan kayu, pembuatan desain, pemberian malam, pewarnaan, pengeringan, dan finishing. Proses produksi topeng batik disusun dalam bentuk graf dan disusun sesuai dengan keadaan di lapangan. Operasi yang digunakan adalah operasi maksimum dan penjumlahan sebagai dasar dalam membuat graf dan menentukan matriks untuk membuat model sistem produksi sederhana. Penerapan pada sistem produksi topeng batik, teori sistem linear max-plus waktu invariant digunakan sebagai alat menganalisa waktu maksimal. Jadi, berdasarkan model yang telah kita buat dilakukan penghitungan dengan menggunakan Program Matlab menghasilkan *output* yang kemudian diinterpretasikan dalam penjadwalan proses produksi. *Output* tersebut merepresentasikan tentang waktu paling singkat yang dibutuhkan untuk membuat topeng batik.

Kata Kunci : *aljabar, produksi, topeng batik, waktu tersingkat.*

1. Pendahuluan

Yogyakarta merupakan kota dengan seni yang sangat beragam meliputi seni lukis, seni tari, seni kriya, dan masih banyak lagi. Seni inilah yang banyak mengundang wisatawan untuk datang ke Yogyakarta terutama melihat dan menikmati seni yang ada. Selain wisatawan menikmati dan melihat seni yang ada di Yogyakarta, wisatawan juga dapat membawa buah tangan dari Yogyakarta baik berupa makanan maupun kenang-kenangan yang tentunya bukan hanya sekedar foto. Salah satu hasil seni yang dapat digunakan sebagai buah tangan yang ada di Yogyakarta tepatnya di daerah Batur, Putat, Pathuk, Gunung Kidul adalah topeng batik. Topeng batik ini banyak diproduksi di daerah Putat dengan awal mula diproduksi di dusun Batur. Proses produksi topeng batik meliputi pemahatan kayu, pembuatan desain(melukis kayu), pemberian malam, pewarnaan, pengeringan, dan finishing. Pengaturan waktu dalam produksi topeng batik perlu dilakukan. Hal ini bertujuan untuk mengefisienkan waktu yang digunakan selama proses produksi.

Produksi topeng batik ini selalu melakukan proses produksi tetapi terkadang produsen mendapatkan pemesanan yang cukup banyak. Apabila diperlukan peningkatan produksi topeng batik karena peningkatan jumlah pesanan, maka harus dilakukan pengaturan waktu sehingga proses produksi dapat selesai tepat waktu. Hal ini bertujuan untuk menjaga relasi antar pembeli dan penjual (produsen) sehingga proses produksi batik dapat selalu berjalan dengan baik.

Pada penelitian yang terdahulu (Mustofa Arifin dan Musthofa, 2012), sebagian besar peneliti membahas faktor-faktor yang mempengaruhi proses produksi topeng batik. Pada penelitian sebelumnya (Nanda Budya Pratama dan Kistini, 2013), peneliti tersebut melihat korelasi nilai produksi dengan modal yang dimiliki oleh pengusaha. Oleh karena itu, belum ada penelitian berkaitan dengan optimasi jadwal produksi topeng batik.

Berdasarkan masalah tersebut, Aljabar Max-Plus diharapkan dapat menjadi cara untuk mengoptimalkan waktu produksi topeng batik. Penerapan Aljabar Max-Plus dengan mencari sub penyelesaian terbesar pada sistem produksi sederhana dapat memberikan informasi mengenai waktu paling lambat dimulainya proses produksi topeng batik untuk memberikan hasil yang baik dan tepat waktu..

2. Landasan Teori

2.1 Topeng Batik

Topeng batik adalah topeng yang terbuat dari kayu yang kemudian dipahat sehingga membentuk wajah manusia dengan seni pahat yang dimiliki warga sekitar. Proses pemahatan ini membutuhkan waktu kurang lebih 60 menit. Pemahatan dilakukan dengan menjiplak beberapa model yang sudah tersedia dan menyesuaikan dengan ukuran yang dipesan oleh pembeli. agar mendapatkan hasil yang maksimal, proses selanjutnya adalah proses amplas yang akan mengakibatkan bekas pahatan menjadi halus sehingga tidak melukai pengguna topeng. Proses ini berlangsung selama 5 menit. Proses selanjutnya adalah pembuatan desain pada topeng. Desain ini membentuk pola batik dan proses berlangsung selama 15 menit. Batik yang berukuran kecil membuat proses desain tertunda karena harus melihat kesesuaian dengan bentuk topeng. Setelah proses desain dilakukan, topeng diberikan malam pada setiap pola batik yang akan diberi warna berbeda agar bagian tersebut tertutup ketika diberi warna dasar. Proses pewarnaan terjadi dalam 3 tahap yaitu 1 kali warna dasar dengan durasi 25 menit dan 2 kali warna tambahan dengan durasi waktu 20 dan 15 menit. Setelah proses pewarnaan, topeng dikeringkan dengan menggunakan bantuan oven. Setelah kering maka dilakukan pewarnaan berikutnya hingga pewarnaan ketiga. Setelah proses ini berlangsung, topeng dilakukan proses finishing dan topeng dapat digunakan.

2.2 Aljabar Max-Plus

Definisi ilmu dasar pada aljabar max-plus adalah $a^{\otimes k} = a \otimes a \otimes a \otimes a \otimes \dots \otimes a$

Definisi 2.1

Suatu semiring $(S, +, \times)$ adalah suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan \times , yang memenuhi aksioma berikut:

- 1) $(S, +)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu $\forall a, b, c \in S$:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

$$a + b = b + a,$$

$$a + 0 = a$$

- 2) (S, \times) adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu $\forall a, b, c \in S$:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c),$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

- 3) Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi \times , yaitu $\forall a \in S$; $a \times 0 = 0 \times a = 0$

- 4) Operasi netral 0 distributif terhadap $+$, yaitu $\forall a, b, c \in S$:

$$\begin{aligned}(a + b) \times c &= (a \times c) + (b \times c), \\ a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c)\end{aligned}$$

Dalam aljabar max-plus, operasi yang digunakan adalah \otimes sebagai operasi penjumlahan dan \oplus sebagai operasi max. hal ini berarti,

$$a \oplus b = \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b$$

Dimana $a, b \in \mathbb{R}_{max}$. Aljabar max-plus mengarah pada $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R}_{max}, \otimes, \oplus, \epsilon, e)$, dimana $\epsilon = -\infty$ dan $e = 0$. Beberapa operasi dasar aljabar sebagai berikut.

- 1) $a \otimes b = b \otimes a$
- 2) $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
- 3) $a \otimes \epsilon = \epsilon$
- 4) $a \otimes e = a$

Definisi 2.2

Diberikan $\mathbf{R}_{max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) | A_{ij} \in \mathbf{R}_{max}, i=1,2, \dots, m \text{ dan } j = 1,2, \dots, n\}$.

Diketahui $\alpha \in \mathbf{R}_{max}, A, B \in \mathbf{R}_{max}^{m \times n}$. Didefinisikan $\alpha \otimes A$ adalah matriks yang unsure ke- ij -nya:

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n \text{ dan}$$

$A \oplus B$ adalah matriks yang unsur ke- ij -nya:

$$(A \oplus B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n.$$

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{max}^{m \times n}$ dengan graf bobotnya $G(A) = (V, E)$. Bobot maksimum dari semua sirkuit dengan panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $G(A)$ dituliskan sebagai $(A^{\otimes k})_{ii}$. Maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $G(A)$ atas

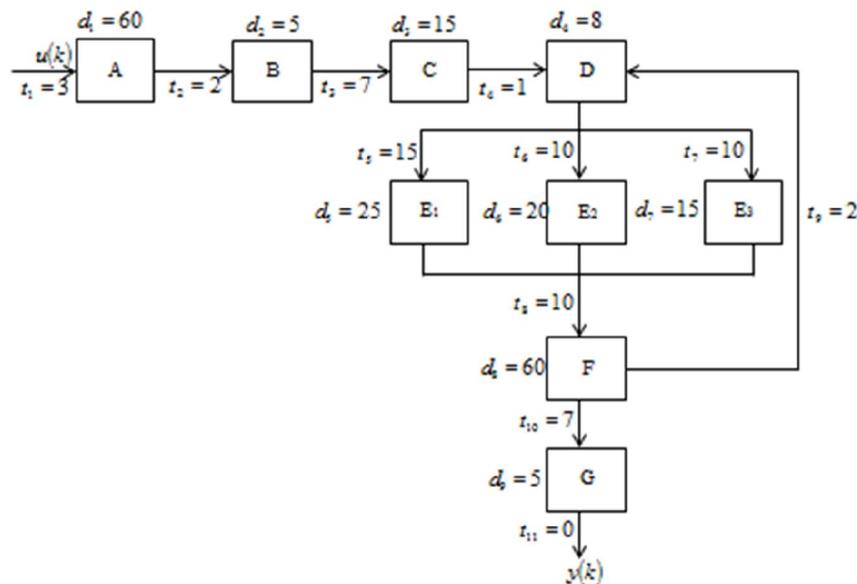
seluruh titik i adalah $\bigoplus_{i=1}^n (A^{\otimes k})_{ii}$ yang dapat ditulis dengan $trace(A^{\otimes k})$ dan

rata-ratanya adalah $\frac{1}{k} trace(A^{\otimes k})$. maksimum atas semua sirkuit elementer

diperoleh dari $\lambda_{max} = \bigoplus_{i=1}^n (\frac{1}{k} trace(A^{\otimes k}))$

3. Penjadwalan Produksi Topeng Batik

Pada bagian ini, kami akan memodelkan penjadwalan produksi topeng batik menggunakan bantuan graf. Dalam pembuatan topeng batik, proses persiapan dibutuhkan waktu 3 menit. Setelah proses persiapan selesai, bahan akan masuk dalam proses pemahatan. Proses ini membutuhkan waktu 60 menit. Sebelum memasuki proses amplas, bahan dидiamkan selama 2 menit untuk menghilangkan sisa pahatan yang masih melekat pada bahan yang akan dibuat. Proses amplas membutuhkan waktu 5 menit. Sebelum menuju proses selanjutnya, kayu dидiamkan selama 7 menit untuk mensterilkan bahan baku. Proses berikutnya adalah proses pembuatan desain pada kayu yang membutuhkan waktu 15 menit. Pada proses ini, bahan dilukis beberapa motif dengan menggunakan pensil untuk mempermudah proses pemberian malam. Proses pemberian malam dilakukan setelah selesai proses pembuatan desain. Proses pemberian malam membutuhkan waktu 8 menit. Proses selanjutnya adalah pewarnaan pertama yang membutuhkan waktu 25 menit. Sebelum pewarnaan, persiapan pewarnaan dengan merebus air yang sudah diberi warna dilakukan selama 15 menit. Setelah proses pewarnaan, semua topeng yang sudah direbus sebagai tahap pewarnaan diangkat dan ditiriskan. Proses selanjutnya adalah pengeringan dengan menggunakan oven yang memerlukan waktu selama 60 menit. Proses pewarnaan berlangsung selama 3 kali dalam setiap topeng batik. Waktu pewarnaan yang kedua membutuhkan waktu 20 menit dan waktu pewarnaan yang ketiga membutuhkan waktu 15 menit. Setelah proses pewarnaan, dilakukan proses pengeringan menggunakan oven seperti yang dilakukan setelah pewarnaan pertama. Setelah ketiga proses pewarnaan, proses selanjutnya adalah proses finishing. Pada proses finishing, produsen melakukan beberapa proses seperti pemberian obat anti jamur dan pembersihan sisa malam yang belum bersih sempurna. Proses ini membutuhkan waktu 5 menit. Setelah semua proses selesai, topeng batik siap dipasarkan.



Gambar 1. Graf Produksi Topeng Batik

Atau dapat dimodelkan dalam Aljabar *Max-Plus* sebagai berikut

$$\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{u}(k+1) \oplus B \otimes \mathbf{x}(k)$$

$$\text{dengan } A = \begin{bmatrix} 60 & \varepsilon \\ 122 & 12 & \varepsilon \\ 134 & 24 & 16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 150 & 40 & 32 & 23 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 173 & 63 & 55 & 46 & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 191 & 81 & 73 & 64 & 43 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 209 & 99 & 91 & 82 & 61 & 48 & 25 & \varepsilon & \varepsilon \\ 244 & 134 & 126 & 117 & 96 & 83 & 60 & 69 & \varepsilon \\ 311 & 201 & 193 & 184 & 163 & 150 & 127 & 136 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 65 \\ 77 \\ 93 \\ 116 \\ 134 \\ 152 \\ 187 \\ 254 \end{bmatrix}, C = 5$$

INPUT-OUTPUT SLMI (A, B, C, x0)

```
Masukkan matriks A(nxn) = [60 -inf ;
122 12 -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf ;
134 24 16 -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf ;
150 40 32 23 -inf -inf -inf -inf -inf -inf ;
173 63 55 46 35 -inf -inf -inf -inf -inf ;
191 81 73 64 43 30 -inf -inf -inf -inf ;
209 99 91 82 61 48 25 -inf -inf -inf ;
244 134 126 117 96 83 60 69 -inf -inf ;
311 201 193 184 163 150 127 136 5 ]
```

```
Masukkan matriks B(nx1) =
[3;65;77;93;116;134;152;187;254]
```

```
Masukkan matriks C(1xn) = [-inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf -inf 5]
```

```
Masukkan kondisi awal x0(nx1) = [0;-inf;-inf;-inf;-inf;-inf;-inf;-inf;-inf;-inf]
```

```
Masukkan barisan input sp kej ke-k u(kx1) =
[0;60;120;180;240]
```

HASIL PERHITUNGAN :

=====

Matriks A =

```
 60 -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
122  12 -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
134  24  16 -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
150  40  32  23 -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
173  63  55  46  35 -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
191  81  73  64  43  30 -Inf -Inf -Inf -Inf
```

209	99	91	82	61	48	25	-Inf	-Inf
244	134	126	117	96	83	60	69	-Inf
311	201	193	184	163	150	127	136	5

Matriks B =

3
65
77
93
116
134
152
187
254

Matriks C =

-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf 5

Kondisi awal x_0 =

0
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf

Barisan input u =

0 60 120 180 240

Barisan vektor keadaan sistem $x(k)$ utk $k = 0, 1, 2, \dots$:

0	60	120	180	240	300
-Inf	122	182	242	302	362
-Inf	134	194	254	314	374
-Inf	150	210	270	330	390
-Inf	173	233	293	353	413
-Inf	191	251	311	371	431
-Inf	209	269	329	389	449
-Inf	244	313	382	451	520
-Inf	311	380	449	518	587

Barisan output sistem $y(k)$ utk $k = 1, 2, \dots$:

316 385 454 523 592

Dari *output* yang diperoleh produksi akan selesai paling cepat saat 316 satuan waktu atau dapat diartikan bahwa pesanan topeng batik dapat selesai tepat dengan paling lambat pembuatan 316 satuan waktu sebelum jadwal pesanan diambil oleh konsumen.

5. Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Dari makalah ini, diperoleh model yang diterapkan dalam proses produksi topeng batik yaitu $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{u}(k+1) \oplus B \otimes \mathbf{x}(k)$ untuk $k = 1, 2, 3, \dots, 9$. Cara mengoptimalkan waktu produksi topeng batik menggunakan metode Sistem Linear *Max-Plus* Waktu Invarian (SLMI). Dalam sistem produksi topeng batik, jika diketahui kondisi awal sistem dan barisan waktu saat bahan mentah atau kayu dimasukkan ke sistem, maka waktu saat produksi topeng batik selesai dan meninggalkan sistem pemrosesan adalah 316 menit. Hal ini dapat diartikan bahwa jika produsen mendapatkan pesanan topeng batik, maka produsen paling lambat membuat pesanan tersebut 316 menit sebelum pesanan diambil oleh konsumen.

5.2 Saran

Saran dari penelitian ini adalah peneliti selanjutnya dapat membuat analisis baru yang dapat merepresentasikan jadwal periodik dalam produksi topeng batik.

Daftar Pustaka

- [1] Jonathan S. Galan., 2003, *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications.*, Springer, University of Halfa. Halfa, Israel
- [2] Mustofa Arifin dan Musthofa. 2012. *Optimisasi Jadwal Pemesanan Bakpia Pathuk "25" Daerah Istimewa Yogyakarta Dengan Sistem Linear Max-Plus Waktu Invariant.* Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- [3] M.Andy Rudhito (2016). *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya.* Progam studi Pendidikan Matematika FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.
- [4] Nanda Budya Pratama dan Kistini. 2013. *Aktivitas Industri Kerajinan Topeng Kayu Di Desa Wisata Bobung, Kecamatan Patuk, Gunungkidul, Daerah Istimewa Yogyakarta.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- [5] <http://topeng-kayu-batik.blogspot.co.id/2012/07/sejarah-topeng-sidakarya.html> diakses pada tanggal 28 Agustus 2016

Keamanan Data Menggunakan Kriptografi Kurva Eliptik Atas Lapangan Galois Prima $GF(p)$

Annisa Nur Azizah¹⁾, Solichin Zaki²⁾, Nikken Prima Puspita³⁾

^{1,2,3} FSM, Universitas Diponegoro
email: annisazizah20@gmail.com

Abstrak

Kriptografi kurva eliptik adalah sistem kriptografi yang termasuk kedalam kriptografi kunci publik. Kriptosistem ini dioperasikan pada lapangan berhingga yang disebut lapangan Galois. Lapangan Galois yang elemennya direpresentasikan dalam modulo prima disebut lapangan Galois prima $GF(p)$. Himpunan titik-titik yang terbentuk dari kurva eliptik membentuk suatu grup berhingga yang digunakan untuk tingkat keamanan dalam kriptografi yang disebut *Elliptic Curve Discret Logarithm Problem*. Semakin besar bilangan prima, maka tingkat keamanan pesan dengan menggunakan sistem kriptografi kurva eliptik atas $GF(p)$ semakin tinggi. Pada skripsi ini dibahas algoritma kriptografi kurva eliptik atas $GF(p)$ dalam proses pembentukan kunci, proses enkripsi dan proses dekripsi. Proses pembentukan kunci yang terdiri dari kunci publik dan kunci privat. Hal terpenting dalam proses pembentukan kunci adalah menentukan titik generator G dari grup eliptik atas $GF(p)$. Setelah kunci publik didapatkan maka kunci dikirim kepada pengirim untuk proses enkripsi. Proses enkripsi menggunakan algoritma enkripsi kriptografi kurva eliptik, dengan pesan dikonversikan kedalam bilangan ASCII yang hasil ciphertekstnya berbentuk sebuah titik. Setelah menghasilkan ciphertekst, maka pengirim mengirimkan pesan ciphertekst kepada penerima. Kemudian penerima pesan melakukan proses dekripsi dengan kunci privat. Proses dekripsi menggunakan algoritma dekripsi kriptografi kurva eliptik yang akhirnya menghasilkan plaintekst dan plaintekst dikonversikan menjadi pesan asli.

Kata Kunci : kriptografi kurva eliptik, enkripsi, dekripsi

1. Pendahuluan

Perkembangan teknologi informasi dan komunikasi pada era sekarang ini sangat cepat yang kadang menyebabkan pesan informasi yang ingin disampaikan ke pihak yang lain menjadi tidak aman karena adanya penyadapan dari pihak ketiga yang tidak berhak atas pesan tersebut. Salah satu cara untuk mempertahankan kerahasiaan dari pesan tersebut adalah menggunakan kriptografi. Sebagian pihak menginginkan pengamanan yang lebih kuat maka beberapa pihak menggunakan kriptografi kunci publik, yaitu sistem kriptografi yang memiliki 2 kunci. Pada tahun 1985 munculah kriptografi yang dikembangkan oleh Victor Miller dan Neal Koblitz, yaitu kriptografi kurva eliptik. Penggunaan kriptografi kurva eliptik lebih efisien dibandingkan dengan kriptosistem yang sudah ada, karena ukuran kunci yang lebih kecil namun memperoleh derajat keamanan yang setara ehingga waktu perhitungan yang lebih cepat dan memori yang diperlukan lebih kecil.

Kriptografi kurva eliptik menggunakan basis kurva eliptik. Kurva eliptik dalam kriptografi tidak mempunyai solusi dalam bilangan riil. Akibatnya agar kurva eliptik mempunyai solusi di dalam kriptografi, maka kurva eliptik didefinisikan dalam

lapangan Galois yaitu lapangan berhingga prima dan lapangan berhingga biner. Kriptografi kurva eliptik akan mengenkripsi dan mendekripsi dengan basis titik. Titik tersebut berawal dari generator yang diambil sebarang dari grup eliptik. Karena basis pada kriptografi kurva eliptik ini adalah titik, maka kelebihan dari kriptografi ini adalah kunci lebih kecil. Kunci yang lebih kecil membutuhkan memori yang kecil dan proses yang dibutuhkan juga semakin sedikit.

2. Hasil dan Pembahasan

Algoritma kriptografi kurva eliptik adalah teknik kriptografi yang didasarkan pada pendekatan matematika dengan menggunakan kurva eliptik. Tingkat keamanan sistem kriptografi kurva eliptik didasarkan atas ECDLP pada kurva eliptik modulo prima. Semakin besar bilangan prima dan ECDLP yang digunakan, maka tingkat keamanan pengiriman pesan dengan menggunakan sistem kriptografi kurva eliptik semakin tinggi[1].

2.1 Algoritma Perluasan Euclid

Salah satu penggunaan Algoritma perluasan Euclid atau yang sering disebut dengan algoritma *extended Euclid* adalah untuk mencari invers modulo. Invers modulo terjadi jika $a \in \mathbb{Z}_n$ maka nilai $\gcd(a, n) = 1$. Invers modulo digunakan dalam perhitungan operasi titik dalam kriptografi kurva eliptik.

Berikut diberikan langkah-langkah dari Algoritma perluasan Euclid dan penyajian algoritma dalam bentuk tabel sebagai berikut[2].

Tabel 1. Invers modulo dengan perluasan Euclid

Q	R_1	R_2	R	T_1	T_2	T
..

Keterangan:

Q = hasil bagi antara R_1 dibagi R_2

R_1 = nilai awal modulo, untuk selanjutnya didapatkan dari nilai R_2 baris sebelumnya

R_2 = nilai awal pembagi/penyebut, untuk selanjutnya didapatkan dari nilai R baris sebelumnya

R = sisa dari R_1 dibagi R_2

$T_1 = 0$ pada awal, untuk selanjutnya didapatkan dari nilai T_2 baris sebelumnya

$T_2 = 1$ pada awal, untuk selanjutnya didapatkan dari nilai T baris sebelumnya

$T = T_1 - Q \cdot T_2$

Berikut diberikan langkah-langkah algoritma perluasan Euclid untuk mencari invers modulo.

Langkah-langkah mencari invers $b \bmod a$:

1. Memasukkan nilai a dan b berturut-turut sebagai R_1 dan R_2
2. Memasukkan nilai $T_1 = 0, T_2 = 1$
3. Menghitung nilai Q , yaitu hasil bagi R_1/R_2
4. Menghitung nilai R , yaitu $R_1 - Q \cdot R_2$ atau sisa dari R_1/R_2

5. Menghitung nilai T , yaitu $T_1 - Q \cdot T_2$
6. Tahap selanjutnya, nilai R_1 didapat dari nilai R_2 sebelumnya dan nilai R_2 didapat dari nilai R sebelumnya
7. Nilai T_1 didapat dari nilai T_2 sebelumnya dan nilai T_2 didapat dari nilai T sebelumnya.
8. Selanjutnya menghitung Q, R, T seperti langkah sebelumnya
9. Jika $R > 0$ maka mengulangi langkah 6 sampai 8
10. Jika $R = 0$ maka berhenti dan menetapkan T_2 sebagai invers.

2.2 Lapangan Galois

Definisi 2.1.[3] *Lapangan Galois adalah lapangan berhingga yang mempunyai order p^n , ditulis dengan $GF(p^n)$.*

$GF(p^n)$ dimana p prima dan n bilangan bulat positif. GF adalah singkatan dari lapangan Galois, menghormati matematikawan yang pertama mempelajari mengenai lapangan berhingga.

Selanjutnya pada $GF(p^n)$ ada 2 hal khusus yang digunakan, yaitu $n = 1$ dan $p = 2$. Jika $n = 1$, diperoleh lapangan Galois $GF(p)$, yang disebut juga sebagai lapangan Galois prima. Sedangkan jika $p = 2$, diperoleh lapangan Galois $GF(2^n)$, yang disebut juga sebagai lapangan Galois biner atau lapangan Galois berkarakteristik dua. Dalam pembahasan ini dibahas hanya untuk lapangan Galois prima $GF(p)$.

Definisi 2.2.[4] *Galois field prima $GF(p)$ adalah suatu lapangan berhingga yang berisi p elemen.*

$GF(p)$ terdiri dari himpunan bilangan \mathbb{Z}_p dengan p bilangan prima.

2.3 Operasi-Operasi titik

Berikut diberikan operasi penjumlahan yang didefinisikan $P, Q \in E$ dengan P adalah titik (x_p, y_p) dan Q adalah titik (x_q, y_q) [5].

i. Penjumlahan titik

$P + Q = R(x_r, y_r)$ dengan $x_p \neq x_q$ adalah sebagai berikut.

$$x_r = \lambda^2 - x_p - x_q \text{ dan } y_r = \lambda(x_p - x_r) - y_p$$

dimana,

$$\lambda = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

ii. Penggandaan titik

$2P = R(x_r, y_r)$ dengan $x_p = x_q$ dan $y_p = y_q$ adalah sebagai berikut.

$$x_r = \lambda^2 - 2x_p \text{ dan } y_r = \lambda(x_p - x_r) - y_p$$

dimana,

$$\lambda = \frac{3(x_p)^2 + a}{2y_p}$$

iii. Perkalian titik

Misalkan P adalah titik pada kurva eliptik. Operasi perkalian P adalah didefinisikan dengan penjumlahan yang berulang kali.

$$kP = P + P + P + \dots + \text{banyaknya } k.$$

2.4 Grup Eliptik

Berikut diberikan definisi dari kurva eliptik.

Definisi 2.3.[6] Diberikan p bilangan prima dan misalkan $GF(p)$ dinotasikan sebagai lapangan atas bilangan bulat modulo p . Kurva eliptik E atas $GF(p)$ didefinisikan dengan persamaan

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$$

dimana $a, b \in GF(p)$ memenuhi $4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Grup eliptik dapat dipandang sebagai suatu himpunan yang terdiri dari titik-titik kurva eliptik atas $GF(p)$. Pasangan (x, y) dimana $x, y \in GF(p)$ adalah titik pada kurva jika (x, y) memenuhi persamaan $y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$, termasuk di dalam kurva *point at infinity* yang dinotasikan dengan O . Himpunan semua titik pada E dinotasikan dengan $E(GF(p))$ atau $E_p(a, b)$.

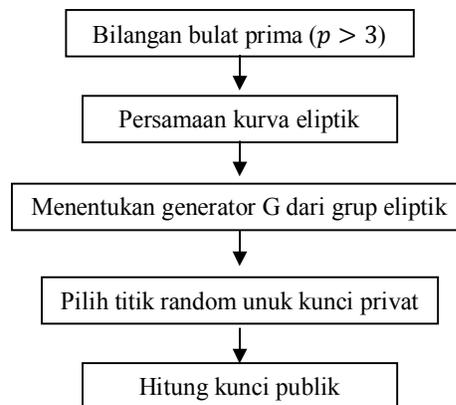
Berikut ini dijelaskan mengenai *quadratic residue* yang mendasari perhitungan dalam grup eliptik.

Definisi 2.5.[7] Diberikan $a \in \mathbb{Z}_n^*$. Bilangan a disebut *quadratic residu modulo n* atau akar kuadrat modulo n jika terdapat $x \in \mathbb{Z}_n^*$ sedemikian sehingga $x^2 \equiv a \pmod{n}$.

Himpunan dari semua *quadratic residu modulo n* dinotasikan dengan Q_n . Jika x adalah *quadratic residu* maka diperoleh 2 elemen (y_1, y_2) dalam grup eliptik.

2.5 Algoritma Pembentukan Kunci

Langkah-langkah pembentukan kunci dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Diagram pembentukan kunci kriptografi kurva eliptik

2.6 Algoritma Enkripsi ECC

Langkah-langkah pada proses enkripsi adalah sebagai berikut[2]:

Input :

Mempersiapkan teks yang akan dikirim

Proses :

1. Mengkonversi teks kedalam nilai ASCII
2. Menghitung nilai groupsize, yaitu ukuran grup/kelompok yang akan dipartisi. Group size mempunyai perintah/*command* berikut

$$group\ size = Length[IntegerDigits[p, 65536]] - 1$$

Perhitungan IntegerDigits adalah dengan cara mengkonversi bilangan prima p dengan basis 65536.

3. Mempartisi/membagi nilai ASCII menjadi beberapa kelompok. Keseluruhan dari nilai ASCII dibagi menjadi kelompok-kelompok yang setiap kelompok tersebut akan dirubah menjadi big integer. Dalam bantuan program Mathematica, *command* untuk partisi adalah sebagai berikut

$$Partition[ASCII\ values, group\ size, groupsize, 1, \{\}]$$

Command partisi tersebut menyatakan bahwa nilai ASCII keseluruhan dipecah menjadi beberapa kelompok yang masing-masing kelompok berukuran *groupsize*.

4. Masing-masing grup yang didapatkan dari langkah sebelumnya dikonversikan kedalam nilai bilangan bulat besar (*big integer*) yang berbasis 65536. Dalam program, *command* untuk konversi adalah

$$FromDigits[Group\ of\ ASCII\ values, 65536]$$

5. Menambahkan dengan karakter 32 di akhir data dari langkah di atas jika banyaknya grup yang dihasilkan berjumlah ganjil, hal ini dilakukan untuk membentuk pasangan yang komplit. Selanjutnya masing-masing pasangan menjadi input dalam system ECC sebagai " P_m " atau plainteks.
6. Memilih nilai k , dimana k adalah nilai acak antara kisaran 1 sampai $n - 1$. Menghitung kG dan kP_b menggunakan operasi perkalian titik.
7. Menghitung $\{P_m + kP_b\}$ menggunakan penjumlahan titik atau penggantian titik seperti yang dibutuhkan.
8. Menggabungkan titik $\{kG\}$ dan titik $\{P_m + kP_b\}$ menjadi $P_c = \{kG, P_m + kP_b\}$. P_c inilah yang menjadi cipherteks yang akan dikirim ke pihak penerima.

Output :

Cipherteks berupa titik dengan $P_c = \{kG, P_m + kP_b\}$.

2.7 Algoritma Dekripsi ECC

Langkah-langkah pada proses dekripsi adalah sebagai berikut[2]:

Input :

Cipherteks $P_c = \{kG, P_m + kP_b\}$ yang telah diperoleh dari proses enkripsi

Proses :

1. Memisahkan P_c ke bagian kiri $\{kG\}$ dan bagian kanan $\{P_m + kP_b\}$
2. Melakukan operasi perkalian dengan nB pada bagian kiri dan kurangkan dari bagian sebelah kanan untuk mendapatkan P_m

$$\{P_m + kP_b\} - nBkG = P_m$$

dengan,

$$P_b = nBG$$

Operasi dalam langkah ini menghasilkan Pm yang berbentuk bilangan bulat besar.

3. Mengkonversikan Pm kedalam nilai ASCII
IntegerDigits[big integer, 65536]
4. Mengkonversikan hasil dari langkah sebelumnya yang berbentuk nilai ASCII ke karakter yang bersesuaian.

Output :

Teks asli/pesan semula.

2.8 Implementasi ECC

Simulasi dilakukan menggunakan software Mathematica versi 10.3 di notebook ASUS x2-AP dengan sistem konfigurasi pada intel® @2.16GHz dan 2GB Ram menggunakan 64 bit.

Pembentukan kunci :

$$\begin{aligned}
 p &= 6277101735386680763835789423207666416083908700390324961279 \\
 a &= -3 \\
 b &= 2455155546008943817740293915197451784769108058161191238065 \\
 G &= \left\{ \begin{array}{l} 60204628237568865675821348058752611191669876636884684818, \\ 174050332293622031404857552280219410364023488927386650641 \end{array} \right\} \\
 nB &= 28186466892849679686038856807396267537577176687436853369 \\
 Pb &= nB \cdot G \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 2803000786541617331377384897435095499124748881890727495642, \\ 4269718021105944287201929298168253040958383009157463900739 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Proses enkripsi :

Input :

Teks yang dikirim :

ANNISA.24010112130038. Kriptografi – Matematika,
Departement Matematika, FSM, Universitas Diponegoro

Proses :

Setelah melakukan langkah ke 1 sampai 5, maka didapatkan Pm sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 Pm_1 &= \left\{ \begin{array}{l} 94999345911176578735924443174854544228266355458097, \\ 70153171345072163672161960290964937116899209642030 \end{array} \right\} \\
 Pm_2 &= \left\{ \begin{array}{l} 109615165120500581429451793134273724696176695312489, \\ 65769290870278910082916512907136379185034716446817 \end{array} \right\} \\
 Pm_3 &= \left\{ \begin{array}{l} 64306785689545806762382860785106202403359567970405, \\ 16076776700373178611070315975580801153431298087332132 \end{array} \right\} \\
 Pm_4 &= \left\{ \begin{array}{l} 156382838381663460021805843290449269021612830949486, \\ 153460303442047344014885632058607685373158613844036 \end{array} \right\} \\
 Pm_5 &= \{35730230072741153587135378421861145772143, 32\}
 \end{aligned}$$

Kemudian setelah di proses kembali mendapatkan cipherteks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 P_{C_1} &= \left[\begin{array}{l} \{ 95058406573787743380879387493754072690640209963862157133, \} \\ \{ 5437547807282051947615392556992837333921930872121480709807, \} \\ \{ 53593158076695292426034352861387188230780498584589564136, \} \\ \{ 625661208716409046067463888992345937695697779715116368924, \} \end{array} \right] \\
 P_{C_2} &= \left[\begin{array}{l} \{ 95058406573787743380879387493754072690640209963862157133, \} \\ \{ 5437547807282051947615392556992837333921930872121480709807, \} \\ \{ 342421835799837679480792311117758176612957090719355845012, \} \\ \{ 4657647026236530993822621555633362418676050613651201068934, \} \end{array} \right] \\
 P_{C_3} &= \left[\begin{array}{l} \{ 95058406573787743380879387493754072690640209963862157133, \} \\ \{ 5437547807282051947615392556992837333921930872121480709807, \} \\ \{ 4745504594064161785598813802275827027502397133720335332888, \} \\ \{ 1144734258278316188735069613824360096591749268482013360045, \} \end{array} \right] \\
 P_{C_4} &= \left[\begin{array}{l} \{ 95058406573787743380879387493754072690640209963862157133, \} \\ \{ 5437547807282051947615392556992837333921930872121480709807, \} \\ \{ 2349169542009869261741169879289507312856884233862959338259, \} \\ \{ 3629837998470840152781126169568455939285358410019175951634, \} \end{array} \right] \\
 P_{C_5} &= \left[\begin{array}{l} \{ 95058406573787743380879387493754072690640209963862157133, \} \\ \{ 5437547807282051947615392556992837333921930872121480709807, \} \\ \{ 2869645350822370710015369644117288486118054275439069762691, \} \\ \{ 118756483182976297003207606403899227632109083453252567899, \} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Proses dekripsi :

Setelah mendapatkan cipherteks dari hasil enkripsi, kemudian dengan menggunakan langkah 1-3 mendapatkan hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 P_{m_1} &= \{Pm_1 + kPb\} - nBkG \\
 &= \{ 94999345911176578735924443174854544228266355458097, \} \\
 &\quad \{ 70153171345072163672161960290964937116899209642030 \} \\
 P_{m_2} &= \{Pm_2 + kPb\} - nBkG \\
 &= \{ 109615165120500581429451793134273724696176695312489, \} \\
 &\quad \{ 65769290870278910082916512907136379185034716446817 \} \\
 P_{m_3} &= \{Pm_3 + kPb\} - nBkG \\
 &= \{ 64306785689545806762382860785106202403359567970405, \} \\
 &\quad \{ 160767767003731786110703159755808011534312980873321 \} \\
 P_{m_4} &= \{Pm_4 + kPb\} - nBkG \\
 &= \{ 156382838381663460021805843290449269021612830949486, \} \\
 &\quad \{ 153460303442047344014885632058607685373158613844036 \} \\
 P_{m_5} &= \{Pm_5 + kPb\} - nBkG \\
 &= \{ 35730230072741153587135378421861145772143, \} \\
 &\quad \{ \hspace{10em} 32 \}
 \end{aligned}$$

Kemudian dilanjutkan proses 4 dan 5 sehingga karakter yang dihasilkan sebagai berikut:

ANNISA. 24010112130038. Kriptografi

– Matematika, Departement Matematika, FSM, Universitas Diponegoro

3. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan bahwa proses kriptografi dengan kurva eliptik itu dimulai dari proses pembentukan kunci. Generator G adalah pembangkit kunci yang digunakan untuk menghitung kunci publik. Generator G didapatkan dari grup eliptik yaitu himpunan titik-titik kurva eliptik atas $GF(p)$. Setelah membentuk kunci privat dan kunci publik, kemudian melakukan proses enkripsi. Proses enkripsi disini berproses 2 kali, mengubah pesan asli menjadi plainteks dan mengubah plainteks menjadi cipherteks. Pesan asli akan dirubah menjadi plainteks yang berbentuk sebuah titik, yang mana titik tersebut yang akan dilakukan algoritma enkripsi menjadi cipherteks. Cipherteks yang didapatkan oleh penerima akan didekripsi menggunakan algoritma dekripsi kriptografi kurva eliptik dengan bantuan kunci privat. Semakin besar p yang digunakan, maka banyak grup yang dihasilkan akan semakin banyak. Sehingga titik cipherteks yang dihasilkan juga semakin banyak.

Peran aljabar untuk lapangan Galois prima adalah sebagai dasar dari pembentukan kunci dan perhitungan dalam algoritma enkripsi maupun dekripsi. Perhitungan menggunakan modulo p , yang mana bilangan prima adalah dasar dari pembentukan kriptografi kurva eliptik tersebut. Kunci terbentuk dari sebuah persamaan kurva eliptik yang terdefinisi atas modular prima. Perhitungan yang berulang kali dalam pembentukan kunci juga membutuhkan dasar grup siklik.

Daftar Pustaka

- [1] Wahyu, Puguh dan Zaki Riyanto. 2010. *Penerapan Kurva Eliptik Atas Z_p Pada Skema Tanda Tangan Elgamal*. Paper. Jogja : Universitas Gajah mada.
- [2] Singh, Laiphrakpam Dolendro., Singh, Khumanthem Manglem., 2015. Implementation of Text Encryption using Elliptic Curve Cryptography. *Procedia Computer Science*, Vol 73, hlm 73-82.
- [3] Lidl, Rudolf. 1994. *Introduction to Finite Fields and Their Applications*. Australia : Cambridge University Press.
- [4] Certicom. 2000. *SECI: Elliptic Curve Elliptic*. Certicom corp.
- [5] Stufen, Dr. Andreas. 2002. *The Elliptic Curve Cryptosystem*. Zürcher Hochschule Winterthur
- [6] Harkenson, Darel. 2004. *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. USA : Springer-Verlag New York, Inc.
- [7] Menezes, Oorschot, and Vanstone. 1996. *Handbook of Applied Cryptography*, USA : CRC Press, Inc

Efektivitas Penggunaan Media Pembelajaran Komik Pada Materi Persamaan Garis Lurus Ditinjau dari Prestasi dan Minat Belajar Siswa SMP Joannes Bosco Kelas VIII Democracy Tahun Ajaran 2015/2016

Lilik Andri Susanto

S1 Pendidikan Matematika,
Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
Andris054@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh penggunaan media komik dalam pembelajaran matematika terhadap 1) prestasi belajar siswa dan 2) minat belajar siswa kelas VIII Democracy tahun ajaran 2015/2016, pada pokok bahasan persamaan garis lurus.

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif kualitatif-kuantitatif dimana dalam penelitian ini akan dijelaskan apakah ada peningkatan prestasi dan minat belajar siswa yang terjadi setelah pembelajaran menggunakan komik. Subjek dalam penelitian ini adalah siswa kelas VIII Democracy tahun ajaran 2015/2016 yang terdiri dari 26 siswa. Data prestasi belajar siswa diperoleh dari data hasil *pre test* dan *post test* siswa dan data minat belajar siswa diperoleh dari hasil angket minat belajar siswa sebelum dan sesudah menggunakan media komik serta wawancara. Analisa data prestasi belajar siswa dilakukan dengan membandingkan nilai rata-rata *pre test* dan *post test*. Analisa data minat belajar siswa yang dilakukan adalah analisa kualitatif berdasarkan wawancara dan analisa angket minat menggunakan klasifikasi dan membandingkan skor rata-rata minat sebelum dan sesudah menggunakan media komik.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa pengaruh penggunaan media komik terhadap pembelajaran matematika dapat meningkatkan prestasi belajar siswa dan minat belajar siswa. Presentase siswa yang memperoleh nilai ≥ 71 pada *pre test* adalah 7,69% sedangkan *post test* adalah 19,23%, sehingga terlihat tidak begitu besar peningkatan yang terjadi. Dan dari analisis data minat menunjukkan peningkatan minat belajar siswa dari rata-rata 72,885 (sebelum menggunakan komik) menjadi 76,423 (sesudah menggunakan komik) serta peningkatan minat belajar siswa dapat diperkuat dengan data wawancara.

Kata kunci: *pembelajaran matematika, media pembelajaran komik, prestasi belajar, minat belajar.*

1. Pendahuluan

Media pembelajaran merupakan salah satu alternatif yang dapat digunakan dalam proses pembelajaran di dalam kelas untuk menyampaikan pesan ajar yang diberikan oleh guru. Ada banyak sekali media pembelajaran yang dapat digunakan dalam proses mengajar. Guru sebagai pihak pemberi pesan kepada peserta didik

haruslah dapat memilih atau membuat media yang tepat untuk diberikan kepada peserta didik supaya pesan yang disampaikan dapat diterima secara utuh oleh peserta didik.

Minat merupakan hal yang sangat mendasar untuk melakukan suatu kegiatan, tanpa adanya minat seseorang tidak akan melakukan kegiatannya dengan baik, minat juga menentukan keberhasilan seseorang dalam melakukan kegiatannya. Media pembelajaran dengan menggunakan komik merupakan salah satu media yang dapat membangkitkan minat siswa dalam mempelajari materi yang diberikan oleh guru.

Melalui komik pembelajaran siswa diajak berfikir dan memahami materi pelajaran, tidak hanya mendengar, menerima dan mengingat-ingat saja melainkan siswa akan merasakan penasaran dengan cerita yang terdapat di dalam komik serta siswa akan lebih termotivasi dalam belajar. Dengan membaca komik rasa jenuh dalam belajar akan sedikit demi sedikit pudar, dan berubah menjadi rasa senang dan nyaman dalam belajar.

Dengan menggunakan media pembelajaran komik ini diharapkan siswa akan lebih berminat dalam belajar dan pemahaman siswa dalam materi juga akan meningkat sehingga dapat memperoleh hasil belajar yang lebih baik.

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, perumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah, 1) Apakah pembelajaran matematika dengan menggunakan media komik efektif meningkatkan prestasi belajar siswa dalam pokok bahasan persamaan garis lurus? Dan 2) Apakah pembelajaran matematika dengan menggunakan media komik efektif meningkatkan minat belajar siswa pada pokok bahasan persamaan garis lurus?

2. Landasan Teori

2.1 Komik Sebagai Media Pembelajaran

Banyak orang suka membaca komik, hal ini dapat diperkuat dengan ungkapan dari Nana & Ahmad (1990:63-64) bahwa diperkirakan banyak pembaca komik di Amerika Serikat lebih dari sejuta orang.

Komik yang diaplikasikan sebagai media pembelajaran juga dapat memotivasi minat belajar siswa, serta dapat membuat siswa lebih fokus dan merasa santai dalam belajar, komik juga dapat berfungsi sebagai jembatan untuk menumbuhkan minat membaca siswa. Sekali minat telah dibangkitkan, cerita bergambar harus dilengkapi oleh materi bacaan, film, gambar tetap (foto), model, percobaan serta berbagai kegiatan yang kreatif.

Melihat dari hal di atas guru matematika juga harus dapat mengaplikasikan komik sebagai media pembelajaran supaya dapat meningkatkan minat siswa dalam belajar matematika.

2.2 Minat Belajar Peserta Didik

Minat besar pengaruhnya terhadap aktivitas belajar. Siswa yang berminat terhadap biologi akan mempelajari biologi dengan sungguh-sungguh seperti rajin belajar, merasa senang mengikuti penyajian pelajaran biologi, dan bahkan dapat menentukan kesulitan-kesulitan dalam belajar menyelesaikan soal-soal latihan dan praktikum karena adanya daya tarik yang diperoleh dengan mempelajari biologi. Siswa akan mudah menghafal pelajaran yang menarik minatnya. Minat berhubungan erat

dengan motivasi. Motivasi muncul karena adanya kebutuhan, begitu juga minat, sehingga tepatlah bila minat merupakan alat motivasi. Proses belajar akan berjalan lancar bila disertai minat. Oleh karena itu, guru perlu membangkitkan minat siswa agar pelajaran yang diberikan mudah siswa mengerti Hasnawiyah (1994, dalam Segala, 2009).

Berdasarkan hasil penelitian psikologi menunjukkan bahwa kurangnya minat belajar dapat mengakibatkan kurangnya rasa ketertarikan pada suatu bidang tertentu, bahkan dapat melahirkan sikap penolakan kepada guru Slameto (1995).

2.3 Prestasi Belajar

Menurut Winkel (1987), prestasi belajar adalah keberhasilan usaha yang dicapai seseorang setelah memperoleh pengalaman belajar atau mempelajari sesuatu.

Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia, prestasi belajar adalah penguasaan pengetahuan atau keterampilan yang dikembangkan oleh mata pelajaran, lazimnya ditunjukkan dengan nilai tes atau angka yang diberikan oleh guru.

3. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian deskriptif . Pada penelitian ini, sampel dan populasinya adalah sama yaitu kelas VIII Democracy sehingga dalam pengolahan data menggunakan statistika inferensial. Subjek penelitian ini adalah siswa-siswi SMP Joannes Bosco kelas VIII Democracy, dengan jumlah siswa sebanyak 26 siswa. Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan media belajar komik sebagai media pembelajaran. Data dalam penelitian ini berupa data prestasi belajar, data minat belajar, dan deskripsi wawancara.

Metode pengumpulan data yang dilakukan di dalam penelitian ini diantaranya: metode tes hasil belajar (pre test dan post test), metode angket minat siswa, dan metode wawancara. Instrumen-instrumen yang digunakan dalam penelitian untuk mendapatkan data pada penelitian ini diantaranya: Rencana Pelaksanaan Penelitian (RPP), Lembar tes, Angket minat, Pertanyaan Wawancara.

Data-data yang akan dianalisis dalam penelitian ini diantaranya:

3.1. Data Prestasi Belajar Siswa

Analisi data hasil belajar ini dilakukan untuk melihat apakah ada peningkatan hasil belajar siswa. Penganalisisan data ini menggunakan statistika inferensial, dimana sampel dan populasi dari data yang diperoleh adalah sama. Di dalam penelitian ini terdapat dua nilai atau hasil belajar siswa yaitu hasil belajar sebelum (*pre test*) dan sesudah dilakukan pembelajaran (*post test*) dengan menggunakan media komik.

Dari kedua data hasil belajar tersebut akan dilihat apakah ada peningkatan dari hasil belajar siswa atau tidak. Untuk melihat ada tidaknya peningkatan prestasi belajar dengan membandingkan nilai rata-rata *pre test* dan *post test*. Untuk melihat nilai rata-rata digunakan rumus:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Dengan : \bar{x} = Rata-rata data

n = Banyaknya data

x_i = Data, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Dari hasil rata-rata yang telah diperoleh dapat ditarik kesimpulan apakah terjadi peningkatan prestasi belajar atau tidak. Jika nilai rata-rata *pre test* < *post test* maka terjadi peningkatan prestasi belajar tetapi jika nilai rata-rata *pre test* \geq *post test* maka tidak terjadi peningkatan hasil belajar

Nilai KKM matematika kelas VIII adalah 71, sehingga untuk mengetahui presentase siswa yang mencapai nilai 71 adalah presentase siswa yang yang mencapai nilai 71 ke atas.

$$= \frac{\text{banyaknya siswa yang mendapatkan nilai 71 ke atas}}{\text{jumlah siswa}} \times 100\%$$

3.2. Angket Minat

Data minat belajar siswa dalam mengikuti dan melaksanakan proses pembelajaran matematika sebelum dan sesudah menggunakan media komik diperoleh dari hasil pengukuran angket minat.

Dari angket minat yang diberikan kesemua siswa yang mengikuti proses pembelajaran dalam penelitian ini mempunyai kriteria penskoran sebagai berikut:

Tabel 1. Skor Angket Minat Belajar Siswa

Alternatif Jawaban	Skor	
	Positif	Negatif
SL	5	1
SR	4	2
K	3	3
J	2	4
TP	1	5

a. Skor pencapaian angket minat

Dari kedua angket minat belajar siswa yang telah dibagikan terdapat 20 butir pernyataan. Sehingga dari jumlah pernyataan jawaban siswa terhadap minat dalam melaksanakan proses pembelajaran matematika yang berlangsung dengan menggunakan media komik dan sebelum menggunakan media komik terdapat dua jumlah skor yang dicapai, yaitu jumlah skor terendah yang mungkin dicapai adalah 20 dan jumlah skor terbesar yang dicapai adalah 100.

b. Menghitung presentase minat

Perhitungan presentase minat digunakan untuk masing-masing siswa, untuk memperoleh presentase dapat dihitung dengan cara:

$$= \frac{\text{skor pernyataan positif} + \text{skor pernyataan negatif}}{\text{skor maksimal}} \times 100\%$$

c. Pengklasifikasian tingkat minat belajar siswa dalam proses pembelajaran matematika

Klasifikasi tingkat minat belajar siswa dalam melaksanakan proses pembelajaran matematika sebelum dan sesudah menggunakan media komik, dinilai dengan Penilaian Acuan Patokan (PAP) tipe II (Masidjo,1995:157) dengan pengklasifikasian sebagai berikut:

Tabel 2. Kriteria Minat Setiap Siswa

Skor (%)	Klasifikasi minat
≤46	Sangat Rendah (SR)
46-55	Rendah (R)
56-65	Sedang (S)
66-80	Tinggi (T)
81-100	Sangat Tinggi (ST)

Untuk melihat minat keseluruhan dapat sebagai berikut:

belajar siswa secara menggunakan tabel

Tabel 3. Klasifikasi Minat Belajar Siswa Secara Keseluruhan

Jumlah Siswa					Kriteria Minat
ST	ST + T	ST + T + S	ST + T + S + R	ST + T + S + R + SR	
≥ 75 %					Sangat Tinggi
< 75 %	≥ 75 %				Tinggi
	< 75 %	≥ 65 %			Sedang
		< 65 %	≥ 65 %		Rendah
			< 65 %	< 65 %	Sangat Rendah

d. Minat sebelum dan sesudah menggunakan media komik

Analisi data minat ini dilakukan untuk melihat apakah ada peningkatan minat belajar siswa. Di dalam penelitian ini terdapat dua nilai yang menunjukkan kriteria minat belajar siswa, yaitu minat belajar siswa sebelum dan sesudah dilakukan pembelajaran dengan menggunakan media komik.

Dari kedua data minat tersebut akan dilihat apakah ada peningkatan minat belajar siswa atau tidak. Untuk melihat ada tidaknya peningkatan minat belajar siswa dengan membandingkan nilai rata-rata minat sebelum menggunakan media komik dan rata-rata minat sesudah menggunakan media komik. Untuk melihat nilai rata-rata digunakan rumus:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Dengan :

\bar{x} = Rata-rata data

n = Banyaknya data

x_i = Data, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Dari hasil rata-rata yang telah diperoleh dapat ditarik kesimpulan apakah terjadi peningkatan prestasi belajar atau tidak. Jika nilai rata-rata sebelum menggunakan media komik $<$ nilai rata-rata sesudah menggunakan media komik maka terjadi peningkatan minat belajar siswa tetapi jika nilai rata-rata sebelum menggunakan media komik \geq nilai rata-rata sesudah menggunakan media komik maka tidak terjadi peningkatan minat belajar siswa.

3.3. Analisis Wawancara Siswa

Hasil wawancara akan dianalisis secara deskriptif. Wawancara berfungsi sebagai data pendukung atau instrumen untuk memperkuat data dari angket minat yang telah diisi oleh siswa. Wawancara ini akan memperkuat data tentang minat belajar siswa apakah minat belajar siswa dalam belajar matematika dapat meningkat atau ada perubahan jika dalam memberikan pembelajaran disisipi dengan media komik.

4. Pembahasan

4.1. Analisis Hasil Belajar

Analisis nilai *pre test* dan nilai *post test* kelas VIII Democracy.

Tabel 4. Nilai *Pre Test* dan *Post test*

Subyek	Nilai <i>Pre Test</i>	Nilai <i>Post Test</i>	Selisih
S1	52,5	80	27,5
S2	40	17,5	22,5
S3	10	25	15
S4	40	67,5	27,5
S5	55	57,5	2,5
S6	Tidak Masuk	Tidak Masuk	
S7	7,5	37,5	30
S8	32,5	22,5	10
S9	42,5	50	7,5
S10	47,5	57,5	10
S11	30	30	0
S12	45	72,5	27,5
S13	Tidak Masuk	Tidak Masuk	
S14	30	37,5	7,5
S15	25	40	15
S16	50	40	10
S17	60	77,5	17,5
S18	25	10	15
S19	32,5	62,5	30
S20	27,5	17,5	10
S21	72,5	87,5	15
S22	40	65	25
S23	52,5	37,5	15
S24	37,5	42,5	5
S25	27,5	32,5	5
S26	32,5	47,5	15
S27	Tidak Masuk	Tidak Masuk	
S28	87,5	100	12,5
S29	30	60	30

Setelah diperoleh data mentah di atas, maka dapat diukur pemusatan data, penyebaran data, berikut hasil pengukuran tersebut:

Tabel 5. Statistik Data Nilai *Pre Test* dan *Post Test*

Statistik	<i>Pre Test</i>	<i>Post test</i>
Max	87,5	100
Min	7,5	10
Rata-rata	39,712	49,039

Simpangan Baku	17,469	23,217
-----------------------	--------	--------

Dari perhitungan di atas menunjukkan bahwa, siswa mengalami peningkatan belajar, hal ini dapat dilihat dari nilai tertinggi yang meningkat dari 87,5 menjadi 100; nilai terendah yang meningkat dari 7,5 menjadi 10, dan rata-rata nilai *pre test* dan *post test*, di mana rata-rata nilai *post test* lebih besar dari rata-rata nilai *pre test*. Data *pre test* cukup luas penyebarannya yaitu 17, 469 dan data *post test* juga cukup luas penyebarannya yaitu 23,217. Untuk mengetahui seberapa besar peningkatan yang terjadi dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Pre Test} &= \frac{2}{26} \times 100\% \\ &= 7,69\% \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Post Test} &= \frac{5}{26} \times 100\% \\ &= 19,23\% \end{aligned}$$

Berdasarkan analisis data di atas dapat dilihat bahwa ada peningkatan prestasi belajar siswa setelah diberikan pembelajaran dengan menggunakan media komik. Untuk melihat ada tidaknya peningkatan yang terjadi dilakukan dengan pengolahan data menggunakan statistika inferensial, dengan proses membandingkan nilai rata-rata antara nilai *pre test* dan *post test*, dari uji ini dapat dilihat rata-rata *pre test* = 39,712 dan rata-rata *post test* = 49,039, sehingga dari uji tersebut dapat diketahui bahwa rata-rata nilai *post test* lebih besar dari nilai *pre test*.

Presentase peningkatan prestasi belajar siswa menunjukkan bahwa *pre test* sebesar 7,69% dan *post test* sebesar 19,23%. Presentase ini menunjukkan seberapa banyak siswa yang mendapatkan nilai ≥ 71 . Dari presentase nilai *pre test* dan *post test* dapat disimpulkan bahwa terjadi peningkatan prestasi belajar siswa.

4.2. Analisis Angket Minat

4.2.1. Penyajian Data Angket Minat Sebelum menggunakan komik

Analisis data ini dilakukan setelah data minat belajar siswa diperoleh.

Tabel 6. Kualifikasi Minat Belajar Siswa Sebelum Menggunakan Komik

Kualifikasi Minat	Jumlah Siswa	% Jumlah Siswa
Sangat Tinggi	6	23,07692
Tinggi	16	61,53846
Sedang	3	11,53846
Rendah	1	3,846154
Sangat Rendah	0	0

Dari tabel kualifikasi minat belajar siswa sebelum menggunakan media komik menunjukkan bahwa banyak siswa yang mempunyai minat tinggi dalam mengikuti proses pembelajaran, dan untuk memperjelas bagaimana kualifikasi minat belajar siswa yang sebenarnya dapat dilihat di Tabel 7.

Tabel 7. Kualifikasi Minat Belajar Siswa Sebelum Menggunakan Komik Secara Klasikal

Jumlah Siswa					Kriteria Minat
ST	ST + T	ST + T + S	S T + T + S + R	S T + T + S + R	
$\geq 75 \%$					Sangat Tinggi
$< 75 \%$	$\geq 75 \%$				Tinggi
	$< 75 \%$	$\geq 65 \%$			Sedang
		$< 65 \%$	$\geq 65 \%$		Rendah
			$< 65 \%$		Sangat Rendah
23,0769 231	84,6153 846	96,1538 462	1 0 0	1 0 0	Tinggi

Setelah data minat belajar siswa sebelum menggunakan komik dikualifikasikan secara klasikal dapat disimpulkan bahwa kriteria minat belajar siswa tinggi.

4.2.2. Penyajian Data Angket Minat Sesudah menggunakan komik

Setelah data minat belajar siswa sesudah menggunakan komik ini diperoleh kemudian dianalisis sesuai dengan analisis data pada minat sebelum menggunakan media komik. Dan analisis data minat belajar siswa sesudah menggunakan komik dapat dilihat seperti pada dibawah ini.

Tabel kriteria minat belajar ini bertujuan untuk melihat bagaimana kriteria dari masing-masing minat belajar siswa yang diperoleh selama pembelajaran menggunakan media komik.

Tabel 8. Kualifikasi Minat Belajar Siswa Sesudah Menggunakan Komik

Kualifikasi Minat	Jumlah Siswa	% Jumlah Siswa
Sangat Tinggi	7	26,92308
Tinggi	16	61,53846
Sedang	3	11,53846
Rendah	0	0
Sangat Rendah	0	0

Dari tabel kualifikasi minat belajar siswa sesudah menggunakan media komik menunjukkan bahwa banyak siswa yang mempunyai minat tinggi dalam mengikuti proses pembelajaran dengan menggunakan media komik, dan untuk memperjelas bagaimana kualifikasi minat belajar siswa yang sebenarnya dapat dilihat di tabel 9.

Tabel 9. Kualifikasi Minat Belajar Siswa Sesudah Menggunakan Komik Secara Klasikal

Jumlah Siswa					Kriteria Minat
ST	ST + T	S T + T + S	S T + S + R	S T + S + R	
$\geq 75\%$					Sangat Tinggi
$< 75\%$	$\geq 75\%$				Tinggi
	$< 75\%$	$\geq 65\%$			Sedang
		$< 65\%$	$\geq 65\%$		Rendah
			$< 65\%$	$< 65\%$	Sangat Rendah
26,923076 92	88,46153 85	10 0	10 0	10 0	Tinggi

Setelah data minat belajar siswa sebelum menggunakan komik dikualifikasikan secara klasikal dapat disimpulkan bahwa kriteria minat belajar siswa tinggi.

Karena kriteria minat belajar siswa sebelum dan sesudah menggunakan media komik sama-sama tinggi, untuk melihat bagaimana ada tidaknya perbedaan dilanjutkan dengan perbandingan minat belajar siswa sebelum dan sesudah menggunakan media komik.

Perbandingan minat belajar siswa sebelum dan sesudah menggunakan komik
Tabel 10. Minat Belajar Siswa Sebelum dan Sesudah Menggunakan Komik

Subyek	Minat Belajar Sebelum Menggunakan Komik	Minat Belajar Sesudah Menggunakan Komik	Selisih
S1	63	63	0
S2	74	86	12
S3	83	83	0
S4	67	77	10
S5	75	78	3
S6	TIDAK MASUK		
S7	64	70	6
S8	54	56	2
S9	86	89	3
S10	68	75	7
S11	74	73	1
S12	73	80	7
S13	TIDAK MASUK		
S14	81	81	0
S15	68	71	3
S16	79	80	1
S17	70	79	9
S18	82	89	7
S19	60	63	3
S20	76	79	3
S21	68	76	8
S22	83	90	7
S23	77	78	1
S24	68	71	3
S25	70	72	2
S26	72	71	1
S27	TIDAK MASUK		
S28	84	81	3
S29	76	76	0

Setelah diperoleh data mentah di atas, maka dapat diukur pemusatan data, penyebaran data, berikut hasil pengukuran tersebut:

Tabel 11. Statistik Minat Belajar Siswa Sebelum dan Sesudah Menggunakan Komik

Statistik	Minat Sebelum	Minat Sesudah
Max	86	90
Min	54	56
Rata-rata	72,885	76,423
Simpangan Baku	7,941	8,154

Dari perhitungan diatas menunjukkan bahwa, minat belajar siswa mengalami peningkatan, hal ini dapat dilihat dari nilai tertinggi yang meningkat dari 86 menjadi 90; nilai terendah yang meningkat dari 54 menjadi 56; dan rata-rata minat sebelum dan sesudah menggunakan komik, di mana rata-rata minat belajar siswa sesudah menggunakan komik lebih besar dari rata-rata minat belajar siswa sebelum menggunakan komik. Data minat belajar siswa sebelum menggunakan komik cukup luas penyebarannya yaitu 7,941 dan data minat belajar siswa sesudah menggunakan komik juga cukup luas penyebarannya yaitu 8,154.

Setelah data diolah dan diklasifikasikan diperoleh bahwa klasifikasi minat belajar siswa dalam mengikuti proses pembelajaran sebelum dan sesudah menggunakan media komik adalah tinggi. Karena klasifikasi minat belajar siswa sebelum dan sesudah menggunakan media komik sama-sama tinggi sehingga untuk melihat ada tidaknya perbedaan atau peningkatan yang terjadi maka dilanjutkan dengan membandingkan skor rata-rata antara minat belajar siswa sebelum dan sesudah menggunakan media komik dengan cara statistika. Dan dari analisis diperoleh skor rata-rata minat belajar siswa sebelum menggunakan komik = 72,885 dan skor rata-rata minat belajar siswa sesudah menggunakan komik = 76,423, dapat ditarik kesimpulan bahwa skor minat belajar siswa sesudah menggunakan media komik lebih besar daripada minat belajar siswa sebelum menggunakan komik atau ada peningkatan minat belajar siswa yang terjadi setelah penggunaan media komik dalam pembelajaran di dalam kelas.

4.3. Analisis Wawancara

Data wawancara ini diperoleh setelah proses pembelajaran selesai, Penyajian data wawancara dapat dilihat pada Tabel 12.

Tabel 12. Rangkuman Wawancara Siswa

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Bagaimana pendapatmu tentang pembelajaran matematika selama ini?	1	Membosankan
		2	Menemui kesulitan dalam memahami
		3	Materi susah
		4	Penjelasan dari guru kurang jelas
2	Apakah kamu memperhatikan penjelasan guru saat guru menjelaskan di dalam kelas?	1	Kadang Memperhatikan
		2	Memperhatikan
		3	Tergantung. Memperhatikan jika belum memahami/ memperhatikan jika materi susah

		4	Jarang memperhatikan
3	Bagaimana situasi kelas saat pelajaran matematika berlangsung?	1	Kadang rame kadang tenang.
		2	Rame. Ikut rame dan tidak memperhatikan
		3	Rame. Tidak ikut rame dan mencoba memperhatikan
		4	Rame, tetapi banyak siswa yang tidak mau bertanya meskipun belum paham.
4	Apakah kamu mengalami kesulitan dalam memahami suatu materi?	1	Tidak
		2	Ya
5	Apakah kamu mengalami kesulitan dalam menjawab soal-soal terkait materi persamaan garis lurus?	1	Ya, lupa rumus atau bingung menentukan rumus
		2	Tidak, sudah paham.
		3	Sering, terutama materi gradien
		4	Kadang
6	Bagaimana tanggapanmu tentang pembelajaran matematika dengan menggunakan komik?	1	Seru
		2	Menyenangkan/ menarik
		3	Tidak membosankan
		4	Mempermudah pemahaman
7	Apakah yang kamu rasakan saat mengikuti pembelajaran matematika dengan menggunakan komik?	1	Senang/ menyenangkan
		2	Lebih berminat
		3	Lebih mudah dipahami
		4	Tidak bosan
8	Hal menarik apa yang kamu temui saat mengikuti pembelajaran dengan menggunakan komik?	1	Meningkatkan pemahaman materi
		2	Lebih berminat
		3	Komik (cerita dan gambar) menarik
		4	Lebih seru karena variatif sehingga tidak mengantuk
9	Apakah pembelajaran matematika dengan menggunakan komik dapat meningkatkan pemahaman	1	Ya, karena penjelasan materi lebih runtut dan jelas
		2	Sedikit-sedikit
		3	Sama saja karena hanya mengulang materi yang sudah diajarkan
		4	Kadang paham kadang tidak

	akan materi persamaan garis lurus?		
10	Bagaimanakah perbedaan belajar matematika menggunakan komik dengan pembelajaran matematika sebelum menggunakan komik?	1	Sebelumnya susah, setelah menggunakan komik pemahaman meningkat
		2	Sebelumnya bosan, setelah menggunakan komik pembelajaran jadi lebih menyenangkan
		3	Biasanya mengantuk, sekarang lebih seru
		4	Sebelumnya malas mengikuti pembelajaran, sekarang lebih dapat memahami karena penjelasan runtut.
11	Apakah ada saran untuk komik?	1	Komik dilanjutkan lagi dengan materi yang berbeda
		2	Lebih ditingkatkan/ dikembangkan lagi dari sisi tokoh dan cerita
		3	Seterusnya menggunakan komik untuk bab-bab dan mata pelajaran lainnya
		4	Dibuat lebih menarik lagi

Setelah data wawancara dianalisis dan digolongkan ke dalam empat jawaban yang hampir sama, dapat diperoleh keterangan bahwa siswa lebih berminat jika proses pembelajaran yang terjadi di dalam kelas diberikan dengan menggunakan media komik. Sebab dengan komik siswa lebih merasa nyaman, santai dan senang. Dengan menggunakan komik siswa juga merasa lebih paham terhadap materi yang disampaikan. Sebelum menggunakan media komik siswa cenderung malas mengikuti pembelajaran di dalam kelas, ditambah pemahaman terhadap materi juga kurang karena siswa merasa jenuh mengikuti pembelajaran yang hanya dilakukan dengan ceramah oleh guru di dalam kelas.

5. Kesimpulan

Efektivitas penggunaan komik dalam pembelajaran matematika dapat meningkatkan prestasi belajar siswa. Dari hasil perhitungan nilai rata-rata diperoleh nilai rata-rata siswa pada saat *pre test* = 39,712 dan nilai rata-rata *post test* = 49,039, sehingga terbukti bahwa rata-rata nilai *post test* lebih besar dari pada nilai *pre test*. Untuk lebih menguatkan lagi dapat dilihat dari presentase siswa yang memperoleh nilai ≥ 71 pada *pre test* adalah 7,69% sedangkan *post test* adalah 19,23%. Dari hal ini dapat disimpulkan bahwa pembelajaran matematika dengan menggunakan media komik efektif meningkatkan prestasi belajar siswa dalam pokok bahasan persamaan garis lurus. Hal ini juga diperkuat dari hasil wawancara kepada para siswa, dimana dari penarikan kesimpulan para siswa lebih bersemangat dan tertarik dalam belajar matematika dan dari hal tersebut dapat dilihat bahwa ada peningkatan prestasi belajar siswa.

Dari analisis minat belajar siswa sebelum dan sesudah menggunakan media komik secara kualifikasi kedua data minat masuk dalam kriteria tinggi. Untuk presentase minat belajar siswa sebelum menggunakan komik kriteria sangat tinggi = 23,077% dan yang tinggi = 61,53846%, sedangkan presentase minat belajar siswa sesudah menggunakan komik kriteria sangat tinggi = 26,923% dan yang tinggi = 61,53846%. Setelah dianalisis secara statistika menunjukkan bahwa terjadi peningkatan minat belajar siswa. Dari hasil perhitungan nilai rata-rata diperoleh rata-rata minat belajar siswa sebelum menggunakan komik = 72,885 lebih kecil daripada rata-rata minat belajar siswa sesudah menggunakan komik = 76,423. Sehingga terbukti bahwa pembelajaran matematika dengan menggunakan media komik cukup efektif meningkatkan minat belajar siswa pada pokok bahasan persamaan garis lurus. Peningkatan minat belajar siswa diperkuat dengan hasil dari wawancara siswa. Dimana sebagian besar siswa lebih tertarik belajar dengan menggunakan komik karena merasa lebih menyenangkan dan tidak membosankan seperti pembelajaran yang biasa diterima dalam sekolah.

Daftar Pustaka

- [1] Ahmadi Abu. dan Supriyono Widodo. 1991. *Psikologi Belajar*. Jakarta: PT Rineka Cipta.
- [2] Ashar Arsyad. 2010. *Media Pembelajaran*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.
- [3] Buchori., Bambang Wijanarko., Indra Widiyanto, dkk. 2005. *Jenius Matematika 2*. Semarang: Aneka Ilmu.
- [4] Daryanto. 2013. *Inovasi Pembelajaran Efektif*. Bandung: Yrama Widya.
- [5] Departemen Pendidikan Nasional. 2011. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- [6] Hamzah Ali. dan Muhlis Rarini. 2014. *Perencanaan dan Strategi Pembelajaran Matematika*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.
- [7] Khairani Makmun. 2014. *Psikologi Belajar*. Yogyakarta: Aswaja Pressindo.
- [8] Muhibbin Syah. 2008. *Psikologi Belajar* (7th ed.). Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.
- [9] Nana Sujana. dan Ahmad Rivai. 1990. *Media Pengajaran*. Bandung: Sinar Baru.
- [10] Oemar Hamalik. 2001. *Proses Belajar Mengajar*. Bandung: Bumi aksara.
- [11] Poerwodarminto. 1991. *Kamus Umum Bahasa Indonesia*. Jakarta: Bina Ilmu.
- [12] Saifudin Azwar. 1996. *Pengantar Psikologi Intelegensi*. Jogyakarta: Pustaka Pelajar.
- [13] Segala Syaiful. 2009. *Konsep dan Makna Pembelajaran*. Bandung: Alfabeta.
- [14] Slameto. 1995. *Belajar dan Faktor-faktor yang Mempengaruhinya*. Jakarta: PT. Rineka Cipta.
- [15] Sukiman. 2012. *Pengembangan Media Pembelajaran*. Yogyakarta: pedagogia.
- [16] Sukino dan Wilson Simangunson. 2006. *Matematika SMP*. Jakarta: Erlangga
- [17] Sundayana Rostina. 2015. *Media dan Alat Peraga dalam Pembelajaran Matematika*. Bandung: Alfabeta.

- [18] Supranoto Kusaeri. 2012. *Pengukuran dan Penelitian Pendidikan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [19] Walpole Ronald. 1995. *Pengantar Statistika* (3rd ed.). Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- [20] Winkel, W. S. 1987. *Psikologi Pengajaran*. Jakarta: PT. Gramedia.
- [21] Winkel, W.S. 1986. *Bimbingan dan Konseling di Institusi Pendidikan*. Jakarta: Gramedia.
- [22] Yudhi Munandi. 2010. *Media Pembelajaran Sebuah Pendekatan Baru*. Jakarta: Gaung Persada.

Analisis Pelaksanaan Pembelajaran Matematika Materi Transformasi dengan Pendekatan Saintifik Kurikulum 2013 di Kelas VII SMP Negeri 2 Wedi Tahun Ajaran 2015/2016

Lusia Devi Astuti¹

Veronika Fitri Rianasari²

^{1,2}Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma

¹lusiadeviastuti@gmail.com

²veronikafitri@usd.ac.id

Abstrak

Kurikulum 2013 merupakan kurikulum berbasis kompetensi dengan memperkuat proses pembelajaran dan penilaian autentik untuk mencapai kompetensi sikap, kompetensi pengetahuan, dan kompetensi keterampilan secara terintegrasi. Apabila sekolah memutuskan untuk melaksanakan kurikulum 2013, atau menjadi sekolah percontohan dalam melaksanakan kurikulum 2013, pembelajaran haruslah menggunakan pendekatan saintifik sesuai dengan kurikulum 2013. Peneliti menemukan fakta di lapangan, bahwa ada beberapa sekolah yang menggunakan kurikulum 2013 namun tidak menggunakan pendekatan saintifik pada pembelajarannya. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui: (1) pelaksanaan pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 di kelas VII SMP Negeri 2 Wedi tahun ajaran 2015/2016 (2) hasil belajar siswa kelas VII SMP Negeri 2 Wedi dalam mempelajari materi transformasi dengan pendekatan saintifik kurikulum 2013 tahun ajaran 2015/2016. Penelitian ini adalah penelitian deskriptif dengan pendekatan kuantitatif dan kualitatif. Subjek penelitian adalah 1 orang guru kelas VII dan 35 siswa kelas VII A SMP Negeri 2 Wedi Klaten. Data dalam penelitian ini dikumpulkan melalui observasi, rekaman video, wawancara, dan tes tertulis. Hasil penelitian yang diperoleh adalah: (1) Guru telah mempersiapkan pembelajaran sesuai langkah-langkah pendekatan saintifik yaitu mengamati, menanya, mengumpulkan informasi, mengolah informasi, dan mengkomunikasikan. Namun, pelaksanaan pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik kurikulum 2013 masih kurang maksimal, terutama pada tahap menanya dan mengolah informasi/ mengasosiasi/ menalar. (2) Hasil belajar siswa menunjukkan kategori tinggi, yaitu dengan rata-rata 81. Namun, hasil belajar terbatas pada soal-soal rutin sehingga tidak dapat digunakan untuk melihat kemampuan berpikir kritis siswa.

Kata Kunci: *Analisis, Hasil Belajar, Kurikulum 2013, Pendekatan Saintifik, Transformasi.*

1. Pendahuluan

Pada tahun 2013, di Indonesia terjadi pergantian dari Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) ke Kurikulum 2013. Pendekatan saintifik merupakan pendekatan pembelajaran yang harus digunakan dalam penerapan Kurikulum 2013. Apabila sekolah memutuskan untuk melaksanakan kurikulum 2013, atau menjadi sekolah percontohan dalam melaksanakan kurikulum 2013, pembelajaran haruslah menggunakan pendekatan saintifik sesuai dengan kurikulum 2013. Peneliti menemukan fakta di lapangan, bahwa ada beberapa sekolah yang menggunakan kurikulum 2013 namun tidak menggunakan pendekatan saintifik pada

pembelajarannya. Oleh karena itu peneliti tertarik untuk melakukan penelitian ini. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui: (1) pelaksanaan pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 di kelas VII SMP Negeri 2 Wedi tahun ajaran 2015/2016 (2) hasil belajar siswa kelas VII SMP Negeri 2 Wedi dalam mempelajari materi transformasi dengan pendekatan saintifik kurikulum 2013 tahun ajaran 2015/2016.

2. Tinjauan Pustaka

Analisis menurut Rangkuti (2009) adalah kegiatan memahami seluruh informasi yang terdapat pada suatu kasus untuk mengetahui permasalahan apa yang sedang terjadi. Menurut Morocco (dalam Yunus Abidin, 2013), pada abad ke-21 minimalnya ada empat kompetensi belajar yang harus dikuasai yakni kemampuan pemahaman yang tinggi, kemampuan berpikir kritis, kemampuan berkolaborasi dan berkomunikasi. Trilling dan Fadel (dalam Yunus Abidin, 2013) menjelaskan bahwa keterampilan utama yang harus dimiliki dalam konteks abad ke-21 adalah keterampilan belajar dan berinovasi. Keterampilan ini berkenaan dengan kemampuan berpikir kreatif dan kemampuan memecahkan masalah, kemampuan berkomunikasi dan berkolaborasi, dan kemampuan untuk beraktivitas dan berinovasi. Oleh karena itu, proses pembelajaran hendaknya diorientasikan untuk membekali siswa dengan ketiga keterampilan tersebut, disambung dengan pengetahuan keilmuan tertentu. Berdasarkan kompetensi abad ke-21 yang telah dikemukakan beberapa ahli di atas, Kemdikbud melakukan sejumlah terobosan guna meningkatkan mutu pendidikan agar mampu menghasilkan lulusan yang siap bersaing secara global di masa yang akan datang. Salah satu terobosan awal tersebut adalah memberlakukan Kurikulum 2013. Pemberlakuan Kurikulum 2013 ditujukan untuk menjawab tantangan zaman terhadap pendidikan yakni untuk menghasilkan lulusan yang kompetitif, inovatif, kreatif, kolaboratif, serta berkarakter. Menurut Yunus Abidin (2014), pembelajaran dalam konteks Kurikulum 2013 diorientasikan untuk menghasilkan insan Indonesia yang produktif, kreatif, inovatif, dan afektif melalui penguatan sikap (tahu mengapa), keterampilan (tahu bagaimana), dan pengetahuan (tahu apa) yang terintegrasi. Dalam Kemdikbud (2013), pendekatan ilmiah (*scientific*) berarti konsep dasar yang menginspirasi atau melatarbelakangi perumusan metode mengajar dengan menerapkan karakteristik yang ilmiah. Menurut Hosnan (2014) pendekatan saintifik adalah proses pembelajaran yang dirancang sedemikian rupa agar peserta didik secara aktif mengkonstruksi konsep, hukum atau prinsip melalui tahapan-tahapan mengamati, merumuskan masalah, mengajukan atau merumuskan hipotesis, mengumpulkan data, menganalisis data, menarik kesimpulan dan mengimunikasikan konsep yang ditemukan. Berikut adalah langkah-langkah pembelajaran dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013:

2.1. Mengamati

Observasi adalah menggunakan panca indra untuk memperoleh informasi (Ridwan Abdullah Sani, 2014). Kegiatan belajar yang dapat dilakukan dalam tahapan mengamati menurut Kemdikbud (2014) adalah membaca, mendengar, menyimak, melihat dengan atau tanpa alat. Kompetensi yang dikembangkan dalam tahapan mengamati adalah melatih kesungguhan, ketelitian, dan mencari informasi

2.2. Menanya

Menurut Kemdikbud (2013), guru yang efektif mampu menginspirasi peserta didik untuk meningkatkan dan mengembangkan ranah sikap, keterampilan, dan

pengetahuannya. Pada saat guru bertanya, pada saat itu pula guru membimbing atau memandu peserta didik belajar dengan baik. Kegiatan belajar yang dapat dilaksanakan dalam rangka tahapan menanya adalah mengajukan pertanyaan tentang informasi yang tidak dipahami dari apa yang diamati atau pertanyaan untuk mendapatkan informasi tambahan tentang apa yang diamati (Kemdikbud, 2014). Kompetensi yang dikembangkan dalam proses menanya adalah kreativitas, rasa ingin tahu, kemampuan merumuskan pertanyaan untuk membentuk pikiran kritis yang diperlukan untuk hidup cerdas dan belajar sepanjang hayat (Kemdikbud, 2014)

2.3. Mengumpulkan informasi

Menurut Daryanto (2014), untuk memperoleh hasil belajar yang nyata, peserta didik harus mencoba atau melakukan percobaan, terutama untuk materi atau substansi yang sesuai. Aplikasi metode eksperimen atau mencoba dimaksudkan untuk mengembangkan berbagai ranah tujuan belajar, yaitu sikap, keterampilan, dan pengetahuan. Tahap mencoba menjadi wadah bagi siswa untuk membiasakan diri berkreasi dan berinovasi menerapkan dan memperdalam pengetahuan atau keterampilan yang telah dipelajari bersama guru.

2.4. Mengasosiasi/ menalar/ mengolah informasi

Dalam Kemdikbud (2013), istilah menalar dalam kerangka proses pembelajaran dengan pendekatan ilmiah yang dianut dalam Kurikulum 2013 untuk menggambarkan bahwa guru dan peserta didik merupakan pelaku aktif. Titik tekannya tentu dalam banyak hal dan situasi peserta didik harus lebih aktif daripada guru. Penalaran adalah proses berfikir yang logis dan sistematis atas fakta-kata empiris yang dapat diobservasi untuk memperoleh simpulan berupa pengetahuan. Penalaran yang dimaksud merupakan penalaran ilmiah, meski penalaran nonilmiah tidak selalu tidak bermanfaat. Kompetensi yang dikembangkan dalam proses menalar menurut Kemdikbud (2014) adalah mengembangkan sikap jujur, teliti, disiplin, taat aturan, kerja keras, kemampuan menerapkan prosedur dan kemampuan berpikir induktif dan deduktif dalam menyimpulkan

2.5. Mengkomunikasikan

Kegiatan mengkomunikasikan dalam kegiatan pembelajaran sebagaimana disampaikan dalam Permendikbud Nomor 81a Tahun 2013, adalah menyampaikan hasil pengamatan, kesimpulan berdasarkan hasil analisis secara lisan, tertulis, atau media lainnya. Adapun kompetensi yang diharapkan dalam kegiatan ini adalah mengembangkan sikap jujur, teliti, toleransi, kemampuan berpikir sistematis, mengungkapkan pendapat dengan singkat dan jelas, dan mengembangkan kemampuan berbahasa yang baik dan benar (Kemdikbud, 2014).

3. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif dengan pendekatan kualitatif dan kuantitatif. Subjek penelitian dalam penelitian ini adalah guru matematika di kelas VII SMP Negeri 2 Wedi dan siswa kelas VII SMP Negeri 2 Wedi. Obyek penelitian dalam penelitian ini adalah pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 di kelas VII SMP Negeri 2 Wedi. Pelaksanaan penelitian yaitu pada Bulan Maret sampai dengan April 2016. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data pelaksanaan pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 berupa RPP yang telah dibuat oleh guru, transkrip video pembelajaran, hasil observasi pelaksanaan pembelajaran, hasil observasi aktivitas siswa, hasil keterlaksanaan RPP

dalam pembelajaran, dan data hasil tes belajar siswa. Metode pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah observasi/ pengamatan, wawancara, dokumentasi, tes tertulis.

4. Hasil dan Pembahasan

Pengambilan data penelitian berlangsung pada tanggal 23 Maret 2016, 28 Maret 2016, 30 Maret 2016, 11 April 2016, dan 13 April 2016. Wawancara dengan guru dan siswa dilaksanakan pada hari Senin, 18 April 2016. Presentase kesesuaian RPP yang dibuat oleh guru dengan pembelajaran matematika menggunakan pendekatan saintifik adalah sebesar 91%. Presentase kesesuaian pelaksanaan pembelajaran matematika materi transformasi dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 di SMP Negeri 2 Wedi adalah sebesar 60,58%. Presentase ketercapaian aktivitas siswa dalam pembelajaran dengan menggunakan pendekatan saintifik, baik dari tahap-tahap pembelajaran dengan pendekatan saintifik maupun keterlibatan siswa secara umum adalah sebesar 77,6%. Presentase keterlaksanaan RPP selama 4 kali pertemuan adalah sebesar 72,7%. Kegiatan pembelajaran dalam pembelajaran dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 terbagi menjadi 3 bagian, sebagai berikut:

4.1. Kegiatan Pendahuluan

Dalam kegiatan pendahuluan, guru memberikan salam dan menanyakan tentang semangat siswa di awal pembelajaran. Guru juga memberikan apersepsi agar siswa dapat memiliki gambaran tentang materi yang akan dipelajari. Kegiatan pendahuluan berhasil membuat siswa ke dalam suasana siap belajar, karena tercipta suasana kondusif di kelas dan siswa tenang di awal pembelajaran. Namun, kegiatan pendahuluan perlu ditingkatkan, yaitu dengan memotivasi siswa di awal pembelajaran dan membahas PR yang telah diberikan pada pertemuan sebelumnya.

4.2. Kegiatan Inti

Kegiatan inti dalam pembelajaran menggunakan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 terbagi menjadi 5 langkah, sebagai berikut:

4.2.1 Mengamati

Dalam kegiatan mengamati selama 4 pertemuan, guru telah memfasilitasi siswa untuk mengamati dengan cara mengamati buku paket pelajaran dan LKS yang dibuat oleh guru. Guru memastikan siswa mengamati sesuai dengan materi pembelajaran dengan cara melakukan tanya jawab kepada siswa. Proses mengamati yang dilakukan selama pembelajaran masih terbatas di ruang kelas, kurang cermat karena waktu pengamatan yang singkat dan tidak adanya rambu-rambu yang jelas dalam proses pengamatan, sehingga perlu ditingkatkan. Aktivitas mengamati dapat ditingkatkan dengan memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengamati lebih luas lagi, misalnya mengamati kejadian di lingkungan sekitar sekolah dan tidak terbatas di ruang kelas.

4.2.2. Menanya

Selama 4 kali pertemuan, tidak ada pertanyaan yang diajukan siswa dalam pembelajaran. Guru telah memfasilitasi siswa untuk bertanya dengan cara menawarkan kepada siswa untuk mengajukan pertanyaan. Proses pengamatan yang singkat membuat siswa kurang mendalam dan belum menemukan sesuatu untuk ingin diketahui. Guru memancing siswa untuk bertanya dengan mengajukan pertanyaan

kepada siswa, namun siswa tetap tidak mengajukan pertanyaan, sehingga pembelajaran dinominasi pertanyaan dari guru. Aktivitas menanya masih perlu ditingkatkan dengan inkuiri suchman. Langkah dalam inkuiri suchman adalah guru membagi siswa ke dalam kelompok-kelompok kecil. Kemudian guru menampilkan suatu fenomena umum dan setiap kelompok diminta untuk membuat 1 pertanyaan dengan jawaban ya/tidak. Tugas guru hanyalah menjawab ya/tidak. Kemudian, guru menampilkan fenomena kedua. Fenomena kedua ini lebih spesifik dan membuat siswa semakin terarah ke materi yang sedang dibahas. Kemudian setiap kelompok membuat satu pertanyaan secara bergantian. Pertanyaan yang muncul ini bukanlah pertanyaan ya/tidak, namun pertanyaan menantang yang akan dicari tahu jawabannya dalam langkah mengumpulkan informasi.

4.2.3. Mengumpulkan informasi/ Mencoba

Guru memfasilitasi siswa mengumpulkan informasi dengan cara membaca buku paket dan selama proses Tanya jawab. Siswa mencatat hal-hal penting ke dalam catatan-catatan kecil. Guru memastikan siswa dapat mengumpulkan informasi ketika siswa mampu menjawab pertanyaan-pertanyaan yang diajukan guru setelah membaca buku. Proses pengumpulan informasi masih perlu ditingkatkan dengan cara memfasilitasi siswa untuk mengumpulkan informasi di luar ruang kelas, seperti di lingkungan sekolah, perpustakaan, dan laboratorium komputer, serta buku-buku yang digunakan tidak hanya terbatas pada buku-buku pelajaran yang biasa digunakan dalam proses pembelajaran.

4.2.4. Mengasosiasi/ Menalar/ Mengolah Informasi

Guru memfasilitasi siswa untuk menalar/ mengolah informasi dengan cara penemuan terbimbing. Guru mengajak siswa untuk menemukan suatu pola untuk mendapatkan suatu rumus pencerminan dan translasi. Dalam pembelajaran, siswa belum mampu untuk menalar secara mandiri, sehingga bantuan guru masih sangat diperlukan. Guru membantu siswa menalar dengan cara memberikan pancingan-pancingan pertanyaan. Apabila siswa tidak dapat menjawab pertanyaan yang diajukan, maka guru cenderung menjelaskan kepada siswa sehingga guru terkesan mendominasi pembelajaran. Aktivitas menalar siswa dapat ditingkatkan agar lebih mandiri dengan cara membagi siswa ke dalam kelompok-kelompok kecil. Setiap kelompok diberikan LKS dengan sub materi yang berbeda. Tugas guru dalam pembelajaran hanyalah sebagai fasilitator, dan siswa secara mandiri mengerjakan LKS yang telah mengarahkan siswa untuk bernalar secara mandiri.

4.2.5. Mengkomunikasikan

Guru telah memfasilitasi siswa untuk mengamati dengan baik. Guru memfasilitasi siswa untuk berkomunikasi secara tertulis dengan cara menyampaikan jawaban hasil diskusi kelompok ke papan tulis, menuliskan jawaban tes ke lembar jawaban, dan menjawab LKS yang telah diberikan oleh guru. Guru memfasilitasi siswa untuk berkomunikasi secara lisan dalam proses Tanya jawab secara klasikal dan diskusi kelompok. Aktivitas komunikasi secara lisan perlu ditingkatkan, karena hal ini akan membantu siswa dalam mengungkapkan gagasan dalam menanya dan mengasosiasi. Komunikasi siswa secara lisan dapat ditingkatkan dengan cara guru meminta siswa untuk menjelaskan strategi dalam menjawab soal latihan, sehingga siswa tidak hanya menuliskan jawaban di papan tulis, namun juga mendapatkan kesempatan untuk mengungkapkan strategi penyelesaian masalah, terkait dengan kompetensi berpikir kritis dan kreatif.

4.3. Kegiatan Penutup

Guru telah mampu menutup pembelajaran dengan baik. Namun, pengelolaan waktu pembelajaran guru masih perlu ditingkatkan, karena ada beberapa kegiatan yang tidak sesuai dengan alokasi waktu sehingga tidak dapat dilaksanakan. Dalam menutup pembelajaran, guru telah menginformasikan agenda pada pertemuan yang akan datang, memberikan tugas atau PR untuk pertemuan selanjutnya, dan memberikan tes evaluasi di akhir pembelajaran. Dalam kegiatan penutup, guru perlu mengajak siswa untuk merangkum pembelajaran pada hari tersebut. Hal ini akan membuat siswa dapat mengambil intisari pembelajaran sekaligus sebagai sarana guru dalam memastikan siswa dapat mengikuti pembelajaran. Dalam kegiatan penutup, guru juga perlu melakukan refleksi pelaksanaan pembelajaran bersama dengan siswa. Hal ini dapat dijadikan bahan evaluasi bagi guru agar menemukan pembelajaran yang tepat untuk siswa dan mengatasi kesulitan-kesulitan yang dialami siswa dalam proses pembelajaran yang telah berlangsung.

4.4. Hasil Tes Belajar Siswa

Hasil tes belajar siswa dilihat dari indikato-indikator berikut: Menentukan kedudukan suatu titik/ bangun datar pada koordinat kartesius, menggambar bangun datar pada bidang koordinat, menentukan hasil pencerminan, menentukan hasil translasi dan memiliki keterampilan dalam menyelesaikan soal pengembangan materi translasi. Hasil belajar siswa setelah mengikuti pembelajaran menggunakan pendekatan saintifik memperoleh rata-rata nilai 81. Presentase hasil belajar siswa dengan predikat amat baik sebesar 57,6 %, presentase hasil belajar siswa dengan predikat baik sebesar 18,2 %, presentase hasil belajar siswa dengan predikat cukup sebesar 15,1 %, dan presentase hasil belajar siswa dengan predikat kurang sebesar 9,1 %. Sebagian besar siswa belum menjawab dengan sistematis, dan masih ada siswa yang kurang teliti. Hasil belajar siswa yang tinggi ini belum pasti menggambarkan kemampuan berpikir kritis siswa seperti yang ada dalam pendekatan saintifik Kurikulum 2013. Hal ini disebabkan karena soal tes masih terbatas soal rutin yang bukan merupakan soal kontekstual. Adapun soal-soal test yang diberikan adalah sebagai berikut:

1. Diketahui titik A (4,3), B(-2,3), C(-2,-1), D(4,-1).
 - a. Gambarkan titik-titik tersebut ke dalam bidang koordinat!
 - b. Hubungkan titik A, B, C,D. Bangun datar apakah yang terbentuk?
2. Diketahui titik A (-3,-2). Tentukan bayangan dari titik A apabila:
 - a. Direfleksikan terhadap sumbu x!
 - b. Direfleksikan terhadap sumbu y!
3. Diketahui titik B (3,-5). Tentukan bayangan dari titik B apabila:
 - a. Direfleksikan terhadap garis $y = x$!
 - b. Direfleksikan terhadap garis $y = -x$!
4. Diketahui titik P (5,2). Tentukan bayangan dari titik P apabila:
 - a. Direfleksikan terhadap garis $x = 5$!
 - b. Direfleksikan terhadap garis $y = -3$!
5. Titik A (4,-1) ditranslasikan sejauh $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ kemudian ditranslasikan sejauh $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Tentukan bayangan dari titik A!
6. Sebuah segitiga ABC dengan titik A (3,5), B (2,-1), C (4,7) ditranslasikan sejauh $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

7. Titik A (-2,5) ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan A' (4,6).
Tentukan nilai a dan b!
8. Titik A (x,y) ditranslasikan sejauh $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan A' (8,3).
Tentukan nilai x - 2y!

4.4.1. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 1

Siswa salah dalam menentukan absis dan ordinat suatu titik sehingga salah dalam menggambarkannya pada bidang kartesius dan Siswa salah dalam menyebutkan bangun datar yang terbentuk (jajar genjang, persegi)

4.4.2. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 2

Siswa menentukan hasil pencerminan dengan cara langsung menggunakan rumus pencerminan terhadap sumbu x dan terhadap sumbu y dan siswa menentukan hasil pencerminan dengan cara menggambarkan titik-titik pada bidang kartesius, kemudian mencerminkannya terhadap sumbu x dan terhadap sumbu y

4.4.3. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 3

Siswa menentukan hasil pencerminan dengan cara langsung menggunakan rumus pencerminan terhadap garis $y = x$ dan garis $y = -x$ dan siswa menentukan hasil pencerminan dengan cara menggambar pada bidang kartesius

4.4.4. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 4

7 siswa yang menjawab dengan cara menuliskan langkah-langkah yang ditempuh dalam mencari bayangan hasil pencerminan dan dari berbagai jawaban siswa yang muncul, tidak ada siswa yang menarik kesimpulan jawaban

4.4.5. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 5

Siswa menentukan titik akhir dengan cara melakukan dua kali translasi, Siswa menjumlahkan vektor translasi terlebih dahulu, lalu menentukan titik akhir, dan Tidak ada siswa yang menarik kesimpulan jawaban

4.4.6. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 6

Semua siswa menjawab dengan cara menggambarkan titik awal terlebih dahulu pada bidang koordinat, Siswa menggambarkan pada bidang koordinat untuk menentukan titik akhir, Siswa langsung menambahkan setiap titik asal dengan vector translasi, dan ada 3 siswa yang menarik kesimpulan jawaban dengan tepat

4.4.7. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 7

Siswa menggunakan rumus awal translasi yaitu, $x' = x + a$ dan $y' = y + b$, kemudian siswa melakukan manipulasi aljabar untuk memperoleh nilai a dan b, Siswa langsung melakukan perhitungan dengan cara mengurangi titik akhir dengan titik awal dan Dari jawaban-jawaban siswa yang diperoleh, ada 8 siswa yang menarik kesimpulan jawaban dengan tepat

4.4.8. Strategi jawaban siswa untuk soal nomor 8

Semua siswa menjawab dengan strategi yang sama, yaitu mengurangi titik akhir dengan vector translasi, sehingga diperoleh titik awal dan 9 siswa yang menarik kesimpulan jawaban dengan tepat.

5. Simpulan dan Saran

Proses pembelajaran yang dilakukan selama empat kali pertemuan berjalan dengan lancar meskipun ada beberapa kegiatan yang tidak terlaksana karena

keterbatasan waktu dan respon siswa yang kurang mendukung. Hasil presentase keterlaksanaan pembelajaran yang dihitung sesuai Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP) yaitu sebesar 72,7 %. Pembelajaran diawali dengan salam dan apersepsi materi untuk mempersiapkan siswa dalam awal pembelajaran. Secara keseluruhan, guru telah menerapkan pembelajaran saintifik dengan lima langkah, yaitu mengamati, menanya, mengumpulkan informasi, mengolah informasi/ menalar/ mengasosiasi, dan mengkomunikasikan. Secara keseluruhan, kegiatan menanya dan mengolah informasi masih kurang maksimal dalam empat kali pembelajaran yang dilakukan. Aktivitas tersebut kurang tampak dalam kegiatan pembelajaran. Pembelajaran diakhiri dengan pemberian tes evaluasi pembelajaran, pembahasan, dan penyampaian agenda pada pertemuan selanjutnya. Dalam perencanaan pembelajaran, guru telah merencanakan pembelajaran dengan menggunakan pendekatan saintifik dengan baik dan lengkap dalam memunculkan langkah-langkah pendekatan saintifik, yaitu mengamati, menanya, mengumpulkan informasi, mengolah informasi, dan mengkomunikasikan. Namun, dalam pelaksanaan, guru kurang dapat memberikan pancingan kepada siswa agar melaksanakan langkah-langkah saintifik yang dilakukan. Hal ini menyebabkan guru lebih dominan dalam melaksanakan langkah-langkah pendekatan saintifik. Guru terlihat siap dalam melaksanakan pembelajaran, sedangkan siswa masih belum siap sepenuhnya dalam mengikuti pembelajaran dengan pendekatan saintifik.

Hasil belajar siswa setelah mengikuti pembelajaran menggunakan pendekatan saintifik memperoleh rata-rata nilai 81. Presentase hasil belajar siswa dengan predikat amat baik sebesar 57,6 %, presentase hasil belajar siswa dengan predikat baik sebesar 18,2 %, presentase hasil belajar siswa dengan predikat cukup sebesar 15,1 %, dan presentase hasil belajar siswa dengan predikat kurang sebesar 9,1 %. Sebagian besar siswa belum menjawab dengan sistematis, dan masih ada siswa yang kurang teliti. Hasil belajar siswa yang tinggi ini belum pasti menggambarkan kemampuan berpikir kritis siswa seperti yang ada dalam pendekatan saintifik Kurikulum 2013. Hal ini disebabkan karena soal tes masih terbatas soal rutin yang bukan merupakan soal kontekstual. Saran yang dapat peneliti sumbangkan sehubungan dengan penelitian analisis pelaksanaan pembelajaran matematika materi transformasi dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013 di kelas VII SMP Negeri 2 Wedi tahun ajaran 2015/2016 adalah sebagai berikut: (1) Calon guru dapat menambah pengetahuan dan wawasan dalam penerapan pendekatan saintifik dalam pembelajaran matematika, sehingga pembelajaran akan lebih efektif dan efisien bagi guru dan siswa (2) Guru diharapkan dapat lebih kreatif lagi dalam memfasilitasi dan melibatkan siswa dalam langkah-langkah pembelajaran dengan pendekatan saintifik, sehingga pelaksanaan pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik sungguh terimplementasikan di sekolah dengan baik (3) Guru diharapkan dapat melakukan evaluasi terhadap pelaksanaan pembelajaran di kelas agar dapat mengetahui penghambat pelaksanaan pembelajaran saintifik Kurikulum 2013 di kelas dan dapat menciptakan suatu penyelesaian dari kendala yang ada (4) penelitian lanjutan dengan tema pengaruh pembelajaran matematika pendekatan saintifik Kurikulum 2013 terhadap prestasi atau hasil belajar siswa (5) penelitian lanjutan dengan menggunakan soal-soal kontekstual untuk mengetahui kemampuan berpikir kritis siswa dalam pembelajaran matematika pendekatan saintifik Kurikulum 2013 (6) penelitian lanjutan tentang analisis faktor-faktor penghambat pelaksanaan pembelajaran matematika dengan pendekatan saintifik Kurikulum 2013, disertai dengan cara mengatasinya.

Daftar Pustaka

- [1] Daryanto. 2014. *Pendekatan Pembelajaran Sainifik Kurikulum 2013*. Yogyakarta: Gava Media.
- [2] Hosnan. 2014. *Pendekatan Sainifik dan Kontekstual Dalam Pembelajaran Abad 21*. Bogor: Ghalia Indonesia
- [3] Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. 2013. *Materi Pelatihan Guru: Implementasi Kurikulum 2013 (SMP/MTs.: Matematika)*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.
- [4] Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. 2014. *Materi Pelatihan Guru: Implementasi Kurikulum 2013 (SMP/MTs.: Matematika)*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.
- [5] Rangkuti, Freddy. 2009. *Strategi Promosi yang Kreatif dan Analisis Kasus Integrated Marketing Communication*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
- [6] Ridwan Abdullah Sani. 2014. *Pembelajaran Sainifik untuk Implementasi Kurikulum 2013*. Jakarta: Bumi Aksara.
- [7] Yunus Abidin. 2014. *Desain Sistem Pembelajaran Dalam Konteks Kurikulum 2013*. Bandung: Refika Aditama.

Analisis Representasi Matematis Siswa dalam memecahkan masalah matematika kontekstual

Catharina Mara Apriani¹⁾, M. Andy Rudhito²⁾

¹⁾Mahasiswa S1 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma

¹⁾S2 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma

Kampus III USD Paingan Maguwoharjo, Depok, Sleman

¹⁾Catharinamara@gmail.com

²⁾arudhito@gmail.com

Abstrak

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk (1) mengetahui macam-macam representasi matematis siswa yang digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika kontekstual dan (2) mengetahui faktor-faktor mempengaruhi siswa dalam menentukan representasi matematis yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontekstual. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Subjek penelitian adalah 4 siswa SMP kelas VIII semester genap tahun ajaran 2015/2016. Subyek penelitian berasal dari Kabupaten Bantul dan 3 dari 4 subyek penelitian bersekolah di luar Kabupaten Bantul. Pengambilan data dengan cara memberikan soal tes tentang masalah matematika kontekstual kemudian mewawancarai siswa tentang proses pemecahan masalah dan faktor-faktor siswa dalam menentukan representasi matematis yang digunakan. Bentuk data dalam penelitian adalah data hasil tes dan wawancara. Berdasarkan penelitian ini macam-macam representasi matematis yang digunakan siswa dalam memecahkan masalah adalah representasi visual, bentuk aritmatika, bentuk aljabar, dan teks tertulis. Dalam memecahkan masalah matematika bisa menggunakan lebih dari satu representasi. Adapun faktor-faktor siswa dalam menentukan representasi matematis yang digunakan, yaitu: memudahkan siswa membuat simbol, memudahkan siswa menemukan penyelesaian, mempermudah siswa merepresentasikan gambaran yang dibayangkan, siswa terbiasa mengerjakan soal matematika dengan langsung mengoperasikan bilangan yang diketahui, bentuk soal, mempermudah menemukan penyelesaian lainnya, dan siswa kesulitan membuat kalimat matematika (persamaan).

Kata kunci: masalah kontekstual, pemecahan masalah, representasi matematis.

1. Pendahuluan

Ketika siswa mengerjakan soal matematika siswa cenderung berpedoman dengan langkah-langkah yang diajarkan guru. Selain itu siswa juga hanya menghafal bentuk soal dan langkah-langkah penyelesaiannya. Kecenderungan ini mengakibatkan siswa kurang mengembangkan kemampuan matematikanya. Sehingga ketika siswa dihadapkan pada masalah matematika kontekstual, siswa belum tentu bisa menggunakan ilmu matematikanya untuk memecahkannya sendiri. Pada pemecahan masalah matematika memerlukan representasi matematis sebagai sarana mengkomunikasikan ide pemecahan mereka. Menurut Hudiono (2010), keterbatasan pengetahuan guru dan kebiasaan belajar siswa di kelas dengan cara konvensional belum memungkinkan untuk menumbuhkan atau mengembangkan daya representasi siswa secara optimal.

Representasi berperan dalam upaya mengembangkan dan mengoptimalkan kemampuan matematika siswa. Menurut NCTM (2000:7), dicantumkan bahwa terdapat lima standar yang mendeskripsikan keterkaitan pemahaman matematis dan kompetensi matematika yang hendaknya siswa ketahui dan dapat dilakukan. Pemahaman, pengetahuan dan ketrampilan yang perlu dimiliki siswa tercakup dalam standar proses yaitu: kemampuan pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, koneksi, dan representasi. Hal ini menunjukkan bahwa representasi merupakan salah satu kemampuan yang harus dimiliki dan dikembangkan oleh siswa.

Representasi yang muncul dari siswa merupakan ungkapan-ungkapan dari gagasan atau ide-ide matematika yang disampaikan siswa dalam upayanya untuk mencari suatu solusi dari masalah yang sedang dihadapinya (NCTM, 2000:206). Pemikiran gagasan atau ide-ide yang berbeda-beda dari setiap siswa akan memunculkan bermacam-macam representasi, apalagi jika siswa diberikan kebebasan dalam mengungkapkan ide-idenya. Pasti ada berbagai alasan siswa untuk menentukan representasi yang akan digunakan. Dari ide tersebut yang diungkapkan dalam representasi matematis, dapat diketahui kemampuan pemahaman matematika siswa. Selain itu, dari berbagai macam representasi matematis yang digunakan siswa dapat diketahui juga bagaimana siswa menggunakan pengetahuan matematikanya untuk menghadapi permasalahan matematika.

Representasi sangat berguna dalam membantu siswa menyelesaikan sebuah masalah dengan lebih mudah. Representasi juga berguna sebagai sarana mengkomunikasikan gagasan atau ide matematik siswa kepada siswa lain maupun kepada guru (Sabirin, 2014). Siswa perlu untuk menggambarkan data, informasi, atau ide-ide dalam berbagai cara. Keberhasilan mereka memecahkan masalah tingkat yang lebih tinggi dalam semua bidang matematika tergantung pada kemampuan mereka untuk mahir mengekspresikan diri dalam format yang berbeda, dan juga dalam bersusah payah menghadapi beberapa representasi yang berbeda dari masalah yang sama (Santulli, 2009).

Berdasarkan latar belakang tersebut penulis tertarik untuk melakukan analisis terhadap macam-macam representasi matematis siswa dalam memecahkan masalah matematika kontekstual. Selain itu, peneliti juga ingin mengetahui faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi siswa dalam menentukan representasi yang digunakan.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Masalah Matematika Kontekstual

Menurut Krulik dan Rudnick (1996:3), masalah adalah situasi atau keadaan yang dihadapkan kepada individu atau kelompok individu, yang membutuhkan pemecahan, di mana individu belum melihat atau belum mengerti secara jelas untuk memperoleh solusi. Dalam KBBI (Kamus Besar Bahasa Indonesia), masalah adalah sesuatu yang harus diselesaikan. Pembelajaran Kontekstual merupakan suatu proses pendidikan yang holistik dan bertujuan memotivasi siswa untuk memahami makna materi pelajaran yang dipelajarinya dengan mengkaitkan materi tersebut dengan konteks kehidupan mereka sehari-hari (konteks pribadi, sosial, dan kultural) sehingga siswa memiliki pengetahuan/keterampilan yang secara fleksibel dapat diterapkan (ditransfer) dari satu permasalahan /konteks ke permasalahan/ konteks lainnya. Kontekstual berarti mengaitkan/menghubungkan permasalahan dengan kehidupan sehari-hari siswa.

Dari pendapat ahli tersebut, masalah matematika kontekstual merupakan situasi atau keadaan yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari yang dihadapkan pada individu atau lebih yang harus diselesaikan dan memerlukan ilmu matematika untuk menyelesaikannya.

2.2. Pemecahan Masalah

Menurut Krulik dan Rudnick (1996:3), pemecahan masalah adalah sarana seorang individu yang menggunakan pengetahuan yang diperoleh sebelumnya, kemampuan, dan pemahaman untuk menyelesaikan masalah. Menurut Santrock (2007:368), pemecahan masalah adalah mencari cara yang tepat untuk mencapai suatu tujuan. Pemecahan masalah oleh Evans (dalam Suharnan, 2005: 289) didefinisikan sebagai suatu aktivitas yang berhubungan dengan pemilihan jalan keluar atau cara yang cocok bagi tindakan dan perubahan kondisi sekarang (*present state*) menuju kepada situasi yang diharapkan (*future state* atau *desired goal*).

Menurut Ling dan Catling (2012:176), sebelum mencoba menyelesaikan masalah, perlu diciptakan representasi dari masalah tersebut, proses ini disebut sebagai “representasi internal”. Hal ini biasa dalam bentuk gambar, simbol, atau diagram. Setelah representasi internal diciptakan, ada sejumlah strategi untuk benar-benar menyelesaikan masalah.

Menurut beberapa ahli dapat disimpulkan bahwa pemecahan masalah adalah mencari solusi terhadap suatu masalah dengan menggunakan kemampuan, pemahaman, dan pengetahuan yang diperoleh sebelumnya,

2.3. Representasi Matematis

Representasi adalah model atau bentuk pengganti dari suatu situasi masalah yang digunakan untuk menemukan solusi. Sebagai contoh, suatu masalah dapat direpresentasikan dengan obyek, gambar, kata-kata, atau simbol matematika (Jones dan Knuth dalam Sabirin, 2014). Menurut NCTM (2000:280), representasi merupakan sumber belajar matematika. Siswa dapat mengembangkan dan memperdalam pemahaman mereka tentang konsep-konsep matematika, membandingkan, dan

menggunakan berbagai representasi. Representasi seperti benda-benda fisik, gambar, tabel, grafik, dan simbol-simbol juga membantu siswa berkomunikasi pemikiran mereka.

Representasi berhubungan dengan proses pemecahan masalah, representasi memberikan semacam model kepada siswa. Siswa membangun representasi dalam bentuk yang dapat membantu mereka melihat pola dan melakukan perhitungan (Schultz dan Waters, 2000). Francis Fennell dan Tom Rowan (2001), mengungkapkan bahwa representasi matematis sangat penting dalam proses pengajaran dan pembelajaran matematika. Hal serupa juga diungkapkan oleh Jack Bannet dan James F. Strickland Jr (1990).

Lesh, Post dan Behr (dalam Hwang, et. al., 2007) membagi representasi yang digunakan dalam pendidikan matematika dalam lima jenis, meliputi representasi objek dunia nyata, representasi konkret, representasi simbol aritmatika, representasi bahasa lisan atau verbal dan representasi gambar atau grafik. Di antara ke lima representasi tersebut, tiga yang terakhir lebih abstrak dan merupakan tingkat representasi yang lebih tinggi dalam memecahkan masalah matematika.

Beberapa cara dapat digunakan seseorang untuk merepresentasikan suatu masalah, misalnya simbol, metrik, grafik, atau gambar (Suharnan: 295). Representasi dapat digolongkan menjadi (1) representasi visual (gambar, diagram grafik, atau tabel), (2) representasi simbolik (pernyataan matematik/notasi matematik, numerik/simbol aljabar) dan (3) representasi verbal (teks tertulis/kata-kata). Penggunaan semua jenis representasi tersebut dapat dibuat secara lengkap dan terpadu dalam pengujian suatu masalah yang sama atau dengan kata lain representasi matematik dapat dibuat secara beragam (*multiple representasi*) (Kartini, 2009).

Mudzakir (dalam Andri Suryana, 2012) mengelompokkan representasi matematis ke dalam tiga ragam representasi yang utama, yaitu 1) representasi visual berupa diagram, grafik, atau tabel, dan gambar; 2) Persamaan atau ekspresi matematika; dan 3) kata-kata atau teks tertulis. Adapun indikator adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Indikator Kemampuan Representasi Matematis

No	Representasi	Bentuk-Bentuk Operasional
1.	Representasi Visual. Diagram tabel, atau grafik	1. Menyajikan kembali data atau informasi dari suatu representasi ke representasi diagram, grafik, atau tabel 2. Menggunakan representasi visual untuk menyelesaikan masalah
	Gambar	1. Membuat gambar pola-pola geometri 2. Membuat gambar untuk memperjelas masalah dan memfasilitasi penyelesaiannya
2.	Persamaan atau ekspresi matematis	1. Membuat persamaan atau model matematika dari representasi lain yang diberikan 2. Membuat konjektur dari suatu pola bilangan 3. Menyelesaikan masalah dengan melibatkan ekspresi matematis
3.	Kata-kata atau teks tertulis	1. Membuat situasi masalah berdasarkan data atau representasi yang diberikan 2. Menuliskan interpretasi dari suatu representasi 3. Menuliskan langkah-langkah penyelesaian masalah

		matematika dengan kata-kata 4. Menyusun cerita yang sesuai dengan suatu representasi yang disajikan 5. Menjawab soal dengan menggunakan kata-kata atau teks tertulis
--	--	--

Dari beberapa pendapat ahli dapat disimpulkan bahwa representasi matematis siswa adalah penyajian ide matematis yang ditampilkan siswa untuk menemukan solusi dari masalah yang dihadapinya.

3. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang penulis gunakan adalah penelitian kualitatif. Penelitian ini dilakukan dengan metode penelitian deskriptif kualitatif.

3.1. Rancangan Penelitian

Penulis membuat janji untuk melakukan pertemuan dengan subyek penelitian. Pada pertemuan tersebut, penulis memberikan soal tes tentang masalah matematika kontekstual kepada subyek penelitian untuk dikerjakan. Subyek penelitian diberikan kebebasan cara untuk menyelesaikannya. Setelah selesai mengerjakan, penulis mewawancarai subyek penelitian. Subyek penelitian diberikan kesempatan untuk mengungkapkan pendapatnya tentang permasalahan matematika tersebut dan menjelaskan hasil pekerjaannya. Wawancara ini berguna untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi siswa dalam menentukan representasi matematis yang digunakan.

3.2. Subyek Penelitian

Subjek penelitian adalah 4 siswa SMP kelas VIII semester genap tahun ajaran 2015/2016. Subyek penelitian berasal dari Kabupaten Bantul tetapi 3 dari 4 subyek penelitian bersekolah di luar Kabupaten Bantul.

3.3. Metode Pengumpulan data

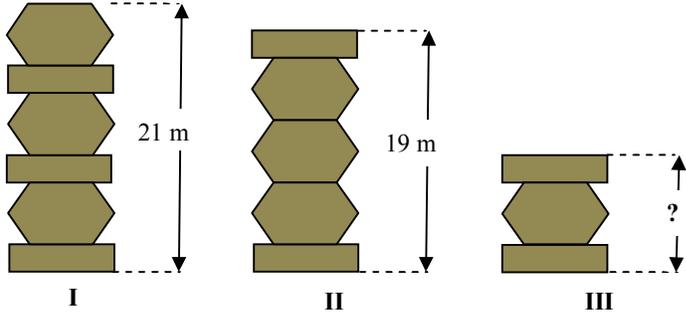
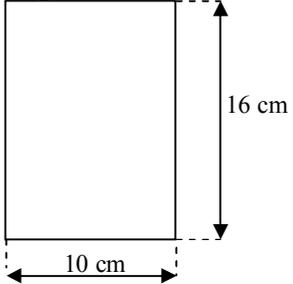
Data yang akan diteliti berupa hasil pekerjaan siswa dan tanggapan siswa terhadap soal yang diberikan. Maka metode yang digunakan peneliti adalah pemberian soal tes tentang masalah matematika kontekstual dan wawancara.

3.4. Instrumen Penelitian

Instrumen penelitian yang digunakan untuk penelitian adalah persoalan matematika berikut.

Tabel 2. Instrumen Tes

No.	Soal
1	Di bawah ini adalah 3 <i>tower</i> yang memiliki tinggi berbeda dan tersusun dari dua bentuk yaitu bentuk segi enam dan persegi panjang.

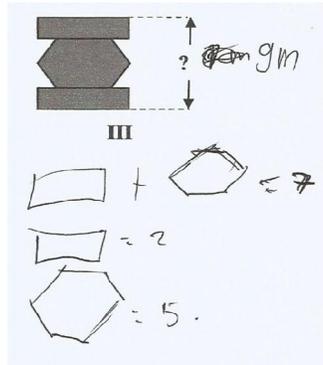
	 <p style="text-align: center;">I II III</p> <p style="text-align: center;">Berapakah tinggi tower ketiga? (Soal PISA 2012)</p>
2.	<p>Budi ingin membuat sebuah akuarium baru yang volumenya delapan kali dari akuarium lamanya. Akuarium lama Budi memiliki panjang rusuk 0,3 m. Berapa ukuran akuarium baru yang dapat dibuat Budi?</p>
3.	<p>Rita memiliki sebuah foto berbentuk persegi panjang berukuran 10 x 16 cm. Rita ingin membuat bingkai untuk foto tersebut dari potongan kertas berwarna berbentuk persegi. Rita membuat dua bingkai foto dengan ukuran potongan kertas yang berbeda. Bingkai pertama dengan ukuran potongan kertas 1 cm x 1 cm dan bingkai kedua dengan ukuran 2 cm x 2 cm.</p> <ol style="list-style-type: none"> Berapa banyak potongan kertas yang akan dibutuhkan untuk bingkai pertama? Berapa banyak potongan kertas yang akan dibutuhkan untuk bingkai kedua? Apakah dapat dibuat persamaan untuk menentukan banyaknya potongan kertas dari berbagai ukuran? Jelaskan! 
4.	<p>Disediakan 3 kantong kelereng yang masing-masing berisi 75 kelereng merah dan 25 kelereng biru, 40 kelereng merah dan 20 kelereng biru, 100 kelereng merah dan 25 kelereng biru. Jika diambil sebarang kelereng secara acak, kantong mana yang memiliki peluang paling besar untuk terambilnya kelereng berwarna biru? Jelaskan mengapa kantong tersebut memiliki peluang yang paling besar untuk terambil kelereng berwarna biru! (Margareth S. Smith, Victoria Bill and Elizabeth K. Hughes, 2008)</p>

4. Hasil dan Pembahasan

Sesuai dengan metode pengumpulan data yang direncanakan, siswa diberi soal tes tentang masalah matematika kontekstual. Setelah siswa selesai mengerjakan penulis mewawancarai siswa tentang bagaimana siswa memecahkan masalah dan representasi yang digunakan. Pengambilan data dilakukan pada 1, 10, 12 Mei 2016 di rumah

subyek penelitian. Siswa merupakan anak SMP kelas VIII terdiri dari 3 sekolah. Pada pukul 10.30-11.30 WIB tanggal 1 Mei 2016 mengambil data dari S1 dari salah satu SMP negeri di Bantul. Pada pukul 16.00-18.00 WIB tanggal 10 Mei 2016 mengambil data dari S2 dan S3 dari salah satu SMP swasta di Yogyakarta. Pada pukul 16.00-17.30 WIB tanggal 12 Mei 2016 mengambil data dari S4 dari salah satu SMP negeri di Yogyakarta.

4.1. Hasil Pekerjaan dan Wawancara Siswa

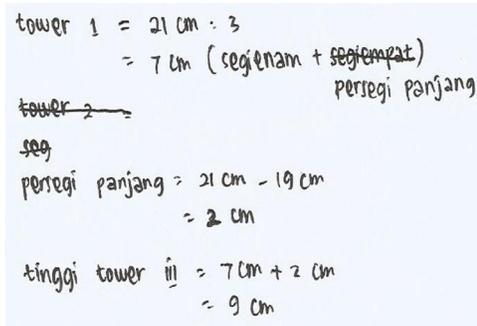


Gambar 1. Hasil Pekerjaan S1 Nomor 1

4.1.1. Soal nomor 1

Pada soal nomor 1, awalnya peneliti tidak menduga siswa akan menggunakan representasi visual, S1 menggunakan representasi visual geometris sebagai simbol pada nomor 1, seperti pada gambar 4.1. Peneliti menduga siswa akan menggunakan variabel untuk memisalkan tinggi persegi panjang dan tinggi segienam. Justru siswa menggunakan gambar untuk menyatakan tinggi persegi panjang dan segienam.

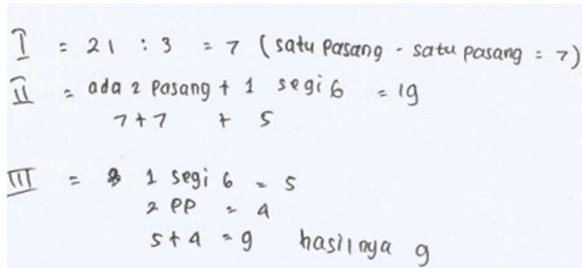
Namun, S1 tidak menuliskan proses penyelesaian bagaimana menemukan tinggi persegi panjang dan segienam. Menurut siswa dengan menggunakan gambar sebagai simbol akan terlihat lebih nyata daripada



Gambar 2. Hasil Pekerjaan S2 Nomor 1

menggunakan variabel.

Sesuai dugaan penulis, pada soal nomor 1, ada siswa yang menggunakan bentuk aritmatika. S2 dan S3 menyelesaikan dengan melakukan perhitungan tanpa variabel tetapi siswa belum bisa menggunakan simbol matematika dengan tepat dan kurang teliti. Seperti yang ditunjukkan pada gambar 4.2, S2 menuliskan “tower 1”, segienam, dan persegi panjang tanpa kata “tinggi”.



Gambar 3. Hasil Pekerjaan S3 Nomor 1

Pekerjaan S3 pada awalnya kurang jelas dalam menuliskan proses penyelesaiannya. Pada gambar 3, baris ke tiga, tidak jelas bagaimana bisa ditemukan tinggi segienam sama dengan 5.

Setelah dikonfirmasi, sebelum menemukan tinggi segienam, siswa mencari tinggi persegi panjang. Kemudian dari tinggi sepasang persegi

panjang dan segienam dikurangi tinggi persegi panjang.

S3 juga kurang teliti dalam menuliskan keterangan satu pasang, segienam, I, II, dan III tanpa kata “tinggi”. Dari hal tersebut, diketahui siswa belum dapat menuliskan proses pemecahan masalah mereka dengan jelas. Kelemahan siswa dalam memecahkan masalah dengan berpikiran aritmatika adalah siswa tidak dapat merepresentasikan pemikirannya ke dalam kalimat matematika.

$$\begin{array}{l}
 \text{I} = 21 : 3 = 7 \text{ (satu Pasang - satu pasang = 7)} \\
 \text{II} = \text{ada 2 Pasang + 1 segi 6} = 19 \\
 \quad 7+7 \quad + 5 \\
 \text{III} = 1 \text{ segi 6} = 5 \\
 \quad 2 \text{ PP} = 4 \\
 \quad 5+4 = 9 \text{ hasilnya 9} \\
 \text{PP} = 21 - 19 = 2
 \end{array}$$

Gambar 4. Hasil Pekerjaan S3 Nomor 1 setelah dibenarkan

Soal nomor 1 juga memungkinkan siswa menyelesaikan dengan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) tetapi hanya S4 saja yang menyelesaikannya dengan SPLDV. S4 menganggap jika dengan menggunakan SPLDV akan lebih

mudah dalam menuliskan ide atau gagasannya.

<p>I Berapakah tinggi tower ketiga?</p> $ \begin{array}{l} 3x + 3y = 21 \\ 3x + 2y = 19 \end{array} $ $ \begin{array}{l} \Rightarrow 3x + 2(2) = 19 \\ \Rightarrow 3x + 4 = 19 \\ 3x = 19 - 4 \\ 3x = 15 \\ x = \frac{15}{3} \\ x = 5 \end{array} $	<p>II</p> $ \begin{array}{l} \times 3 \\ 9x + 9y = 63 \\ 9x + 6y = 57 \\ \hline 3y = 6 \\ y = \frac{6}{3} \\ y = 2 \end{array} $	<p>III x = segi enam y = persegi panjang</p> $ \begin{array}{l} \text{tinggi tower ketiga} = x + 2y \\ = 5 + 2 \cdot 2 \\ = 5 + 4 \end{array} $
---	--	---

Gambar 4. Hasil Pekerjaan S4 Nomor 1

Namun ketika penulis bertanya kepada siswa jika soal nomor 1 diubah menjadi soal cerita. Ternyata S2 dan S3 menjawab menggunakan SPLDV. Hal ini menunjukkan bahwa bentuk representasi yang dibuat siswa dipengaruhi juga oleh bentuk soal. Siswa sudah terbiasa menggunakan SPLDV untuk mengerjakan soal cerita yang memungkinkan diselesaikan dengan SPLDV.

$$\begin{array}{l}
 V; s^3 \\
 = 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \text{ m} \\
 = 0,027 \text{ m}^3 \\
 \text{Akuarium lama: } 27000 \text{ liter} \\
 27000 \text{ liter} = 27000 \text{ dm}^3 \\
 \text{Akuarium Baru: } \sqrt[3]{216000} = 60 \text{ dm}
 \end{array}$$

Gambar 5. Hasil Pekerjaan S1 Nomor 2

4.1.2. Soal nomor 2

Penulis menduga ada siswa yang menyelesaikannya dengan representasi visual tetapi ternyata tidak ada yang menggunakan representasi visual. Penyelesaian soal nomor 2 bisa lebih dari satu. Namun, semua siswa hanya bisa menemukan satu penyelesaian. Bentuk akuarium baru tidak hanya berbentuk kubus saja tetapi bisa berbentuk balok.

$$\begin{array}{l}
 \text{Diket: } V \text{ baru} = 8 \times \text{volume lama} \\
 s \text{ lama} = 0,3 \text{ m} \\
 \text{Ditanya: } s \text{ baru?} \\
 \text{Jawab: } V \text{ lama} = 0,3 \text{ m} \times 0,3 \text{ m} \times 0,3 \text{ m} \\
 = 0,027 \text{ m}^3 \\
 V \text{ baru} = 8 \times 0,027 \text{ m}^3 \\
 = 0,216 \text{ m}^3 \\
 s \text{ baru} = 0,6 \text{ m}
 \end{array}$$

Gambar 6. Hasil Pekerjaan S2 Nomor 2

Siswa mulai menemukan penyelesaian lainnya ketika dipancing pertanyaan oleh peneliti. Siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan ulang dengan representasi lain. Pada awalnya S3 salah menangkap apa yang dimaksud ukuran dalam pertanyaan nomor 2. S3 menganggap ukuran yang ditanyakan adalah volume. Setelah S3 diberi penjelasan yang dimaksud

$V \text{ akuarium baru} = 0,9 \text{ cm}^3 \times 8$
 $= 7,2 \text{ cm}^2$ (didapat dari akuarium lama $\times 8$)
 $= 0,127 \text{ m}^3 \times 8$
 $= 2,16 \text{ m}^3$
 $= 0,216 \text{ m}^3$

Gambar 7. Hasil Pekerjaan S3 Nomor 2

ukuran dalam pertanyaan tersebut kemudian S3 mengerjakan ulang untuk memecahkan masalah tersebut. S3 menggambar kubus sebanyak delapan tetapi belum membentuk akuarium baru. Dari gambar tersebut dia mulai menemukan penyelesaian lain selain bentuk kubus. Sedangkan S4 mampu menggambarkan sketsa bentuk akuarium baru yang terdiri dari 8 kubus yang berukuran 0,3 m sehingga dia lebih mudah mendapatkan ukuran akuarium yang baru. Dari hasil wawancara menunjukkan bahwa dengan sketsa gambar siswa dapat memecahkan masalah.

Pada soal nomor 2 semua siswa langsung menghitung untuk memecahkan masalah. Dari hasil wawancara diketahui bahwa siswa tidak berpikiran untuk menggambar atau dengan cara lain karena tidak terbiasa dan terbiasa langsung mengoperasikan bilangan yang diketahui ketika mengerjakan soal matematika.

a. 4/ bingkai pertama = $16 + 16 + 10 + 10 + 4$
 $= 56$ buah
 b. 4/ bingkai kedua = $5 + 5 + 8 + 8 + 4$
 $= 30$ buah

Gambar 8. Hasil Pekerjaan S2 Nomor 3a dan 3b

4.1.3. Soal nomor 3

Pada soal nomor 3.a dan 3.b, 3 dari 4 siswa mengerjakan dengan langsung mengoperasikan bilangan tanpa melibatkan variabel. Representasi ini disebut dengan bentuk aritmatika. Bagian 3.c ini sebenarnya diharapkan siswa dapat

c. Bisa, contoh (+4) karena ditambah dr ke empat sudut.
 keling dan lebar dibagi keling ukuran kertas yang akan dibuat bingkai
 karena banyak kertas disesuaikan dengan lebar persegi panjang tersebut.

Gambar 9. Hasil Pekerjaan S2 Nomor 3c

menjelaskan dan membuat sebuah persamaan dengan melihat pola pada bagian 3.a dan 3.b. Namun, siswa hanya merepresentasikan ide mereka dengan teks tertulis saja tanpa membuat persamaan matematikanya, itupun susunan kalimat masih tidak teratur.

a. banyak Potongan : 10 kertas
 $10 \text{ kertas} + 16 \text{ kertas} + 10 \text{ kertas} + 16 \text{ kertas} = 52 \text{ Potongan}$
 $52 + 4 \text{ sudutnya} = 56 \text{ Potongan}$
 b. banyak Potongan : $5 + 8 + 5 + 8 = 26$
 $26 \text{ Potongan} + 4 \text{ sudutnya} = 30 \text{ Potongan}$
 c. Bisa, karena sama contoh : keling PP dibagi dengan ukuran kertas lalu ditambah 4 dari ke-4 sudutnya.

Gambar 10. Hasil Pekerjaan S3 Nomor 3

Siswa hanya menuliskan ide

mereka dengan kalimat biasa karena kesulitan merepresentasikannya ke dalam kalimat matematika sehingga mereka hanya menjelaskan apa yang mereka pikirkan dengan teks tertulis.

Pada awalnya S3 merepresentasikan bingkai foto yang ada dipikirkannya dengan gambar kemudian siswa mulai menghitung potongan kertas dengan konsep keliling.

Hal ini menunjukkan bahwa dengan gambar siswa dapat menemukan ide penyelesaian selanjutnya. siswa menentukan langkah penyelesaian selanjutnya dengan aritmatika.

4.1.4. Soal nomor 4

Kantong 1 dan 3 karena memiliki 25 kelereng biru
 Kantong 2 hanya memiliki 20 kelereng biru
 Jadi, peluangnya lebih besar pada kantong 1 dan 3

Gambar 10. Hasil Pekerjaan S4 Nomor 4

kantong pertama = $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
 " kedua = $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ → yang memiliki peluang paling besar terambil kelereng biru.
 karena kantong kedua memiliki lebih sedikit kelereng merah diantara kantong yang lain.
 " ketiga = $\frac{25}{125} = \frac{1}{5}$

Gambar 11. Hasil Pekerjaan S2 Nomor 4

S1 dan S4 menyelesaikan masalah dengan menggunakan representasi teks tertulis. Siswa menuliskan ide atau gagasan pemecahan masalah. S2 dan S3 menentukan perbandingan antara jumlah kelereng biru dan merah kemudian siswa menjelaskan peluang terambilnya kelereng biru yang paling besardengan teks tertulis. Dari hasil wawancara diketahui bahwa menurut siswa dengan teks tertulis atau kalimat biasa akan lebih jelas pemecahan masalahnya. Selain itu menggunakan teks tertulis karena dari soal menyuruh menjelaskan maka siswa menjelaskan dengan kalimat biasa.

4.2. Pembahasan

Perbandingan macam-macam representasi matematis berdasarkan teori menurut Mudzakir dengan hasil penelitian.

Tabel 3 Perbandingan Teori dengan Hasil Pekerjaan Siswa

Teori	Hasil Pekerjaan Siswa
Representasi Visual Diagram tabel, atau grafik	Representasi visual
Gambar	Representasi visual dan bentuk aritmatika
Persamaan atau ekspresi matematis	Bentuk aljabar
Kata-kata atau teks tertulis	Bentuk aritmatika
	Bentuk aritmatika dan teks tertulis
	Teks tertulis

Pada penggunaan representasi visual, siswa lebih menggunakan representasi visual geometri. Siswa menggunakan gambar bentuk bangun datar seperti segienam dan segiempat. Selain itu siswa menggambar sketsa untuk merepresentasikan apa yang siswa bayangkan.

Pada representasi persamaan atau ekspresi matematis, siswa membuat sistem persamaan dua variabel (SPLDV). Kemudian siswa menyelesaikan dengan metode eliminasi dan substitusi.

Pada representasi kata-kata atau teks tertulis, siswa merepresentasikan pemikiran mereka dengan kalimat biasa. Siswa kesulitan merepresentasikan ide mereka ke dalam representasi lain sehingga apa yang ada dipikiran mereka, mereka tuliskan dengan teks tertulis. Selain itu, siswa terbiasa mengerjakan soal matematika langsung mengoperasikan bilangan tanpa variabel.

Representasi yang digunakan dapat lebih dari satu (*multiple representasi*), seperti representasi visual dan aritmatika, aritmatika dan teks tertulis. Pada representasi visual dan aritmatika, siswa membuat gambar (visual) untuk merepresentasikan apa yang mereka bayangkan. Dari gambar tersebut siswa dapat menemukan ide penyelesaian lainnya. Pada aritmatika dan teks tertulis, siswa mengoperasikan bilangan kemudian siswa menjelaskan proses berpikirnya dalam kalimat biasa.

5. Kesimpulan dan Saran

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan data, informasi, analisis data, dan pembahasan yang dilakukan pada proses pengambilan data maka dapat disimpulkan ada macam-macam representasi matematis siswa yang digunakan siswa dalam menyelesaikan masalah matematika kontekstual dan faktor-faktor yang mempengaruhi siswa dalam menentukan representasi yang digunakan. Macam-macam representasi matematis siswa tersebut, sebagai berikut: (1) Representasi visual, (2) Bentuk ritmatika, (3) Bentuk aljabar, (4) Representasi visual dan bentuk aritmatika, (5) Teks tertulis, (6) Bentuk aritmatika dan teks tertulis.

Faktor-faktor yang mempengaruhi siswa dalam menentukan representasi matematis yang digunakan sebagai berikut: (1) Menggunakan representasi visual sebagai simbol supaya terlihat lebih nyata, (2) Mempermudah siswa merepresentasikan gambaran yang dibayangkan dan menemukan ide pemecahan selanjutnya, (3) Kebiasaan siswa mengerjakan soal matematika dengan langsung mengoperasikan bilangan yang diketahui, (4) Bentuk soal dan perintah soal, (5) Siswa menggunakan teks tertulis karena siswa kesulitan membuat kalimat matematika (persamaan matematika), (6) Dengan teks tertulis siswa lebih mudah mengungkapkan ide pemecahan masalah.

5.2. Saran

Bagi guru maupun calon guru sebaiknya membebaskan siswa dalam mengerjakan soal matematika terutama dalam masalah kontekstual dan sebaiknya lebih menerapkan masalah kontekstual dalam pembelajaran matematika supaya siswa mengetahui dan menerapkan ilmu matematika dalam kehidupan sehari-hari serta mengajarkan lebih dari satu cara atau representasi dalam pemecahan masalah.

Peneliti yang akan melakukan penelitian serupa, sebaiknya menggunakan subyek penelitian yang lebih banyak dan kemampuan siswa bervariasi supaya sampel yang diambil dapat mewakili populasi dalam penelitian. Soal tes matematika kontekstual juga sebaiknya lebih bervariasi supaya hasil penelitian lebih akurat.

Daftar Pustaka

- [1] Andri Suryana. 2012. *Kemampuan Berpikir Matematis Tingkat lanjut (Advanced Mathematical Thinking) dalam Mata Kuliah Statistika Matematika 1*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, UNY: November 2012: Hal. 37-48.
- [2] Basrowi dan Suwandi. 2008. *Memahami Penelitian Kualitatif*. Jakarta: Rineka Cipta.
- [3] Bambang Hudiono. 2010. *Peran Pembelajaran Diskurs Multi Representasi Terhadap Pengembangan Kemampuan Matematika dan Daya Representasi Pada Siswa SLTP*. Jurnal Cakrawala Kependidikan: Volume 8 No. 2 September 2010:101-203.
- [4] Bennett, Jack A., dan James F. Strickland Jr. *Pizzas and Problem Solving: Using Visual Representations in Mathematics*. Middle School Journal, Vol. 21, No. 4, pp. 10-13. www.jstor.org .
- [5] Fennell, Francis, dan Town Rown. 2001. *Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics*. Teaching Children Mathematics, Vol, 7, No. 5, pp. 288-292. www.jstor.org .
- [6] Hwang, Wu-Yuin, dkk. April 2007. *Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving Using a Multimedia Whiteboard System*. Jurnal Educational Technology & Society, Volume 10 No. 2.
- [7] Kartini. 2009. *Peranan Representasi dalam Pembelajaran Matematika*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, UNY: Desember 2009: Hal. 361-371.
- [8] Krulik, Stephen, dan Jesse A. Rudnick. 1996. *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High School*. USA: Allyn & Bacon.
- [9] Lexy J Moleong. 2009. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: Rosda.
- [10] Ling, Jonathan, dan Jonathan Catling. 2012. *Psikologi Kognitif*. Jakarta: Erlangga.
- [11] National Council of Teacher of Mathematics. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- [12] Muhammad Sabirin. 2014. *Representasi Dalam Pembelajaran Matematika*. Jurnal JPM IAIN Antasari Vol. 01 No. 2 Januari – Juni 2014: 33-44
- [13] Santulli, Tom. April 2009. *Representaion From The Real World*. Mathematics Teaching In The Middle School, vol. 14, no. 8. www.jstor.org .
- [14] Schultz, James E., dan Michael S. Waters. Why Representation?. The Mathematics Teacher, Vol 93, No. 6, pp 448-453. www.jstor.org .
- [15] Smith, Margareth S. dkk. Oktober 2008. *Thinking through a Lesson: Successfully Implementing High-Level Tasks*. Mathematics Teaching In The Middle School, Vol. 14, No. 3, pp. 132-138. www.jstor.org .
- [16] Suharnan. 2005. *Psikologi Kognitif*. Surabaya: Srikandi.

Analisis Kemampuan dan Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Aljabar Model TIMSS

Dominikus Arif Budi Prasetyo¹
Marcelinus Andy Rudhito²
^{1,2} Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Sanata Dharma
dominic_abp@usd.ac.id¹
rudhito@usd.ac.id²

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui tingkat kemampuan siswa dan kesulitan yang dihadapi siswa dalam menyelesaikan soal-soal Aljabar model TIMSS. Soal-soal yang dikerjakan berupa 18 butir soal pilihan ganda dengan materi Aljabar model TIMSS yang telah disusun untuk mendukung pembelajaran Matematika di SMP kelas VII Kurikulum 2013. Materi Aljabar model TIMSS yang diujikan meliputi topik bentuk aljabar sebanyak 8 soal, persamaan dan fungsi sebanyak 9 soal, dan pertidaksamaan sebanyak 1 soal. Sedangkan ranah kognitif yang diukur meliputi ranah pengetahuan sebanyak 12 soal, ranah penerapan sebanyak 5 soal, dan ranah penalaran sebanyak 1 soal. Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif kualitatif. Subyek pada penelitian ini adalah 23 orang siswa kelas VIII SMP Pangudi Luhur Srumbung Kabupaten Magelang, Jawa Tengah. Hasil uji coba menunjukkan rata-rata nilai tes siswa adalah 47,30 yang tergolong dalam kategori sedang dengan rincian sebanyak 1 siswa (4,35%) tergolong dalam kategori baik, 9 siswa (39,13%) tergolong dalam kategori sedang, 13 siswa (56,52%) tergolong dalam kategori rendah, serta tidak ada siswa yang tergolong dalam kategori sangat baik dan sangat rendah. Dalam penelitian ini juga diperoleh bahwa 4 soal (22,22%) dalam kategori sulit, 10 soal (55,56%) dalam kategori sedang, dan 4 soal (22,22%) dalam kategori mudah. Kategori kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal untuk topik bentuk aljabar tergolong sedang, dan untuk topik persamaan dan fungsi dan pertidaksamaan tergolong rendah. Kategori kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal pada ranah pengetahuan dan penalaran tergolong sedang dan pada ranah penerapan tergolong rendah. Kesulitan yang dialami siswa dalam menyelesaikan soal-soal tersebut antara lain merasa rumit dengan soal yang diberikan, kurang cermat dalam membaca soal, dan kurang memahami maksud dari soalnya. Sedangkan dari segi materi, siswa kurang memahami bagaimana membuat rumus fungsi dan garis, memodelkan bentuk aljabar serta mengkaitkan materi aljabar dengan materi lain, misalkan materi geometri dan ada materi yang belum diajarkan, yaitu pertidaksamaan.

Kata-kata kunci : Analisis kemampuan dan kesulitan siswa, soal aljabar model *TIMSS*.

1. Pendahuluan

Ada beberapa uji kompetensi siswa di bidang Matematika berskala internasional, diantaranya *TIMSS (Trends International Mathematics and Science Study)* (<http://timss.bc.edu/>) dan *PISA (Programme for International Student*

Assessment) (<http://oecd.org/pisa>). Dari hasil uji *TIMSS* bidang Matematika menunjukkan bahwa prestasi siswa-siswa Indonesia masih berada pada ranking bawah. Hasil tersebut yang menjadi salah satu dasar dikeluarkan kebijakan Kurikulum 2013 oleh Pemerintah Indonesia. Pada Kurikulum 2013 ini, upaya untuk meningkatkan kreatifitas siswa melalui proses pembelajaran dengan pendekatan saintifik sangat diwajibkan untuk dilaksanakan di sekolah. Implementasi pendekatan saintifik memerlukan pemahaman dasar-dasar dan implementasi yang kuat dari para guru. Hasil *TIMSS* yang rendah tersebut tentunya disebabkan oleh banyak faktor. Apabila kita mencermati buku ajar baik untuk siswa maupun untuk pegangan guru yang digunakan di sekolah-sekolah, termasuk buku-buku yang disiapkan untuk mendukung implementasi Kurikulum 2013, seperti Buku Matematika Kelas VII Kurikulum 2013 [1,2,3], tidak banyak soal-soal latihan yang karakteristiknya seperti soal-soal di *TIMSS*. Padahal, buku-buku tersebutlah yang banyak digunakan dan dibaca oleh siswa dalam pembelajaran Matematika sehari-hari. Pemerintah, melalui Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan menyusun silabus yang hanya menyajikan instrumen penilaian hasil belajar yang substansinya kurang dikaitkan dengan konteks kehidupan yang dihadapi siswa dan kurang memfasilitasi siswa dalam mengungkapkan proses berpikir rangka meningkatkan kemampuan matematika siswa Indonesia. Hal ini dapat diperbaiki dengan beberapa hal, salah satunya dengan mengembangkan soal matematika model *TIMSS* untuk sekolah menengah berdasarkan Kurikulum 2013. Dari hasil penelitian ini diharapkan diperoleh suatu pedoman pengembangan soal model *TIMSS* bagi guru-guru dan berbagai contoh-contoh soal matematika model *TIMSS* yang siap digunakan untuk pembelajaran di kelas.

Analisis mengenai kompetensi dasar dan materi yang ada di Kurikulum 2013 dan *TIMSS* dilakukan oleh Rudhito dan Prasetyo [4]. Penelitian tersebut bertujuan untuk membandingkan tuntutan materi pada Kurikulum 2013 dengan materi pada *TIMSS*. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa ada kompetensi dasar dan materi pokok yang diajarkan dalam Kurikulum 2013 Matematika Kelas VII tetapi tidak dituntut sebagai materi uji pada *TIMSS Eighth-Grade 2011*, di antaranya adalah materi pokok himpunan dan aritmatika sosial. Selain itu, ada materi pada Kurikulum 2013 yang pengelompokannya tidak sesuai dengan di *TIMSS Eighth-Grade 2011*, di antaranya materi pola bilangan. Materi yang ada di kedua dokumen secara umum lebih lengkap dan mendalam diujikan pada *TIMSS Eighth-Grade 2011*. Materi *Pattern Patterns* dan *Algebraic Expression* dalam *TIMSS* seharusnya merupakan materi dasar dalam aljabar, justru baru ada di kelas VIII dalam Kurikulum 2013.

Penelitian lain terkait dengan kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal penalaran model *TIMSS* dilakukan oleh Rizta, dkk. [5]. Berdasarkan penelitian tersebut diperoleh rata-rata hasil tes penalaran siswa adalah 14,815% siswa tergolong mempunyai penalaran yang sangat baik, 14,815% siswa tergolong mempunyai penalaran yang baik, 29,63% siswa tergolong mempunyai penalaran yang sedang, 22,22% siswa tergolong mempunyai penalaran yang rendah, dan 18,52% siswa tergolong mempunyai penalaran yang sangat rendah. Berdasarkan hasil tersebut maka kemampuan penalaran siswa tersebut tergolong sedang.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai analisis kompetensi dasar dan materi yang ada pada Kurikulum 2013 dan *TIMSS* yang dilakukan Rudhito dan Prasetyo [4], perlu dikembangkan buku suplemen untuk mendukung pembelajaran Matematika SMP Kelas VII Kurikulum 2013. Selanjutnya Rudhito dan Prasetyo [6] melakukan penelitian yang bertujuan untuk menghasilkan buku suplemen yang berisi soal-soal

matematika model *TIMSS* yang valid dan praktis, untuk siswa SMP kelas VII berdasarkan Kurikulum 2013. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa buku soal (prototipe I) yang disusun dengan pengelompokan bab mengikuti ranah materi seperti dalam *TIMSS*, yakni Bilangan, Geometri, Aljabar, Data dan Peluang. Untuk buku soal yang dihadapi siswa tidak perlu ada bagian-bagian yang menuliskan tentang ranah materi, topik pokok dan ranah kognitif. Untuk hasil penilaian, validasi *content* masuk dalam kategori baik sekali, validasi *construct* masuk dalam kategori baik, dan validasi *bahasa* masuk dalam kategori sedang.

Dalam [7], Prasetyo dan Rudhito telah meneliti kemampuan dan kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal-soal Geometri model *TIMSS* dengan hasil rata-rata hasil tes siswa adalah 44,25 yang tergolong dalam kategori rendah dengan rincian sebanyak 1 siswa (4,2%) tergolong dalam kategori sangat baik, 5 siswa (20,8%) tergolong dalam kategori baik, 4 siswa (16,7%) tergolong dalam kategori sedang, 9 siswa (37,5%) tergolong dalam kategori rendah, dan 5 siswa (20,8%) tergolong dalam kategori sangat rendah. Dalam penelitian ini juga diperoleh bahwa 6 soal (28,6%) dalam kategori sulit, 13 soal (61,9%) dalam kategori sedang, dan 2 soal (9,5%) dalam kategori mudah. Kategori kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal untuk topik bentuk geometri, kesebangunan, garis sejajar dan ukuran geometri tergolong rendah, topik ukuran sudut dan transformasi geometri tergolong sedang, dan topik sistem koordinat tergolong tinggi. Kategori kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal pada ranah pengetahuan tergolong sedang dan pada ranah penerapan dan penalaran tergolong rendah. Kesulitan yang dialami siswa dalam menyelesaikan soal-soal tersebut antara lain lupa harus menggunakan rumusnya, kurang cermat dalam membaca soal, dan kurang memahami maksud dari soalnya. Sedangkan dari segi materi, siswa kurang memahami titik koordinat, besar sudut, kesebangunan, dan transformasi. Materi transformasi tidak diajarkan lagi di SMP tetapi sudah pernah diajarkan di SD, sedangkan materi keliling dan luas masih ada beberapa yang terbalik konsepnya. Dari hasil tersebut dapat dikatakan bahwa soal-soal untuk materi geometri pada buku suplemen pembelajaran matematika SMP Kelas VII Kurikulum 2013 dapat digunakan.

Pada makalah ini, kami melakukan penelitian yang bertujuan untuk mengetahui kemampuan dan kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal-soal Aljabar model *TIMSS* yang telah dikembangkan, [6]. Soal-soal yang dikerjakan merupakan soal pilihan ganda yang telah disusun untuk mendukung pembelajaran Matematika SMP kelas VII Kurikulum 2013.

2. Soal Aljabar Model *TIMSS* pada Buku Suplemen SMP Kelas Kurikulum 2013

Rudhito dan Prasetyo [6] telah mengembangkan buku suplemen untuk siswa SMP Kelas VII Kurikulum 2013. Buku tersebut berisi soal-soal yang terkait dengan soal model *TIMSS*. Buku tersebut memuat soal-soal dengan materi aljabar yang perlu diujikan keterbacaannya dan tingkat kesulitannya. Pada materi aljabar ini, soal tersebut terdiri dari 18 soal pilihan ganda. Soal-soal tersebut terdistribusi dalam 3 ranah, yakni ranah pengetahuan sebanyak 12 soal, ranah penerapan sebanyak 5 soal dan ranah penalaran sebanyak 1 soal. Sedangkan sebaran materi yang ada pada soal yang telah dikembangkan meliputi materi bentuk aljabar sebanyak 8 soal, materi persamaan dan fungsi sebanyak 9 soal, dan materi pertidaksamaan sebanyak 1 soal. Waktu yang diberikan untuk menyelesaikan soal-soal tersebut adalah 80 menit.

3. Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif kualitatif. Data yang diperoleh akan dideskripsikan sesuai dengan keadaan atau fenomena yang sebenarnya [8]. Pada penelitian ini, data yang dikumpulkan adalah hasil pekerjaan paket soal dari siswa. Selanjutnya pekerjaan siswa diteliti dan dianalisis berdasarkan materi dan ranah kognitif untuk mendapatkan kategori kemampuan siswa, tingkat kesulitan soal, dan kesulitan yang dialami siswa. Subyek pada penelitian ini adalah 23 orang siswa kelas VIII SMP Pangudi Luhur Srumbung, Kabupaten Magelang. Pengambilan data ini dilakukan bulan April 2016. Pada saat pengambilan data, setiap siswa diberikan paket soal yang sama. Selain mengerjakan paket soal tersebut, setiap siswa juga diberikan lembar masukan dan saran. Masukan dan saran ini berisi soal-soal mana saja yang dianggap sulit oleh siswa. Siswa mencantumkan nomor soal dan kesulitan yang dialami dalam mengerjakan soal yang terkait. Setelah siswa selesai mengerjakan soal-soal tersebut, kami melakukan perhitungan terkait dengan tingkat kesulitan soal dan tingkat kemampuan siswa dalam mengerjakan soal aljabar model *TIMSS*. Selain itu juga diadakan *FGD* (*Focus Group Discussion*) antara peneliti dengan guru SMP Kanisius Sleman, SMP Pangudi Luhur Wedi, SMP Pangudi Luhur Srumbung, dan SMP Pangudi Luhur Gantiwarno. *FGD* ini diadakan tanggal 22 April 2016 setelah dilakukan analisis awal pada hasil jawaban siswa. *FGD* dilakukan untuk mendalami lebih lanjut kesulitan yang dialami siswa dalam mengerjakan soal-soal tersebut. *FGD* ini juga dilakukan dalam rangka memperoleh deskripsi data yang sebenarnya dari sekolah.

4. Hasil dan Pembahasan

Berikut ini hasil ujicoba kemampuan siswa dalam mengerjakan soal-soal aljabar model *TIMSS* yang dilakukan pada siswa kelas VIII SMP Pangudi Luhur Srumbung Magelang pada bulan April 2016. Tabel 1 merupakan rekapitulasi nilai siswa yang merupakan hasil pengerjaan soal-soal aljabar model *TIMSS*. Banyaknya siswa yang menjadi subyek penelitian ini adalah 23 siswa. Setelah siswa mengerjakan soal-soal tersebut, peneliti menghitung jumlah jawaban benar siswa. Nilai yang diperoleh siswa merupakan perbandingan jumlah jawaban benar yang diperoleh siswa terhadap seluruh soal yang diujicobakan.

Tabel 1. Daftar Nilai Hasil Ujicoba Soal Aljabar Model *TIMSS*

Nomor Siswa	Nilai	Nomor Siswa	Nilai
1	66,7	13	44,4
2	55,6	14	44,4
3	38,9	15	27,8
4	38,9	16	55,6
5	38,9	17	44,4
6	50,0	18	38,9
7	44,4	19	44,4
8	50,0	20	61,1
9	50,0	21	55,6
10	44,4	22	38,9
11	55,6	23	44,4
12	55,6	Rata-rata	47,3

Dari Tabel 1. di atas, selanjutnya dikategorisasikan kemampuan siswa dalam mengerjakan soal aljabar model *TIMSS* mengikuti kategorisasi kemampuan oleh Arikunto [9]. Tabel 2 berikut ini merupakan kategorisasi kemampuan siswa.

Tabel 2. Kategori Kemampuan Siswa dalam Mengerjakan Soal Aljabar Model *TIMSS*

Nilai Siswa (X)	Tingkat Kemampuan Siswa	Banyak Siswa
$85 \leq X \leq 100$	Sangat Tinggi	0
$65 \leq X < 85$	Tinggi	1
$45 \leq X < 65$	Sedang	9
$25 \leq X < 45$	Rendah	13
$0 \leq X < 25$	Sangat Rendah	0

Berdasarkan hasil pada Tabel 1 dan Tabel 2 di atas, dapat diketahui bahwa rata-rata hasil tes siswa dalam mengerjakan soal-soal Aljabar model *TIMSS* adalah 47,3. Rata-rata ini tergolong dalam kategori sedang. Dalam penelitian ini, tidak ada siswa yang termasuk dalam kategori kemampuan sangat tinggi maupun sangat rendah. Sedangkan untuk kategori lain, sebanyak 1 siswa (4,35%) tergolong dalam kategori baik, sebanyak 9 siswa (39,13%) tergolong dalam kategori sedang, dan sebanyak 13 siswa (56,52%) tergolong dalam kategori rendah. Hal ini sejalan dengan hasil wawancara dengan guru Matematika kelas VIII di SMP Pangudi Luhur Srumbung Magelang bahwa tidak ada siswa yang sangat menonjol di kelas ini.

Selanjutnya, soal-soal materi Aljabar model *TIMSS* yang telah dikembangkan oleh Rudhito dan Prasetyo [6] dan diujicobakan untuk dikerjakan oleh siswa tersebut dilakukan perhitungan untuk mengetahui Indeks Kesulitan untuk setiap nomornya. Topik Aljabar yang diujikan meliputi 3 topik bahasan, yaitu bentuk aljabar, persamaan dan fungsi, serta pertidaksamaan. Ranah kognitif yang diujikan meliputi 3 ranah, yaitu ranah pengetahuan, ranah penerapan, dan ranah penalaran. Berikut sebaran Indeks Kesulitan soal berdasarkan nomor soal, topik soal, dan ranah soal.

Tabel 3. Perhitungan Indeks Kesulitan Soal Aljabar Model *TIMSS*

Nomor Soal	Topik	Ranah	Indeks Kesulitan
1	Bentuk Aljabar	Penerapan	0,96
2	Bentuk Aljabar	Pengetahuan	0,61
3	Persamaan dan Fungsi	Penalaran	0,61
4	Bentuk Aljabar	Pengetahuan	0,57
5	Bentuk Aljabar	Pengetahuan	0,48
6	Bentuk Aljabar	Pengetahuan	0,48
7	Bentuk Aljabar	Pengetahuan	0,43
8	Persamaan dan Fungsi	Pengetahuan	0,83
9	Persamaan dan Fungsi	Penerapan	0,00
10	Persamaan dan Fungsi	Pengetahuan	0,91
11	Pertidaksamaan	Pengetahuan	0,35
12	Persamaan dan Fungsi	Pengetahuan	0,30
13	Bentuk Aljabar	Pengetahuan	0,39
14	Persamaan dan Fungsi	Penerapan	0,22
15	Persamaan dan Fungsi	Penerapan	0,09
16	Persamaan dan Fungsi	Penerapan	0,09

17	Persamaan dan Fungsi	Pengetahuan	0,74
18	Bentuk Aljabar	Pengetahuan	0,48

Tabel 4 berikut ini adalah kategorisasi indeks kesulitan soal-soal aljabar model *TIMSS* yang telah dikembangkan oleh Rudhito dan Prasetyo [6] berdasarkan hasil ujicoba pada Tabel 3 dan dikategorisasikan menurut Arikunto [9].

Tabel 4. Kategorisasi Indeks Kesulitan

Indeks Kesulitan	Kategori Kesulitan	Banyak Soal
$0,70 < IK \leq 1,00$	Mudah	4
$0,30 < IK \leq 0,70$	Sedang	10
$0,00 \leq IK \leq 0,30$	Sulit	4

Berdasarkan Tabel 4 di atas diketahui bahwa soal-soal Aljabar model *TIMSS* yang dikembangkan memuat 4 soal (22,2%) yang termasuk dalam kategori sulit, 10 soal (55,6%) termasuk dalam kategori sedang, dan 4 soal (22,2%) termasuk dalam kategori mudah. Selanjutnya, peneliti menghitung kemampuan siswa dalam mengerjakan soal Aljabar pada setiap topik dan ranah kognitif. Pada Tabel 5 dan Tabel 6 berikut ini merupakan hasil perhitungan dan kategori kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal Aljabar model *TIMSS* untuk topik bentuk aljabar termasuk pada kategori sedang, dan untuk topik persamaan dan fungsi serta pertidaksamaan termasuk pada kategori rendah. Dilihat dari segi topik materinya, secara umum kemampuan siswa dalam mengerjakan soal-soal Aljabar model *TIMSS* termasuk dalam kategori rendah. Sedangkan jika dilihat dari segi ranah kognitifnya, kemampuan siswa dalam mengerjakan soal-soal Aljabar model *TIMSS* pada ranah pengetahuan dan penalaran termasuk pada kategori sedang dan pada ranah penerapan termasuk pada kategori rendah.

Tabel 5. Sebaran Topik Materi Pada Soal Aljabar Model *TIMSS*

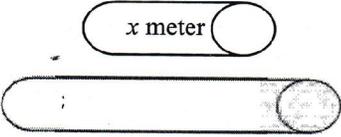
Topik Materi	Jumlah Soal	Skor Topik	Kategori Kemampuan
Bentuk Aljabar	8	54.9	Sedang
Persamaan dan Fungsi	9	42	Rendah
Pertidaksamaan	1	34.8	Rendah

Tabel 6. Sebaran Ranah Kognitif Pada Soal Aljabar Model *TIMSS*

Ranah Kognitif	Jumlah Soal	Skor Ranah	Kategori Kemampuan
Pengetahuan	12	54.7	Sedang
Penerapan	5	27	Rendah
Penalaran	1	60.9	Sedang

Berdasarkan pada hasil analisis kemampuan siswa dan indeks kesulitan soal (hasil pada Tabel 1 sampai dengan Tabel 6), maka peneliti mengadakan *Focus Group Discussion (FGD)*. *FGD* ini diadakan bersama dengan guru-guru sekolah mitra penelitian. Tujuan diadakan *FGD* adalah untuk menganalisis soal lebih dalam lagi dan menggali penyebab kesulitan dan kesalahan yang dialami siswa dalam mengerjakan soal Aljabar model *TIMSS*. Dalam *FGD* ini, soal-soal yang dibahas merupakan soal-soal dengan jawaban anomali, yaitu dimana siswa kebanyakan pada pilihan yang bukan menjadi jawaban soal tersebut. Rangkuman diskusi dan kumpulan soal yang menjadi perhatian bagi peneliti dan diangkat dalam *FGD* tercantum pada Tabel 7.

Tabel 7. Soal Yang Dibahas dalam FGD dan Menjadi Kesulitan Bagi Siswa

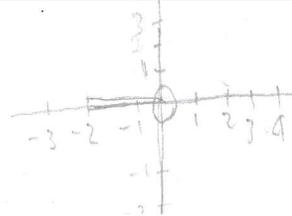
No.	Soal dan Hasil Diskusi
1	<p>9. Diberikan (0, -1) dan (1, 3), persamaan yang memenuhi kedua pasangan bilangan (x, y) tersebut adalah</p> <p>A. $x + y = -1$ B. $2x + y = 5$ C. $3x - y = 0$ D. $4x - y = 1$</p> <p>Pada soal nomor 9 ini, tidak ada siswa yang menjawab benar (D), kemungkinan siswa terkecoh dengan mensubstitusikan salah satu titik ke persamaan yang menjadi pilihan jawaban (B dan C). Kebanyakan siswa hanya memberikan tanda silang saja pada pilihan jawaban mereka tanpa memberikan cara perhitungannya.</p>
2	<p>11. Pertidaksamaan $\frac{x}{3} > 8$ senilai dengan</p> <p>A. $x < 5$ B. $x < 24$ C. $x < \frac{8}{3}$ D. $x > 24$</p> <p>$\frac{ x }{3} > 8 = \frac{8}{3} < x$</p> <p>Pada soal nomor 11 ini, banyak siswa yang salah (B dan C). Menurut guru, hal ini dikarenakan memang materi untuk soal ini belum diajarkan di sekolah, namun dalam soal model TIMSS dituntut untuk dikuasai. Siswa bingung dengan tanda pertidaksamaan.</p>
3	<p>13. Pipa pertama memiliki panjang x meter. Pipa kedua memiliki panjang y kali panjang pipa pertama. Panjang pipa kedua adalah</p>  <p>A. xy meter B. $x + y$ meter C. $\frac{x}{y}$ meter D. $\frac{y}{x}$ meter</p> <p>Pipa 1 = x meter Pipa 2 = y meter $x + y$</p> <p>Pada soal nomor 13 ini, siswa banyak memilih jawaban B dan jawaban ini salah, sedangkan bagi siswa tidak merasa kesulitan, siswa tidak memperhatikan kata 'sekian kali' atau bingung merepresentasikan kata tersebut dalam kalimat matematika.</p>
4	<p>12. Diketahui $a = 3$ dan $b = -1$. Nilai dari $2a + 3(2 - b)$ adalah</p> <p>A. 15 B. 14 C. 13 D. 9</p> <p>$2 \cdot 3 + 3(2 - 1) = 6 + 6 - 3 = 12 - 3 = 9$</p> <p>Pada soal nomor 12 ini, banyak siswa menjawab salah dan memilih jawaban</p>

D, karena siswa tidak memperhatikan pengurangan bilangan negatif. Di sini, siswa tidak teliti dalam melakukan operasi bilangan.

14. Di sebuah pelabuhan, total pembayaran pengiriman barang untuk kapal diberikan dengan persamaan $y = 4000x + 30.000$, dengan x berat dalam gram dan y biaya dalam rupiah. Jika kamu memiliki uang Rp. 150.000,00, banyaknya barang yang dapat dikirimkan adalah ... gram.
- 5 ✓
- A. 630
 B. 150
 C. 120
 D. 30
- $4000x = 30.000$
 $150.000 = x = \frac{150.000}{30.000} = 5 = x = 5 \cdot 4000$

Pada soal nomor 14 ini, siswa merasa rumit tetapi, hal ini karena pada persamaan tersebut diberikan satuan sehingga terlihat rumit. Ada beberapa siswa yang tidak jadi memberikan pilihan jawaban dan yang memberikan jawaban banyak yang salah (C).

15. Titik yang terletak pada garis $y = x + 2$ adalah
- 6 ✓
- A. (0, -2)
 B. (2, -4)
 C. (4, 6)
 D. (6, 4)



Pada soal nomor 15 ini, banyak siswa yang menjawab salah dan memilih jawaban A, dimungkinkan karena siswa hanya mencoba substitusi jawaban tanpa memperhatikan letak x dan y pada koordinat (terbalik)

16. Berikut tabel yang menunjukkan hubungan antara x dan y .

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

- Persamaan yang menunjukkan hubungan antara x dan y adalah ...
- 7
- A. $y = x + 4$
 B. $y = x + 1$
 C. $y = 2x - 1$
 D. $y = 3x - 2$

Pada soal nomor 16 ini, kebanyakan siswa bingung dengan pilihan jawaban dan syarat hubungan antara x dan y yang lebih dari 1, sehingga memungkinkan siswa hanya coba-coba saja dengan substitusi salah satu atau beberapa syarat tetapi tidak semua pasangan x dan y dicobakan. Lebih banyak siswa menjawab salah (A dan B).

Dari Tabel 7 di atas, dapat diketahui bahwa tidak semua siswa melakukan perhitungan yang benar terhadap soal-soal yang diberikan. Kebanyakan siswa hanya melakukan coba-coba saat akan memilih jawaban. Dalam proses melakukan coba-coba ini, siswa juga tidak melakukan pada semua syarat dalam soal tersebut, sehingga jawaban yang mereka pilih tidak benar. Ada dua soal dengan konsep yang sama, yaitu pertidaksamaan. Pada soal nomor 3, soal model pertidaksamaan menggunakan penalaran justru banyak siswa yang benar meskipun konsep ini belum diajarkan di

sekolah. Sebaliknya dengan ranah pengetahuan, konsep ini justru tidak ada siswa yang menjawab benar yaitu soal nomor 11.

Selanjutnya, Tabel 8 berikut ini merupakan rekapitulasi komentar yang diberikan oleh siswa setelah mengerjakan soal-soal Aljabar model *TIMSS*.

Tabel 8. Komentar dan Kesulitan yang Dialami Siswa dalam Mengerjakan Soal

Nomor Soal	Komentar	Frekuensi
3	belum diajarkan	1
4	tidak paham soalnya	4
5	belum paham soalnya	2
6	tidak bisa rumusnya	4
7	kurang jelas	1
9	belum jelas	5
10	tidak tahu caranya	1
11	tidak paham soalnya, belum pernah diajarkan	2
14	Rumit, kurang jelas perhitungannya, kurang memahami soal, tidak pernah dilatihkan, satuannya membuat bingung	13
15	tidak paham, tidak mengetahui titik tengah garis atau titik terletak pada garis	3
16	bingung dengan pilihan jawaban, kurang memahami soal, sulit dan rumit	5
18	soal sulit dipahami	2

Dari Tabel 8 di atas, dapat diketahui bahwa selama mengerjakan soal-soal Aljabar model *TIMSS*, ada 12 soal yang diberi komentar oleh siswa. Kebanyakan siswa (13 orang) merasa soal nomor 14 yang sulit dan rumit. Siswa juga mengalami kesulitan dalam membuat model matematika atau membuat persamaan yang memenuhi beberapa syarat. Kebanyakan siswa hanya memasukkan saja satu syarat ke pilihan jawaban yang ada tanpa memperhitungkan syarat yang lain. Berdasarkan wawancara dengan guru di sekolah tersebut, kebanyakan siswa hanya sekedar menghafalkan materi dan rumus dari materi yang diberikan di sekolah saja. Hal ini mengakibatkan saat diuji dengan penerapan dan penalaran konsep akan mengalami kesulitan dalam mengerjakannya. Guru pun juga yang belum banyak memberikan soal-soal penalaran, karena tuntutan materi yang cukup banyak dan harus diselesaikan dalam periode tertentu. Jika kita dibandingkan Tabel 8 dengan Tabel 3 dan Tabel 7, tidak banyak siswa yang menuliskan kesulitan mereka meskipun saat mengerjakan ternyata banyak jawaban yang salah.

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil perhitungan dan pembahasan penelitian yang dilakukan di SMP PL Srumbung Magelang Kelas VIII untuk mengukur kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal aljabar model *TIMMS* dapat disimpulkan bahwa rata-rata nilai tes siswa adalah 47,30 yang tergolong dalam kategori sedang dengan rincian sebanyak 1 siswa (4,35%) tergolong dalam kategori baik, 9 siswa (39,13%) tergolong dalam kategori sedang, 13 siswa (56,52%) tergolong dalam kategori rendah, serta tidak ada siswa yang tergolong dalam *kategori sangat baik dan sangat rendah*. Dalam penelitian ini juga diperoleh bahwa 4 soal (22,22%) dalam kategori sulit, 10 soal

(55,56%) dalam kategori sedang, dan 4 soal (22,22%) dalam kategori mudah. Kategori kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal untuk topik bentuk aljabar tergolong sedang, dan untuk topik persamaan dan fungsi dan pertidaksamaan tergolong rendah. Kategori kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal pada ranah pengetahuan dan penalaran tergolong sedang dan pada ranah penerapan tergolong rendah. Kesulitan yang dialami siswa dalam menyelesaikan soal-soal tersebut antara lain merasa rumit dengan soal yang diberikan, kurang cermat dalam membaca soal, dan kurang memahami maksud dari soalnya. Sedangkan dari segi materi, siswa kurang memahami bagaimana membuat rumus fungsi dan garis, memodelkan bentuk aljabar serta mengkaitkan materi aljabar dengan materi lain, misalkan geometri dan ada materi yang belum diajarkan, yaitu pertidaksamaan untuk pengetahuan, tetapi untuk ranah penalaran, materi pertidaksamaan dapat mengerjakan meskipun belum diajarkan.

Sebagai saran dari penelitian ini, untuk materi yang belum diajarkan yaitu pertidaksamaan, sekolah dapat memindahkan materi pertidaksamaan ke kelas VII, sehingga ketika diujikan soal aljabar model *TIMSS* siswa sudah siap. Untuk soal bentuk pertidaksamaan dengan ranah pengetahuan dapat diubah menjadi bentuk penalaran sehingga siswa dapat menyelesaikannya.

Ucapan Terima kasih

Peneliti mengucapkan terimakasih kepada Kementerian Ristek dan Pendidikan Tinggi dukungan dana penelitian melalui hibah penelitian hibah bersaing tahun 2016, melalui Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian Hibah Bersaing Nomor: 010/HB-LT/III/2016 tanggal 15 Maret 2016. Peneliti juga mengucapkan terimakasih kepada siswa kelas VIII SMP PL Srumbung, Magelang yang telah bersedia menjadi subyek ujicoba soal, beserta guru matematika SMP Kanisius Sleman, SMP PL Gantiwarno, SMP PL Wedi, dan SMP PL Srumbung sebagai mitra peneliti dalam *FGD* dan telah membantu keterlaksanaan dan kelancaran penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (Kemendikbud), 2013, *Materi Pelatihan Guru Implementasi Kurikulum 2013 SMP/MTs MATEMATIKA*, Badan Pengembangan Sumber Daya Manusia Pendidikan dan Kebudayaan dan Penjaminan Mutu Pendidikan, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta.
- [2] Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (Kemendikbud), 2013, *Matematika SMP/MTS Kelas VII*. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta.
- [3] Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (Kemendikbud), 2013, *Lampiran Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor Tahun 2013 Tentang Silabus Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah pada Kelas VII*. Badan Penelitian dan Pengembangan Pusat Kurikulum Dan Perbukuan Tahun 2013, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta.
- [4] Rudhito, M. Andy dan D. Arif Budi, 2015, *Perbandingan Soal Model TIMSS dan Kurikulum 2013*, prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2015 Universitas PGRI Indraprasta, Jakarta. (2015)

- [5] Rizta, Amrina dan Zulkardi dan Yusuf Hartono, 2013, *Pengembangan Soal Penalaran Model TIMSS Matematika SMP*, Jurnal Penelitian dan Evaluasi Pendidikan, Tahun 17 Nomor 2, UNY, Yogyakarta.
- [6] Rudhito, M. Andy dan D. Arif Budi Prasetyo, 2016, *Pengembangan Soal Matematika Model TIMSS Untuk Mendukung Pembelajaran Matematika SMP Kelas VII Kurikulum 2013*, Jurnal Cakrawala Pendidikan Tahun XXXV Nomor 1, UNY, Yogyakarta.
- [7] Prasetyo, Dominikus Arif B. dan M. Andy Rudhito, 2016, *Analisis Kemampuan dan Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Geometri Model TIMSS*, Prosiding SNIPS 2016 di ITB. (akan terbit).
- [8] Nazir, Moh., 2005, *Metode Penelitian*, Ghalia Indonesia, Bogor.
- [9] Suharsimi Arikunto, 2013, *Dasar-dasar Evaluasi Pendidikan*, Bumi Aksara, Jakarta.

Hubungan Antara Kemampuan Penalaran Matematis dan Disposisi Matematis Terhadap Prestasi Belajar Matematika Siswa Materi Kubus dan Balok di Kelas VIII G SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta Tahun Ajaran 2015/2016

Christina Novy Wijaya¹

Dominikus Arif Budi Prasetyo²

^{1,2}Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia

¹christinanovwijaya@gmail.com

²dominic_abp@usd.ac.id

Abstrak

Intelegensi merupakan salah satu faktor yang berpengaruh terhadap tinggi rendahnya prestasi belajar. Salah satu bagian dari intelegensi adalah kemampuan penalaran. Selain intelegensi, keberhasilan siswa dalam belajar juga dipengaruhi oleh usaha, pandangan dan kegiatan siswa yang disebut sebagai disposisi matematis. Peneliti menemukan fakta di lapangan, bahwa guru kurang melatih kemampuan menalar siswa. Selain itu, masih ada siswa yang disposisi matematis yang meliputi pandangan, percaya diri, serta usaha dalam pembelajaran kurang. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui (1) hubungan antara kemampuan penalaran matematis dengan prestasi belajar matematika siswa (2) hubungan antara disposisi matematis dengan prestasi belajar matematika siswa (3) hubungan secara bersamaan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi belajar matematika siswa. Penelitian ini menggunakan metode deskriptif kuantitatif. Sampel penelitian ini adalah 32 siswa kelas VIII G SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta tahun ajaran 2015/2016. Hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa (1) ada hubungan antara kemampuan penalaran matematis dengan prestasi belajar matematika, hal ini terlihat pada koefisien korelasi yang diberikan yaitu sebesar 0,423 dengan regresi $\hat{y} = 66,493 + 0,288x$. Dengan demikian setiap kenaikan sebesar satu poin kemampuan penalaran, akan memberikan pengaruh prestasi belajar sebesar 0,288. Kontribusi yang diberikan oleh faktor kemampuan penalaran sebesar 17,89% terhadap prestasi belajar sedangkan sisanya sebesar 82,11% dipengaruhi oleh faktor lain. (2) tidak ada hubungan antara disposisi matematis dan prestasi belajar matematika, hal ini terlihat pada koefisien korelasi yang diberikan yaitu sebesar 0,017. Kontribusi yang diberikan oleh faktor disposisi matematis sebesar 0,0289% terhadap prestasi belajar sedangkan sisanya sebesar 99,711% dipengaruhi oleh faktor lain. (3) tidak terdapat hubungan secara bersamaan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi belajar matematika siswa dikarenakan tidak memenuhi syarat korelasi berganda.

Kata Kunci: *Kemampuan Penalaran Matematis, Disposisi Matematis, Prestasi Belajar*

1. Pendahuluan

Banyak ahli matematika mengatakan bahwa “*Mathematics is the queen as well as the servant of all science*”, yang berarti matematika adalah ratu sekaligus pelayan semua ilmu pengetahuan (Frans Susilo,2012). Matematika merupakan pengetahuan yang berkenaan dengan gagasan, konsep-konsep dan simbol-simbol

yang abstrak serta berstruktur yang hubungan-hubungannya diatur secara logis (Herman Hudojo,2001:46).

Oleh karena matematika merupakan alat untuk mengembangkan cara berpikir dan merupakan pengetahuan yang berkenaan dengan konsep-konsep yang diatur secara logis maka dalam penerapannya dibutuhkan intelegensi. Intelegensi merupakan salah satu faktor yang berpengaruh terhadap tinggi rendahnya prestasi belajar (Mulyasa,2013:191). Salah satu bagian dari intelegensi adalah kemampuan penalaran. Menurut hasil TIMSS tahun 2011, Indonesia menempati posisi 36 dari 40 negara yang mengikuti dengan skor penalaran paling rendah yaitu 17 poin (dalam Mulis, Ina V.S, 2012).

Selain intelegensi, keberhasilan siswa dalam belajar sebagian besar terletak pada usaha, pandangan dan kegiatan belajar siswa tersebut. Menurut Kilpatrick, Swafford, dan Findel (2001:131), kecenderungan memandang matematika sebagai sesuatu yang berguna dan berharga, percaya bahwa dengan usaha tekun dan ulet dalam mempelajari matematika akan membuahkan hasil disebut disposisi matematis. Berdasarkan fakta yang ditemui peneliti di kelas VIII G SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta, beberapa siswa masih memiliki kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis yang rendah. Guru kurang mendorong siswa untuk menalar secara mandiri. Hal ini terlihat dari cara guru yang selalu menuntun siswa dalam menyelesaikan soal. Soal yang diberikan guru hanya pada taraf kesulitan sedang sehingga kurang melatih penalaran siswa.

Pada saat guru memberikan latihan soal kepada siswa, beberapa siswa terlihat aktif mengerjakan soal yang diberikan guru. Siswa tersebut memiliki rasa ingin tahu yang besar, percaya diri, tekun dan ulet dalam mengerjakan soal yang diberikan guru. Apabila ada soal yang tidak mereka pahami, mereka tidak segan untuk bertanya dengan gurunya. Namun disisi lain ada siswa yang masih belum memiliki rasa ingin tahu yang besar terhadap matematika. Mereka cenderung diam dan tidak percaya diri ketika guru memberikan latihan soal. Hal ini terlihat bahwa disposisi matematis siswa yang meliputi kecenderungan memandang matematika sebagai sesuatu yang berguna dan berharga, percaya diri, tekun dan ulet dalam mengerjakan soal matematika dan rasa ingin tahu terhadap matematika kurang.

Berdasarkan hasil wawancara kepada guru matematika, siswa yang rajin dalam mengerjakan soal memiliki prestasi belajar yang lebih tinggi dibanding siswa yang tidak mau mengerjakan latihan soal. Dengan melihat permasalahan yang ada, peneliti tertarik untuk mengadakan penelitian mengenai adakah hubungan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis terhadap prestasi belajar siswa. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui (1) hubungan antara kemampuan penalaran matematis dengan prestasi belajar matematika siswa (2) hubungan antara disposisi matematis dengan prestasi belajar matematika siswa (3) hubungan secara bersamaan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi belajar matematika siswa.

2. Tinjauan Pustaka

Penalaran menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (2008:950) yaitu a) cara atau perihal menggunakan nalar, pemikiran atau cara berpikir logis, b) hal mengembangkan atau mengendalikan sesuatu dengan nalar dan bukan dengan perasaan atau pengalaman, c) proses mental dalam mengembangkan pikiran dari beberapa fakta atau prinsip. Sedangkan menurut Jujun S. Suriasumantri (1999:42) penalaran merupakan proses berpikir dalam menarik kesimpulan yang berupa pengetahuan dan mempunyai karakteristik tertentu dalam menemukan kebenaran.

Disposisi matematis menurut Kilpatrick, Swafford, dan Findel (2001: 131) adalah kecenderungan memandang matematika sebagai sesuatu yang berguna dan berharga, percaya bahwa dengan usaha yang tekun dan ulet dalam mempelajari matematika akan membuahkan hasil dan melakukan perbuatan sebagai pembelajar yang efektif. Berdasarkan pengertian menurut Kilpatrick dkk, disposisi matematis meliputi pandangan, percaya diri dan usaha siswa dalam pembelajaran matematika. Disposisi matematis menurut Polking (dalam Heris Hendriana, 2014:91) meliputi tujuh komponen yaitu: (1) percaya diri dalam menggunakan matematika untuk memecahkan masalah, mengkomunikasikan ide dan gagasan, (2) fleksibel dalam menyelidiki gagasan matematika dan berusaha mencari metode alternatif untuk memecahkan masalah, (3) tekun dan ulet dalam mengerjakan tugas matematika, (4) memiliki minat, rasa ingin tahu dan daya temu dalam melakukan tugas matematika, (5) memiliki kecenderungan memonitor dan melakukan refleksi dari cara berpikir, (6) mengaplikasikan matematika ke dalam pengalaman sehari-hari, (7) mengapresiasi peran matematika dalam kultur dan nilai matematika sebagai alat dan bahasa.

Kata “prestasi” berasal dari bahasa Belanda yaitu *prestatie*, kemudian dalam bahasa Indonesia menjadi prestasi yang artinya hasil usaha (Arifin, 2009: 12). Menurut Mulyasa (2013:189) prestasi belajar adalah hasil yang diperoleh seseorang setelah menempuh kegiatan belajar. Hal ini tidak jauh berbeda dengan pendapat Sumadi (2006:297) prestasi dapat pula didefinisikan sebagai berikut : “nilai merupakan perumusan terakhir yang dapat diberikan oleh guru mengenai kemajuan/prestasi belajar siswa selama masa tertentu”. Berdasarkan pendapat di atas dapat disimpulkan bahwa prestasi belajar adalah hasil yang diperoleh seseorang setelah menempuh kegiatan belajar dalam kurun waktu tertentu dan ditunjukkan dengan nilai yang diberikan oleh guru. Nilai yang digunakan dalam penelitian ini adalah nilai ulangan harian siswa materi kubus dan balok.

3. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif kuantitatif. Penelitian dilaksanakan di SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta kelas VIII G pada semester genap tahun ajaran 2015/2016. Populasi dalam penelitian ini adalah 34 siswa kelas VIII G SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta. Sampel dalam penelitian ini adalah 32 siswa kelas VIII G SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta. Ukuran sampel yang diambil berdasarkan tabel penentuan jumlah sampel menurut Sugiyono (1999:12). Variabel yang digunakan dalam penelitian ini yaitu variabel bebas dan variabel terikat. Variabel bebas dalam penelitian ini adalah kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis, sedangkan variabel terikat dalam penelitian ini adalah prestasi belajar matematika.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode tes, angket, observasi dan wawancara. Tes yang digunakan dalam penelitian ini ada dua, yaitu tes kemampuan penalaran matematis dan tes prestasi belajar. Tes kemampuan penalaran matematis yang digunakan dalam penelitian ini bertujuan untuk mengukur kemampuan penalaran matematis siswa kelas VIII G SMP Pangudi Luhur 1 Yogyakarta. Tes penalaran yang digunakan berupa soal cerita yang berjumlah 20 soal dan pelaksanaan tes tersebut dibantu oleh Pusat Pelayanan Tes dan Konsultasi Psikologi (P2TKP) Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Tes prestasi belajar digunakan untuk mengukur sejauh mana pemahaman siswa tentang materi kubus dan balok yang disampaikan guru, sedangkan metode angket, observasi dan wawancara digunakan untuk mengetahui disposisi matematis siswa dalam pembelajaran matematika.

3.1. Teknik Analisis Data

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

3.1.1. Kategori Data Kemampuan Penalaran Matematis, Disposisi Matematis dan Prestasi Belajar

Data kemampuan penalaran matematis, disposisi matematis dan prestasi belajar kemudian dikategorikan menggunakan kategori menurut Saur M. Tampubolon (2013:35) dengan modifikasi.

Tabel 2. Kategori Penalaran, Disposisi dan Prestasi Belajar

Kategori	Interval
Sangat Tinggi (ST)	$80 < x \leq 100$
Tinggi (T)	$60 < x \leq 80$
Cukup (C)	$40 < x \leq 60$
Rendah (R)	$20 < x \leq 40$
Sangat Rendah (SR)	$0 \leq x \leq 20$

Keterangan: x adalah nilai penalaran, disposisi, dan prestasi belajar

3.1.2. Analisis Hasil Wawancara

Analisis wawancara digunakan untuk mengukur faktor penyebab kemampuan penalaran matematis, disposisi matematis, dan tes prestasi belajar siswa dan untuk mengklarifikasi apabila ada data penelitian yang diskonkordan. Hasil wawancara yang diperoleh kemudian ditulis ulang menjadi transkrip hasil wawancara.

3.1.3. Analisis Angket

Hasil jawaban angket siswa yang diperoleh kemudian dianalisis dengan skala Likert sehingga data tersebut dideskripsikan sebagai data kelompok. Hasil angket ini kemudian di kategorikan menggunakan kategori menurut Saur M. Tampubolon seperti pada Tabel 2.

3.1.4. Analisis Hasil Observasi

Hasil observasi yang diperoleh kemudian dianalisis dengan hasil angket dan hasil wawancara. Hal ini dilakukan untuk mengetahui indikator disposisi matematis yang dimiliki setiap siswa di kelas.

3.1.3. Analisis Korelasi Kemampuan Penalaran, Disposisi Matematis dan Prestasi Belajar Matematika

Analisis korelasi digunakan untuk mengetahui hubungan antara kemampuan penalaran dengan prestasi belajar, disposisi matematis dengan prestasi belajar serta hubungan antara kemampuan penalaran dan disposisi matematis dengan prestasi belajar.

3.1.3.1. Uji Normalitas

Uji normalitas digunakan untuk menganalisis apakah data kemampuan penalaran, disposisi dan prestasi belajar memenuhi sebaran kurva normal.

3.1.3.2. Uji Korelasi *Product Moment Pearson*

Korelasi merupakan angka yang menunjukkan arah dan kuatnya hubungan antara dua variabel atau lebih. Pada uji korelasi product moment, rumus menghitung koefisien korelasi adalah sebagai berikut.

$$r_{XY} = \frac{N \sum X_i Y_i - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{\sqrt{(N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2)(N \sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2)}} \quad (1)$$

3.1.3.3. Uji Korelasi Ganda

Korelasi ganda merupakan angka yang menunjukkan arah dan kuatnya hubungan antara dua variabel independen bersama-sama atau lebih dengan satu variabel dependen. Koefisien korelasi ganda dapat dicari dengan rumus berikut:

$$r_{X_1 X_2 Y} = \sqrt{\frac{r_{X_1 Y}^2 + r_{X_2 Y}^2 - 2(r_{X_1 Y})(r_{X_2 Y})(r_{X_1 X_2})}{1 - r_{X_1 X_2}^2}} \quad (2)$$

3.1.3.4. Uji Regresi Linear

Regresi linear digunakan untuk memprediksi besaran nilai variabel terikat yang dipengaruhi oleh variabel bebas. Nilai a dan b dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$b = \frac{n \sum_1^n XY - \sum_1^n X \cdot \sum_1^n Y}{\sum_1^n X^2 - (\sum_1^n X)^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (3)$$

Sehingga diperoleh :

$$\hat{y} = a + bx \quad (4)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Data kemampuan penalaran, disposisi matematis dan prestasi belajar dikelompokkan dengan ketentuan seperti pada Tabel 2. Berdasarkan pengelompokkan kategori skor kemampuan penalaran, sebanyak 2 orang atau sebesar 6,25% dari sampel penelitian memiliki kemampuan penalaran sangat tinggi, sebanyak 5 orang atau sebesar 15,625% dari sampel penelitian memiliki kemampuan penalaran tinggi, sebanyak 11 orang atau sebesar 34,375% dari sampel penelitian memiliki kemampuan penalaran cukup, sebanyak 13 orang atau sebesar 40,625% dari sampel penelitian memiliki kemampuan penalaran rendah, dan sebanyak 1 orang atau hanya sebesar 3,125% dari sampel penelitian memiliki kemampuan penalaran sangat rendah.

Berdasarkan pengelompokkan kategori skor disposisi matematis, sebanyak 2 orang atau sebesar 6,25% dari sampel penelitian memiliki disposisi yang sangat tinggi terhadap matematika, sebanyak 20 orang atau sebesar 62,5% dari sampel penelitian memiliki disposisi yang tinggi terhadap matematika, sebanyak 9 orang atau sebesar 28,125% dari sampel penelitian memiliki disposisi yang cukup terhadap matematika, dan sebanyak 1 orang atau hanya sebesar 3,125% dari sampel penelitian memiliki disposisi yang rendah sekali terhadap matematika, sedangkan berdasarkan pengelompokkan kategori skor prestasi belajar, sebanyak 15 orang atau sebesar 46,875% dari sampel penelitian memiliki prestasi belajar sangat tinggi, sebanyak 13 orang atau sebesar 40,625% dari sampel penelitian memiliki prestasi belajar matematika tinggi, dan sebanyak 4 orang atau hanya sebesar 12,50% dari sampel penelitian memiliki prestasi belajar cukup.

Untuk mengetahui ada tidaknya hubungan antara variabel bebas dan variabel terikat, baik antara kemampuan penalaran matematis dengan prestasi belajar, disposisi matematis dengan prestasi belajar maupun hubungan secara bersamaan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi belajar maka diperlukan uji korelasi dan uji regresi linear. Syarat untuk melakukan uji korelasi dan uji regresi adalah masing-masing variabel harus berdistribusi normal. Oleh karena itu, terlebih dahulu dilakukan uji normalitas atau uji syarat. Analisis data menggunakan perhitungan SPSS 17.

3.1. Uji Normalitas

3.1.1. Uji Normalitas Kemampuan Penalaran Matematis

Hipotesis :

H_0 : data kemampuan penalaran matematis berdistribusi normal

H_1 : data kemampuan penalaran matematis tidak berdistribusi normal

Taraf signifikansi (α) = 0,05

$D_{tabel} = 0,236$ (pada taraf signifikansi 0,05 dan $n = 32$)

Daerah Penolakan:

H_0 ditolak jika $D_{hitung} > D_{tabel}(0,236)$

Statistik Uji:

$$D_{hitung} = 0,192$$

Karena $D_{hitung} = 0,192 < D_{tabel}(0,236)$, sehingga tidak cukup bukti untuk menolak H_0 , maka keputusannya: data kemampuan penalaran matematis berdistribusi normal.

3.1.2. Uji Normalitas Disposisi Matematis

Hipotesis :

H_0 : data disposisi matematis berdistribusi normal

H_1 : data disposisi matematis tidak berdistribusi normal

Taraf signifikansi (α) = 0,05

$D_{tabel} = 0,236$ (pada taraf signifikansi 0,05 dan $n = 32$)

Daerah Penolakan:

H_0 ditolak jika $D_{hitung} > D_{tabel}(0,236)$

Statistik Uji:

$$D_{hitung} = 0,118$$

Karena $D_{hitung} = 0,118 < D_{tabel}(0,236)$, sehingga tidak cukup bukti untuk menolak H_0 , maka keputusannya: data disposisi matematis berdistribusi normal.

3.1.3. Uji Normalitas Prestasi Belajar

Hipotesis :

H_0 : data prestasi belajar matematika berdistribusi normal

H_1 : data prestasi belajar matematika tidak berdistribusi normal

Taraf signifikansi (α) = 0,05

$D_{tabel} = 0,236$ (pada taraf signifikansi 0,05 dan $n = 32$)

Daerah Penolakan:

H_0 ditolak jika $D_{hitung} > D_{tabel}(0,236)$

Statistik Uji:

$$D_{hitung} = 0,153$$

Karena $D_{hitung} = 0,153 < D_{tabel}(0,236)$, sehingga tidak cukup bukti untuk menolak H_0 , maka keputusannya: data prestasi belajar matematika berdistribusi normal.

Berdasarkan hasil uji normalitas, data kemampuan penalaran matematis, disposisi matematis dan prestasi belajar matematika berdistribusi normal. Oleh karena berdistribusi normal, untuk mengetahui adakah hubungan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi

belajar matematika maka dalam penelitian ini menggunakan uji korelasi *product moment*.

3.2. Korelasi Sederhana

3.2.1. Kemampuan Penalaran dan Prestasi Belajar Matematika

Hipotesis :

H_0 : tidak ada korelasi positif antara kemampuan penalaran dan prestasi belajar

H_1 : ada korelasi positif antara kemampuan penalaran dan prestasi belajar

Taraf signifikansi (α) = 0,05

$r_{tabel} = 0,349$ (pada taraf signifikansi 0,05 dan $n = 32$)

Daerah Penolakan:

H_0 ditolak jika $r_{hitung} > r_{tabel}(0,349)$

Statistik Uji:

$$r_{hitung} = 0,423$$

Karena $r_{hitung} = 0,423 > r_{tabel} = 0,349$, sehingga H_0 ditolak, maka keputusannya: Ada korelasi yang signifikan antara penalaran matematis dan prestasi belajar matematika.

$$R = r^2 = 0,423^2 = 0,178929$$

Persentase nilai R = 17,89%. Ini berarti, kemampuan penalaran matematis berkontribusi sebesar 17,89% terhadap prestasi belajar siswa, dan lainnya ditentukan oleh faktor lain.

3.2.2. Disposisi Matematis dan Prestasi Belajar Matematika

Hipotesis :

H_0 : tidak ada korelasi positif antara disposisi matematis dan prestasi belajar

H_1 : ada korelasi positif antara disposisi matematis dan prestasi belajar

Taraf signifikansi (α) = 0,05

$r_{tabel} = 0,349$ (pada taraf signifikansi 0,05 dan $n = 32$)

Daerah Penolakan:

H_0 ditolak jika $r_{hitung} > r_{tabel}(0,349)$

Statistik Uji:

$$r_{hitung} = 0,017$$

Karena $r_{hitung} = 0,017 < r_{tabel} = 0,349$, sehingga tidak cukup bukti untuk menolak H_0 , maka keputusannya: Tidak ada korelasi yang signifikan antara disposisi matematis dan prestasi belajar matematika.

$$R = r^2 = 0,017^2 = 0,000289$$

Persentase nilai R = 0,0289%. Ini berarti, disposisi matematis berkontribusi sangat kecil yaitu sebesar 0,0289% terhadap prestasi belajar siswa, dan lainnya ditentukan oleh faktor lain.

3.3. Regresi Linear Kemampuan Penalaran Matematis dan Prestasi Belajar

3.3.1. Uji Linearitas Regresi

Hipotesis :

H_0 : data kemampuan penalaran dengan prestasi belajar tidak berpola linear

H_1 : data kemampuan penalaran dengan prestasi belajar berpola linear

Taraf signifikansi (α) = 0,05

Kaidah Pengujian:

H_0 ditolak jika $F_{hitung} > F_{tabel}(4,17)$

Statistik Uji:

$$F_{hitung} = 6,543$$

Karena $F_{hitung} = 6,543 > F_{tabel} = 4,17$, sehingga H_0 ditolak, maka keputusannya: data kemampuan penalaran dengan prestasi belajar berpola linear.

3.3.2. Regresi Linear

Berdasarkan perhitungan dengan menggunakan SPSS, maka diperoleh:

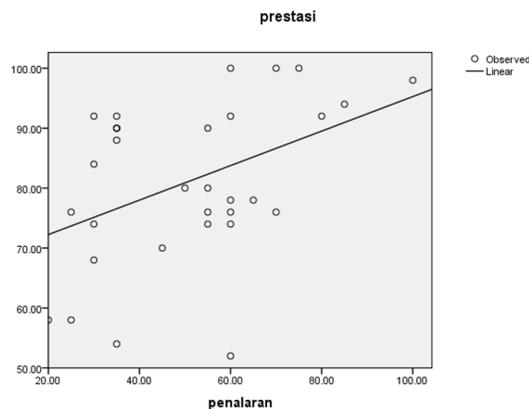
$$b = 0,288$$

$$a = 66,493$$

Jadi, persamaan regresi linear adalah

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\hat{y} = 66,493 + 0,288x$$



Gambar 1. Regresi Linier Kemampuan Penalaran dan Prestasi Belajar (n=32)

Ini berarti setiap kenaikan sebesar satu poin penalaran memberikan pengaruh sebesar 0,288 poin prestasi belajar.

3.4. Korelasi Ganda

Tidak terdapat korelasi ganda antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi belajar. Hal ini dikarenakan tidak adanya korelasi antara disposisi matematis dan prestasi belajar.

3.5. Pembahasan

3.5.1. Hubungan antara Kemampuan Penalaran dan Prestasi Belajar

Menurut Suparno (2003:30) anak yang mempunyai intelegensi matematis logis yang menonjol biasanya mempunyai nilai matematika yang baik. Hal tersebut menunjukkan bahwa kemampuan penalaran matematis siswa akan berpengaruh terhadap prestasi belajar matematika siswa. Berdasarkan hasil analisis di atas, penelitian membuktikan bahwa ada hubungan yang positif dan signifikan antara kemampuan penalaran dan prestasi belajar. Koefisien korelasi antara kemampuan penalaran dan prestasi belajar sebesar 0,423. Persamaan regresinya $\hat{y} = 66,493 + 0,288x$, yang artinya setiap kenaikan sebesar satu poin kemampuan penalaran memberikan pengaruh sebesar 0,288 poin prestasi belajar.

Kontribusi yang diberikan oleh faktor kemampuan penalaran terhadap prestasi belajar adalah r_{xy} sebesar $0,423^2 = 0,178929$ atau setara dengan 17,89 % sedangkan sisanya sebesar 82,11% dipengaruhi oleh faktor lain. Dengan kata lain kemampuan penalaran berpengaruh 17,89 % terhadap prestasi belajar dan 82,11% dipengaruhi oleh faktor lain. Adapun faktor lain yang dapat mempengaruhi prestasi belajar seperti kemampuan hitung, minat, bakat, perhatian, keterampilan maupun faktor lingkungan baik dari luar, sekolah maupun masyarakat.

3.5.1. Hubungan antara Disposisi Matematis dan Prestasi Belajar

Menurut Kilpatrick, Swafford, dan Findel (2001:131), disposisi matematis adalah kecenderungan memandang matematika sebagai sesuatu yang berguna dan berharga, percaya bahwa dengan usaha yang tekun dan ulet dalam mempelajari matematika akan membuahkan hasil dan melakukan perbuatan sebagai pembelajar yang efektif. Disposisi siswa terhadap matematika adalah salah satu faktor dalam menentukan keberhasilan pendidikan. Berdasarkan hasil analisis di atas, dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat hubungan antara disposisi matematis dan prestasi belajar. Hal ini berarti apabila siswa mempunyai disposisi matematis yang baik belum tentu prestasi belajar yang dicapai oleh siswa tersebut juga akan baik, begitu sebaliknya.

Koefisien korelasi antara disposisi matematis dan prestasi belajar sebesar 0,017. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa disposisi matematis tidak berpengaruh pada prestasi belajar. Kontribusi yang diberikan oleh faktor disposisi matematis terhadap prestasi belajar adalah r_{xy} sebesar $0,017^2 = 0,000289$ atau setara dengan 0,0289 % sedangkan sisanya sebesar 99,711% dipengaruhi oleh faktor lain. Adapun faktor lain yang dapat mempengaruhi prestasi belajar seperti kemampuan hitung, minat, bakat, perhatian, maupun faktor lingkungan baik dari keluarga, sekolah maupun masyarakat.

Berdasarkan hasil wawancara terhadap beberapa siswa, pernyataan yang ada di kuesioner disposisi matematis mudah dipahami, dan sebagian besar dari mereka mengisi kuesioner dengan jujur. Namun beberapa siswa tidak konsisten dalam mengisi kuesioner disposisi matematis. Hal ini diperkuat dengan hasil analisis wawancara siswa. Selain itu pada saat mengisi kuesioner disposisi matematis, ada tiga siswa yang memang tidak paham dengan arti dari pernyataan yang diberikan. Ketidakkonsistenan siswa dalam menjawab dan ketidakpahaman siswa dalam mengerti isi pernyataan dalam kuesioner menyebabkan tidak adanya korelasi antara disposisi matematis dan prestasi belajar matematika.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Hubungan antara Kemampuan Penalaran Matematis dengan Prestasi Belajar Siswa

Berdasarkan hasil analisis diperoleh kesimpulan bahwa ada hubungan antara kemampuan penalaran matematis dengan prestasi belajar siswa. Koefisien korelasi yang diberikan yaitu sebesar 0,423. Semakin meningkatnya kemampuan penalaran siswa maka prestasi belajar akan semakin meningkat. Hal ini ditunjukkan dengan adanya korelasi yang positif antara kemampuan penalaran matematis dengan prestasi belajar siswa. Persamaan regresinya $\hat{y} = 66,493 + 0,288x$, yang artinya setiap kenaikan sebesar satu poin kemampuan penalaran akan memberikan pengaruh sebesar 0,288 poin prestasi

belajar. Kontribusi yang diberikan oleh faktor kemampuan penalaran sebesar 17,89 % terhadap prestasi belajar sedangkan sisanya sebesar 82,11% dipengaruhi oleh faktor lain. Adapun faktor lain yang dapat mempengaruhi prestasi belajar seperti disposisi matematis, kemampuan hitung, minat, bakat, perhatian, maupun faktor lingkungan baik dari keluarga, sekolah maupun masyarakat dan lain sebagainya baik faktor intern maupun faktor ekstern.

4.2. Hubungan antara Disposisi Matematis dengan Prestasi Belajar Siswa

Berdasarkan hasil analisis diperoleh kesimpulan bahwa tidak ada hubungan antara disposisi matematis dengan prestasi belajar siswa secara statistik. Hal ini ditunjukkan dengan koefisien korelasi yang diberikan yaitu sebesar 0,017. Kontribusi yang diberikan oleh faktor disposisi matematis sebesar 0,0289 % terhadap prestasi belajar sedangkan sisanya sebesar 99,711% dipengaruhi oleh faktor lain. Adapun faktor lain yang dapat mempengaruhi prestasi belajar seperti kemampuan penalaran, kemampuan hitung, minat, bakat, perhatian, maupun faktor lingkungan baik dari keluarga, sekolah maupun masyarakat dan lain sebagainya baik faktor intern maupun faktor ekstern.

4.3. Hubungan Secara Bersamaan antara Kemampuan Penalaran Matematis dan Disposisi Matematis dengan Prestasi Belajar Siswa

Berdasarkan hasil analisis diperoleh ternyata tidak terdapat hubungan secara bersamaan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi belajar siswa. Hal ini dikarenakan tidak adanya hubungan antara disposisi matematis dengan prestasi belajar sehingga korelasi berganda antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis dengan prestasi belajar siswa tidak dapat dihitung karena tidak memenuhi syarat.

4.4. Saran

Dengan adanya penelitian ini memberikan informasi tentang hubungan antara kemampuan penalaran matematis dan disposisi matematis siswa terhadap prestasi belajar siswa. Guru dapat mengupayakan peningkatan kemampuan penalaran dan disposisi matematis siswa sehingga prestasi belajar matematika siswa akan lebih maksimal.

Daftar Pustaka

- [1] Arifin, Zainal. 2009. *Evaluasi Pembelajaran*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- [2] Frans Susilo. 2012. *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [3] Heris Hendriana dan Utari Soemarmo. 2014. *Penilaian Pembelajaran Matematika*. Bandung: PT Refika Aditama.
- [4] Herman Hudojo. 2001. *"Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika (Edisi Revisi)"*. Bandung: JICA.
- [5] Jujun S. Suriasumantri. 1999. *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer*. Jakarta: Sinar Harapan.
- [6] *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. 2008. Pusat Bahasa Departemen Pendidikan Nasional: Balai Pustaka.
- [7] Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findel, B. 2001. *"Adding It Up : Helping Children Learn Mathematics"*. Washington, DC : National Academy – Press.

- [8] Mullis, Ina dkk. 2012. *TIMSS 2011 International Result in Mathematics*. IEA: Boston College.
- [9] Mulyasa. 2013. *Implementasi Kurikulum 2013*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya
- [10] Sumadi Suryabrata. 2006. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Raja Grafindo Persada.
- [11] Suparno, Paul. 2004. *Teori Inteligensi Ganda dan Aplikasinya di Sekolah*. Yogyakarta: Kanisius.
- [12] Tampubolon, Saur M. 2013. *Penelitian Tindakan Kelas: Untuk Pengembangan Profesi Pendidik dan Keilmuan*. Jakarta: Erlangga.
- [13] Yamin, Sofyan dkk. 2011. *Regresi dan Korelasi dalam Genggaman Anda Aplikasi dengan Software SPSS, EViews, MINITAB, dan STATGRAPHICS*. Jakarta: Salemba Empat.

Upaya untuk Mengatasi Kesulitan Belajar Matematika dengan Diagnosis dan Pengajaran Remedial

Yoanna Krisnawati¹⁾, St. Suwarsono²⁾

1) Mahasiswa Program Magister Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta,
yoannakrisnawati@gmail.com

2) Dosen Program Magister Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta,
stsuwarsono@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini dilaksanakan dengan tujuan untuk mengetahui: (1) letak kesulitan belajar matematika yang dialami oleh subjek, (2) penyebab kesulitan belajar matematika tersebut, dan (3) dampak pengajaran remedial yang telah dilaksanakan sebagai upaya untuk mengatasi kesulitan belajar matematika yang dialami oleh subjek penelitian.

Penelitian ini merupakan penelitian studi kasus yang bersifat eksploratif dengan pendekatan kualitatif dan didukung dengan pendekatan kuantitatif. Subjek penelitian adalah dua orang siswa SMP kelas VIII, yang mengalami kesulitan belajar matematika. Kesulitan belajar matematika tersebut hanya dibatasi pada topik persamaan garis lurus, sistem persamaan linear dua variabel dan teorema Pythagoras. Upaya untuk mengatasi kesulitan belajar matematika yang dialami oleh subjek penelitian, yaitu menggunakan prosedur diagnosis dan pengajaran remedial.

Hasil penelitian menunjukkan subjek pertama (S1) dan subjek kedua (S2) mengalami kesulitan yang berbeda pada beberapa bagian dari topik persamaan garis lurus, sistem persamaan linear dua variabel, serta teorema Pythagoras. Kesulitan yang dialami S1 dan S2 disebabkan oleh beberapa faktor yang berbeda pula di antara mereka berdua. Upaya untuk mengatasi kesulitan belajar tersebut dengan melaksanakan pengajaran remedial yang disesuaikan dengan karakteristik setiap subjek penelitian. Hasil dari penelitian ini memperlihatkan dampak positif dari pengajaran remedial dengan ditunjukkan oleh skor dan perkembangan pekerjaan siswa pada tes evaluasi akhir.

Kata kunci: *kesulitan belajar matematika, diagnosis, pengajaran remedial, persamaan garis lurus, sistem persamaan linear, Teorema Pythagoras.*

1. Pendahuluan

Kesulitan belajar merupakan salah satu kendala yang dialami oleh siswa dalam mencapai tujuan pembelajaran. Kesulitan belajar khususnya pada pembelajaran matematika masih banyak dialami oleh siswa di sekolah. Faktor yang menyebabkan terjadinya kesulitan belajar juga beragam. Menurut Burton dalam Entang (1984) faktor penyebab kesulitan belajar dapat dikelompokkan menjadi dua bagian, yaitu berasal dari dalam (faktor internal) dan berasal dari luar diri siswa (faktor eksternal).

Selain itu, letak kesulitan belajar dari setiap siswa belum tentu sama. Dengan demikian, penanganan kesulitan belajar siswa sebaiknya disesuaikan dengan faktor penyebab dan letak kesulitan belajar siswa tersebut, supaya usaha atau upaya penanganan yang dilaksanakan dapat efektif dan efisien dalam menyembuhkan kesulitan belajar yang dialami.

Artikel ini bertujuan untuk mengetahui letak kesulitan belajar dalam pembelajaran matematika, penyebab kesulitan belajar tersebut, dan dampak dari tindakan remediasi yang dilaksanakan sebagai upaya untuk mengatasi kesulitan belajar tersebut. Permasalahan pada artikel ini hanya dibatasi pada upaya mengatasi kesulitan belajar yang dialami oleh siswa pada pembelajaran matematika dengan menggunakan prosedur diagnosis kesulitan belajar dan pengajaran remedial menurut Entang (1984) dan hanya dibatasi pada topik persamaan garis lurus, sistem persamaan linear dua variabel, dan teorema Pythagoras. Subjek penelitian ini adalah dua orang siswa kelas VIII SMP Maria Immaculata Yogyakarta tahun ajaran 2014/2015, yang termasuk ke dalam dua peringkat terendah pada tes penelaahan status, dan penyebab kesulitan belajar bukan disebabkan oleh kecacatan fisik atau mental.

2. Landasan Teori

Partowisastro dan Hadisuprpto (1984) mendefinisikan kesulitan belajar ke dalam tiga definisi. Pertama, kesulitan belajar ada apabila seseorang tidak dapat memenuhi harapan-harapan yang disyaratkan dari yang bersangkutan. Kedua, kesulitan atau permasalahan belajar muncul apabila seseorang berada di bawah taraf perilaku teman-teman sebayanya pada umumnya. Ketiga, kesulitan atau permasalahan belajar muncul apabila seseorang memiliki kemampuan yang sebenarnya melebihi teman-teman sebayanya namun kemampuan tersebut tidak dapat ditunjukkan dalam bentuk prestasi yang sesuai. Sedangkan Djamarah (2011) menyimpulkan bahwa kesulitan belajar adalah keadaan dimana seseorang tidak dapat berkembang secara wajar. Sementara itu, Muhibbin Syah (2008) merangkum bahwa kesulitan belajar berarti menurunnya kinerja akademik, baik yang dialami oleh siswa dengan kemampuan rendah atau siswa dengan kemampuan tinggi. . Trii Wijayanti (2014) menyimpulkan bahwa kesulitan belajar merupakan suatu keadaan dimana anak didik tidak dapat menyerap pelajaran dengan sebagaimana mestinya, dan kesulitan itu dapat disebabkan karena faktor dari dalam diri sendiri atau dari keadaan sekitar anak didik. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa kesulitan belajar merupakan hambatan yang muncul dalam proses pembelajaran yang dialami oleh seseorang dengan kemampuan rendah atau sangat tinggi, dan disebabkan karena suatu faktor tertentu sehingga dia tidak dapat berkembang secara optimal. Menurut Muhibbin Syah (2008) faktor penyebab kesulitan belajar siswa dapat ditinjau dari dalam diri siswa (faktor internal) dan dari luar diri siswa (faktor eksternal). Faktor dari dalam diri siswa meliputi gangguan psiko-fisik, sedangkan yang dari luar meliputi semua situasi lingkungan yang tidak mendukung siswa. Adapun faktor-faktor yang mempengaruhi kesulitan belajar menurut Slameto (2003, dalam Trii Wijayanti (2014)) ada dua, yaitu faktor intern dan faktor ekstern. Yang termasuk dalam faktor intern adalah faktor fisiologis dan faktor psikologi. Faktor-faktor yang termasuk dalam faktor psikologis yang memengaruhi proses belajar menurut Slameto (1999, dalam Trii Wijayanti (2014)), antara lain: 1) perhatian, 2) bakat, 3) minat, 4) motivasi.

Adapun prosedur diagnosis kesulitan belajar menurut Entang (1984) terdiri dari beberapa tahap, antara lain: 1) Identifikasi siswa yang mengalami kesulitan

belajar, 2) Lokalisasi letak kesulitan (permasalahan), 3) Lokalisasi jenis faktor dan sifat yang menyebabkan mereka mengalami kesulitan, 4) Perkiraan beberapa kemungkinan cara yang dapat ditempuh untuk mengatasi kesulitan belajar tersebut, 5) Penetapan kemungkinan cara mengatasi kesulitan belajar tersebut, 6) Pelaksanaan tindakan untuk mengatasi kesulitan belajar tersebut. Lokalisasi jenis faktor kesulitan belajar dapat dilakukan dengan beberapa cara. Secara garis besar faktor kesulitan dapat timbul dari dua hal, yaitu:

- 1) Faktor internal
 - a) Kelemahan mental, faktor kecerdasan, intelegensi, atau kecakapan/ bakat khusus tertentu yang dapat diketahui melalui tes tertentu.
 - b) Kelemahan fisik, panca indra, syaraf, kecacatan, karena sakit, dan sebagainya.
 - c) Gangguan yang bersifat emosional.
 - d) Sikap dan kebiasaan yang salah dalam mempelajari bahan pelajaran-pelajaran tertentu.
 - e) Belum memiliki pengetahuan dan kecakapan dasar yang dibutuhkan untuk memahami bahan lebih lanjut.
- 2) Faktor eksternal
 - a) Situasi atau proses belajar mengajar yang tidak merangsang siswa untuk aktif antisifatif.
 - b) Sifat kurikulum yang kurang fleksibel.
 - c) Ketidakteraturan pola dan standar administrasi.
 - d) Beban studi yang terlampau berat.
 - e) Metode mengajar yang kurang memadai.
 - f) Sering pindah sekolah.
 - g) Kurangnya alat dan sumber belajar untuk kegiatan belajar mengajar.
 - h) Situasi rumah yang kurang mendorong untuk melakukan aktivitas belajar.

Untuk dapat mengenal faktor-faktor di atas, maka diperlukan beberapa cara dan alat. Cara dan alat tersebut antara lain:

- a) Tes kecerdasan
- b) Tes bakat khusus
- c) Skala sikap baik yang sudah standar maupun yang secara sederhana dibuat oleh guru
- d) Inventory
- e) Wawancara dengan siswa yang bersangkutan
- f) Mengadakan observasi yang intensif baik di dalam maupun diluar kelas
- g) Wawancara dengan guru dan wali kelas, dan dengan orang tua atau teman-temannya bila diperlukan.

Sementara itu, prosedur remediasi atau pengajaran remedial untuk mengatasi kesulitan belajar menurut Entang (1984) adalah sebagai berikut: 1) Menelaah kembali siswa yang akan diberi bantuan, 2) Merencanakan alternatif tindakan, 3) Melakukan tindakan tersebut 4) Melakukan evaluasi pengajaran remedial. Fuadi, Hisyam (2015) mengartikann bahwa remediasi merupakan kegiatan yang dilakukan untuk memperbaiki kekeliruan siswa. Adapun tujuannya menurut Fuadi, Hasyam (2015) adalah membantu siswa yang mengalami kesulitan dalam menguasai kompetensi yang telah ditentukan supaya dapat mencapai hasil belajar yang lebih baik.

Penelitian yang hampir sama pernah dilakukan oleh Angelina Hesti Pradita (2012). Di dalam penelitiannya, penulis bertujuan untuk mengatasi kesulitan belajar

siswa pada pokok bahasan penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, dengan diagnosis dan pengajaran remedial. Subjek penelitian ini adalah VIIB SMP Kanisius Kalasan.

3. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian studi kasus yang bersifat eksploratif dengan pendekatan kualitatif yang didukung oleh pendekatan kuantitatif. Objek penelitian ini adalah kesulitan belajar dalam pembelajaran matematika yang dialami oleh dua orang siswa kelas VIII. Data yang diperoleh berupa hasil tes penelaahan status, hasil tes diagnostik, wawancara dengan subjek penelitian, wawancara dengan guru dan wali kelas, serta deskripsi pelaksanaan pengajaran remedial. Dengan demikian, instrumen pendukung yang digunakan adalah soal tes penelaahan status, soal tes diagnostik, lembar pertanyaan wawancara, rancangan pengajaran remedial, dan soal tes evaluasi.

Instrumen tes penelaahan status diujicobakan terlebih dahulu sebelum digunakan. Tujuan uji coba ini untuk mengetahui tingkat validitas soal dan reliabilitas instrumen. Kemudian, soal tes penelaahan status yang telah dievaluasi dan direvisi diberikan kepada seluruh siswa kelas VIII F, dan hasil dari tes digunakan untuk menentukan subjek penelitian. Berikut adalah kisi-kisi tes penelaahan status tersebut:

Tabel 1

Kisi-kisi soal tes penelaahan status

No	Kompetensi Dasar	Indikator	Banyak Soal
1.	Menentukan gradien, persamaan dan grafik garis lurus.	1.1 Menjelaskan pengertian dan menentukan gradien garis lurus dalam berbagai bentuk	2
		1.2 Menentukan persamaan garis lurus yang melalui dua titik dan melalui satu titik dengan gradien tertentu	2
		1.3 Menggambar grafik garis lurus	1
2.	Menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel	2.1 Menyebutkan perbedaan PLDV dan SPLDV	1
		2.2 Menentukan akar SPLDV dengan substitusi dan eliminasi	1
3.	Membuat model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel	3.1 Membuat model matematika dari masalah sehari-hari yang berkaitan dengan SPLDV	1
4.	Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel dan penafsirannya	4.1 Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel dan penafsirannya	1
		4.2 Menyelesaikan SPLDV dengan menggunakan grafik garis lurus	1
5.	Menggunakan Teorema Pythagoras untuk menentukan panjang sisi-sisi segi-tiga siku-siku.	5.1 Menemukan Teorema Pythagoras	1
		5.2 Menghitung panjang sisi segitiga siku-siku jika dua sisi lain diketahui.	1
		5.3 Menghitung perbandingan sisi sisi segitiga siku-siku istimewa (salah satu sudutnya 30° , 45° , 60°)	1
6	Memecahkan masalah pada bangun datar yang berkaitan dengan Teorema Pythagoras.	6.1 Menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa	1
		6.2 Menghitung panjang diagonal pada bangun datar, misal persegi, persegipanjang, belah-ketupat, dsb	1

Subjek penelitian yang telah ditentukan kemudian diberi tes diagnostik untuk mengetahui letak kesulitan belajar mereka. Instrumen tes diagnostik disusun dengan menyesuaikan hasil tes penelaahan status dari masing-masing subjek penelitian.

Kemudian, untuk alat atau cara yang dilakukan untuk menentukan faktor penyebab kesulitan belajar yang dialami, yaitu dengan mewawancarai guru matapelajaran matematika, wali kelas, dan setiap subjek penelitian. Informasi yang digali dari guru dan wali kelas adalah berkaitan dengan prestasi subjek, karakteristik belajar subjek, dan informasi tentang hal-hal yang mungkin dapat mengganggu subjek penelian dalam melaksanakan proses belajar. sedangkan informasai yang digali dari subjek penelitian berkaitan dengan kebiasaan belajar, dan penyebab kesulitan yang mereka alami. Setelah letak dan faktor penyebab kesulitan belajar diketahui, peneliti menyusun racangan pengajaran remedial yang akan dilaksanakan, dan diakhiri dengan memberikan tes evaluasi kepada setiap subjek penelitian untuk mengetahui dampak dari upaya penanganan kesulitan belajar siswa.

3. Hasil dan Pembahasan

Terdapat tiga orang siswa yang termasuk kedalam dua peringkat terendah pada tes penelaahan status. S1 mendapatkan skor 2, serta S2 dan S3 mendapatkan skor 3. Kemudian, untuk memperkuat pemilihan subjek penelitian, dilakukan wawancara dengan wali kelas dan guru matapelajaran matematika. Pada kegiatan wawancara terebut, diperoleh informasi bahwa berdasarkan pengamatan guru dan wali kelas kemungkinan penyebab kesulitan S1 karena kemampuan memahami materi yang lemah. Sedangkan, untuk S2 disebabkan oleh faktor teman sepermainan, dalam hal ini S2 memiliki kecenderungan bermain dan teman sepermainnya kurang bersikap positif dalam pembelajaran. Kemudian, untuk S3 guru menyampaikan bahwa dia sangat sulit berkonsentrasi dan sering tidak masuk sekolah. S3 juga mengalami gangguan psikologis yang muncul dari dalam dirinya sendiri dan karena faktor orang tua. Berbekal informasi tersebut peneliti melakukan wawancara kepada ketiga siswa ini dan memberi mereka sedikit tes. Hal ini dilakukan untuk memperkuat alasan pemilihan subjek penelitian. Berdasarkan hasil yang diperoleh, terbukti bahwa S3 sangat sulit berkonsentrasi dan dia membutuhkan pertolongan dari pihak lain selain peneliti. Oleh karena itu, subjek yang dipilih adalah S1 dan S2.

Kedua subjek, yaitu S1 dan S2, kemudian diberikan tes diagnostik dan diwawancarai untuk mengetahui letak dan faktor penyebab kesulitan belajar. Berikut adalah indikator dan tujuan pembelajaran tes diagnostik untuk kedua subjek:

Tabel 2

Indikator dan tujuan pembelajaran Tes Diagnostik untuk S1 dan S2

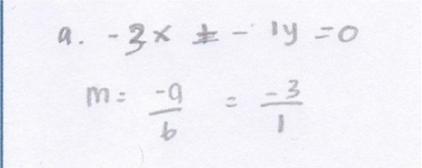
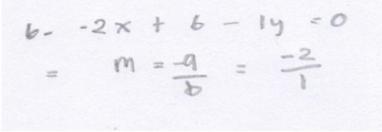
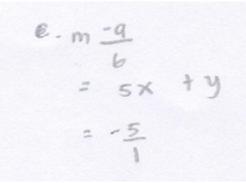
NO	INDIKATOR	TUJUAN PEMBELAJARAN
1	1.1 Menjelaskan pengertian dan menentukan gradien garis lurus dalam berbagai bentuk.	1.1.1 Menentukan gradien garis dari grafik
		1.1.2 Menentukan gradien dari persamaan garis
		1.1.3 Menjelaskan pengertian gradien
2	1.2 Menentukan persamaan garis lurus yang melalui dua titik dan melalui satu titik dengan gradien tertentu	1.2.1 Menentukan rumus persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik (x_1, y_1)
		1.2.2 Menentukan persamaan garis yang melalui satu titik dan diketahui gradiennya
		1.2.3 Menentukan rumus persamaan garis yang melalui dua titik.
		1.2.4 Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.
		1.2.5 Mengetahui persamaan umum garis lurus.
3	1.3 Menggambar grafik garis lurus	1.3.1 Menggambar grafik garis lurus jika diketahui persamaannya
4	2.1 Menyebutkan perbedaan PLDV dan SPLDV	2.1.1 Mengetahui sistem persamaan linear dua variabel dan persamaan linear dua variabel
		2.1.2 Mengingat persamaan linear satu variabel

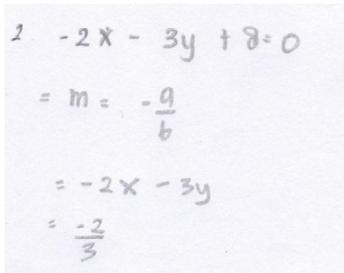
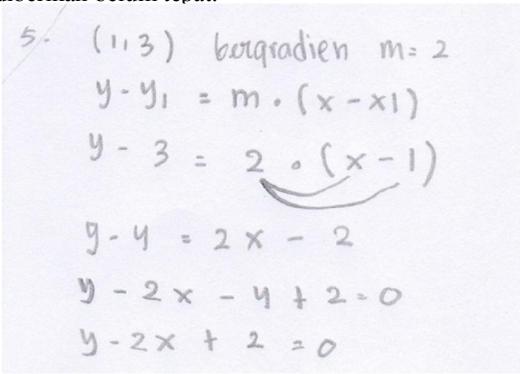
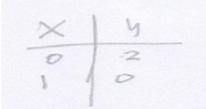
5	2.2 Menentukan penyelesaian dari SPLDV dengan substitusi dan eliminasi	2.2.1 Menentukan penyelesaian dari SPLDV
6	4.1 Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel dan penafsirannya	4.1.1 Menggunakan SPLDV untuk menyelesaikan Permasalahan sehari-hari yang berkaitan.
7	4.2 Menyelesaikan SPLDV dengan menggunakan grafik garis lurus	4.2.1 Menyelesaikan SPLDV dengan menggunakan grafik garis lurus
8	5.1 Menemukan Teorema Pythagoras	5.1.1 Menyebutkan Teorema Pythagoras
9	5.2 Menghitung panjang sisi segitiga siku-siku jika dua sisi lain diketahui.	5.2.1 Menggunakan Teorema Pythagoras untuk pemecahan masalah
10	6.1 Menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa	6.1.1 Menentukan perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga sama kaki.
		6.1.2 Mengenal arti perbandingan
11	6.2 Menghitung panjang diagonal pada bangun datar, misal persegi, persegipanjang, belah-ketupat, dsb	6.2.1 menentukan panjang diagonal suatu bangun datar
		6.2.2 Mengenal diagonal bangun datar

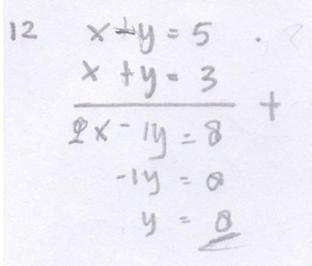
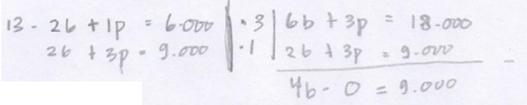
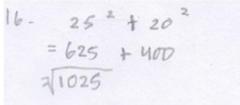
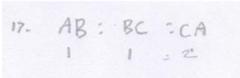
Berikut adalah letak kesulitan belajar yang dialami subjek penelitian dengan ditunjukkan oleh ketercapaian tujuan pembelajaran pada tes diagnostik:

Tabel 3

Analisis Tes Diagnostik S1

TUJUAN PEMBELAJARAN	URAIAN	KETERANGAN (ketercapaian dari tujuan pembelajaran)
1.1.1 Menentukan gradien garis dari grafik	Tidak dapat menjawab dengan tepat	Belum Tercapai
1.1.2 Menentukan gradien dari persamaan garis	<p>S1 belum dapat menjawab soal nomor 2a dengan tepat. Soal yang diberikan adalah suatu persamaan $y = 3x$, lalu dia mengerjakan dengan cara sebagai berikut:</p>  <p>Sedangkan, untuk soal nomor 2b, 2c, dan 2d, S1 dapat memperoleh gradiennya akan tetapi penulisannya belum tepat.</p>  	Belum Tercapai

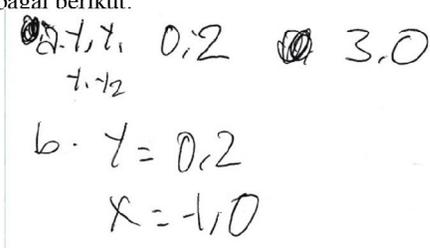
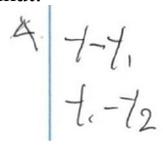
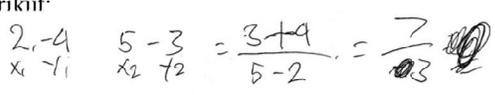
		
1.1.3 Menjelaskan pengertian gradien	S1 belum memahami dengan baik, pengertian gradien.	Belum Tercapai
1.2.1 Menentukan rumus persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik (x_1, y_1)	Pada mulanya S1 tidak bisa menjawab pertanyaan no. 4 ini. Akan tetapi S1 mampu mengingatnya.	Tercapai
1.2.2 Menentukan persamaan garis yang melalui satu titik dan diketahui gradiennya	S1 mampu mengerjakan soal no 5. Akan tetapi terjadi ketidak telitian, sehingga hasil dari jawaban yang diberikan belum tepat. 	Tercapai
1.2.3 Menentukan rumus persamaan garis yang melalui dua titik.	S1 belum dapat menyebutkan rumus untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.	Belum tercapai
1.2.4 Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.	S1 tidak dapat mengerjakan soal.	Belum tercapai
1.2.5 Mengetahui persamaan umum garis lurus.	S1 tidak dapat menyebutkan salah satu persamaan umum garis lurus.	Belum Tercapai
1.3.1 Menggambar grafik garis lurus jika diketahui persamaannya	S1 mampu melalui tahap pertama dalam melukis garis lurus jika diketahui persamaannya, yaitu menentukan titik potong terhadap sumbu- x dan sumbu- y . Akan tetapi S1 tidak memahami makna dari pasangan berurutan antara (x, y) , sehingga S1 tidak dapat menemukan dengan tepat pasangan berurutan tersebut. Sebagai contoh, pada soal nomor 9a persamaan garis yang diketahui adalah $2y + x = 6$ dan S1 menjawabnya dengan cara sebagai berikut: 	Belum Tercapai

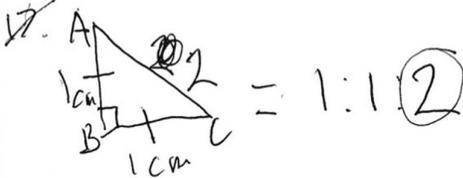
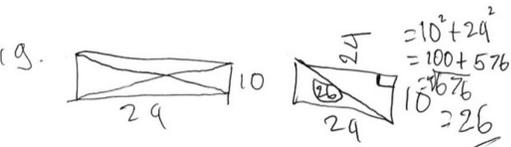
		Oleh karena itu, grafik yang dibuat juga tidak tepat.	
2.1.1	Mengetahui sistem persamaan linear dua variabel dan persamaan linear dua variabel	S1 dapat memberikan contoh untuk PLDV, dan dia memahami maksud dari PLDV tersebut. Sedangkan untuk contoh SPLDV, dia belum dapat menyebutkannya dengan tepat.	Belum Tercapai untuk SPLDV
2.1.2	Mengingat persamaan linear satu variabel	S1 memahami maksud dari persamaan linear satu variabel, dan dapat memberikan contohnya.	Tercapai
2.2.1	Menentukan penyelesaian dari SPLDV	S1 belum memahami cara menentukan himpunan penyelesaian dari SPLDV. Hal ini terlihat dari hasil pekerjaannya berikut ini: 	Belum Tercapai
4.1.1	Menggunakan SPLDV untuk menyelesaikan Permasalahan sehari-hari yang berkaitan.	S1 telah mampu membuat model matematika dari soal cerita yang diberikan. Akan tetapi, dia tidak dapat menyelesaikannya dengan baik karena dia belum memahami metode eliminasi yang dia gunakan untuk menjawab pertanyaan pada soal ini. 	Belum Tercapai
4.2.1	Menyelesaikan SPLDV dengan menggunakan grafik garis lurus	S1 sama sekali tidak mengingat cara untuk menyelesaikan SPLDV dengan menggunakan metode grafik.	Belum Tercapai
5.1.1	Menyebutkan teorema Pythagoras	S1 dapat menentukan hubungan antara panjang sisi miring dengan panjang kedua sisi siku-sikunya.	Tercapai
5.2.1	Menggunakan teorema Pythagoras untuk pemecahan masalah	S1 belum dapat mengaplikasikan teorema Pythagoras dalam pemecahan masalah. 	Belum Tercapai
6.1.1	Menentukan perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga sama kaki.	S1 belum dapat menentukan perbandingan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku. Hal ini terlihat dari hasil pekerjaan berikut ini: 	Belum Tercapai

	Ket: panjang AC merupakan sisi miring dari segitiga siku-siku yang diketahui.	
6.1.2 Mengenal arti perbandingan	S1 dapat menjawab persoalan yang diberikan.	Tercapai
6.2.1 menentukan panjang diagonal suatu bangun datar	S1 tidak dapat menentukan panjang diagonal sebuah persegi panjang. Dia juga tidak dapat mengaitkannya dengan teorema Pythagoras.	Belum Tercapai
6.2.2 Mengenal diagonal bangun datar	S1 dapat menyebutkan diagonal dari persegi panjang	Tercapai

Tabel 4

Analisis Hasil Tes Diagnostik S2

TUJUAN PEMBELAJARAN	URAIAN	KETERANGAN (ketercapaian dari tujuan pembelajran)
1.1.1 Menentukan gradien garis dari grafik	S2 tidak mengerjakan soal nomor 1. Hal ini mungkin disebabkan karena dia belum memahami cara menentukan gradien garis. Pekerjaan S2 adalah sebagai berikut: 	Belum Tercapai
1.1.2 Menentukan gradien dari persamaan garis	S2 tidak dapat menjawab soal nomor 2. Dan hanya menuliskan ulang soal nomor 2a.	Belum Tercapai
1.1.3 Menjelaskan pengertian gradien	S2 sudah berusaha menjawab soal nomor 3. Hanya saja, jawaban S2 kurang tepat. Dia menjelaskan demikian " <i>gradien adalah suatu bagian dari persamaan garis lurus</i> "	Belum Tercapai
1.2.1 Menentukan rumus persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik (x_1, y_1)	S2 belum dapat menyebutkan rumus persamaan garis dengan gradien m dan melalui satu titik. Jawaban S2 adalah sebagai berikut: 	Belum Tercapai
1.2.2 Menentukan persamaan garis yang melalui satu titik dan diketahui gradiennya	S2 sama sekali tidak memiliki bayangan untuk mengerjakan soal nomor 5 ini, hingga tidak ada jawaban.	Belum Tercapai
1.2.3 Menentukan rumus persamaan garis yang melalui dua titik.	S2 sama sekali tidak memiliki bayangan untuk mengerjakan soal nomor 6 ini, hingga tidak ada jawaban.	Belum Tercapai
1.2.4 Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.	S2 mengerjakan dengan menggunakan rumus menentukan gradien. Jawabannya dalah sebagai berikut: 	Belum Tercapai

<p>6.1.1 Menentukan perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga sama kaki.</p>	<p>S2 belum dapat menentukan perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku dengan sudut khusus. Meskipun, langkah-langkah pengerjaannya sudah mengarah pada jawaban. Pekerjaan S2 tersebut adalah sebagai berikut:</p>  <p>Gambar 18. Jawaban S2 No. 17</p>	<p>Belum Tercapai</p>
<p>6.1.2 Mengenal arti perbandingan</p>	<p>S2 telah memahami arti perbandingan.</p>	<p>Tercapai</p>
<p>6.2.1 menentukan panjang diagonal suatu bangun datar</p>	<p>S2 mampu mengerjakan soal nomor 19 dengan benar. Berikut hasil pengerjaannya:</p>  <p>Gambar 19. Jawaban S2 No. 19</p>	<p>Tercapai</p>
<p>6.2.2 Mengenal diagonal bangun datar</p>	<p>S2 telah mengenal diagonal dari suatu bidang datar.</p>	<p>Tercapai</p>

Tabel 5

Faktor Penyebab Kesulitan Belajar yang Dialami Subjek Penelitian

No	Faktor Penyebab Munculnya Kesulitan Belajar	S1	S2
1	Faktor Internal		
1	Kelemahan mental, fisik, kecerdasan		-
2	Sikap atau kebiasaan yang salah dalam mempelajari bahan pelajaran	<ul style="list-style-type: none"> • Belajar matematika dengan cara menghafal rumus tanpa memahaminya • Menghafal soal dan penyelesaiannya 	<ul style="list-style-type: none"> • Motivasi • Kurang konsentrasi • Belajar matematika dengan cara dibaca
3	Belum memiliki pengetahuan atau kecakapan dasar	<ul style="list-style-type: none"> • Bentuk umum persamaan garis lurus • Menggambar grafik garis lurus • Pengertian gradien • Menentukan gradien • Membuat persamaan garis lurus melalui dua titik • Pengertian sistem persamaan linear dua variabel • Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel • Menggunakan teorema Pythagoras untuk menghitung salah satu 	<ul style="list-style-type: none"> • Bentuk umum persamaan garis lurus • Menggambar grafik garis lurus • Pengertian gradien • Menentukan gradien • Membuat persamaan garis lurus • Pengertian persamaan linear dua variabel • Pengertian sistem persamaan linear dua variabel • Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel • Perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku dengan

		sisi segitiga siku-siku • Perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku dengan sudut khusus • Menggunakan Teorema Pythagoras pada bangun datar	sudut khusus
	Faktor Eksternal		
4	Situasi atau proses belajar mengajar yang tidak kondusif	-	-
5	Situasi kurikulum	-	-
6	Beban studi yang terlampau berat	-	-
7	Metode mengajar yang kurang memadai	-	-
8	Sering pindah sekolah	-	-
9	Pengaruh hubungan social	Faktor teman yang kurang bersikap positif dalam pembelajaran dapat mengganggu konsentrasi	Faktor teman bermain (teman geng) membuatnya tidak fokus belajar dan tidak konsentrasi dalam pembelajaran
10	Kondisi keluarga	-	-

Berdasarkan letak dan faktor penyebab kesulitan belajar yang dialami oleh subjek penelitian, maka direncanakan kegiatan pengajaran remedial yang disesuaikan dengan karakteristik masing-masing subjek penelitian. Berikut adalah rancangan kegiatan pengajaran remedial untuk masing-masing subjek penelitian beserta dengan pembahasannya:

Tabel 6
Pengajaran Remedial untuk S1

Pertemuan Pertama
<p>Rancangan</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Memberikan motivasi belajar kepada subjek penelitian supaya tidak mudah terganggu konsentrasinya. 2) Memberitahu subjek penelitian tentang cara mempelajari matematika yang baik. 3) Membantu subjek penelitian memahami tujuan-tujuan pembelajaran yang belum dipahami pada topik persamaan garis lurus. Materi-materi tersebut adalah bentuk persamaan garis lurus, menggambar grafik garis lurus, pengertian gradien, menentukan nilai gradien, dan membuat persamaan garis lurus. Peneliti akan menjelaskan ulang materi secara bertahap dan per sub-materi, kemudian memberikan contoh soal dari setiap sub materi tersebut serta memberikan kesempatan kepada S1 untuk menyelesaikan latihan soal.
<p>Pelaksanaan</p> <p>Motivasi untuk S1 berupa nasehat bahwa S1 sebaiknya banyak melakukan latihan soal dalam mempelajari matematika, karena hal itu akan sangat membantu dalam memahami materi. Peneliti juga mengajak S1 untuk membuktikan nasehat yang diberikan dengan membandingkan pemahamannya ketika belajar dengan hanya menghafal rumus dan dengan melakukan latihan soal. S1 merasakan perbedaan pemahaman, dalam hal ini dia mengaku lebih mudah paham apabila melakukan latihan soal.</p> <p>Kemudian, peneliti mengajak S1 memasuki materi, dan diawali dengan memberikan keterangan tentang hasil tes diagnostik dan tujuan-tujuan pembelajaran yang belum dikuasai. Materi pertama yang dijelaskan adalah bentuk umum persamaan garis lurus. Setelah selesai menjelaskan, peneliti bertanya kepada S1 perbedaan dari bentuk implisit dan eksplisit persamaan garis lurus tersebut. Setelah itu, peneliti meminta S1 untuk menyebutkan macam-macam bentuk umum persamaan garis lurus tanpa melihat buku panduan. Hasilnya dia hanya dapat menyebutkan satu bentuk yaitu $y = mx$. Kemudian, peneliti memberikan sedikit penjelasan ulang dan setelah itu menutup dengan memberikan kesimpulan mengenai bentuk umum persamaan garis lurus.</p> <p>Penjelasan selanjutnya yaitu tentang menggambar grafik persamaan garis lurus, dan dengan memanfaatkan contoh soal, peneliti menjelaskan langkah-langkah menggambar grafik. Persamaan yang digunakan adalah $y = 2x$. Dalam pengerjaan contoh soal tersebut, peneliti aktif memberikan pertanyaan-pertanyaan ringan kepada S1, seperti “<i>kalau nilai $x = 0$, maka nilai y –nya berapa?</i>”. Setelah itu, dilanjutkan penjelasan tentang langkah-langkah menggambar grafik persamaan garis lurus yang berbentuk implisit. Soal yang digunakan adalah $2x + 3y = 12$. Penjelasan ini dimulai dengan memberikan penekanan tentang arti memotong sumbu-x</p>

atau memotong sumbu- y , dengan mengecek pemahaman subjek penelitian tentang nilai y pada titik-titik di sepanjang sumbu- x , begitu pula sebaliknya. Kemudian, subjek diminta untuk membuat grafik dari persamaan berikut $y = 5x$ dan $3x + 2y - 10 = 0$.

Penjelasan berlanjut ke sub-materi berikutnya, yaitu pengertian gradien dan cara menentukan gradien dari persamaan atau grafik persamaan garis lurus. Contoh soal yang diberikan kepada S1 untuk memperjelas langkah-langkah menentukan persamaan garis lurus yang melalui satu titik dan diketahui gradiennya adalah “*Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0,0) dan diketahui gradiennya sama dengan 2!*” Kemudian, peneliti memberikan soal berikut ini untuk dikerjakan oleh S1, pertama “*Tentukan persamaan garis yang bergradien 2 dan melalui titik (2,3)*” kedua, “*Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0,3) dengan gradien $m = 5$!*”. Di bawah pendampingan peneliti S1 mengerjakan soal tersebut dengan baik dan lancar. Lalu, peneliti menunjukkan rumus menentukan persamaan garis yang melalui dua titik dan memberikan soal berikut untuk dikerjakannya, “*Tentukan persamaan garis yang melalui titik : a. A(3,2) dan B(1,3) b. C(-2, -5) dan C(-4, -2)*”.

Pertemuan Kedua

Rancangan

- 1) Peneliti mengajak S1 mengingat materi-materi yang dipelajari pada pengajaran remedial pertemuan sebelumnya.
- 2) Peneliti menjelaskan materi pengertian dari persamaan linear dua variabel, dan sistem persamaan linear dua variabel. Setelah itu, peneliti memberikan contoh dari masing-masing sub materi tersebut. Peneliti tidak lupa pula mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang bertujuan untuk merangsang S1 supaya memahami dan mengingat materi tersebut.
- 3) Menjelaskan kepada S1 tentang cara menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel menggunakan metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi dan metode gabungan (eliminasi dan substitusi). Peneliti menggunakan contoh soal untuk menjelaskan langkah-langkah menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel dengan menggunakan metode-metode tersebut. Setelah semua metode diajarkan, S1 diberikan suatu soal sistem persamaan linear dua variabel dan diminta untuk menentukan penyelesaiannya dengan menggunakan semua metode yang ada.
- 4) Penarikan kesimpulan. Kegiatan ini hanya untuk menegaskan kembali kepada S1 tentang materi-materi yang harus dipahaminya.

Pelaksanaan

Pertemuan kedua, sub-materi pertama yang dibahas adalah pengertian tentang persamaan linear dua variabel dan sistem persamaan linear dua variabel. Pada tes diagnostik, peneliti memberikan pertanyaan tentang apa yang dimaksud dengan persamaan linear dua variabel. S1 menjawab dengan tepat pertanyaan tersebut. Pada pertemuan kali ini, peneliti memberikan pertanyaan yang sama kepada S1. Dia pun menjawab dengan tepat. Selanjutnya, peneliti memberikan pertanyaan tentang pengertian sistem persamaan linear dua variabel dan ternyata S1 mengatakan demikian, “*Em... (tertawa) nggak tau, taunya cuma itu*”. Dapat disimpulkan bahwa S1 memang benar-benar belum memahami maksud dari sistem persamaan linear dua variabel. Oleh karena itu, peneliti menjelaskan kepada S1 tentang pengertian sistem persamaan linear dua variabel. Setelah S1 mengerti tentang pengertian sistem persamaan linear dua variabel, peneliti melanjutkan penjelasan tentang cara menyelesaikannya.

“*Ada tiga metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel, pertama metode grafik, kedua substitusi dan terakhir eliminasi. Yang kamu paling tau mana?*”. Itulah kalimat yang diucapkan oleh peneliti untuk memulai penjelasannya tentang metode-metode penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel. S1 menanggapi dengan menjawab demikian, “*Eliminasi*”. Oleh karena itu, peneliti memulai dengan metode eliminasi. Penjelasan metode ini, dilakukan melalui sebuah contoh soal yaitu menentukan himpunan penyelesaian dari $2y = 2x + 12$ dan $2x + y = 6$. Peneliti selalu melibatkan S1 secara aktif untuk menyelesaikan soal tersebut. Setelah metode eliminasi selesai dijelaskan, peneliti melanjutkannya dengan metode substitusi dan metode grafik. Peneliti menggunakan soal yang digunakan pada metode eliminasi untuk menjelaskan kedua metode tersebut. Hal ini bertujuan untuk menunjukkan kepada S1 bahwa soal yang sama diselesaikan menggunakan metode mana saja hasilnya pun sama. Setelah semua metode selesai di jelaskan, peneliti memberikan soal kepada S1 untuk dikerjakan dengan ketiga metode tersebut. Soal tersebut adalah menentukan penyelesaian dari $3x - 2y = 20$ dan $15 = -3y + 2x$.

Pertemuan kedua ini ditutup dengan satu soal cerita yang harus dikerjakan oleh S1 menggunakan salah satu metode yang ada. S1 memilih menggunakan metode eliminasi untuk mengerjakan soal tersebut. Berikut

<p>adalah soal cerita yang diberikan “Harga sebuah sepatu dan 3 buah tas adalah Rp 300.000,00 dan harga 3 buah sepatu dan 5 buah tas adalah Rp 550.000,00. Tentukan harga 3 buah sepatu dan sebuah tas tersebut!”. S1 mampu mengerjakan soal ini dengan lancar, dan tentu saja peneliti memberikan pendampingan serta mengamati proses pengerjaan yang dilakukan.</p>
<p>Pertemuan Ketiga</p>
<p>Rancangan</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Mengingat materi pembelajaran pada pengajaran remedial pertemuan kedua. 2) Menjelaskan tentang rumus teorema Pythagoras, dan penggunaan rumus tersebut untuk menentukan salah satu sisi segitiga siku-siku. Peneliti memberikan latihan soal setelah S1 selesai mempelajari materi tersebut. 3) Menjelaskan materi perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku dengan sudut khusus. Setelah selesai menjelaskan peneliti meminta S1 untuk menjawab pertanyaan tentang materi tersebut tanpa melihat buku paket maupun buku catatan. 4) Menjelaskan materi tentang penggunaan teorema Pythagoras pada bangun datar. Setelah selesai menjelaskan materi, S1 diminta untuk mengerjakan latihan soal yang diberikan. <p>Setelah selesai semua, peneliti memberikan kesempatan kepada S1 untuk melakukan latihan-latihan soal dan menyiapkan tes evaluasi. Latihan soal yang dilakukan menyangkut semua materi yang diajarkan pada topik persamaan garis lurus, sistem persamaan linear dua variabel, dan teorema Pythagoras. S1 juga diperkenankan menanyakan bagian-bagian yang dirasa masih belum dipahami.</p>
<p>Pelaksanaan</p> <p>Pendampingan pada pertemuan ketiga membahas tentang teorema Pythagoras dan latihan soal sebagai persiapan evaluasi. Membahas teorema Pythagoras, pertanyaan pertama yang diajukan kepada S1 adalah rumus Pythagoras. S1 pun mampu menjawab pertanyaan tersebut dengan baik. Akan tetapi, ketika peneliti memberikan pertanyaan rumus untuk mencari salah satu sisi siku dari sebuah segitiga siku-siku, S1 nampak bingung. Oleh karena itu, peneliti menjelaskan sub-materi tentang menggunakan teorema Pythagoras untuk menentukan salah satu sisi segitiga siku-siku jika kedua sisinya diketahui. Setelah itu, materi yang dijelaskan adalah menentukan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku dengan sudut khusus. Seperti pada pertemuan-pertemuan sebelumnya, peneliti pun memberikan latihan soal setelah penjelasan selesai dilakukan untuk setiap sub-materi. Tidak lupa pula peneliti membantu S1 memahami penggunaan teorema Pythagoras pada bangun datar, maupun untuk memecahkan masalah.</p> <p>Penjelasan materi-materi pada pertemuan ketiga ini, tidak membutuhkan waktu yang lama, sehingga S1 memiliki banyak kesempatan untuk melakukan latihan-latihan soal. Latihan soal yang dilakukan, tidak hanya tentang teorema Pythagoras, melainkan juga tentang semua materi yang telah dijelaskan pada pertemuan pertama dan kedua. Tujuan dari latihan soal ini sebagai persiapan pelaksanaan tes evaluasi. Pertemuan ketiga merupakan pendampingan terakhir yang diberikan peneliti untuk membantu S1 mengatasi kesulitan belajarnya.</p>

Tabel 7
Pengajaran Remedial S2

<p>Pertemuan Pertama</p>
<p>Rancangan</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Peneliti memberikan motivasi. Pemberian motivasi untuk S2 dikemas dengan memberinya pertanyaan-pertanyaan tentang cita-citanya dan bagaimana seharusnya dia bersikap sebagai upaya mencapai cita-cita tersebut. Selanjutnya peneliti mengaitkan jawaban S2 dengan manfaat pembelajaran matematika bagi masa depannya. Peneliti juga memberikan cerita singkat tentang kegunaan matematika bagi kehidupan sehari-hari. <i>Sharing</i> singkat ini bertujuan untuk membantu S2 memiliki semangat belajar dan tidak menghindari matematika hanya karena rasa malas menghitung. 2) Mengulang sub materi bentuk umum persamaan garis lurus, dan menggambar grafik persamaan garis lurus. Dua sub materi ini di jelaskan secara berurutan. Setelah selesai menjelaskan peneliti memberikan contoh soal dan memberikan kesempatan kepada S2 untuk mengerjakan latihan soal. Pada saat menjelaskan materi dan memberikan contoh soal peneliti melibatkan S2 secara aktif dengan selalu memberikan pertanyaan-pertanyaan ringan kepadanya. Ketika S2 mengerjakan latihan soal, dia juga diberikan kesempatan untuk aktif menanyakan hal-hal yang belum dipahaminya. 3) Menjelaskan sub materi pengertian gradien, menentukan nilai gradien, dan membuat persamaan garis lurus. Setelah selesai menjelaskan materi-materi tersebut, peneliti memberikan contoh soal dan kesempatan

kepada S2 untuk mengerjakan latihan soal.
 4) Melakukan penarikan kesimpulan tentang pelaksanaan pengajaran remedial pertemuan pertama, serta menyampaikan rencana pengajaran remedial pada pertemuan selanjutnya.

Pelaksanaan

Motivasi yang diberikan kepada S2 diawali dengan tanya-pertanyaan sederhana tentang cita-cita dan bagaimana cara meraih cita-cita tersebut. Dengan dasar pertanyaan tersebut dan jawaban dari S2, peneliti memberikan pengertian kepada S2 tentang pentingnya belajar, terutama belajar matematika dan hitungan. Setelah pemberian motivasi semacam itu, peneliti pun mengingatkan kepada S2 untuk tidak tergantung dengan teman dalam melakukan sesuatu.

Pertemuan pertama ini dilanjutkan dengan penjelasan materi pembelajaran tentang persamaan garis lurus. Materi pertama yang dijelaskan adalah bentuk umum persamaan garis lurus, setelah itu dilanjutkan dengan penjelasan tentang menggambar grafik persamaan garis lurus menggunakan persamaan garis $y = 2x$ dan $2x + 3y = 12$. Kemudian, S2 diminta untuk menggambar grafik $y = 5x$ dan $3x + 2y - 10 = 0$. Lalu, penjelasan berlanjut ke materi pengertian gradien, menentukan gradien garis dari persamaan garis, dan dari grafik garis lurus yang diketahui. Peneliti menjelaskan cara menentukan gradien garis yang melalui dua titik, dan memberikan contoh menentukan gradien dari sebuah garis yang melalui titik (0,2) dan (4,0). Lalu, dengan persamaan garis $x - 3y = 6$ peneliti memberikan contoh kepada S2 cara menentukan gradien dari persamaan garis. Setelah penjelasan tentang materi-materi tersebut selesai, peneliti memberi kesempatan kepada S2 untuk mengerjakan soal tentang menentukan nilai gradien suatu garis.

Penjelasan berlanjut ke materi tentang membuat persamaan garis yang melalui satu titik dan diketahui gradiennya. Penjelasan dilakukan dengan menggunakan soal menentukan persamaan garis yang bergradien 2 dan melalui titik (0,0). Peneliti memberikan penjelasan pula tentang cara menentukan persamaan garis yang melalui dua titik, dan membantu S2 memahami penggunaan rumus yang ada dengan contoh soal menentukan persamaan garis yang melalui titik (2,-3) dan (3,4). S2 dapat menangkap dengan cepat penjelasan dari peneliti, sehingga waktu yang digunakan untuk menjelaskan lebih sedikit dibandingkan dengan waktu yang diberikan untuk mengerjakan soal-soal latihan. Soal latihan yang harus dikerjakan oleh S2 untuk memahami dua materi ini, yang pertama, menentukan persamaan garis yang bergradien 2 dan melalui titik (2,3). Kedua, menentukan persamaan garis yang melalui titik P(0,-2) dan Q(-1,0). Pertemuan pertama ini diakhiri dengan kegiatan penarikan kesimpulan dari pendampingan yang telah dilaksanakan.

Pertemuan Kedua

Rancangan

- 1) Mengingat materi pada pertemuan sebelumnya. Kegiatan mengingat ini, dilakukan untuk memastikan bahwa S2 memahami penjelasan pada pertemuan sebelumnya
- 2) Menjelaskan sub materi pengertian dari persamaan linear satu variabel, persamaan linear dua variabel, dan sistem persamaan linear dua variabel, serta memberikan contoh-contohnya. Setelah selesai menjelaskan, peneliti memberikan pertanyaan-pertanyaan untuk mengecek pemahaman S2.
- 3) Menjelaskan materi tentang menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel menggunakan berbagai macam metode. Dalam menjelaskan materi ini, peneliti menggunakan contoh soal untuk menunjukkan langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel menggunakan metode-metode yang ada. Setelah selesai menjelaskan, peneliti memberikan latihan soal kepada S2 untuk dikerjakannya.
- 4) Mendampingi S2 mengingat rumus Pythagoras, menentukan salah satu sisi pada segitiga siku-siku.
- 5) Menjelaskan sub materi perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku dengan sudut istimewa. Setelah selesai menjelaskan materi ini, peneliti memastikan pemahaman subjek penelitian tentang materi tersebut dengan memberikan pertanyaan.
- 6) S2 mengerjakan latihan-latihan soal tentang semua sub materi yang ada pada topik teorema Pythagoras. Melakukan penarikan kesimpulan. Pada kegiatan ini, peneliti melontarkan pertanyaan-pertanyaan tentang sistem persamaan linear dua variabel, dan teorema Pythagoras yang telah dipelajari pada pengajaran remedial pertemuan kedua tersebut.

Pelaksanaan

Pertemuan kedua, peneliti menjelaskan dua bab, yaitu sistem persamaan linear dua variabel dan teorema Pythagoras. Diawali dengan menjelaskan pengertian persamaan linear dua variabel dan sistem persamaan linear dua variabel. Setelah S2 memahami pengertian keduanya, peneliti melanjutkan penjelasan, yaitu tentang cara

menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel. Metode yang dijelaskan adalah metode eliminasi, substitusi, dan grafik. Pada mulanya, peneliti mengajukan pertanyaan kepada S2 tentang metode-metode tersebut, untuk mengetahui pemahamannya. Kemudian emberikan contoh cara menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel tersebut menggunakan berbagai macam metode penyelesaian yang telah dijelaskan. Selanjutnya peneliti meminta S2 mengerjakan soal lain, dengan menggunakan berbagai macam metode penyelesaian tanpa melihat contoh pengerjaan yang peneliti kerjakan sebelumnya. Sistem persamaan linear dua variabel yang digunakan untuk latihan adalah $x + y = 3$ dan $2x - y = 6$, soal lainnya $2y = 2x + 12$ dan $2x + y = 6$. Di bawah pengamatan dan pendampingan peneliti S2 mampu mengerjakan soalnya, meskipun sesekali dia meminta penjelasan apabila mendapatkan kesulitan. Setelah S2 jelas dengan semua materi yang ada pada topik sistem persamaan linear dua variabel, peneliti melanjutkan penjelasannya tentang materi teorema Pythagoras. Meskipun pada saat tes diagnostik S2 tidak mampu menjawab dengan benar hubungan antara panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku, tetapi pada pertemuan kedua ini, dia mampu menyebutkan teorema Pythagoras. Hal ini membuat peneliti menyimpulkan bahwa pada saat tes diagnostik, S2 tidak terlalu memahami maksud soal. Pada pertemuan kedua ini, S2 pun mampu menentukan panjang sisi segitiga siku-siku dengan beragam bentuk soal. Materi pada teorema Pythagoras yang belum dikuasai dengan baik adalah perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku dengan sudut khusus. Maka dari itu, peneliti memberi penjelasan kepada S2 tentang materi tersebut. Penjelasan tentang perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku tersebut, merupakan penjelasan terakhir. Setelah itu, S2 diminta mengerjakan latihan-latihan soal yang berkaitan dengan materi sistem persamaan linear dua variabel dan teorema Pythagoras. itulah kegiatan akhir yang dilakukan pada pertemuan kedua.

Pertemuan Ketiga

Rancangan

Pertemuan ketiga diisi dengan mengingat semua materi pada topik persamaan garis lurus, sistem persamaan linear dua variabel dan teorema Pythagoras. Kegiatan mengingat ini, merupakan upaya untuk menyiapkan tes evaluasi. Pada pertemuan ketiga ini, peneliti akan mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang berkaitan dengan semua materi pada ketiga topik tersebut, sehingga peneliti dapat mengetahui bagian-bagian yang masih belum dikuasai oleh S2. S2 juga diminta untuk menanyakan tentang materi yang masih dirasa sulit oleh S2, atau masih belum dipahaminya. Peneliti juga memberikan latihan-latihan soal untuk dikerjakan oleh S2.

Pelaksanaan

Pertemuan ketiga hanya diisi dengan mengingat rumus-rumus yang telah diajarkan pada pertemuan pertama dan kedua serta melakukan latihan-latihan soal. Pada pertemuan ketiga ini, S2 aktif bertanya tentang materi-materi pembelajaran yang dirasanya belum terlalu dikuasai. Materi yang ditanyakan antara lain tentang membuat persamaan garis lurus, menentukan gradien garis dari persamaan maupun dari grafik persamaan garis lurus, serta menentukan perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Pertemuan ketiga ini, ditutup dengan selesainya latihan-latihan mengerjakan soal yang dilakukan oleh S2.

Setelah selesai mengikuti pengajaran remedial, setiap subjek diberikan tes evaluasi untuk melihat keberhasilan dari pengajaran remedial. Tes Evaluasi dilaksanakan sebanyak dua tahap. Pada tahap pertama soal tes evaluasi disesuaikan dengan kisi-kisi tes diagnostik, sedangkan pada tahap kedua soal tes yang digunakan adalah soal tes yang sama dengan soal pada tes penelaahan status. Berdasarkan pelaksanaan tes evaluasi pertama, diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 8
Pencapaian S1 dan S2 pada Tes Evaluasi

TUJUAN PEMBELAJARAN	Pencapaian pada Tes Evaluasi	
	S1	S2
1.1.1 Menentukan gradien garis dari grafik	Belum ada Peningkatan	Terjadi Peningkatan
1.1.2 Menentukan gradien dari persamaan garis	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
1.1.3 Menjelaskan pengertian gradien	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan

1.2.1 Menentukan rumus persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik (x_1, y_1)	-	-
1.2.2 Menentukan persamaan garis yang melalui satu titik dan diketahui gradiennya	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
1.2.3 Menentukan rumus persamaan garis yang melalui dua titik.	-	-
1.2.4 Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.	Terjadi Peningkatan	Terjadi peningkatan meskipun masih tidak teliti dalam mengerjakan.
1.2.5 Mengetahui persamaan umum garis lurus.	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
1.3.1 Menggambar grafik garis lurus jika diketahui persamaannya	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
2.1.1 Mengetahui sistem persamaan linear dua variabel dan persamaan linear dua variabel	Terjadi peningkatan	Terjadi Peningkatan
2.1.2 Mengingat persamaan linear satu variabel	-	-
2.2.1 Menentukan penyelesaian dari SPLDV	Terjadi Peningkatan	Belum terjadi peningkatan
4.1.1 Menggunakan SPLDV untuk menyelesaikan Permasalahan sehari-hari yang berkaitan.	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
4.2.1 Menyelesaikan SPLDV dengan menggunakan grafik garis lurus	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
5.1.1 Menyebutkan Teorema Pythagoras	Tujuan Pembelajaran telah tercapai	Terjadi Peningkatan
5.2.1 Menggunakan teorema Pythagoras untuk pemecahan masalah	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
6.1.1 Menentukan perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga sama kaki.	Terjadi Peningkatan	Terjadi Peningkatan
6.1.2 Mengenal arti perbandingan	-	-
6.2.1 menentukan panjang diagonal suatu bangun datar	Terjadi Peningkatan	-
6.2.2 Mengenal diagonal bangun datar	-	-

Sedangkan berdasarkan pelaksanaan tes evaluasi tahap kedua, S1 dan S2 mampu mengerjakan semua soal dengan baik. Pada tes Evaluasi tahap kedua ini, soal yang digunakan adalah sama dengan soal pada tes penelaahan status. Oleh karena itu, terlihat bahwa pelaksanaan pengajaran remedial memberikan dampak positif kepada kedua subjek.

4. Kesimpulan

4.1 Kesimpulan Hasil Diagnosis Kesulitan Belajar para Subjek

Berdasarkan kegiatan diagnosis yang dilaksanakan, diketahui bahwa S1 baru mencapai 6 tujuan pembelajaran dari 20 tujuan pembelajaran yang disyaratkan, sedangkan S2 baru mencapai 4 tujuan pembelajaran dari 20 tujuan pembelajaran yang seharusnya mereka kuasai. Kesulitan belajar yang muncul dikarenakan adanya kebiasaan belajar yang salah dalam mempelajari matematika dan terdapat pula pengaruh teman sepermainan yang membuat mereka kurang konsentrasi dalam pembelajaran. Mereka juga tidak menguasai beberapa materi dasar yang seharusnya dipahami sebagai dasar pemahaman.

4.2 Kesimpulan Hasil Pengajaran Remedial untuk Kedua Subjek

Sesudah kedua subjek diberi pengajaran remedial, mereka nampak memahami kompetensi-kompetensi yang sebelumnya belum dikuasai. Hal ini terlihat dari peningkatan pemahaman setelah terjadi proses diagnosis dan pengajaran remedial. Pelaksanaan pengajaran remedial yang disesuaikan dengan karakter setiap subjek

mampu memberikan dampak positif dengan ditunjukkan oleh hasil tes evaluasi keberhasilan pengajaran remedial. Pada tes evaluasi tahap pertama dan kedua, S1 dan S2 menunjukkan peningkatan positif dibandingkan dengan hasil yang mereka tunjukkan pada tes penelaahan status dan tes diagnostik. Selain itu, mereka menunjukkan sikap senang mengikuti proses yang dilaksanakan. Hal ini dapat memberikan petunjuk bahwa kegiatan pengajaran remedial yang dilaksanakan sesuai dengan karakteristik mereka.

Berdasarkan hasil penelitian ini, diharapkan kegiatan yang merupakan upaya membantu siswa mengatasi kesulitan belajar mereka dapat semakin berkembang dan semakin banyak dilakukan, supaya setiap siswa dapat berkembang secara optimal.

Daftar Pustaka

- [1] Arikunto, Suharsimi. 2010. *Dasar-dasar Evaluasi Pendidikan edisi revisi cetakan-11*. Jakarta: Bumi Aksara.
- [2] Budi, Wono Setyo. 2008. *Matematika Jilid 2B untuk SMP Kelas VIII Semester 2*. Bandung: Erlangga.
- [3] Budhiarti, Agatha Widi dkk. 2012. *Modul Matematika SMP Kelas VIII*. Semarang: Yayasan Pangudi Luhur.
- [4] Djamarah, Saiful Bahri. 2011. *Psikologi Belajar*. Jakarta: Rineka Cipta.
- [5] Entang. 1984. *Diagnosis Kesulitan Belajar dan Pengajaran Remedial*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- [6] Fuadi, Hisyam H. 2015. *Konsep Dasar Pengajaran Remedial (Definisi, Prosedur, Strategi dan Teknik, dan Evaluasi Pengajaran Remedial)*. <https://inihisyam.wordpress.com/2015/06/15/konsep-dasar-pengajaran-remedial-definisi-prosedur-strategi-dan-teknik-dan-evaluasi-pengajaran-remedial/>, diakses 17 Oktober 2016, 19:05 WIB.
- [7] Moleong, Lexy J. 2009. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- [8] Nugroho, Heru. 2009. *Matematika 2: SMP dan MTS Kelas VIII*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.
- [9] Partowisastro, Koestoer & Hadisuprpto. 1984. *Diagnosa dan Pemecahan Kesulitan Belajar jilid-1*. Yogyakarta: Erlangga.
- [10] Angelina Hesti Pradita. 2012. *Diagnosis Kesulitan Belajar dan Pembelajaran Remedial bagi Siswa Kelas VIIB SMP Kanisius Kalasan Tahun Pelajaran 2012/2013 dalam penyelesaian Soal pada Pokok Bahasan Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat*. Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma.
- [11] Prastowo, Andi. 2014. *Memahami Metode-metode Penelitian : Suatu Tinjauan Teoritis dan Praktis*. Yogyakarta : Ar-Ruzz Media.

- [12] Siregar, Eveline & Hartini Nara. 2010. *Teori Belajar dan Pembelajaran*. Bogor: Ghalia Indonesia.
- [13] Sukino & Wilson Simangunsong. 2007. *Matematika SMP Jilid 2 Kelas VIII*. Jakarta: Erlangga.
- [14] Supatmono, Catur. 2002. *Matematika Asyik*. Jakarta: Grasindo.
- [15] Suwanto. 2013. *Pengembangan Tes Diagnostik dalam Pembelajaran*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- [16] Syah, Muhibbin. 2008. *Psikologi Belajar*. Jakarta : PT Raja Grafindo Persada.
- [17] Tampomas, Husein. 2007. *Matematika Plus SMP Kelas VIII Semester Kedua*. Jakarta: Yudhistira.
- [18] Wijayanti, Trii. 2014. Kesulitan Belajar dan Faktor yang Mempengaruhinya. https://www.academia.edu/9400506/Kesulitan_Belajar_dan_Faktor_yang_Mempengaruhinya?auto=download, diakses pada 17 Oktober 2016, 17:00 WIB.

Kesalahan dalam Pemahaman Konseptual Matematika Siswa Kelas VIII pada Materi Faktorisasi Suku Aljabar

Novi Indriani

Program Studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma
indrianinovia@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kesalahan dalam pemahaman konseptual matematika siswa pada materi faktorisasi suku aljabar di kelas VIII ditinjau dari tingkat kemampuan matematika. Metode penelitian yang digunakan adalah deskriptif dengan bentuk penelitian berupa studi kasus. Sampel penelitian ini adalah 22 siswa. Hasil analisis data menunjukkan bahwa persentase ketercapaian untuk kelompok atas termasuk dalam kategori sedang dengan persentase ketercapaian sebesar 62 %, kelompok menengah termasuk dalam kategori rendah dengan persentase ketercapaian sebesar 53 %, dan kelompok bawah termasuk dalam kategori sangat rendah dengan persentase ketercapaian sebesar 31 %. Persentase ketercapaian rata – rata dari semua kelompok adalah 46 %, dengan kategori rendah. Kesalahan pemahaman konseptual matematika siswa diantaranya kesalahan dalam memahami definisi dan sifat – sifat variabel dari suatu bentuk aljabar, kesalahan dalam memahami definisi dari koefisien, konstanta dan suku dari bentuk aljabar, kesalahan menginterpretasikan suatu representasi bentuk aljabar.

Kata – kata kunci : pemahaman konseptual, faktorisasi suku aljabar.

1. Pendahuluan

Salah satu kompetensi yang harus dikuasai siswa saat belajar matematika di Sekolah Menengah Pertama (SMP) dan tercantum dalam Kurikulum Tingkat Satuan Pelajaran SMP/MTS adalah mampu menyelesaikan operasi bentuk aljabar. Di saat belajar aljabar, penguasaan kompetensi itu sangat penting karena akan menjadi prasyarat utama saat siswa belajar aljabar pada tahap – tahap berikutnya, misalnya saat belajar persamaan, pertidaksamaan, sistem persamaan, fungsi, persamaan garis dan lainnya.

Matematika merupakan ilmu yang kompleks yang memuat objek – objek pembelajaran yang berkaitan satu sama lain. Dalam hal ini objek – objek tersebut didefinisikan sebagai serangkaian hal yang dihadapi secara langsung oleh siswa selama pembelajaran berlangsung yang meliputi fakta, konsep, prinsip dan ketrampilan matematis. Ketika belajar matematika, siswa harus mengidentifikasi objek – objek tersebut secara mendalam guna memperoleh pemahaman yang utuh.

Pemahaman matematis merupakan salah satu kriteria berfikir tingkat tinggi (*High Ordered Thinking*) yang harus dimiliki siswa. Seperti halnya dalam materi aljabar, proses penanaman konsep dan kefasihan melakukan prosedur dalam menyelesaikan soal – soal merupakan hal penting yang harus diwujudkan dalam rangka mencapai tujuan pembelajaran.

Materi yang akan kita bahas mengenai konsep aljabar yang meliputi pengertian variabel, konstanta, koefisien dan suku – suku yang sejenis dan tidak sejenis. Siswa juga akan mempelajari mengenai operasi hitung pada bentuk

aljabar yang menggunakan prinsip – prinsip operasi hitung pada bilangan bulat. Hal ini menjelaskan bahwa kajian aljabar tidak terlepas dari fakta, konsep, prinsip dan skill yang membutuhkan kemampuan konseptual siswa.

Kenyataan di lapangan, banyak siswa yang mengalami kesalahan dalam memaknai konsep matematika. Salah satu kasus yang terjadi adalah kesalahan siswa dalam memahami representasi bentuk aljabar. Kesalahan ini bisa terjadi karena siswa tidak memiliki pengetahuan konseptual aljabar. Dalam laporan penelitian Hutagaol (2009) ditemukan fakta – fakta sebagai berikut :

- Diberikan bentuk aljabar, jika $y = 5x$ dan $x = 3$ maka tentukan nilai y !
Jawaban siswa adalah $y = 53$. Siswa beranggapan bahwa angka 5 adalah sebagai puluhan dan x sebagai satuan.
- Diberikan bentuk aljabar $y = 5x - 2$. Jika $x = 3$, maka tentukan nilai y !
Jawaban siswa adalah $y = 53 - 2 = 51$.

Berdasarkan fakta yang pertama diatas, terlihat bahwa siswa tidak memaknai representasi dari $5x$ sebagai “ 5 dikali x ”. Siswa hanya beranggapan bahwa angka 5 sebagai puluhan dan x sebagai satuan. Namun pada fakta yang kedua, siswa melakukan operasi pengurangan dengan benar untuk mendapatkan nilai y . Ini menunjukkan bahwa kemampuan prosedural yang fasih tidak didukung oleh kemampuan memahami suatu simbol penulisan matematika. Dengan demikian disimpulkan bahwa kesalahan yang terjadi disebabkan oleh ketidakmampuan siswa dalam memaknai representasi dari bentuk – bentuk aljabar yang disajikan.

Salah satu penyebab masalah tersebut adalah karena guru cenderung menggunakan cara mekanistik yaitu memberikan aturan secara langsung untuk dihafal, diingat dan diterapkan sehingga siswa sulit untuk memahami konsep operasi bentuk aljabar. Padahal dalam pembelajaran matematika, pembelajaran harus bermakna bagi siswa dan tidak memisahkan belajar matematika dengan pengalaman siswa sehari – hari sehingga siswa akan dapat mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari – hari.

Berdasarkan uraian di atas, penulis menyusun makalah yang menitikberatkan kesalahan dalam pemahaman konseptual yang terjadi pada siswa kelas VIII dalam belajar aljabar. Rumusan masalah dalam makalah ini adalah sebagai berikut :

1. Kesalahan pemahaman konseptual apa sajakah yang terjadi pada siswa kelas VIII dalam belajar aljabar ?
2. Faktor – faktor apa saja yang menjadi penyebab terjadinya kesalahan dalam pemahaman konseptual siswa dalam belajar aljabar ?

2. Landasan Teori

A. Pengetahuan Konseptual

Konsep dalam matematika adalah suatu ide abstrak yang mengakibatkan seseorang dapat mengklasifikasikan objek – objek atau kejadian yang merupakan contoh atau bukan contoh dari ide tersebut. Hudoyo (1990 : 27) menyatakan bahwa belajar konsep adalah belajar memahami sifat – sifat dari benda – benda kongkrit atau peristiwa untuk dikelompokkan.

Menurut Depdiknas (2006) salah satu tujuan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) pelajaran matematika yaitu agar peserta didik memiliki kemampuan memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien

dan tepat dalam pemecahan masalah. Hal yang sama juga dikemukakan oleh van Den Walle (2010 : 29) menyatakan “ *Curriculum is designed to deepen conceptual understanding by making meaningful connections for students*”. Kutipan tersebut menyatakan bahwa kurikulum dirancang untuk memperdalam pemahaman konseptual dengan membuat hubungan bermakna untuk siswa.

Pemahaman konseptual merupakan komponen penting dari pengetahuan yang diperlukan untuk mengatasi suatu masalah. Hal ini sejalan dengan pendapat Bransford, Brown dan Cocking (NCTM, 2000 : 20) menyatakan bahwa “ *Conceptual understanding is an important component of proficiency*”. Artinya pemahaman konseptual adalah komponen terpenting dari kecakapan. Kecakapan yang diharapkan dalam pembelajaran matematika meliputi pemahaman konseptual, pengetahuan prosedural, strategi kompetensi, penalaran dan komunikasi serta menghargai kegunaan matematika. Hal ini juga sependapat dengan Bahr (2010 : 152) yang menyebutkan bahwa pemahaman konseptual dan pengetahuan prosedural sama pentingnya dalam membangun kecakapan matematika. Belajar dengan pemahaman juga membuat pembelajaran berikutnya menjadi lebih mudah.

Menurut Rohana (2011 : 111) dalam memahami konsep matematika diperlukan kemampuan generalisasi serta abstraksi yang cukup tinggi. Sedangkan saat ini penguasaan peserta didik terhadap materi konsep – konsep matematika masih lemah bahkan dipahami dengan keliru. Sebagaimana yang dikemukakan Ruseffendi (2006 : 156) bahwa terdapat banyak peserta didik yang setelah belajar matematika, tidak mampu memahami bahkan pada bagian yang paling sederhana sekalipun, banyak konsep yang dipahami secara keliru sehingga matematika dianggap sebagai ilmu yang sukar, ruwet dan sulit. Padahal pemahaman konsep merupakan bagian yang paling penting dalam pembelajaran matematika seperti yang dinyatakan Zulkardi (2003 : 7) bahwa mata pelajaran matematika menekankan pada konsep. Artinya dalam mempelajari matematika peserta didik harus memahami konsep matematika terlebih dahulu agar dapat menyelesaikan soal – soal dan mampu mengaplikasikan pembelajaran tersebut di dunia nyata. Konsep – konsep dalam matematika terorganisasikan secara sistematis, logis dan hirarki dari yang paling sederhana ke yang paling kompleks. Pemahaman terhadap konsep – konsep matematika merupakan dasar untuk belajar matematika secara bermakna.

Menurut Patria (2007:21) mengatakan apa yang di maksud pemahaman konsep adalah kemampuan siswa yang berupa penguasaan sejumlah materi pelajaran, dimana siswa tidak sekedar mengetahui atau mengingat sejumlah konsep yang dipelajari, tetapi mampu mengungkapkan kembali dalam bentuk lain yang mudah dimengerti, memberikan interpretasi data dan mampu mengaplikasikan konsep yang sesuai dengan struktur kognitif yang dimilikinya.

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan oleh Suratman (2010 :11) tentang pemahaman konseptual dan pengetahuan prosedural materi pertidaksamaan linear satu variabel siswa kelas VII SMP (studi kasus di MTs Ushuluddin Singkawang) dapat diketahui bahwa pemahaman konseptual siswa masih sangat rendah. Hal ini menunjukkan bahwa siswa masih belum menguasai konsep – konsep yang berhubungan dengan pertidaksamaan linear satu variabel sehingga siswa masih belum mampu menjawab permasalahan yang diberikan dengan argumen – argumen yang tepat.

Pengetahuan konseptual dalam matematika merupakan pengetahuan dasar yang menghubungkan antara potongan – potongan informasi yang berupa fakta,

skill (ketrampilan), konsep atau prinsip. Suatu potongan informasi menjadi pengetahuan konseptual hanya jika pengetahuan itu terintegrasi ke dalam jaringan pengetahuan yang lebih luas dalam pikiran seseorang. Jadi pengetahuan konseptual merupakan pengetahuan yang memiliki banyak keterhubungan antara obyek – obyek matematika (seperti : fakta, skill, konsep atau prinsip) yang dapat dipandang sebagai suatu jaringan pengetahuan yang memuat keterkaitan antara satu dengan lainnya.

Pengetahuan konseptual berkaitan dengan klasifikasi, kategori; prinsip-prinsip, generalisasi; teori, model dan struktur. Penguasaan pengetahuan faktual ditandai dengan kemampuan mengklasifikasikan data, mengelompokkan data berdasarkan ciri-ciri kesamaannya, atau berdasarkan perbedaannya; menunjukkan kekuatan atau kelemahan sebuah pernyataan, mengenali prinsip-prinsip, menyimpulkan, menguasai teori, menunjukkan contoh, dan mengenali struktur.

Pemahaman konsep matematika yang diteliti dalam penelitian ini merupakan indikator kemampuan pemahaman konsep matematika yang dirujuk berdasarkan kemampuan pemahaman konsep matematika pada kurikulum 2006. Adapun indikator kemampuan pemahaman konsep matematika tersebut adalah sebagai berikut :

1. Menyatakan ulang sebuah kemampuan konsep, yaitu kemampuan siswa untuk mengungkapkan kembali apa yang telah dikomunikasikan kepadanya
2. Mengklasifikasikan objek – objek menurut sifat – sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya) yaitu kemampuan siswa untuk dapat mengelompokkan objek menurut sifat – sifatnya
3. Memberikan contoh dan non contoh dari konsep yaitu kemampuan siswa dapat membedakan contoh dan bukan contoh dari suatu materi yang sudah dipelajari
4. Menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis yaitu kemampuan siswa menggambar atau membuat grafik, membuat ekspresi matematis, menyusun cerita atau teks tertulis
5. Mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup suatu konsep yaitu kemampuan siswa mengkaji mana syarat perlu atau cukup suatu konsep yang terkait
6. Menggunakan, memanfaatkan dan memilih prosedur atau operasi tertentu yaitu kemampuan siswa menyelesaikan soal dengan tepat sesuai prosedur
7. Mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah yaitu kemampuan siswa menggunakan konsep serta prosedur dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kehidupan sehari – hari (Kesumawati, 2010 : 28 – 29)

B. Pentingnya Pemahaman Konseptual

Pemahaman konseptual dan prosedural yang benar merupakan landasan yang memungkinkan terbentuknya pemahaman yang benar terhadap konsep – konsep lain yang berhubungan, konsep yang lebih kompleks, fakta, hukum, prinsip dan teori – teori dalam matematika. Terlebih lagi jika diingat bahwa salah satu karakteristik dari konsep matematika adalah adanya saling keterkaitan dan perkembangan dari konsep yang sederhana menuju konsep yang lebih kompleks (Middlecamp dan Kean, 1989 :8; Sastrawijaya, 1988 : 103). Pemahaman suatu konsep yang tidak benar memungkinkan terbentuknya konsep – konsep lain berkaitan yang tidak benar pula.

Menurut Dahar (1989 : 79) untuk dapat memecahkan masalah dalam matematika seseorang harus mengetahui aturan – aturan yang relevan dan aturan – aturan ini didasarkan pada konsep yang diperolehnya. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa konsep dan prosedur merupakan batu pembangun berfikir sehingga pemahaman konseptual dan prosedural yang benar menjadi sangat penting untuk dimiliki.

3. Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif dengan bentuk penelitian berupa studi kasus. Subyek penelitian ini berjumlah 22 orang. Pembagian siswa pada tiap kelas VIII tersebar merata. Jadi, tidak dibentuk kelas yang lebih unggul maupun kelas yang lebih rendah. Oleh karena itu dari seluruh kelas VIII SMP tahun ajaran 2016 / 2017 dipilih kelas secara acak sehingga diperoleh kelas VIII A sebagai subyek penelitian. Peneliti melakukan pengamatan terhadap pembelajaran yang berlangsung melalui video. Peneliti menganalisis pada kesalahan yang dilakukan siswa pada pengerjaan soal. Teknik pengumpulan data pada penelitian ini adalah tehnik pengukuran berupa tes tertulis berbentuk uraian dan tehnik komunikasi langsung. Identifikasi kesalahan pemahaman belajar siswa diperoleh dari hasil pengerjaan soal dan pada waktu siswa berpendapat tentang apa yang dipikirkannya.

4. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Penelitian ini dilaksanakan pada tanggal 23 Agustus sampai 25 Agustus 2016 pada kelas VIII A di SMP. Untuk mengungkap kemampuan siswa menggunakan strategi pemecahan masalah matematis siswa, peneliti memberikan tes essay berjumlah 10 soal. Butir soal nomor 1,2, dan 3 digunakan untuk melihat kemampuan siswa dalam menyatakan ulang sebuah kemampuan konsep, butir soal nomor 4, 5 dan 6 untuk melihat kemampuan siswa dalam mengklasifikasikan objek – objek menurut sifat – sifat tertentu, butir soal nomor 7 dan 8 digunakan untuk melihat pemahaman siswa dalam memberikan contoh dan bukan contoh dari konsep, sedangkan butir soal nomor 9 dan 10 digunakan untuk mengukur kemampuan siswa dalam menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis. .

Data Kemampuan Siswa dalam menyatakan ulang sebuah kemampuan konsep serta pembahasannya

Untuk mengukur pemahaman konseptual matematis siswa pada aspek menyatakan ulang sebuah kemampuan konsep dijamin dengan 3 buah soal yaitu soal nomor 1, 2 dan 3.

Dari data skor jawaban siswa untuk soal nomor 1, 2 dan 3 menunjukkan bahwa secara keseluruhan kemampuan siswa dalam menyatakan ulang sebuah kemampuan konsep pada materi faktorisasi suku aljabar berada pada kategori sedang. Ini terlihat dari ketercapaian yang diperoleh yaitu sebesar 68 %. Hal ini diduga karena siswa kurang memahami suatu konsep sehingga siswa tidak dapat mengingat dengan baik. Akibatnya siswa merasa kesulitan ketika harus menyatakan ulang sebuah kemampuan konsep yang sudah pernah dipelajarinya.

Data Kemampuan siswa dalam pemahaman konsep mengenai mengklasifikasikan objek – objek menurut sifat – sifat tertentu serta pembahasannya

Dari data skor jawaban siswa untuk soal nomor 4, 5 dan 6 menunjukkan bahwa secara keseluruhan kemampuan siswa dalam mengklasifikasikan objek – objek menurut sifat – sifat tertentu berada pada kategori sangat rendah. Ini terlihat dari ketercapaian yang diperoleh yaitu sebesar 33 %. Hal ini diduga karena siswa kurang memahami suatu konsep sehingga siswa tidak mampu mengklasifikasikan objek – objek menurut sifat – sifat tertentu dengan baik. Akibatnya siswa merasa kesulitan ketika harus mengklasifikasikan objek – objek menurut sifat – sifat tertentu.

Data Kemampuan siswa dalam memberikan contoh dan non contoh dari konsep serta pembahasannya

Dari data skor jawaban siswa nomor 7 dan 8 menunjukkan bahwa secara keseluruhan kemampuan siswa dalam memberikan contoh dan non contoh dari konsep berada pada kategori rendah. Ini terlihat dari ketercapaian yang diperoleh yaitu sebesar 43 %. Hal ini diduga karena siswa kurang menguasai konsep sehingga siswa tidak mampu memberikan contoh dan non contoh dari konsep dengan baik.

Data kemampuan siswa dalam menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis serta pembahasannya

Dari data skor jawaban siswa nomor 9 dan 10 menunjukkan bahwa secara keseluruhan kemampuan siswa dalam menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis berada pada kategori rendah. Ini terlihat dari ketercapaian yang diperoleh yaitu sebesar 41 %. Hal ini diduga karena siswa kurang menguasai konsep sehingga siswa tidak mampu dalam menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis dengan baik.

Secara keseluruhan hasil analisis dari keempat indikator pada penelitian ini menunjukkan pemahaman konseptual matematis siswa yang berbeda pada masing – masing tingkatan. Berikut ini ditampilkan tabel rangkuman total kemampuan pemahaman konseptual matematis siswa secara keseluruhan sebagai berikut :

Tabel 5. Pencapaian Pemahaman Konseptual Matematis Siswa

Tingkat Kemampuan	Indikator Pemahaman Konseptual Matematis			
	Indikator 1	Indikator 2	Indikator 3	Indikator 4
Atas	91 %	48 %	50 %	57 %
	Kategori Tinggi	Kategori Rendah	Kategori Rendah	Kategori Rendah
Menengah	72 %	39 %	58 %	41 %
	Kategori Sedang	Kategori Sangat Rendah	Kategori Rendah	Kategori Rendah
Bawah	48 %	18.50 %	28 %	28 %
	Kategori Rendah	Kategori Sangat Rendah	Kategori Sangat Rendah	Kategori Sangat Rendah
Rata - Rata	68 %	33 %	43 %	41 %

	Kategori Sedang	Kategori Sangat Rendah	Kategori Rendah	Kategori Rendah
--	--------------------	---------------------------	--------------------	--------------------

Kesalahan konsep yang dilakukan dalam menyelesaikan soal – soal aljabar diantaranya adalah :

- 1) Kesalahan memahami definisi variabel dari suatu bentuk aljabar
Pemahaman siswa tentang variabel masih sangat jauh dari target yang diharapkan.
Contoh :
Guru memberikan soal : Tentukan variabel dari bentuk aljabar : $2x^2y + 3x + 5$!
Jawaban siswa :
 - Variabel : $2x^2y$ dan $3x$
 - Variabel : x^2y dan x
 - Variabel : x^2 dan y
 Hal tersebut menunjukkan bahwa siswa belum sepenuhnya menguasai konsep tentang variabel.
- 2) Kesalahan memahami definisi dari koefisien, konstanta dan suku dari suatu bentuk aljabar
Siswa masih kesulitan dalam menentukan manakah yang termasuk koefisien dan konstanta.
- 3) Kesalahan menginterpretasikan suatu representasi dari bentuk aljabar
Ketika siswa diberikan soal sebagai berikut :
Jika diketahui $y = 2x$ dan nilai $x = 5$, tentukan nilai y !
Jawaban siswa $y = 25$.
Kesalahan dalam merepresentasikan suatu representasi aljabar adalah siswa menganggap konsep yang diajarkan masih mengenai satuan dan puluhan.
- 4) Tidak mampu memaknai hubungan – hubungan sifat pada bentuk aljabar

Faktor – faktor penyebab terjadinya kesalahan konseptual

Kesalahan siswa dalam mengerjakan soal sering terjadi pada materi yang mengharuskan siswa menguasai pemahaman konseptual dan prosedural sekaligus. Kesalahan konseptual dan prosedural yang terjadi pada siswa dapat bersumber dari :

1. Kesalahan pemahaman siswa sendiri
2. Kesalahan pemahaman bahan ajar yang disampaikan oleh guru
3. Kesalahan pemahaman dari guru itu sendiri (Heron, 1996)

Selain tiga sumber di atas, kesalahan konsep dan prosedur yang terjadi dalam mempelajari materi aljabar, dapat dibedakan berdasarkan sumbernya. Kesalahan pemahaman konseptual dan prosedural berdasarkan sumber kesalahan dibedakan menjadi :

1. Kesalahan yang terjadi secara acak tanpa sumber tertentu (misalnya salah hitung atau salah menuliskan rumus)
2. Salah ingat atau hafal
3. Kesalahan yang terjadi secara terus menerus serta menunjukkan kesalahan dengan sumber – sumber tertentu.

Beberapa contoh kesalahan pemahaman konseptual siswa dalam belajar aljabar :

1. Soal :

Budi memiliki 3 ikat ketupat dan 5 ketupat yang tidak diikat. Jumlah seluruh ketupat yang dimilikinya adalah 20 buah. Berapa banyak ketupat dalam satu ikat ?

Kesalahan yang terjadi, siswa menafsirkan cerita pada soal ke dalam bentuk $3x + 5y = 20$.

2. Diberikan bentuk aljabar $y = 3x$ untuk semua x bilangan asli. Jika $x = 4$, maka nilai y adalah

Siswa menafsirkan $y = 3x$, 3 sebagai puluhan dan x sebagai satuan. Sehingga jika $x = 4$ maka $y = 34$

3. Diberikan $2x + 3 = 10$. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan ini !

Siswa cenderung menjawab : $2x + 3 = 5x = 10$

$$5x = 10, \text{ jadi } x = 2$$

4. Tentukan hasil dari 15^2 !

Siswa menafsirkan bahwa $15^2 = 1 \times 5^2 = 25$

5. Hasil dari $2a - 3a - (4b + 5b) = \dots$

Siswa menjawab $2a - 3a - (4b + 5b) = -a + b$

6. Tentukan hasil dari $(5x + 2)(3x - 4)$!

Siswa menjawab : $(5x + 2)(3x - 4) = 5x \cdot 3x + 2 - 4 = 15x^2 - 2$

Faktor – faktor penyebab kesalahan pemahaman belajar siswa antara lain disebabkan :

1. Pemahaman belajar siswa

- Kesalahan dalam menafsirkan soal yang diberikan guru
- Kesalahan siswa dalam memahami konsep. Siswa memandang konsep masih dalam pengertian satuan dan puluhan, bukan pada operasi perkalian
- Siswa kurang menguasai operasi hitung bilangan
- Kemampuan siswa masih rendah dalam merepresentasikan masalah ke dalam model matematika

2. Pemahaman bahan belajar yang disampaikan guru

- Guru masih terpaku pada teori dari buku sehingga kurang mengembangkan pemahaman konsep

5. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan umum bahwa pemahaman konseptual matematis siswa pada materi faktorisasi suku aljabar masih rendah. Hal ini dapat dilihat dari persentase rata – rata skor siswa yaitu 46 %. Persentase ketercapaian untuk kelompok atas termasuk dalam kategori sedang dengan persentase ketercapaian sebesar 62 %, kelompok menengah termasuk dalam kategori rendah dengan persentase ketercapaian sebesar 53 %, dan kelompok bawah termasuk dalam kategori sangat rendah dengan persentase ketercapaian sebesar 31 %.

Berdasarkan pembahasan di atas, maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Dalam belajar matematika diperlukan pengetahuan konseptual untuk mendapatkan pemahaman yang mendalam

2. Memiliki pengetahuan konseptual tetapi tidak memiliki pengetahuan prosedural yang diperlukan maka akan mengakibatkan siswa mempunyai intuisi yang baik tentang suatu konsep tetapi tidak mampu menyelesaikan suatu masalah
3. Di lain pihak, memiliki pengetahuan prosedural tetapi tidak memiliki pengetahuan konseptual yang mencukupi maka akan mengakibatkan siswa mahir memanipulasi simbol – simbol tetapi tidak memahami dan mengetahui makna dari simbol tersebut
4. Representasi matematis adalah ungkapan – ungkapan dari ide – ide matematika (masalah, pernyataan, definisi dan lain – lain) yang digunakan untuk memperlihatkan (mengkomunikasikan) hasil kerjanya dengan cara tertentu (cara konvensional atau tidak konvensional) sebagai hasil interpretasi dari pikirannya
5. Representasi matematis sangat berperan dalam membantu peningkatan pemahaman siswa terhadap konsep matematika. Kemudian representasi juga dapat meningkatkan kemampuan komunikasi, kemampuan melakukan prosedur yang benar dalam pemecahan masalah matematis siswa.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh dan kelemahan – kelemahan dalam penelitian ini, peneliti memberikan saran yaitu bagi para peneliti yang akan melakukan penelitian ini lebih lanjut, untuk memperoleh data yang lebih mendalam mengenai kesalahan pemahaman konseptual matematis siswa sebaiknya dilengkapi dengan wawancara yang lebih mendalam sehingga data yang diperoleh bisa lebih akurat dan dapat mengetahui dengan jelas keunikan – keunikan siswa dalam menyelesaikan soal.

Daftar Pustaka

- [1] Bahr, Damon.L.2010.*Elementary Mathematics is Anything but Elementary*. USA: WADSWORTH CENGAGE Learning
- [2]BSNP. *Standar Isi dan Standar Kompetensi Lulusan SD/MI*. Jakarta: Kemendiknas, 2006.
- [3] Dahar, R.W.1988.*Teori – Teori Belajar*. Jakarta : P2LPTK
- [4] Departemen Pendidikan Nasional. (2003). *Kurikulum Standar Kompetensi Matematika SD dan MI*. Jakarta:Depdiknas
- [5] De Lange,J. (1987). *Mathematics,Insight, and Meaning*, Utrecht : OW & Co.
- [6] Gravemeijer dan Cobb (2006).” *Design Research from a Learning Perspective*, dalam *Educational Design Research*. New York : Routledge
- [7] Hadi, Sutarto.2003.PMR : Menjadikan Pelajaran Matematika Lebih Bermakna Bagi Siswa (Online).<http://www.zainuri.wordpress.com/>(diakses pada tanggal 02 Juni 2016)
- [8] Herron, D.J.1996. *The Mathematics Classroom Formulas for Succesful Teaching*. Washington, D.C : American Chemical Society.
- [9] Hudojo, Herman. 1990. *Strategi Mengajar Belajar Matematika*. Malang : IKIP Malang
- [10] Hutagaol, Kartinji.2009. *Strategi Multiple Representasi Aljabar*. Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia
- [11] Middlecamp, C & Kean, E. 1985. *Panduan Belajar Matematika Dasar*. Jakarta : Gramedia

- [12] Rohana. 2011. *Pengaruh Pembelajaran Berbasis Masalah Terhadap Pemahaman Konsep Mahasiswa FKIP Universitas PGRI*. Palembang : Prosiding PGRI
- [13] Sastrawijaya, T. 1998. *Proses Belajar mengajar Matematika*. Jakarta : Depdikbud

Efektivitas Penerapan Model Pembelajaran Berbasis Proyek pada Pokok Bahasan Transformasi Ditinjau dari Hasil Belajar dan Motivasi Belajar Siswa Kelas XI Toi di SMK N 2 Depok Tahun Ajaran 2015/2016

Trisona Agustina¹

Febi Sanjaya²

^{1,2}Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia

¹trisonaagustina@gmail.com

²febi@usd.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui efektivitas penerapan model pembelajaran berbasis proyek ditinjau dari: (1) hasil belajar yaitu aspek pengetahuan, aspek keterampilan dan aspek sikap, (2) motivasi belajar siswa kelas XI TOI SMK N 2 Depok, Sleman pada pokok bahasan transformasi.

Subyek dalam penelitian ini adalah siswa-siswi kelas XI TOI di SMK N 2 Depok, Sleman. Jenis penelitian adalah penelitian deskriptif kuantitatif. Penelitian ini dilaksanakan dengan mengumpulkan data hasil belajar dan motivasi belajar yang kemudian akan diolah secara kuantitatif. Hasil dari pengolahan tersebut dibahas dalam bentuk deskriptif. Instrument yang digunakan dalam penelitian ini yaitu: (1) RPP (Rencana Pelaksanaan Pembelajaran), (2) Tes Tertulis, (3) Tugas Proyek, (4) Observasi, dan (5) Kuesioner. Pengambilan data penelitian pada tanggal 12 April 2016 sampai dengan 27 April 2016. Data yang diperoleh berupa data hasil belajar dan motivasi belajar. Data hasil belajar merupakan nilai dari aspek pengetahuan, aspek keterampilan dan aspek sikap, sedangkan data dari motivasi belajar siswa merupakan hasil dari observasi dan hasil kuesioner yang telah diisi oleh siswa.

Hasil belajar dari penelitian ini menunjukkan bahwa dari 32 siswa, berdasarkan aspek pengetahuan siswa yang sudah tuntas KKM ada 8 siswa atau 25% sehingga dapat dikatakan belum efektif. Berdasarkan aspek keterampilan siswa yang tuntas KKM ada 24 siswa atau 75% sehingga dapat dikatakan sudah efektif. Berdasarkan aspek sikap siswa yang tuntas KKM ada 30 siswa atau 93,75% sehingga dapat dikatakan sudah efektif. Hasil motivasi belajar berdasarkan kuesioner setiap pada indikator telah menunjukkan siswa sudah termotivasi sehingga pembelajaran dapat dikatakan efektif.

Kata kunci: efektivitas, model belajar berbasis proyek, transformasi, hasil belajar, motivasi belajar

1. Pendahuluan

Penelitian ini mengenai efektivitas penerapan model pembelajaran berbasis proyek pada siswa kelas XI TOI di SMK N 2 Depok Yogyakarta. Model pembelajaran berbasis proyek mengajak siswa untuk terlibat dalam pemecahan masalah dan memberi kesempatan siswa untuk bekerja secara mandiri dalam belajar yang pada akhirnya siswa dapat menciptakan karya yang bernilai.

Berdasarkan wawancara dengan guru mata pelajaran matematika di kelas XI TOI, siswa kelas XI TOI memiliki keunikan tersendiri yaitu siswa sangat aktif namun belum terarah dengan baik. Selain itu, sebenarnya siswa mampu mengeksplorasi pengetahuannya namun tidak terfasilitasi dengan baik. Menurut

guru, metode ceramah lebih sering digunakan karena minimnya pengetahuan guru mengenai model belajar yang sesuai dengan kurikulum 2013. Berdasarkan Observasi peneliti ketika menjalankan PPL (Program Pengalaman Lapangan) di kelas XI TOI SMK N 2 Depok, penggunaan kurikulum 2013 belum dilakukan secara maksimal. Guru sudah menggunakan model belajar berbasis masalah, namun pada aplikasinya guru masih lebih aktif dibandingkan siswa. Menurut siswa, model yang digunakan sebenarnya sudah cukup baik, akan tetapi penggunaannya yang selalu berulang pada setiap kali pertemuan mengakibatkan siswa menjadi bosan. Sikap ini kemudian berdampak dengan hasil belajar siswa. Siswa menjadi pasif dan terkesan bermalas-malasan dengan model yang digunakan. Hal tersebut membuat siswa sulit memahami materi yang disampaikan oleh guru.

Model pembelajaran berbasis proyek ini belum pernah digunakan oleh guru dalam pembelajaran di kelas XI TOI. Alasan guru belum menggunakan model ini karena guru tidak memiliki waktu yang cukup untuk mempersiapkan perangkat pembelajarannya. Selain itu model ini dirasa sesuai dalam pembelajaran di kelas XI TOI karena model ini memiliki hasil akhir yang berupa suatu proyek. Suatu proyek ini dirasa dapat membuat siswa lebih memahami materi yang disampaikan.

2. Tinjauan Pustaka

Menurut Supardi (2013: 164) efektivitas adalah usaha untuk mencapai sasaran yang telah ditetapkan sesuai dengan yang dibutuhkan dan juga sesuai dengan rencana, melalui aktivitas tertentu baik secara fisik maupun non-fisik untuk memperoleh hasil yang maksimal. Berdasarkan beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa efektivitas adalah usaha untuk mencapai tujuan yang sudah ditetapkan melalui kegiatan tertentu untuk memperoleh hasil yang maksimal. Menurut Mulyasa (2014: 131) pembelajaran dikatakan berhasil jika siswa telah tuntas KKM setidaknya-tidaknya 75% dari seluruh siswa dalam kelas. Maka dari itu, suatu pembelajaran dikatakan efektif pula jika hasil belajar siswa telah mencapai angka $\geq 75\%$ dari banyaknya siswa terhadap Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM) mata pelajaran tersebut.

Model pembelajaran berbasis proyek adalah model pembelajaran yang melibatkan kreativitas siswa dalam membangun pengetahuan atau konsep secara mandiri. Menurut Daryanto (2014: 25) menyebutkan beberapa kelebihan dari model pembelajaran berbasis proyek, diantaranya:

- a. Meningkatkan motivasi, dimana siswa akan berusaha keras untuk menyelesaikan tugas proyek.
- b. Meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dari berbagai sumber serta membuat siswa lebih aktif dalam memecahkan masalah.
- c. Meningkatkan kolaborasi yaitu pentingnya kerja kelompok dalam penyelesaian proyek serta dapat mengembangkan keterampilan komunikasi.
- d. Meningkatkan keterampilan dalam mengelola sumber.
- e. Memberikan pengalaman kepada siswa mengenai pembelajaran dan praktik dalam mengorganisasi suatu proyek.
- f. Memberikan pengalaman belajar yang melibatkan peserta didik secara kompleks.
- g. Melibatkan siswa dalam belajar memperoleh informasi dan menunjukkan pengetahuan yang dimiliki.
- h. Membuat suasana belajar yang menyenangkan.

Menurut Daryanto (2014: 26) adapun kekurangan dalam model pembelajaran berbasis proyek ini adalah:

- a. Kondisi kelas agak sulit dikontrol dan mudah menjadi ribut saat pelaksanaan proyek karena adanya kebebasan pada siswa.
- b. Untuk mencapai hasil yang maksimal diperlukan waktu yang lebih banyak dari alokasi waktu yang sudah dibuat.
- c. Memerlukan biaya yang cukup banyak.
- d. Banyaknya peralatan yang harus disiapkan.
- e. Ada kemungkinan siswa yang kurang aktif dalam kerja kelompok.

Langkah-langkah pelaksanaan pembelajaran berbasis proyek yang dikembangkan oleh Daryanto (2014: 27) adalah:

- a. Penentuan pertanyaan mendasar (*Start with the essential question*)
- b. Mendesain perencanaan proyek (*Design a plan for the project*)
- c. Menyusun jadwal (*Create a schedule*)
- d. Memonitoring perkembangan proyek siswa (*Monitoring the progress of the project*)
- e. Menguji hasil (*Assess the outcome*)
- f. Mengevaluasi pengalaman (*Evaluate the experience*)

2.1 Hasil Belajar

Hasil belajar adalah kemampuan yang dimiliki oleh siswa setelah melaksanakan kegiatan belajar, baik aspek kognitif, afektif dan psikomotorik. Selain itu, hasil belajar adalah perubahan atau *output* dari siswa setelah mengalami pengalamannya dalam belajar baik secara kuantitatif maupun kualitatif. Evaluasi belajar adalah cara untuk mengetahui apakah hasil belajar telah mencapai tujuan yang diharapkan. Demikian juga yang dikemukakan oleh Sunal (dalam Susanto, 2013: 5) bahwa evaluasi merupakan alat untuk memperoleh informasi seberapa efektif suatu program telah memenuhi kebutuhan siswa. Menurut Wasliman (dalam Susanto, 2013: 12), hasil belajar siswa merupakan hasil dari kesinambungan antar faktor- faktor yang mempengaruhi, diantaranya:

1. Faktor internal merupakan faktor yang berasal dari dalam diri meliputi kecerdasan, minat dan perhatian, motivasi belajar, ketekunan sikap, kebiasaan belajar.
2. Faktor eksternal merupakan faktor yang berasal dari luar diri meliputi keluarga, sekolah dan masyarakat.

2.2 Motivasi Belajar

Motivasi belajar adalah dorongan untuk seseorang agar orang tersebut mau bergerak maju untuk hal yang lebih baik dalam hal belajar. Menurut Eka dan Ridwan (2015) motivasi belajar memiliki beberapa dimensi yaitu:

1. Ketekunan dalam belajar
 - a. Kehadiran di sekolah
 - b. Mengikuti PBM di kelas
 - c. Belajar dirumah
2. Ulet dalam menghadapi kesulitan
 - a. Sikap terhadap kesulitan
 - b. Usaha mengatasi kesulitan
3. Minat dan ketajaman perhatian dalam belajar
 - a. Kebiasaan dalam mengikuti pembelajaran

- b. Semangat dalam mengikuti proses belajar mengajar
- 4. Berprestasi dalam belajar
 - a. Keinginan untuk berprestasi
 - b. Kualifikasi hasil
- 5. Mandiri dalam belajar
 - a. Penyelesaian tugas
 - b. Menggunakan kesempatan diluar jam pelajaran

Transformasi adalah perubahan letak atau ukuran pada bangun geometri termasuk titik dan garis. Jenis jenis transformasi adalah translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dilatasi.

3. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif kuantitatif. Penelitian dilaksanakan di SMK N 2 Depok, Sleman, Yogyakarta semester genap tahun ajaran 2015/2016. Subjek penelitian adalah 32 siswa kelas XI TOI SMK N 2 Depok, Sleman Yogyakarta. Perolehan data ditinjau dari dua hal yaitu hasil belajar dan motivasi belajar siswa. Hasil belajar meliputi hasil dari ulangan harian dan penugasan proyek yaitu pembuatan video pembelajaran atau komik pembelajaran. Motivasi belajar dapat dilihat dari penyebaran kuesioner mengenai pembelajaran berbasis proyek tersebut. Data hasil belajar merupakan hasil dari masing-masing penilaian. Penilaian ulangan harian dinilai dari aspek pengetahuan, penilaian proyek dinilai dari aspek pengetahuan dan keterampilan. Penilaian sikap merupakan skor yang diperoleh siswa selama pembelajaran sesuai indikator yang sudah ditetapkan. Instrumen pemberian tes tertulis terdiri dari 8 soal ulangan uraian dengan indikator yang sudah ditetapkan. Instrumen penugasan proyek yaitu berupa penugasan proyek, aturan pengerjaan proyek baik video pembelajaran maupun komik pembelajaran beserta rubrik penilaiannya. Instrumen dalam penyebaran kuesioner merupakan lembar kuesioner yang berisi 30 pernyataan *favorable* dan *unfavorable* sesuai dengan indikator yang diberikan.

3.1. Teknik Analisis Data

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 3.1.1 Analisis kegiatan pembelajaran, soal tertulis dan penugasan proyek divalidasi oleh para ahli
- 3.1.2 Analisis *Logbook*
- 3.1.3 Aspek Pengetahuan : Penilaian hasil ulangan harian dan hasil proyek dari aspek pengetahuan. Kriteria Ketuntasan Minimal yang ditetapkan dari sekolah untuk mata pelajaran matematika adalah 75.
- 3.1.4 Aspek Keterampilan : Penilaian hasil proyek dari aspek keterampilan. Kriteria penilaian menggunakan Panduan Penilaian Panduan Penilaian oleh Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2015: 46)

A (sangat baik)	: $96 \leq X \leq 100$
B (baik)	: $86 \leq X \leq 95$
C (cukup)	: $75 \leq X \leq 85$
D (kurang)	: $X \leq 74$
- 3.1.5 Aspek Sikap : Hasil skor perolehan siswa- siswi saat berada dikelas. Kriteria yang digunakan adalah

- A (sangat baik) : $80 \leq X \leq 100$
- B (baik) : $60 \leq X \leq 79$
- C (cukup) : $40 \leq X \leq 59$
- D (kurang) : $X \leq 39$

3.1.6 Analisis Kuesioner : Hasil dari kuesioner yang diisi oleh siswa. Kriteria yang digunakan adalah kriteria yang menurunkan konsep dari Saiffudin Azwar dan Asep Jihad yaitu:

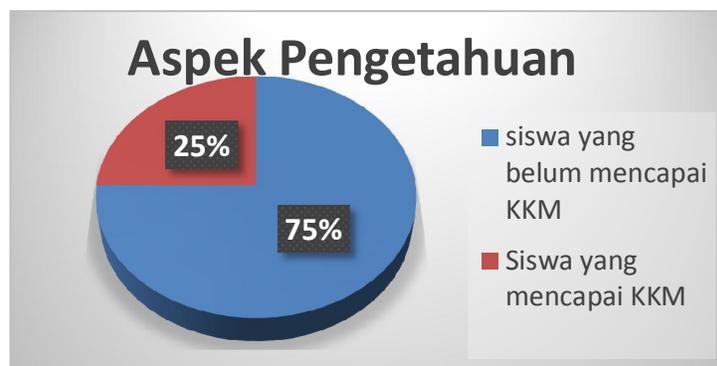
Tabel 1 Kriteria Motivasi Belajar Siswa

Interval	Kategori
$1 \leq R < 1,75$	Tidak termotivasi
$1,75 \leq R < 2,5$	Kurang termotivasi
$2,5 \leq R < 3,25$	Termotivasi
$3,25 \leq R < 4$	Sangat termotivasi

Menurut Mulyasa (2014: 131) Suatu pembelajaran yang dilihat dari hasil belajar dikatakan efektif jika hasil belajar siswa telah mencapai angka $\geq 75\%$ dari jumlah siswa terhadap KKM.

3.2 Hasil dan Pembahasan

Hasil dari penelitian ditunjukkan dari dua hal yaitu hasil belajar dan motivasi belajar. Berdasarkan hasil belajar ditunjukkan bahwa dari aspek pengetahuan, data diambil dari penilaian ulangan harian (40%) dan penilaian proyek (60%). KKM yang digunakan oleh sekolah untuk matapelajaran matematika adalah 75. Banyaknya siswa yang memperoleh nilai diatas KKM adalah 8 orang (25%), sedangkan siswa yang memperoleh nilai dibawah KKM adalah 24 orang (75%) atau



Gambar 1 Hasil Belajar dari Aspek Pengetahuan

Berdasarkan aspek keterampilan data diambil dari penilaian proyek (100%). KKM dalam penilaian dari aspek keterampilan ini adalah C (75). Banyaknya siswa yang memperoleh nilai B adalah 6 siswa (18,75%). Banyaknya siswa yang memperoleh nilai C adalah 18 siswa (56,25%). Banyaknya siswa yang memperoleh nilai D adalah 8 siswa (25%). Jumlah dari persentasi siswa yang memperoleh nilai A, B, dan C adalah 75%.



Gambar 2 Hasil Belajar dari Aspek Keterampilan

Berdasarkan aspek sikap data diambil dari penilaian sikap siswa dalam pembelajaran di kelas. KKM yang dibuat oleh peneliti dalam penilaian sikap ini adalah 60 (B). Banyaknya siswa yang memperoleh predikat A adalah 19 siswa (59,375%). Banyaknya siswa yang memperoleh predikat B adalah 11 siswa (34,375%). Banyaknya siswa yang memperoleh nilai C adalah 2 siswa (6,25%). Jumlah dari persentasi siswa yang memperoleh nilai A dan B adalah 93,75.



Gambar 3 Hasil Belajar dari Aspek Sikap

Hasil dari penyebaran kuesioner menunjukkan bahwa dilihat dari 5 indikator, diantaranya:

- Ketekunan dalam belajar dengan skor 2,63 (termotivasi).
- Ulet dalam menghadapi masalah dengan skor 2,59 (termotivasi).
- Minat dan ketajaman perhatian dalam belajar dengan skor 2,65 (termotivasi).
- Berprestasi dalam belajar dengan skor 2,83 (termotivasi).
- Mandiri dalam belajar dengan skor 2,54 (termotivasi).

3.3 Pembahasan

3.3.1. Hasil Belajar

3.3.1.1 Aspek Pengetahuan

Berdasarkan nilai tes tertulis, perolehan nilai sebagian siswa masih belum memuaskan. Banyaknya siswa yang belum mencapai KKM dikarenakan perolehan nilai tes tertulis siswa yang rendah. Faktor penyebab rendahnya nilai siswa dikarenakan banyak siswa yang tidak menyelesaikan seluruh soal ulangan. Selain itu, banyak siswa yang belum memahami benar konsep dari materi yang diberikan.

Hal ini terlihat pada lembar jawaban siswa yang terlihat tidak mengerti konsep dari sebagian materi yang diberikan. Selain dari nilai tes tertulis aspek pengetahuan juga mencakupi nilai proyek. Nilai proyek dari aspek pengetahuan memberikan hasil yang cukup baik dari siswa. Sebagian besar kelompok dapat menyebutkan contoh dari masing-masing jenis transformasi akan tetapi masih ada kelompok menyebutkan contoh yang salah. Siswa kurang menggali pengetahuannya mengenai contoh contoh dari jenis transformasi.

3.3.1.2 Aspek Keterampilan

Dalam penilaian keterampilan ini, peneliti menilai dari empat indikator yaitu

1) Perencanaan penyelesaian proyek

Data dalam perencanaan penyelesaian proyek didukung dari analisis *logbook*. Peneliti menemukan dua kelompok yaitu kelompok 3 dan kelompok 5 yang tidak mengumpulkan *logbook* sehingga peneliti tidak dapat mengetahui perencanaan dalam penyelesaian proyek.

2) Penulisan laporan dengan benar

Indikator kedua peneliti melihat penggunaan Bahasa Indonesia dalam laporan dan sistematika penulisan laporan yang sesuai dengan ketentuan. Kesalahan yang sering dilakukan oleh siswa yaitu penggunaan huruf kapital dan kesalahan ketik. Kasus demikian peneliti tidak mengurangi poin banyak, namun tetap diberikan tanda letak kesalahan. Mengenai sistematika penulisan laporan, semua kelompok telah mengikuti aturan yang diberikan. tidak ditemukan kesalahan dalam sistematika penulisan laporan ini.

3) Isi dari produk

Berdasarkan hasil dari penilaian isi produk sebagian besar kelompok merekam video secara langsung. Maka dari itu, peneliti memberikan poin baik sampai sangat baik kepada kelompok yang sesuai.

4) Kekomunikatifan produk

Produk yang dihasilkan sudah komunikatif. Hal ini terlihat dari keterampilan kelompok dalam mengemas video pembelajaran melalui *editing* yang baik.

3.3.1.3 Aspek Sikap

Siswa merasa tertantang untuk mengikuti setiap kegiatan dalam pertemuan pembelajaran. Indikator percaya diri, secara garis besar siswa siswi di kelas XI TOI ini cukup memiliki percaya diri untuk berani mengutarakan pendapatnya. Indikator ini tidak ada siswa yang mendominasi pada setiap pertemuan. Indikator kedua yaitu

bertanggung jawab masih ditemukan siswa siswa yang kurang memiliki tanggung jawab dalam setiap proses pembelajaran baik dalam kelompok maupun kelas.

Indikator ketiga yaitu ketelitian, peneliti melihat tingkat ketelitian ketika siswa mengerjakan latihan dan mengerjakan tes tertulis. Tingkat ketelitian di kelas XI TOI sudah cukup baik, akan tetapi masih ditemukan siswa yang tidak teliti. Indikator keempat yaitu bekerjasama, peneliti masih menemukan 2 siswa yang dirasa kurang dalam hal bekerjasama. Peneliti memberikan poin baik karena sudah mau berusaha untuk membangun kerjasama dalam kelompok namun terkadang masih bermalas-malasan.

Indikator yang terakhir yaitu keaktifan, peneliti merasa justru pada indikator ini masih banyak siswa yang masih bersikap pasif. Sikap aktif disini hampir mirip dengan sikap percaya diri tetapi sikap aktif yang ditunjukkan adalah sikap kemauan siswa untuk memberikan kontribusi selama pembelajaran. Perbedaannya adalah siswa lebih dikondisikan dalam keaktifan pembelajaran kelas. Masih banyak siswa yang tidak mau memberikan kontribusi dalam pemecahan masalah yang dibahas di forum kelas. Hasil pada aspek sikap ini berbanding terbalik dengan aspek pengetahuan. Hal ini disebabkan penilaian sikap dilaksanakan hanya pada saat pembelajaran berlangsung sehingga besar kemungkinannya terjadi penilaian yang subjektif. Selain itu penilaian sikap memiliki standarisasi yang dibuat oleh penulis sehingga kriteria sikap tersebut murni berdasarkan pendapat penulis. Penyebab lain ialah faktor yang mempengaruhi siswa dalam belajar atau mempersiapkan diri untuk menghadapi ulangan harian. Besar kemungkinannya bahwa siswa tidak mempersiapkan diri dengan baik sebelum ulangan harian dilaksanakan baik dari faktor internal maupun eksternal, sehingga mempengaruhi hasil dari penilaian pada aspek kognitif.

3.3.2 Motivasi Belajar

Efektivitas model belajar berbasis proyek dalam pembelajaran matematika materi transformasi ditinjau dari motivasi belajar. Data motivasi belajar diperoleh dari kuesioner.

1) Ketekunan dalam belajar

Berdasarkan hasil analisis kuesioner, pada indikator ketekunan dalam belajar memperoleh rata-rata (R) adalah 2,63. Jika rata-rata ini dibandingkan dengan tabel 1 maka dalam hal ketekunan belajar, siswa sudah termotivasi.

2) Ulet dalam menghadapi masalah

Berdasarkan hasil analisis kuesioner, pada indikator keuletan dalam menghadapi masalah memperoleh rata-rata (R) adalah 2,59. Jika rata-rata ini dibandingkan dengan tabel 1 maka dalam hal keuletan siswa dalam menghadapi masalah, siswa sudah termotivasi.

3) Minat dan ketajaman perhatian dalam belajar

Berdasarkan hasil analisis kuesioner, pada indikator minat dan ketajaman perhatian dalam belajar memperoleh rata-rata (R) adalah 2,65. Jika rata-rata ini dibandingkan dengan tabel 1 maka dalam hal minat dan ketajaman perhatian dalam belajar, siswa sudah termotivasi.

4) Berprestasi dalam belajar

Berdasarkan hasil analisis kuesioner pada indikator berprestasi dalam belajar memperoleh rata-rata (R) adalah 2,83. Jika rata-rata ini dibandingkan dengan tabel 1 maka dalam hal kemauan berprestasi dalam belajar, siswa sudah termotivasi.

5) Mandiri dalam belajar

Berdasarkan hasil analisis kuesioner pada indikator kemandirian dalam belajar, diperoleh rata-rata (R) adalah 2,54. Jika rata-rata ini dibandingkan dengan tabel 1 maka dalam hal kemandirian dalam belajar, siswa sudah termotivasi.

4. Kesimpulan dan Saran

- 4.1. Efektivitas Penerapan Model Pembelajaran Berbasis Proyek pada Pokok Bahasan Transformasi ditinjau dari Hasil Belajar Siswa Kelas XI TOI belum dapat dikatakan efektif dari aspek pengetahuan, sedangkan berdasarkan aspek keterampilan dan sikap telah dikatakan efektif untuk diterapkan. Hal itu dibuktikan pada penilaian aspek pengetahuan hasil nilai siswa kurang dari 75% bahkan masih kurang dari 50% sehingga model pembelajaran berbasis proyek pada materi transformasi ini belum efektif untuk diterapkan. Penilaian aspek keterampilan dengan kriteria minimal C maka hasil perolehan nilai A, B, dan C pada siswa sudah mencapai 75%, sehingga model pembelajaran berbasis proyek pada materi transformasi ini sudah efektif untuk diterapkan. Penilaian aspek sikap, perolehan kriteria rata-rata B maka hasil perolehan nilai A dan B pada siswa sudah melebihi 75% sehingga model pembelajaran berbasis proyek pada materi transformasi sudah efektif untuk diterapkan.
- 4.2 Efektivitas Penerapan Model Pembelajaran Berbasis Proyek pada Pokok Bahasan Transformasi ditinjau dari Motivasi Belajar Siswa Kelas XI TOI dikatakan efektif untuk diterapkan ditinjau dari motivasi belajar siswa. Hal ini ditunjukkan oleh kelima indikator yaitu ketekunan dalam belajar, keuletan dalam menghadapi masalah, minat dan ketajaman perhatian dalam belajar, kemauan berprestasi dalam belajar, dan mandiri dalam belajar yang menunjukkan sudah termotivasi.

Saran

Dengan adanya penelitian ini memberikan saran yaitu mempersiapkan dengan Persiapan yang lebih matang untuk mengatasi apabila terjadi perubahan desain pembelajaran yang sudah ditetapkan. Memperhatikan alokasi waktu dalam pelaksanaan pembelajaran sehingga sesuai dengan waktu siswa yang sedang menjalankan ibadah. Validasi instrumen soal ulangan ke siswa lebih baik dilaksanakan karena akan lebih baik jika mengukur validitas soal itu sendiri. Lebih baik untuk mengadakan penyebaran kuesioner sebelum pembelajaran sehingga hasil kuesioner dapat dikatakan merupakan dampak dari penerapan pembelajaran.

Daftar Pustaka

- [1] Azwar, Saifuddin. 2014. *Penyusunan Skala Psikologi*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- [2] Daryanto. 2014. *Pendekatan Pembelajaran Sainifik Kurikulum 2013*. Yogyakarta: Gavamedia
- [3] Ibnu, Trianto. 2014. *Mendesain Model Pembelajaran Inovatif, Progresif, dan Kontekstual*. Jakarta: Prenadamedia Group.
- [4] Jihad, Asep dan Abdul Haris. 2012. *Evaluasi Pembelajaran*. Yogyakarta: Multi Presindo
- [5] Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan. 2015. *Panduan Penilaian Untuk Sekolah Menengah Atas*. Jakarta.

- [6] Mulyasa, H. E. 2014. *Pengembangan dan Implementasi Kurikulum 2013*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- [7] Supardi. 2013. *Sekolah Efektif: Konsep Dasar dan Praktiknya*. Depok: Raja Grafindo

Upaya Meningkatkan Motivasi Belajar Mahasiswa dalam Pembelajaran Struktur Aljabar Melalui Penerapan Model Pembelajaran *MSTAD (Modified Student Teams Achievement Divisions)*

Kartika Sari
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana
sari_kaartika@yahoo.co.id

Abstrak

Abstrak. Sulitnya mahasiswa untuk memahami materi mata kuliah Struktur Aljabar menjadi salah satu penyebab rendahnya motivasi mahasiswa dalam mempelajari mata kuliah ini. Untuk mengatasi hal tersebut dalam penelitian ini diterapkan model pembelajaran *MSTAD*, yang merupakan modifikasi dari model pembelajaran *STAD*, pada pembelajaran Struktur Aljabar. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui efektifitas penerapan model pembelajaran *MSTAD* dalam meningkatkan motivasi belajar mahasiswa dalam pembelajaran Struktur Aljabar. Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *quasi eksperimen*. Subyek dari penelitian ini adalah semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Struktur Aljabar 1 Tahun Pelajaran 2014/2015 sebanyak 69 mahasiswa. Mahasiswa-mahasiswa ini dikelompokkan menjadi 3 kelas, yaitu kelas A (20 orang mahasiswa), B (25 orang mahasiswa) dan C (24 orang mahasiswa), secara berturut-turut mendapatkan pembelajaran konvensional, *STAD* dan *MSTAD*. Instrumen dalam penelitian ini adalah berupa kuisioner, yang diisi mahasiswa sebelum dan sesudah mendapatkan perlakuan. Data awal hasil pengisian kuisioner dari ketiga kelas adalah homogen, dengan motivasi belajar mahasiswa pada masing-masing kelas berada pada kategori sedang. Dari hasil uji Mann-Whitney pada data hasil pengisian kuisioner setelah perlakuan, diperoleh bahwa pada taraf signifikansi 0,01, motivasi mahasiswa kelas A berbeda dengan kelas B dan C, sedangkan motivasi mahasiswa di kelas B dan C adalah sama. Hal ini diperkuat dengan hasil klasifikasi kategori berdasarkan Skala Likert, bahwa motivasi belajar mahasiswa kelas A berada dalam kategori sedang, sedangkan motivasi mahasiswa di kelas B dan C berada dalam kategori tinggi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa dibandingkan penerapan pembelajaran konvensional, penerapan pembelajaran *STAD* dan *MSTAD* lebih efektif dalam meningkatkan motivasi belajar mahasiswa pada pembelajaran Struktur Aljabar.

Kata Kunci: *meningkatkan motivasi belajar, pembelajaran MSTAD.*

1. Pendahuluan

Terdapat banyak definisi mengenai matematika. Salah satunya seperti disampaikan oleh Soejadi (2000) bahwa matematika adalah suatu ilmu yang berpijak pada kesepakatan, mengikuti pola berfikir deduktif serta mempelajari objek-objek yang abstrak. Salah satu cabang dari matematika adalah Aljabar Abstrak, yang merupakan salah satu mata kuliah wajib di beberapa Program Studi Matematika di seluruh dunia. Di Indonesia, pada beberapa universitas menggunakan nama Struktur Aljabar, termasuk di Jurusan Matematika Universitas Udayana. Selain materinya abstrak, mata kuliah ini juga melibatkan banyak pembuktian. Oleh karena itu, tujuan dari mempelajari mata kuliah ini selain

mengembangkan pemahaman dan ketrampilan mahasiswa dalam bekerja dalam struktur matematika, seperti grup dan ring, juga bertujuan mengembangkan kemampuan mahasiswa dalam menganalisa serta membangun bukti-bukti matematika. (Fukawa –Conelly, 2007). Akan tetapi, tujuan ini sering tidak tercapai sepenuhnya (Leron dan Dubinsky, 1995; lihat juga Fukawa –Conelly, 2007). Pemaparan terdahulu menunjukkan bahwa mata kuliah ini tergolong mata kuliah yang materinya sulit dipahami mahasiswa. Hal ini menjadi salah satu penyebab rendahnya motivasi mahasiswa dalam mempelajari mata kuliah ini.

Oleh karena itu dalam penelitian ini, untuk mengurangi abstraknya materi, melalui penemuan terbimbing mahasiswa dituntun untuk membangun suatu konsep abstrak dari konsep-konsep real yang telah dikenalnya. Proses ini dinamakan proses abstraksi. Selain itu pendekatan yang dilakukan dalam proses membangun konsep tadi dikenal dengan pendekatan konstruktivistik. Melalui pendekatan ini, siswa belajar membangun pengetahuannya sendiri. Salah satu tokoh konstruktivisme adalah Jean Piaget yang merupakan ahli psikologi Eropa pertama yang menerapkan filsafat konstruktivisme dalam pembelajaran (Ismail, 2007). Tokoh Konstruktivisme lainnya, Lee Vigotsky, ahli psikologi Rusia, menyatakan bahwa dalam membangun suatu pengetahuan baru dari pengetahuan awal yang dimiliki seseorang, seringkali perlu bantuan orang lain, yang memiliki kemampuan yang lebih tinggi dari individu tersebut (Ismail, 2007).

Model pembelajaran yang menerapkan filsafat konstruktivisme Vigotsky adalah model pembelajaran kooperatif. Salah satu model pembelajaran kooperatif yang paling sederhana adalah model pembelajaran STAD (*Student Teams Achievement Division*)(Slavin, 2014). Pada model ini, kelas dibagi dalam kelompok-kelompok kecil heterogen yang terdiri dari 4 – 5 orang dan secara umum terdapat 4 fase dalam proses pembelajarannya, yaitu fase instruksi, fase transisi menuju tim, fase belajar dalam kelompok serta fase pengakuan prestasi (Eggen dan Kauchak, 2012). Selain itu dalam menerapkan model ini, mahasiswa difasilitasi dengan LKM (Lembar Kerja Mahasiswa) dan modul yang juga disusun secara konstruktivistik.

Banyak penelitian menunjukkan bahwa model pembelajaran STAD dapat diterapkan pada berbagai bidang pelajaran serta efektif dalam meningkatkan prestasi belajar siswa / mahasiswa pada berbagai tingkat pendidikan, dari sekolah dasar sampai perguruan tinggi. Penelitian-penelitian tersebut di antaranya dilakukan oleh Fauziningrum (2012), Adesoji dan Ibraheem(2009), Van Dat Tran (2013) dan Sari (2013).

Sebagai studi lebih lanjut, karena keterbatasan waktu dalam diskusi di kelas dan kesalahan pemahaman mahasiswa lambat terdeteksi, Sari dan Suciptawati (2015) mengembangkan model STAD menjadi model pembelajaran MSTAD. Pada dasarnya model MSTAD sama dengan model STAD, hanya ada tambahan fase diskusi di luar kelas dan tambahan waktu diskusi dalam kelas, serta pemberian materi singkat pada akhir setiap pertemuan yang akan didiskusikan di luar jam tatap muka.

Penelitian McDermot, dkk. (2001) menunjukkan terdapat korelasi antara motivasi dan pembelajaran (Eggen dan Kauchak, 2012). Pada artikel Sari dan Suciptawati (2015) ini telah dibahas efektifitas penerapan model pembelajaran *MSTAD* dalam meningkatkan prestasi belajar mahasiswa pada mata kuliah Struktur Aljabar pada tahap uji coba pengembangan model, akan tetapi belum dibahas efektifitas penerapan model pembelajaran *MSTAD* dalam meningkatkan motivasi belajar mahasiswa pada mata kuliah Struktur Aljabar. Oleh karena itu, masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana efektifitas penerapan model pembelajaran *MSTAD* dalam meningkatkan motivasi belajar mahasiswa pada pembelajaran Struktur Aljabar.

Berdasarkan masalah yang telah disebutkan pada bagian terdahulu, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui efektifitas penerapan model pembelajaran MSTAD dalam meningkatkan motivasi belajar mahasiswa pada pembelajaran Struktur Aljabar.

Adapun manfaat yang bisa diperoleh dari hasil penelitian ini adalah memberikan alternatif model pembelajaran untuk diterapkan sehingga dapat meningkatkan motivasi mahasiswa dalam belajar baik pada mata kuliah Struktur Aljabar maupun pada mata kuliah yang lain.

2. Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *quasi eksperimen*. Subyek dari penelitian ini adalah semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Struktur Aljabar 1 Tahun Pelajaran 2014/2015 sebanyak 69 mahasiswa. Mahasiswa-mahasiswa ini dikelompokkan menjadi 3 kelas, yaitu kelas A (20 orang mahasiswa), B (25 orang mahasiswa) dan C (24 orang mahasiswa), secara berturut-turut mendapatkan pembelajaran konvensional, *STAD* dan *MSTAD* (Sari dan Suciptawati, 2015)

Untuk mengukur motivasi mahasiswa dalam belajar, digunakan instrumen berupa kuisioner. Kuisioner ini berisi item-item pertanyaan sebanyak 35 butir yang diambil dari penelitian Brata(2012) dengan validitas isi sebesar 0,8, validitas butir per item baik, koefisien reliabilitas 0,893 (tergolong sangat tinggi), serta daya beda semua item lebih dari 0,25, yang berarti dapat diterima. Adapun tanggapan yang diberikan mahasiswa adalah dengan memilih 1 = selalu atau 2 = sering atau 3 = kadang-kadang atau 4 = jarang, 5 = tidak pernah. Kuisioner diisi mahasiswa sebelum dan sesudah diberi perlakuan.

Selanjutnya untuk mengolah data yang diperoleh dilakukan uji statistik perbandingan tiga sampel yang saling bebas. Untuk dapat melakukan ini, mengingat data yang diperoleh bukan data kontinu, maka terlebih dahulu mengubah data menjadi data kontinu. Setelah itu dilakukan uji homogenitas data motivasi belajar awal mahasiswa (yang diisi mahasiswa sebelum diberi perlakuan) untuk mengetahui apakah mahasiswa pada ketiga kelas mempunyai motivasi belajar yang sama. Kemudian dilakukan uji normalitas dan homogenitas data motivasi belajar akhir mahasiswa (diisi mahasiswa setelah diberi perlakuan) yang merupakan asumsi yang harus dipenuhi untuk melakukan uji statistik parametrik. Jika asumsi uji parametrik ada yang tidak terpenuhi, maka dilakukan uji non parametrik perbandingan tiga sampel saling bebas melalui uji Kruskal Wallis dengan hipotesis

H_0 : Tidak terdapat perbedaan motivasi belajar antara mahasiswa kelas A, B dan C dalam pembelajaran Struktur Aljabar 1.

H_1 :: Terdapat perbedaan motivasi belajar antara mahasiswa kelas A, B dan C dalam pembelajaran Struktur Aljabar 1

Nilai statistik Kruskal Wallis dirumuskan sebagai (Sundayana, 2014)

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

Dengan N = $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$

n_i = banyak pengamatan kelas i

k = banyak kelas

R_i = jumlah rank pada kelas i

H_0 diterima apabila $H < \chi^2_{\alpha(k-1)}$ dan pabila berlaku selain ini, H_0 ditolak.

Apabila H_0 ditolak, maka harus ditentukan manakan di antara kelas A, B dan C yang berbeda. Untuk itu, kembali dilakukan uji non parametrik antara kelas A dan B , A dan C serta antara B dan C melalui uji Mann Whitney dengan hipotesis:

- H_0 : Tidak terdapat perbedaan motivasi belajar antara mahasiswa kelas A dan B dalam pembelajaran Struktur Aljabar 1.
 H_1 :: Terdapat perbedaan motivasi belajar antara mahasiswa kelas A dan B dalam pembelajaran Struktur Aljabar 1

Hipotesis yang sama juga diberikan pada uji Mann Whitney untuk mengetahui terdapat perbedaan motivasi belajar atau tidak antarmahasiswa kelas B dan C serta antra mahasiswa kelas B dan C.

Rumus nilai statistik Mann Whitney pada perbandingan kelas A dan B adalah (Sundayana, 2014)

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U};$$

dengan $U = n_A n_B + \frac{n_A(n_A+1)}{2} - R_A$, apabila $R_A < R_B$.

Apabila sebaliknya, $U = n_A n_B + \frac{n_B(n_B+1)}{2} - R_B$

Dalam hal ini, n_A = banyak pengamatan kelas A

n_B = banyak pengamatan kelas B

R_A = jumlah rank kelas A

H_0 diterima apabila $-z_{0,5(1-\alpha)} < z < z_{0,5(1-\alpha)}$ dan tolak H_0 apabila berlaku selain ini.

Selain itu dari data yang diperoleh juga diterapkan Skala Likert, untuk mengetahui kategori motivasi belajar mahasiswa kelas A. B dan C. Untuk itu terlebih dahulu harus dihitung (Sundayana, 2014)

Skor maksimum (m) = banyak item soal x banyak pengamatan x 5

Skor minimum (s) = banyak item soal x banyak pengamatan x 1

Rentang = skor maksimum – skor minimum

Panjang kelas (p) = rentang /5

Selanjutnya, dibuat rentang skala motivasi mahasiswa dalam bentuk tabel, seperti tampak pada Tabel 1.

Tabel 1. Skala Motivasi Mahasiswa Hasil Pengisian Kuisisioner di Suatu Kelas

Rentang skala motivasi	Kategori motivasi
$700 < \text{Skor} \leq 1260$	Sangat rendah
$s < \text{Skor} \leq s+p$	rendah
$s+p < \text{Skor} \leq s+2p$	sedang
$S+2p < \text{Skor} \leq s+3p$	tinggi
$S+3p < \text{Skor} \leq m$	Sangat tinggi

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil uji statistik dari data hasil pengisian kuisisioner motivasi belajar mahasiswa sebelum diberi perlakuan menunjukkan bahwa data dari ketiga kelas adalah homogen dan

berdasarkan penerapan skala Likert diperoleh bahwa motivasi belajar mahasiswa pada ketiga kelas berada pada kategori sedang.

Dari hasil pengisian kuisioner motivasi mahasiswa pada ketiga kelas setelah diberi perlakuan, pertama-tama dilakukan uji normalitas data melalui uji Lilliefors. Dari hasil perhitungan diperoleh nilai-nilai L hitung seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil Uji Lilliefors

Kelas	n	L_{hitung}	$L_{0,01}(n-1)$
A	20	0,1360	0,235
B	25	0,2528	0,2062
C	24	0,136	0,2124

Berdasarkan Tabel 2, diperoleh bahwa nilai L_{hitung} data hasil pengisian kuisioner Kelas A dan C $< L_{tabel}$, hal ini berarti data hasil pengisian kuisioner kelas A dan C berdistribusi normal. Tetapi tidak demikian halnya dengan kelas B, nilai $L_{hitung} > L_{tabel}$, yang berarti data hasil pengisian kuisioner pada kelas B tidak berdistribusi normal. Karena salah satu asumsi uji parametrik tidak terpenuhi, maka dilakukan uji perbandingan 3 sampel saling bebas dengan uji non parametrik, yang dalam hal ini dengan menggunakan uji Kruskall Wallis

Dari data hasil pengisian kuisioner pada 3 kelas diperoleh hasil uji Kruskall Wallis seperti pada Tabel 3

Tabel 3. Hasil Uji Kruskall Wallis

Kelas (i)	n	R_i	H	$\chi^2_{0,01}(2)$
A	20	1186,5	44,6637	9,210
B	25	500		
C	24	728,5		

Tabel 3 menunjukkan bahwa nilai statistik $H > \chi^2_{0,01}(2)$. Dengan demikian H_0 ditolak, yang berarti berdasarkan hasil uji Kruskall Wallis, diperoleh bahwa terdapat perbedaan motivasi belajar yang signifikan di antara ketiga kelas.

Untuk mengetahui kelas-kelas mana yang berbeda, dilakukan uji Mann Whitney antara data hasil pengisian kuisioner kelas A dan B, antara kelas A dan C, serta antara kelas B dan C. Hasil perhitungan uji statistik Mann Whitney antara kelas A dan B, antara kelas A dan C, serta antara kelas B dan C diberikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil perhitungan uji statistik Mann Whitney antara kelas A dan B

Antara kelas	U	μ_U	δ_U	Z_{hitung}	$Z_{0,5(1-0,01)}$
A dan B	498	250	42,8109	5,7929	2,57
B dan C	173	300	49,9843	-2,5408	
A dan C	478,5	240	42,4154	5,6229	

Dari Tabel 4, diperoleh bahwa nilai Z_{hitung} antara kelas A dan B serta antara A dan C $>$ dari Z_{tabel} . Dengan demikian H_0 ditolak, yang berarti terdapat perbedaan motivasi belajar antara kelas A dan B serta antara kelas A dan C. Akan tetapi motivasi belajar mahasiswa antara kelas B dan C adalah tidak berbeda secara signifikan, karena nilai- $Z_{tabel} < Z_{hitung} < Z_{tabel}$.

Selanjutnya dilakukan tinjauan berdasarkan Skala Likert. Untuk itu terlebih dahulu ditentukan rentang skala motivasi belajar mahasiswa. Mengingat banyak item kuisisioner 35 buah dan banyaknya mahasiswa yang mengikuti mata kuliah Struktur Aljabar 1 pada kelas A, B dan C secara berturut-turut adalah 20, 25 dan 24, dengan skor kategori maksimum 5 dan skor kategori minimum 1, maka skor maksimum, minimum rentang dan panjang kelas pada masing-masing masing-masing kelas dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Rentang Data dan Panjang Kelas pada Data Motivasi Belajar Kelas A, B dan C

Kelas	Skor Maksimum	Skor Minimum	rentang	Panjang Kelas
A	3500	700	2800	560
B	4375	875	3500	700
C	4200	840	3360	672

Berdasarkan Tabel 5 dapat disusun rentang skala motivasi belajar mahasiswa pada kelas A, B dan C secara berturut-turut disajikan pada Tabel 6, 7, dan 8.

Tabel 6. Skala motivasi mahasiswa hasil pengisian kuisisioner di kelas A

Rentang skala tanggapan	Kategori motivasi
$700 < \text{Skor} \leq 1260$	Sangat rendah
$1260 < \text{Skor} \leq 1820$	rendah
$1820 < \text{Skor} \leq 2380$	sedang
$2380 < \text{Skor} \leq 2940$	tinggi
$2940 < \text{Skor} \leq 3500$	Sangat tinggi

Tabel 7. Skala motivasi mahasiswa hasil pengisian kuisisioner di kelas B

Rentang skala tanggapan	Kategori motivasi
$875 < \text{Skor} \leq 1575$	Sangat rendah
$1575 < \text{Skor} \leq 2275$	rendah
$2275 < \text{Skor} \leq 2975$	sedang
$2975 < \text{Skor} \leq 3675$	tinggi
$3675 < \text{Skor} \leq 4375$	Sangat tinggi

Tabel 8. Skala motivasi mahasiswa hasil pengisian kuisioner di kelas C

Rentang skala tanggapan	Kategori motivasi
$840 < \text{Skor} \leq 1512$	Sangat rendah
$1512 < \text{Skor} \leq 2184$	rendah
$2184 < \text{Skor} \leq 2856$	sedang
$2856 < \text{Skor} \leq 3528$	tinggi
$3528 < \text{Skor} \leq 4200$	Sangat tinggi

Berdasarkan data hasil pengisian kuisioner pada ketiga kelas diperoleh jumlah skor kelas A, B dan C secara berturut-turut 2310, 3022 dan 3063. Oleh karena itu berdasarkan Tabel 6, 7, dan 8 diperoleh bahwa motivasi belajar mahasiswa kelas A tergolong dalam kategori sedang, motivasi belajar mahasiswa kelas B dan C tergolong tinggi. Hal ini bersesuaian dengan hasil uji statistik non parametrik yang dibahas pada bagian terdahulu bahwa terapat perbedaan motivasi belajar mahasiswa antara kelas A dan B, serta antara kelas A dan C, sedangkan motivasi belajar mahasiswa kelas B dan C tidak berbeda secara signifikan.

Berdasarkan hasil penelitian dan uji statistik serta interpretasi Skala Likert dapat dikatakan bahwa motivasi belajar mahasiswa yang pembelajarannya menerapkan model STAD dan MSTAD adalah sama, yaitu sama-sama dalam kategori tinggi, sedangkan motivasi belajar mahasiswa pada kelas yang pembelajarannya konvensional tergolong sedang. Hal ini bisa dijelaskan sebagai berikut. Baik pada pembelajaran STAD maupun MSTAD pemaparan materi dilakukan melalui pendekatan konstruktivisme melalui penemuan terbimbing sehingga mahasiswa tidak merasa bosan, karena mahasiswa diajak aktif berpikir. Selain itu, sesuai dengan teori dari Vigotsky pada kelas STAD dan MSTAD mahasiswa bisa bebas berdiskusi dengan teman-teman sebaya yang kemampuan akademiknya lebih tinggi, apabila ada yang tidak dipahami, mengingat tidak semua mahasiswa berani bertanya pada dosen apabila ada yang tidak dipahami. Dengan adanya teman yang bisa membantu meningkatkan pemahamannya, mahasiswa lebih leluasa dalam belajar. Selain itu, karena di sini dituntut tanggung jawab kelompok, semua termotivasi untuk belajar giat supaya tidak mengecewakan kelompoknya.

4. Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bagian terdahulu dapat disimpulkan bahwa penerapan model pembelajaran MSTAD lebih efektif dalam meningkatkan motivasi mahasiswa pada pembelajaran Struktur Aljabar dibandingkan pembelajaran konvensional. Akan tetapi, baik penerapan model pembelajaran MSTAD maupun STAD sama efektifnya dalam meningkatkan motivasi belajar mahasiswa dalam pembelajaran Struktur Aljabar. Hal ini disebabkan pada penerapan kedua model ini, mahasiswa diajak secara aktif dalam membangun konsep melalui penemuan terbimbing, mahasiswa belajar dalam kelompok yang heterogen dengan setiap anggota kelompok mempunyai tanggung jawab terhadap keberhasilan kelompoknya, sehingga mahasiswa tidak bosan dalam belajar bahkan termotivasi untuk memenuhi tanggung jawabnya demi keberhasilan kelompoknya.

Pada penelitian ini hanya dilakukan pada satu universitas, disarankan untuk penelitian selanjutnya dilakukan pada beberapa universitas bagi mahasiswa yang mengambil mata kuliah Struktur Aljabar, sehingga hasil penelitiannya bisa digeneralisasi. Selain itu, juga disarankan pada penelitian selanjutnya ditinjau efektifitas penerapan

model *MSTAD* dalam meningkatkan prestasi belajar dan motivasi belajar mahasiswa pada mata kuliah lainnya.

Daftar Pustaka

- [1] Adesoji, Francis A., Ibraheem, Tunde L., 2009, Effect of Student teams-Achievement Divisions Strategy and Mathematics Knowledge on Learning Outcomes in Chemical Kinetics, *Uluslararası Sosyal Ara_tirmalar Dergisi* Volume 2 / 6 pp 15 – 25
- [2] Brata, I Wayan, 2012, Pengaruh Model Pembelajaran STAD (Student Teams Achievement Division) berbasis Asesment Proses Terhadap Motivasi Belajar dan Prestasi Belajar Matematika Siswa. *Tesis* .Program studi Penelitian dan Evaluasi Pendidikan Pascasarjana Universitas Pendidikan Ganesha Singaraja, Bali
- [3] Eggen, Paul dan Kauchak, Don, 2012, Strategi dan Model Pembelajaran : Mengajarkan Konten dan ketrampilan Berpikir, Edisi Keenam, Diterjemahkan oleh satrio Wahono, Jakarta Barat: PT Indeks Permata Puri Media
- [4] Fauziningrum, Endah, 2012, A Comparative Study of Using Students Team Achievement Division (STAD) and Three Minutes Review (TMR) Strategies in Teaching Questions,. *Register* Volume 5 Nomor 2 pp 157-174.
- [5] Fukawa-Conelly, T. P., 2007, A Tale of Two Courses; Teaching and Learning Undergraduate Abstract Algebra, *Dissertation*, Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park.
- [6] Ismail, 2007, Pembelajaran Matematika dengan Penekanan Konstruktivistis. *Pembaharuan dalam Pembelajaran Matematika*. Cetakan Pertama. Penerbit Universitas Terbuka
- [7] Leron, U. dan Dubinsky, E., 1995, An Abstract Algebra Story. *American Mathematical Monthly*, 102, p. 227 – 242.
- [8] Sari, Kartika, 2013, Efektifitas Model Pembelajaran *Student Teams Achievement Divisionion* (STAD) dalam Pembelajaran Struktur Aljabar 1, *Laporan Penelitian*, tidak dipublikasikan
- [9] Sari, Kartika dan Suciptawati, Ni Luh Putu, 2015, Pengembangan Model Pembelajaran an *Modified Student Teams Achievement Division (MSTAD)* dalam Meningkatkan Hasil Belajar Siswa pada Pembelajaran Struktur Aljabar. *Jurnal Pengajaran MIPA* Volume 20 Nomor 2 pp. 106-217, Bandung: FPMIPA UPI
- [10] Slavin, Robert E., 2014, Student Teams Achievement Division (STAD) . *The Handbook of Cooperative Learning* yang disusun oleh Shlomo Sharan, diterjemahkan oleh Sigit Prawoto . Yogyakarta: Istana Media
- [11] Soejadi, 2000, *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*, Jakarta: Dirjen Dikti Depdikbud.
- [12] Sundayana, H. Rostina. ,2014, *Statistika Penelitian Pendidikan*. Bandung: Alfabeta
- [13] Van Dat Tran, 2013, Effects of Student Teams Achievement Division (STAD) on Academic Achievement, and Attitudes of Grade 9th Secondary School Students towards Mathematics, *International Journal Sciences* Volume 2 pp 5- 15

Analisis Kesalahan Siswa dalam Mengerjakan Soal-Soal pada Topik Operasi Bentuk Aljabar Kelas VIII B SMP Pangudi Luhur 1 Klaten Tahun Ajaran 2015/2016

Natalia Merry Dellani.
Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
merrydellani@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui jenis-jenis kesalahan yang dilakukan siswa dalam mengerjakan soal pada topik Operasi Bentuk Aljabar kelas VIII B SMP Pangudi Luhur 1 Klaten tahun ajaran 2015/2016, dan untuk mengetahui faktor-faktor penyebab siswa melakukan kesalahan tersebut.

Subyek penelitian ini adalah 34 siswa kelas VIII B SMP Pangudi Luhur 1 Klaten tahun ajaran 2015/2016. Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Instrumen pengumpulan data berupa tes tertulis dan wawancara. Tes tertulis diikuti oleh 34 siswa kelas VIII B, dan untuk wawancara peneliti memilih 3 siswa kelas VIII B.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa terdapat 3 jenis kesalahan yang dilakukan siswa SMP Pangudi Luhur 1 Klaten kelas VIII B pada tahun ajaran 2015/2016 dalam mengerjakan soal Operasi Bentuk Aljabar, yaitu kesalahan data, kesalahan teorema atau definisi, dan kesalahan teknis. Faktor-faktor penyebab siswa melakukan kesalahan, yaitu siswa kurang teliti dalam melakukan operasi hitung, siswa belum menguasai materi-materi prasyarat, siswa tidak mengerti maksud dari soal yang diberikan, siswa kurang berlatih dalam menyelesaikan soal-soal tentang Operasi Bentuk Aljabar, dan suasana kelas yang kurang kondusif sehingga siswa sulit dalam memahami materi Operasi Bentuk Aljabar.

Kata Kunci: *abstrak, aljabar, analisis kesalahan, faktor penyebab, operasi bentuk aljabar*

1. Pendahuluan

Matematika adalah ilmu dasar untuk membantu memahami ilmu pengetahuan yang lain. Oleh sebab itu, pembelajaran matematika sangatlah penting untuk dipelajari dan dipahami. Matematika yang bersifat abstrak membuat siswa menjadi merasa kesulitan memahaminya. Banyak siswa yang menganggap matematika itu sulit sehingga menyebabkan matematika menjadi mata pelajaran yang ditakuti dan dijauhi siswa. Banyak siswa yang menganggap matematika itu sulit sehingga menyebabkan matematika menjadi mata pelajaran yang ditakuti dan dijauhi siswa. Padahal, matematika dipelajari pada setiap jenjang pendidikan dan menjadi salah satu pengukur (indikator) keberhasilan siswa dalam menempuh suatu jenjang pendidikan, serta menjadi materi ujian untuk seleksi penerimaan menjadi tenaga kerja bidang tertentu.

No soal	Jenis Kesalahan	Tipe Kesalahan
1	Kesalahan teorema atau definisi	Menerapkan teorema pada kondisi yang tidak sesuai
2	Kesalahan data	Mengabaikan data penting yang diberikan
3	Kesalahan data	Mengabaikan data penting yang diberikan
	Kesalahan teorema atau definisi	Menerapkan pada kondisi yang tidak sesuai
3	Kesalahan teorema atau definisi	Tidak teliti atau tidak tepat dalam mengutip definisi
	Kesalahan data	Mengartikan informasi tidak sesuai dengan teks yang sebenarnya
4	Kesalahan data	Mengartikan informasi tidak sesuai dengan teks yang sebenarnya
	Kesalahan teknis	Perhitungan
5	Kesalahan data	Menyalin data
	Kesalahan teknis	Perhitungan
6	Kesalahan data	Mengabaikan data penting yang diberikan
	Kesalahan teknis	Perhitungan
7	Kesalahan data	Menyalin data
	Kesalahan teknis	Perhitungan
8	Kesalahan data	Menyalin data
	Kesalahan teorema atau definisi	Menerapkan sifat distributif untuk fungsi atau operasi yang bukan distributif
	Kesalahan teknis	Perhitungan
9	Kesalahan teorema atau definisi	Menerapkan sifat distributif untuk fungsi atau operasi yang bukan distributif
	Kesalahan teknis	Tidak teliti atau tidak tepat dalam mengutip definisi
10	Kesalahan data	Mengartikan informasi tidak sesuai dengan teks yang sebenarnya
	Kesalahan teorema atau definisi	Menerapkan sifat distributif untuk fungsi atau operasi yang bukan distributif
		Tidak teliti atau tidak tepat dalam mengutip definisi
11	Kesalahan teorema atau definisi	Tidak teliti atau tidak tepat dalam mengutip definisi
12	Kesalahan teorema atau definisi	Menerapkan sifat distributif untuk fungsi atau operasi yang bukan distributif
		Tidak teliti atau tidak tepat dalam mengutip definisi

Peneliti menemukan banyak kesalahan siswa saat menyelesaikan soal-soal tentang materi Operasi Bentuk Aljabar. Setelah diidentifikasi siswa belum terampil dalam operasi hitung bilangan bulat. Hal ini dikarenakan siswa kurang berlatih dalam mengerjakan soal-soal. Selain itu, siswa masih belum memahami definisi dari variabel, koefisien, serta konstanta sehingga mengakibatkan kesalahan ketika mengerjakan soal yang berkaitan dengan variabel, koefisien, dan konstanta. Pentingnya adanya analisis kesalahan siswa untuk mengetahui letak kesalahan yang dilakukan siswa saat mengerjakan soal. Dengan seperti itu guru dapat memberikan tindakan yang tepat sehingga bisa mengurangi kesalahan pada siswa.

Materi Operasi Bentuk Aljabar dipilih oleh peneliti karena materi ini merupakan materi prasyarat untuk menuju materi selanjutnya. Dikarenakan betapa pentingnya

materi ini, maka siswa harus benar-benar menguasai materi ini untuk mempelajari materi selanjutnya.

2. Metode Penelitian

Peneliti menggunakan metode deskriptif kualitatif dalam menguraikan setiap kesalahan yang dilakukan siswa pada proses penyelesaian soal, guna mengkategorikan kesalahan serta mengetahui lebih dalam penyebab siswa melakukan kesalahan.

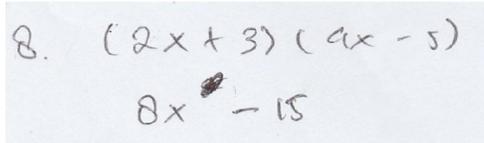
Metode analisis data dalam penelitian ini adalah mengoreksi seluruh pekerjaan siswa, mencatat setiap kesalahan yang dilakukan siswa, mengelompokkan tiap kesalahan yang dibuat siswa berdasarkan letak kesalahannya, kemudian memilih siswa yang akan dianalisis lanjut dalam wawancara, kemudian mengkategorikan kesalahan yang telah dikemukakan oleh Hadar (1987).

3. Hasil dan Pembahasan

Kesalahan-kesalahan yang dilakukan siswa kelas VIII B SMP Pangudi Luhur 1 Klaten dalam mengerjakan soal-soal Operasi Bentuk Aljabar dapat dikelompokkan sesuai dengan kategori menurut Hadar (1987). Jenis kesalahan yang banyak dilakukan siswa adalah jenis kesalahan teorema atau definisi. Berikut ini adalah jenis kesalahan dan tipe kesalahannya:

Tabel 1. Jenis Kesalahan dan Tipe Kesalahan Siswa Kelas VIII B

Kemudian mengenai analisis data secara ringkas dapat dilihat pada uraian berikut ini:

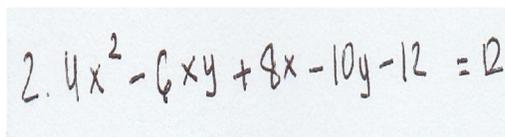


$$8. \quad (2x + 3)(ax - 5)$$

$$8x - 15$$

Gambar 1: Kesalahan Teorema atau Definisi Siswa 09

Tipe kesalahan yang dilakukan siswa 09 pada jenis kesalahan teorema atau definisi di atas adalah tipe kesalahan menerapkan sifat distributif. Siswa 09 melakukan kesalahan dalam menerapkan perkalian suku dua dengan suku dua.



$$2. \quad 4x^2 - 6xy + 8x - 10y - 12 = 12$$

Gambar 2: Kesalahan Data Siswa 20

Tipe kesalahan yang dilakukan siswa 20 pada jenis kesalahan data di atas adalah tipe kesalahan mengabaikan data penting yang diberikan. Siswa 20 melakukan kesalahan dalam menentukan konstanta dengan tidak mengikutsertakan operasi di depan konstanta.

$$\begin{aligned} & s. (4x + 19y - 25z) + (34x - 12y - 56z) \\ & = 38x = 7y - 31z \end{aligned}$$

Gambar 3: Kesalahan Teknis Siswa 38

Tipe kesalahan yang dilakukan siswa 38 pada jenis kesalahan teknis di atas adalah tipe kesalahan perhitungan. Siswa 38 melakukan kesalahan dalam menghitung operasi hitung pada bilangan bulat.

Berdasarkan hasil analisis di atas, kesalahan-kesalahan yang ditemukan dikelas VIII B dalam mengerjakan soal-soal dengan topik Operasi Bentuk Aljabar adalah kesalahan teorema atau definisi, kesalahan data, dan kesalahan teknis.

Menurut Paul Suparno (1997), pengalaman kita yang terbatas akan sangat membatasi perkembangan pembentukan pengetahuan kita pula. Pernyataan tersebut sesuai dengan penyebab siswa kelas VIII B yang melakukan kesalahan saat diberikan soal mengenai Operasi Bentuk Aljabar. Siswa kurang berlatih dalam menyelesaikan soal-soal tentang Operasi Bentuk Aljabar, sehingga ketika siswa diberikan soal tentang Operasi Bentuk Aljabar mengalami kesulitan dalam pengerjaan. Hal ini disebabkan saat siswa mengerjakan soal tentang operasi hitung pada bentuk aljabar, siswa membatasi pengetahuan mereka. Operasi hitung pada bilangan bulat mempengaruhi pengetahuan siswa bahwa operasi hitung pada bilangan bulat tidak bisa digunakan dalam mengerjakan soal tentang operasi pada bentuk aljabar.

Menurut Koestoer dalam Mulyadi (2008), seseorang yang mengalami kesulitan belajar dalam suatu bidang tertentu dikarenakan ada bagian-bagian dalam urutan belajar yang belum dipahami. Pernyataan tersebut juga sesuai dengan penyebab siswa melakukan kesalahan saat mengerjakan soal-soal dalam topik Operasi Bentuk Aljabar dalam penelitian ini. Siswa tidak memahami materi sebelumnya (contoh: operasi hitung) sehingga siswa menjadi kesulitan dalam mengerjakan soal tersebut. Siswa harus memahami konsep-konsep dasar atau materi-materi sebelumnya karena tidak menutup kemungkinan untuk dipelajari lagi pada materi yang baru. Akibatnya ketika materi ini digunakan untuk materi lain, siswa melakukan kesalahan. Siswa kelas VIII menerima materi tentang operasi bilangan bulat. Jadi seharusnya siswa kelas VIII sudah terampil dalam menghitung operasi bilangan bulat karena materi tersebut telah dipelajari.

4. Kesimpulan

Jenis-jenis kesalahan yang dilakukan oleh siswa kelas VIII B SMP Pangudi Luhur 1 Klaten dalam mengerjakan soal-soal tentang Operasi Bentuk Aljabar dikelompokkan menjadi 3 jenis kesalahan dan beberapa tipe kesalahan pada setiap jenis kesalahannya. Berikut ini jenis kesalahan dan tipe kesalahan yang ditemukan dalam penelitian, yaitu jenis kesalahan data dengan beberapa tipe kesalahan data, kesalahan teorema atau definisi, dan kesalahan teknis.

Pada hasil analisis tertulis dan wawancara dapat disimpulkan faktor-faktor penyebab siswa melakukan kesalahan, yaitu siswa kurang teliti dalam melakukan operasi hitung, siswa belum menguasai materi-materi prasyarat, siswa tidak mengerti maksud dari soal yang diberikan, siswa kurang berlatih dalam menyelesaikan soal-soal tentang Operasi Bentuk Aljabar, dan suasana kelas yang kurang kondusif sehingga siswa sulit dalam memahami materi Operasi Bentuk Aljabar.

Daftar Pustaka

- [1] Hadar, Movshovitz, Orit Zaslavsky, & Shlomo Inbar. 1987. *An Empirical Classification Model for Error in High School Mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 18, no. 1, pp. 3-14.
- [2] Marsigit. 2009. *Matematika SMP Kelas VIII*. Jakarta: Yudhistira.
- [3] Moeloeng, Lexy. 2009. *Metodologi Penelitian Kualitatif Edisi Revisi*. Bandung: PT. Remaja Rosdakarya.
- [4] Mulyadi. 2008. *Diagnosis Kesulitan Belajar dan Bimbingan terhadap Kesulitan Belajar Khusus*. Yogyakarta: Nuha Litera.
- [5] Suparno, Paul. 1997. *Filsafat Konstruktifisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Kanisius.

Profil Kemampuan Matematika Siswa SMP N 1 Prambanan Klaten Kelas VIII-A dalam Menyelesaikan Soal-Soal TIMSS *Grade 8* pada Materi Aljabar

Meta Dispini¹ dan Beni Utomo²

¹ Magister Pendidikan Matematika, ² Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
^{1,2} Universitas Sanata Dharma Yogyakarta

Abstrak

Abstrak Penelitian bertujuan untuk mengetahui perbedaan kemampuan berpikir matematika secara umum pada materi aljabar siswa kelas VIII A di SMP N 1 Prambanan Klaten mengacu pada penilaian TIMSS *grade 8*. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Pendekatan kuantitatif juga digunakan sebagai pendukung dalam mengolah data hasil tes tertulis. Pengambilan data dilakukan pada bulan Mei – Juni 2015 di SMP Negeri 1 Prambanan Klaten. Subyek dari penelitian ini adalah seluruh siswa kelas VIII-A SMP N 1 Prambanan Klaten dan obyek dari penelitian adalah profil kemampuan matematika dalam mengerjakan soal-soal TIMSS *grade 8* materi aljabar. Pengumpulan data dilakukan dengan tes tertulis dan teknik wawancara. Hasil penelitian ini adalah deskripsi perbedaan kemampuan berpikir matematika pada setiap pengelompokan kelas, yaitu pada kelas atas pertama, siswa dapat berpikir mengglobal dan membuat perumusan serta mampu melihat keterkaitan antar informasi dari beberapa sumber. Sedangkan, pada kelas atas kedua, siswa dapat menerapkan pengetahuan mereka dan menunjukkan langkah-langkah dengan benar. Berbeda lagi dengan kelas bawah pertama, siswa dapat menerapkan pengetahuan dasar untuk memecahkan masalah dan mengetahui kemungkinan ide-ide dasar yang didapatnya. Kelas terakhir adalah kelas bawah kedua, siswa dapat mengetahui pengertian definisi-definisi untuk memecahkan masalah sederhana seperti misalnya menghitung bilangan pecahan dan bilangan bulat.

Kata Kunci: *kognitif, TIMSS, aljabar.*

1. Pendahuluan

Aljabar dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari dan merupakan ilmu yang akan diajarkan dari sekolah dasar sampai pada perguruan tinggi, sehingga sangatlah penting bagi seorang siswa untuk menguasai aljabar. Salah satu tes untuk mengetahui kemampuan siswa dalam penguasaan aljabar adalah TIMSS. TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) adalah sebuah penilaian internasional dari matematika dan sains pada kelas empat dan kelas delapan yang diselenggarakan oleh IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*). Wilayah kognitif yang dites pada TIMSS meliputi pengetahuan (*knowing*), penerapan (*applying*), dan penalaran (*reasoning*). Penelitian dilakukan pada kelas delapan dan bukan pada kelas empat karena sesuai dengan tahap perkembangan kognitif Piaget, usia siswa kelas delapan telah melewati tahap operasi formal yang berarti dasar pemikiran dari tahap ini adalah deduktif hipotesis, induktif dan abstrak sehingga seluruh wilayah kognitif dapat diujikan dalam tes ini secara

mendalam. Penelitian TIMSS telah beberapa kali dilakukan dalam periode 4 tahun sekali sejak tahun 1995 di seluruh dunia. Siswa kelas VIII SMP Indonesia telah diikutsertakan dalam TIMSS sebanyak 4 kali (1999, 2003, 2007, dan 2011). Selama empat kali mengikuti TIMSS, Indonesia selalu berada pada peringkat 10 besar paling rendah. Oleh karena itu peneliti tertarik untuk mengetahui bagaimana kemampuan berpikir siswa kelas VIII SMP di salah satu sekolah di Indonesia.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui perbedaan kemampuan berpikir pada setiap penggolongan kelasnya dalam bidang matematika materi aljabar mengacu pada penilaian TIMSS. Subyek dari penelitian ini adalah seluruh siswa kelas VIII-A SMP N 1 Prambanan Klaten dan obyek dari penelitian adalah profil kemampuan matematika dalam mengerjakan soal-soal TIMSS *grade 8* materi aljabar. Metode penelitian deskriptif kualitatif dilakukan agar mendapatkan gambaran secara mendalam tentang profil kemampuan siswa secara umum. Dalam metode ini, data wawancara, sebagai upaya konfirmasi terhadap data tes tertulis, diolah untuk mengetahui alur pemikiran siswa dalam mengerjakan soal-soal yang diajukan dan kemudian dideskripsikan untuk memperoleh kesimpulan. Pendekatan kuantitatif juga dilakukan sebagai pendukung dalam pengolahan data hasil tes tertulis. Sedangkan teknik pengambilan data menggunakan tes tertulis dan wawancara. Penelitian dilaksanakan pada bulan Mei – Juni 2015. Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian adalah tes tertulis dan wawancara.

Penelitian ini membatasi masalah pada kemampuan siswa kelas VIII-A di SMP Negeri 1 Prambanan Klaten pada setiap penggolongan kelas dalam menyelesaikan soal-soal TIMSS materi aljabar. Kemampuan yang dimaksud adalah kemampuan dalam proses kognitif siswa dalam memecahkan masalah matematika, yaitu pengetahuan (*knowing*), penerapan (*applying*), dan penalaran (*reasoning*). Penggolongan kelas yang dimaksud adalah dengan menggolongkan kelas menjadi 4 golongan yaitu, kelas atas pertama, kelas atas kedua, kelas bawah pertama, dan kelas bawah kedua. Pada penggolongan kelas, nilai yang telah didapatkan dari tes tertulis akan diurutkan dari yang tertinggi sampai yang terendah. Kelas atas pertama terdiri dari seperempat bagian pertama dari jumlah siswa yang mendapat nilai tertinggi, kelas atas kedua adalah seperempat bagian kedua yang mendapat nilai tepat dibawah golongan kelas pertama, dan berturut-turut untuk kelas bawah pertama dan kelas bawah kedua. Penggolongan kelas ini dilakukan karena dalam kerangka pelaksanaan dalam TIMSS, penulis tidak menemukan cara penggolongan kelas yang detail, selain itu, berdasarkan tujuan penelitian, peneliti ingin melihat gradasi perbedaan kemampuan dari kelas yang menjadi subjek penelitian, untuk alasan kepraktisan sehingga peneliti membaginya dalam penggolongan kelas yang telah disebutkan.

2. Analisis Data

TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) [3, 4, 12, 14, 17] adalah sebuah penilaian internasional dari matematika dan sains pada kelas empat dan delapan yang dilaksanakan di berbagai negara termasuk Indonesia. Penilaian TIMSS [3, 4, 10, 11, 12, 13, 15, 16] dalam bidang matematika meliputi dua wilayah yaitu wilayah materi dan wilayah kognitif. Teori-teori yang digunakan dalam penelitian ini berfokus pada teori-teori yang disebutkan dalam kerangka TIMSS yaitu mengenai wilayah materi, wilayah kognitif, aturan alokasi waktu, dan instrumen TIMSS. Wilayah materi menspesifikasi subyek permasalahan yang dinilai dalam matematika, dalam makalah ini hanya membahas tentang aljabar. Wilayah kognitif

dimaknai sebagai kemampuan yang diharapkan dari siswa ketika mengerjakan soal-soal matematika dalam wilayah materi. Ketiga wilayah kognitif yaitu pengetahuan, penerapan, maupun penalaran diteliti semua dalam penelitian ini. Pengolahan data secara kualitatif menyesuaikan dengan kriteria kegiatan-kegiatan dalam wilayah kognitif [16]. Teknik analisis data menggunakan panduan penilaian TIMSS [16] dan disesuaikan dengan tujuan penelitian. Instrumen soal menggunakan soal-soal TIMSS. Instrumen soal terdiri atas sembilan butir soal pilihan ganda dan 3 butir soal uraian. Perbandingan jumlah soal antara wilayah kognitif pengetahuan, penerapan, dan penalaran adalah 1 : 1 : 1. Alokasi waktu yang diberikan adalah 1 menit per soal pilihan ganda dan 3 menit per butir soal uraian menyesuaikan dengan aturan TIMSS. Berikut ini merupakan uraian hasil pengambilan dan pengolahan data.

2.1. Pengolahan Data

Kemampuan siswa dianalisis berdasarkan penggolongan kelasnya. Data diurutkan dari nilai terbesar menuju terkecil kemudian dibagi menjadi empat kelas. Kelas pertama adalah 25% jumlah siswa yang memiliki nilai tertinggi, dengan proporsi yang sama, berturut-turut ada kelas atas kedua, kelas bawah pertama, dan kelas bawah kedua. Masing-masing kelas kemudian dihitung rata-ratanya. Berikut ini merupakan rata-rata hasil perolehan siswa berdasarkan kelasnya.

Tabel 1. Rata-Rata Nilai berdasarkan Kelas

Kelas	Rata-rata	Rentang	Subyek
AP	92.38	81.91 – 100	S17, S18, S19, S22, S28, S29, S32
AK	69.8	59.05 – 81.90	S1, S11, S14, S16, S20, S24, S25
BP	53.06	45.72 – 59.05	S3, S4, S6, S8, S9, S12, S13
BK	37.01	0 – 45.71	S7, S10, S21, S23, S26, S27, S31
Rata-rata kelas keseluruhan =			62.13

Keterangan :

- AP : Kelas Atas Pertama
- AK : Kelas Atas Kedua
- BP : Kelas Bawah Pertama
- BK : Kelas Bawah Kedua
- S(x) : Subyek ke-(x)

Data-data tersebut telah dianalisis berdasarkan materinya untuk mendapatkan hasil yang lebih spesifik pada setiap materinya. Terakhir, data kemudian digeneralisasikan untuk menjawab rumusan masalah yang pertama. Berdasarkan hasil tes tertulis, dihitung nilai setiap siswa untuk semua nomor soal dengan skala 0 – 100 . Berdasarkan tabel 1, nilai rata-rata kelas adalah 62,13. Sebanyak 11 siswa telah berada di atas rata-rata kelas dan siswanya berada di bawah rata-rata kelas. Siswa yang nilainya berada di atas rata-rata kelas adalah S17, S32, S18, S29, S22, S19, S28, S4, S14, S20, dan S11. kemudian diurutkan dari nilai tertinggi menuju nilai terendah. Data yang sudah diurutkan kemudian dibuat kelas-kelas. Sama seperti aturan sebelumnya, 25% jumlah siswa dengan nilai tertinggi masuk ke dalam kelas atas pertama dengan nilai rata-rata 92,38 pada kelas tersebut. 25% selanjutnya masuk ke dalam kelas atas kedua dengan nilai rata-rata 69,80, 25% selanjutnya masuk ke dalam kelas bawah pertama dengan nilai rata-rata 53,06 , dan 25% terakhir yang memiliki nilai terendah masuk ke dalam kelas bawah kedua dengan nilai rata-rata

37,01. Sembilan sampel subyek yang telah dianalisis menunjukkan bahwa sampel yang masuk kedalam kelas atas pertama adalah S17, S18, dan S22. Satu sampel subyek masuk ke dalam kelas atas kedua yaitu S11. Tiga sampel subyek masuk ke dalam kelas bawah pertama yaitu S8, S9, dan S24 serta dua sampel subyek masuk ke dalam kelas bawah kedua yaitu S7 dan S27.

Pembahasan pada langkah ini ditekankan berdasarkan analisis perbedaan kemampuan siswa dilihat dari penggolongan kelas pada masing-masing materi yang pada akhirnya dibuat kesimpulan secara umum. Perbedaan kemampuan yang dimaksud adalah berpikir secara matematis, baik kemampuan dalam berhitung, pemahaman konsep, maupun aspek lainnya dengan menggunakan pedoman pada kriteria kegiatan-kegiatan pada setiap wilayah kognitif [16] akan terlihat pada setiap kelasnya. Untuk analisis jawaban soal pilihan ganda, dipilih dua orang subyek secara acak disetiap kelas kemudian jawaban subyek baik jawaban dari tes tertulis maupun jawaban dari wawancara kemudian dianalisis berdasarkan kemampuannya. Berbeda dengan pilihan ganda, untuk soal uraian, setelah diketahui nilai dari masing-masing butir nomor dan dari masing-masing subyek, kemudian diambil beberapa sampel subyek dari tiga jenis nilai yang didapat yaitu 0, 1, dan 2 kemudian dianalisis satu persatu perbedaan kemampuan berpikirnya. Contoh analisis salah satu nomor dari seluruh subyek yang mendapatkan nilai 2 pada nomor tersebut.

- Analisis Jawaban Soal Uraian Nomor 2A

Soal nomor 2A termasuk dalam materi aljabar dengan wilayah kognitif penalaran (reasoning). Subyek yang mendapat nilai 2 untuk jawaban yang benar dan lengkap adalah S17, S18, S24, S11, S8, S9, dan S7, sedangkan S₂₇ mendapatkan nilai 0. Ketujuh subyek yang mendapatkan nilai 2 setelah dianalisis menunjukkan perbedaan gagasan dalam mengerjakan soal uraian nomor 2A.

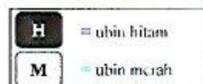
2. Pat memiliki ubin-ubin berwarna merah dan hitam. Pat menggunakan ubin-ubin

tersebut untuk membuat bentuk persegi.

Bentuk 3×3 ada 1 ubin hitam dan 8 ubin



Bentuk 4×4 ada 4 ubin hitam dan 12 ubin merah



- A. Tabel berikut menampilkan jumlah ubin untuk ketiga bentuk pertama yang dibuat oleh Pat. Pat melanjutkan membuat bentuk menggunakan pola tersebut. Lengkapilah tabel tersebut untuk bentuk 6×6 dan 7×7 .

Bentuk	Jumlah ubin Hitam	Jumlah ubin Merah	Total jumlah ubin
3×3	1	8	9
4×4	4	12	16
5×5	9	16	25
6×6	16		
7×7	25		

Tunjukkan cara kerjamu disini:

Gambar 1. Soal Nomor 2A

Berikut ini adalah beberapa sampel jawaban dari subyek.

Bentuk	Jumlah ubin Hitam	Jumlah ubin Merah	Total jumlah ubin
3x3	1	8	9
4x4	4	12	16
5x5	9	16	25
6x6	16	20	36
7x7	25	24	49

Tunjukkan cara kerjamu disini:

Karena Jumlah Ubin Hitam sudah diketahui, mudah saja untuk melengkapi tabel tersebut.

* $6 \times 6 = 36 \rightarrow$ Total jumlah ubin
 $16 \rightarrow$ Jumlah Ubin Hitam
 Jumlah ubin merah = Total jumlah ubin - Jumlah ubin hitam
 $= 36 - 16$
 $= 20$

* $7 \times 7 = 49 \rightarrow$ Total jumlah ubin
 $25 \rightarrow$ Jumlah ubin hitam
 Jumlah ubin merah = Total jumlah ubin - Jumlah ubin hitam
 $= 49 - 25$
 $= 24$

Gambar 2. Jenis Jawaban S18, S24, S9, S7 yang Bernilai 2

Bentuk	Jumlah ubin Hitam	Jumlah ubin Merah	Total jumlah ubin
3x3	1 + 3	8 + 1	9 + 7
4x4	4 + 5	12 + 1	16 + 9
5x5	9 + 7	16 + 1	25 + 11
6x6	16 + 9	20 + 1	36 + 13
7x7	25	24	49

Gambar 3. Jenis Jawaban S17, S11 yang Bernilai 2

$$\begin{aligned}
 5 \times 5 &= 9 + 16 = 25 \\
 6 \times 6 &= 16 + 20 = 36 \rightarrow 16 \\
 7 \times 7 &= 25 + 24 = 49 \rightarrow 25
 \end{aligned}$$

Gambar 4. Jenis Jawaban S8 yang Bernilai 2

Bentuk	Jumlah ubin Hitam	Jumlah ubin Merah	Total jumlah ubin
3×3	1	8	9
4×4	4	12	16
5×5	9	16	25
6×6	16	$4 + 16 = 20$	
7×7	25	$4 + 20 = 24$	

Gambar 5. Jenis Jawaban S27 yang Bernilai 2

Berikut ini merupakan analisis data tes tertulis dan data wawancara untuk salah satu nomor dari sampel subyek pada nomor tersebut.

Tabel 2. Analisis Kemampuan Berpikir Soal Uraian Wilayah Kognitif Penalaran

Kemampuan Berpikir	S17	S18	S24	S11	S8	S9	S27	S7
Mengingat istilah penting	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA
Mengenali lambang dan pernyataan aljabar	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA
Mengenali kuantitas	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA
Mengenal perbandingan	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA
Menerapkan konsep-konsep	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Mendapatkan informasi	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Mengukur dan mengurutkan	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Menghasilkan kesimpulan yang benar	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Memberikan alasan pada kesimpulan	YA	YA	YA	YA	-	YA	-	YA
Membuat persamaan yang benar	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Menerjemahkan soal cerita	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA
Menentukan operasi yang tepat	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Menggunakan relasi antara jumlah dan bentuk	-	YA	YA	-	YA	YA	-	YA
Menghubungkan perbedaan informasi	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Menggunakan prosedur dasar	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA	YA
Mengevaluasi solusi pemecahan masalah	YA	YA	YA	YA	YA	YA	-	YA
Membuat pernyataan yang menggambarkan hubungan istilah-istilah secara umum	-	YA	YA	-	-	YA	-	YA

Menguatkan jawaban dengan gagasan matematis	-	YA	YA	-	-	YA	-	YA
---	---	----	----	---	---	----	---	----

Keterangan:

YA : menunjukkan kriteria kemampuan berpikir

“ - “ : tidak menunjukkan kriteria kemampuan berpikir

Begitu juga untuk soal-soal yang lain juga dianalisis satu persatu yang kemudian diambil kesimpulan dari perbedaan kemampuan berpikirnya pada setiap kelas. Deskripsi dari perbedaan kemampuan berpikir siswa pada setiap kelasnya dapat dibaca pada bagian kesimpulan.

3. Kesimpulan

Berikut ini merupakan deskripsi kemampuan siswa kelas VIII-A pada setiap pengelompokan kelas dalam menyelesaikan soal-soal timss materi aljabar.

a) Kelompok Kelas Atas Pertama

Secara umum, siswa yang termasuk ke dalam kelas atas pertama dapat menerjemahkan soal-soal cerita yang kompleks dan menguatkan alasan dengan informasi yang tersedia pada jawaban yang dituliskan, membuat kesimpulan dan berpikir secara global dan membuat generalisasi. Hampir seluruh siswa mengalami kelemahan dalam menghubungkan informasi-informasi yang tersedia sehingga model yang dibuat menjadi tidak sesuai dengan permasalahan yang disediakan. Hampir seluruh siswa mampu mengubah soal cerita dengan kalimat-matematika maupun persamaan-persamaan dan dapat menyelesaikan beberapa permasalahan yang menggunakan rumus- rumus maupun persamaan. Kemampuan siswa untuk berpikir secara luas juga membuat siswa mampu menghubungkan informasi-informasi dari beberapa sumber untuk menyelesaikan masalah seperti misalnya dalam mengerjakan dua poin soal yang saling terkait. Siswa dapat menerapkan pengetahuan dasar matematika untuk memecahkan masalah dan mengetahui kemungkinan dari ide-ide dasar yang didapatnya didapatnya serta menunjukkan langkah-langkah dasar yang berhubungan dengan pernyataan-pernyataan aljabar. Siswa dapat menerjemahkan pola-pola ke dalam kalimat matematika atau sebaliknya untuk menyelesaikan masalah. Siswa dapat mengetahui pengertian definisi-definisi atau istilah penting dalam soal seperti misalnya bilangan bulat dan pecahan serta lambang-lambang aljabar dasar. Kemampuan berhitung pada siswa di kelas ini sangat bagus.

b) Kelompok Kelas Atas Kedua

Secara umum, sebagian siswa dapat menerjemahkan soal-soal cerita yang kompleks. Sangat sedikit siswa yang dapat menguatkan alasan dengan informasi yang tersedia pada jawaban yang dituliskan. Secara umum, siswa sudah dapat membuat kesimpulan yang benar namun, kemampuan siswa untuk berpikir secara global serta membuat generalisasi masih kurang. Seluruh siswa mengalami kelemahan dalam menghubungkan informasi-informasi yang tersedia sehingga model yang dibuat menjadi tidak sesuai dengan permasalahan yang disediakan. Sebagian siswa mampu mengubah soal cerita dengan kalimat-matematika maupun persamaan-persamaan dan dapat menyelesaikan beberapa permasalahan yang menggunakan rumus-rumus maupun persamaan. Kemampuan siswa untuk berpikir secara luas juga membuat

siswa mampu menghubungkan informasi- informasi dari beberapa sumber untuk menyelesaikan masalah seperti misalnya dalam mengerjakan dua poin soal yang saling terkait, namun pada kelas ini sebagian siswa mengalami kesulitan pada pengerjaan soal nomor 2B uraian untuk menghubungkan informasi yang tersedia pada poin 2A. Siswa dapat menerapkan pengetahuan dasar matematika untuk memecahkan masalah dan mengetahui kemungkinan dari ide-ide dasar yang didapatnya serta menunjukkan langkah-langkah dasar yang berhubungan dengan pernyataan-pernyataan aljabar. Siswa dapat menerjemahkan pola-pola ke dalam kalimat matematika atau sebaliknya untuk menyelesaikan masalah. Siswa dapat mengetahui pengertian definisi-definisi atau istilah penting dalam soal seperti misalnya bilangan bulat dan pecahan serta lambang-lambang aljabar dasar. Kemampuan berhitung pada siswa di kelas ini masih sangat bagus.

c) Kelompok Kelas Bawah Pertama

Secara umum, sebagian siswa belum dapat menerjemahkan soal-soal cerita yang kompleks tetapi sudah mampu menyelesaikan masalah aljabar sederhana yang menyangkut pecahan dan perbandingan. Hampir tidak ada siswa yang dapat menguatkan alasan dengan informasi yang tersedia pada jawaban yang dituliskan. Sebagian siswa membuat kesimpulan yang benar namun, kemampuan siswa untuk berpikir secara global serta membuat generalisasi masih sangat kurang bahkan hampir tidak ditemukan. Seluruh siswa mengalami kelemahan dalam menghubungkan informasi-informasi yang tersedia sehingga model yang dibuat menjadi tidak sesuai dengan permasalahan yang disediakan. Hanya beberapa siswa sudah mampu mengubah soal cerita dengan kalimat-matematika maupun persamaan- persamaan dan sedikit pula yang dapat menyelesaikan beberapa permasalahan yang menggunakan rumus-rumus maupun persamaan. Kemampuan siswa untuk berpikir secara luas masih sangat rendah dan begitu juga kemampuan siswa untuk menghubungkan informasi- informasi dari beberapa sumber untuk menyelesaikan masalah seperti misalnya dalam mengerjakan dua poin soal yang saling terkait masih sangat kurang. Siswa dapat menerapkan pengetahuan dasar matematika untuk memecahkan masalah dan mengetahui kemungkinan dari ide-ide dasar yang didapatnya namun, sangat sedikit yang mampu menunjukkan langkah-langkah dasar yang berhubungan dengan pernyataan-pernyataan aljabar. Siswa dapat mengetahui pengertian definisi- definisi atau istilah penting dalam soal seperti misalnya bilangan bulat dan pecahan serta lambang-lambang aljabar dasar. Kemampuan berhitung pada siswa di kelas ini masih cukup bagus meskipun ada beberapa kali kesalahan perhitungan.

d) Kelompok Kelas Bawah Kedua

Secara umum, siswa belum dapat menerjemahkan soal-soal cerita yang kompleks tetapi sudah mampu menyelesaikan masalah aljabar sederhana yang menyangkut pecahan dan perbandingan. siswa belum dapat menguatkan alasan dengan informasi yang tersedia pada jawaban yang dituliskan. Sebagian siswa membuat kesimpulan yang benar namun, kemampuan siswa untuk berpikir secara global serta membuat generalisasi masih sangat kurang bahkan tidak ditemukan. Seluruh siswa mengalami kelemahan dalam menghubungkan informasi-informasi yang tersedia sehingga model yang dibuat menjadi tidak sesuai dengan permasalahan yang disediakan. Hanya beberapa siswa sudah mampu mengubah soal cerita dengan kalimat-matematika maupun persamaan-persamaan dan sedikit pula yang dapat menyelesaikan beberapa

permasalahan yang menggunakan rumus- rumus maupun persamaan. Kemampuan siswa untuk berpikir secara luas tidak ditemukan di kelas ini dan begitu juga kemampuan siswa untuk menghubungkan informasi-informasi dari beberapa sumber untuk menyelesaikan masalah seperti misalnya dalam mengerjakan dua poin soal yang saling terkait masih belum terlihat. Siswa belum dapat menerapkan pengetahuan dasar matematika untuk memecahkan masalah dan mengetahui kemungkinan dari ide-ide dasar yang didapatnya dan belum mampu menunjukkan langkah-langkah dasar yang berhubungan dengan pernyataan-pernyataan aljabar. Sebagian siswa dapat mengetahui pengertian definisi-definisi atau istilah penting dalam soal seperti misalnya bilangan bulat dan pecahan serta lambang-lambang aljabar dasar. Kemampuan berhitung pada siswa di kelas ini masih kurang.

Daftar Pustaka

- [1] Andy, Prastowo. 2014. Metodologi Penelitian Kualitatif dalam Perspektif Rancangan Penelitian. Yogyakarta : Ar-Ruzz Media.
- [2] Burton, David M.. 2011. The History of Mathematics: An Introduction. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- [3] Foy, P., Arora, A., Stanco, G.M. 2013. TIMSS 2011 User Guide for the International Database. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [4] Foy, P., Olson, J.F. 2009. TIMSS 2007 User Guide for the International Database. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [5] Human Development Department East Asia and Pacific Region. 2010. Inside Indonesia's Mathematics Classrooms : A TIMSS video study of teaching practices and student achievement. Jakarta : The World Bank Office Jakarta
- [6] Imam, Gunawan. 2013. Metode Penelitian Kualitatif: Teori dan Praktik. Jakarta : PT Bumi Aksara.
- [7] Jihad, Asep., Haris, Abdul. 2003. Evaluasi Pembelajaran. Yogyakarta: Multi Pressindo.
- [8] Kuswana, Wowo S.2012. Taksonomi Kognitif. Bandung: PT Remaja Rosdakarya Offset.
- [9] Marpaung, Yansen. 1986. Aspek-Aspek Kognitif yang Perlu Diketahui Guru-Guru Matematika Sebagai Bekal untuk dapat Membantu Siswa dengan Lebih Baik. Yogyakarta : IKIP Sanata Dharma.
- [10] Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Garden, R.A., Lie, S., Robitaille, D.F., Angell, C., Foy, P., Arora, A. 2006. TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [11] Mullis, I.V.S, Martin, M.O., Ruddock, G.J, O'Sullivan, C.Y., Preuschoff, C. 2009. TIMSS 2011 Assessment Frameworks. Chestnut Hill, MA: Boston College.

- [12] Mullis, I.V.S., Martin, M.O. 2011. Trends in International Mathematics And Science Study (TIMSS) 2011 Item Writing Guidelines. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [13] Mullis, I.V.S., Martin, M.O. 2005. TIMSS 2003 Assessment. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [14] Mullis, I.V.S., Martin, M.O. 1994. TIMSS Population 2 Item Pool. Chestnut Hill, MA : Boston College.
- [15] Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., Arora, A. 2012. TIMSS 2011 International Result in Mathematics. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [16] Mullis, I.V.S., Martin, M.O., and ed. 2013. TIMSS 2015 Assessment Frameworks. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [17] Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., in collaboration with Olson, J.F., Preuschoff, C., Erberber, E., Arora, A., Galia, J. 2008. TIMSS 2007 International Mathematics Report : Finding from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- [18] Wardhani, S., Rumiati, Danoebroto, S.W. (ed.). 2011. Instrumen Penilaian Hasil Belajar Matematika SMP : Belajar dari PISA dan TIMSS. Badan Pengembangan Sumber Daya Manusia Pendidikan dan Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika : Kementrian Pendidikan Nasional. Diamond, Douglas W., 1984, *Financial Intermediation and Delegated Monitoring*, Review of Economic Studies 51 (July), pp. 393-414.

Lampiran 1. Tabel Data Hasil Tes Tertulis

Subjek	<i>Knowing</i>	<i>Applying</i>	<i>Reasoning</i>	MEAN	Rata-rata
17	100	100	100	100.00	92.38
29	100	100	100	100.00	
18	100	100	85.71	95.24	
22	100	100	71.43	90.48	
19	100	80	85.71	88.57	
32	80	100	85.71	88.57	
28	100	80	71.43	83.81	
20	100	60	85.71	81.90	69.80
24	100	60	85.71	81.90	
11	100	60	57.14	72.38	
16	80	60	57.14	65.71	
14	80	40	71.43	63.81	
25	60	60	71.43	63.81	
1	80	40	57.14	59.05	
8	100	20	57.14	59.05	53.06
4	100	60	14.29	58.10	
3	80	20	57.14	52.38	
6	80	20	57.14	52.38	
9	80	20	57.14	52.38	
12	80	40	28.57	49.52	
13	100	0	42.86	47.62	
26	60	20	57.14	45.71	37.01
23	100	0	28.57	42.86	
31	20	40	57.14	39.05	
21	80	20	14.29	38.10	
27	80	20	14.29	38.10	
7	20	20	71.43	37.14	
10	20	20	14.29	18.10	

Peningkatan Motivasi dan Hasil Belajar Siswa Melalui Pemakaian Alat Peraga Manipulatif untuk Menghitung Luas Permukaan dan Volume Kubus serta Balok pada Siswa Kelas VIIIA SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik Lampung Tahun Ajaran 2015/2016

Adventa Eklesiawati¹⁾, Feby Sanjaya²⁾

¹⁾Mahasiswa S1 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma

²⁾ S2 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma

Kampus III USD Paingan Maguwoharjo, Depok, Sleman

¹⁾Adventaeklesia@gmail.com

²⁾febi@usd.ac.id

Abstrak

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk meningkatkan motivasi dan hasil belajar siswa melalui alat peraga dalam menghitung luas permukaan dan volume kubus serta balok. Hal ini dilakukan berdasarkan hasil observasi pada siswa kelas VIII A SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik, didapat nilai rata-rata kelas belum mencapai KKM yaitu 58 dan sikap serta motivasi siswa dalam mengikuti pembelajaran tergolong rendah yang terlihat dari aktivitas siswa di kelas.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini ialah Penelitian Tindakan Kelas dengan subyek penelitian siswa kelas VIII A SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik sebanyak 33 siswa. Penelitian ini memuat 2 siklus di dalamnya dengan target motivasi pada siklus 1 dan siklus 2 ialah motivasi siswa dalam kategori cukup dan tinggi, sedangkan pada hasil belajar yaitu nilai KKM kelas pada siklus 1 ialah 65 dan siklus 2 ialah 75.

Hasil penelitian dengan menggunakan alat peraga didapatkan hasil belajar dan motivasi siswa mengalami peningkatan. Peningkatan hasil belajar aspek kognitif terlihat dari presentase ketuntasan kelas pada kondisi awal yaitu sebesar 9%, siklus I sebesar 45, 45% dan pada siklus II meningkat menjadi yaitu sebesar 87,87%, sedangkan peningkatan nilai rata-rata kelas dari kondisi awal 58,00 Siklus I 71,67 pada siklus II 76,39. Hasil motivasi pada siklus I sebanyak 24,24% siswa memiliki kategori sangat tinggi kemudian pada siklus II meningkat sebesar 84,85%, sedangkan dalam kategori tinggi menjadi 15,15%. Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan alat peraga motivasi dan hasil belajar siswa kelas VIII A SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik meningkat.

Kata kunci : alat peraga, hasil belajar , luas permukaan dan volume, kubus dan balok, motivasi

1. Pendahuluan

Pendidikan sangat dibutuhkan oleh setiap orang dimanapun mereka berada baik di daerah perkotaan maupun pedesaan. Ini dikarenakan dengan pendidikan seseorang diharapkan dapat mengalami perubahan kearah yang lebih baik. Banyak faktor yang mempengaruhi seseorang mengalami yang namanya perubahan seperti faktor internal maupun eksternal seperti pada SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik yang terletak di kampung Way Sido Kecamatan Tulang Bawang Udik, Kabupaten Tulang Bawang Barat, Lampung. Berdasarkan hasil wawancara dan observasi pada tanggal 20 Januari 2016 didapatkan bahwa kelas VIII A hasil belajarnya rendah. Hal ini dilihat dari siswa yang mencapai KKM hanya 5 siswa dengan nilai minimal 75. Selain itu, metode pembelajaran yang digunakan oleh guru ialah metode ceramah yang membuat siswa tidak antusias dalam pembelajaran.

Setelah mengkaji dari wawancara dan observasi didapatkan bahwa hasil belajar siswa rendah dan rendahnya kemauan siswa untuk mengikuti proses pembelajaran, dengan kata lain motivasi dalam belajar matematika rendah. Peningkatan hasil belajar dapat dilakukan dengan cara memotivasi siswa baik motivasi dari diri siswa sendiri maupun dari luar siswa. Salah satu cara untuk meningkatkan motivasi adalah dengan metode pembelajaran yang bervariasi, sebagai contoh penggunaan alat peraga. Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian tindakan kelas dengan judul “Peningkatan Motivasi dan Hasil Belajar Siswa Melalui Pemakaian Alat Peraga Manipulatif untuk Menghitung Luas Permukaan dan Volume Kubus serta Balok pada Siswa Kelas VIII A SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik Lampung Tahun Ajaran 2015/2016”.

Penelitian ini bertujuan untuk untuk mengetahui peningkatan motivasi dan hasil belajar siswa kelas VIII A SMP N 3 Tulang Bawang Udik dalam materi luas permukaan dan volume kubus serta balok, dengan subyek penelitian kelas VIII A SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik. Objek penelitian yang digunakan yaitu materi bangun ruang sisi datar pada Kompetensi Dasar 5.3 Menghitung Luas permukaan dan volume pada kubus serta balok melalui alat peraga. Selain itu, obyek yang dipakai ialah motivasi dan hasil belajar. Motivasi ini mencakup keinginan belajar, kesiapan, ketertarikan, keseriusan, serta partisipasi siswa. Motivasi siswa akan diukur dengan menggunakan kuisioner pembelajaran yang akan dilaksanakan pada awal dan akhir. Hasil belajar yang akan digunakan peneliti yaitu penilaian kognitif. Penilaian kognitif akan diukur dengan hasil post-test setiap akhir pembelajaran.

2. Kajian Pustaka

2.1 Alat Peraga Manipulatif

Benda manitif adalah suatu benda yang dimanipulasi oleh guru yang artinya dapat diraba, dipegang, dipindahkan dan diotak-atik atau dipasang, dilepas dan lain-lain (TIM MKPBM Jurusan Pendidikan

Matematika, 2001: 205). Setiap tingkatan manipulatif menolong siswa untuk mengembangkan pemahaman siswa dalam kegiatan pembelajaran. Manipulasi juga dapat menyajikan ide secara visual dan membantu siswa untuk memahami pembelajaran.

2.2 Motivasi

Kata “motif” dapat diartikan sebagai upaya yang mendorong seseorang untuk melakukan sesuatu. Berawal dari kata motif maka motivasi dapat diartikan sebagai daya penggerak (Sardiman, 2007: 73). Dalam kamus besar bahasa Indonesia, indikator adalah alat pemantau (sesuatu) yang dapat memberikan petunjuk atau keterangan (Depdikbud, 1991). Indikator motivasi menurut Slameto (2010) adalah: rasa suka atau rasa ketertarikan pada suatu hal atau aktivitas, tanpa ada yang menyuruh, keseriusan dalam melakukan aktivitas di kelas, adanya kesiapan siswa untuk mengikuti pelajaran di kelas, penerimaan akan suatu hubungan antara diri sendiri dengan sesuatu di luar diri, dan partisipasi siswa dalam suatu aktivitas. Indikator motivasi belajar siswa menurut Sudjana (2012) dapat di klasifikasikan sebagai berikut: perhatian siswa terhadap pelajaran, semangat siswa untuk melakukan tugas-tugas belajarnya, tanggung jawab siswa dalam melakukan tugas-tugas belajarnya, reaksi yang di tunjukan siswa terhadap stimulus yang diberikan guru, rasa senang dan puas dalam mengerjakan tugas yang diberikan, dan penguasaan siswa terhadap materi yang diberikan. Fokus dalam penelitian ini menggunakan dua macam motivasi yaitu motivasi intrinsik dan ekstrinsik. Indikator yang digunakan dalam penelitian ini adalah: penguasaan siswa terhadap materi yang diberikan, kesiapan siswa untuk mengikuti pelajaran di kelas, rasa suka atau ketertarikan pada suatu hal atau aktivitas, tanpa ada yang menyuruh, keseriusan siswa dalam melakukan aktivitas pelajaran di kelas, partisipasi siswa dalam suatu aktivitas.

2.3 Hasil Belajar

Hasil belajar merupakan pola-pola perbuatan, nilai-nilai, pengertian-pengertian, sikap-sikap, apresiasi dan keterampilan (Suprijono, 2009:5). Menurut Dr. Nana Sudjana hasil belajar siswa adalah perubahan tingkah laku. Jenis-jenis hasil belajar menurut Bloom dalam Mustaqim (2008) membedakan menjadi 3 ranah (domain), yaitu ranah kognitif, afektif dan psikomotor. Khusus pada ranah kognitif, Anderson dan Krathwohl dalam Gunawan dkk (2013) merevisi taksonomi Bloom yang sudah lama digunakan menjadi mengingat (*remember*), Memahami/mengerti (*understand*), menerapkan (*apply*), menganalisis (*analyze*), mengevaluasi (*evaluate*), dan menciptakan (*create*).

2.4 Penelitian yang Relevan

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan kajian penelitian yang dilakukan oleh peneliti lain terhadap penggunaan alat peraga dalam pembelajaran matematika, yakni penelitian yang dilakukan oleh Virlina dan Sumardi (2013) yang berjudul “Peningkatan Hasil Belajar

Matematika pada Materi Pecahan dengan Media Alat Peraga Matematika Bagi siswa Kelas VII B SMP Negeri 2 Gatak Tahun Ajaran 2012/2013". Hasil ketuntasan belajar siswa secara klasikal sebelum tindakan 18,75% dan setelah tindakan sebesar 81,3%.

3. Metode Penelitian

Penelitian yang peneliti gunakan ialah Penelitian Tindakan Kelas (PTK). Penelitian Tindakan Kelas (PTK) merupakan penelitian yang dilakukan oleh guru di dalam kelasnya sendiri melalui refleksi diri dengan tujuan untuk memperbaiki kualitas pembelajaran di kelas, sehingga hasil belajar siswa dapat ditingkatkan (Daryanto, 2011:3). Penelitian ini dirancang untuk dilakukan dalam 2 siklus menggunakan model penelitian tindakan kelas Kemmis dan Mc Taggart, setiap siklus penelitian meliputi beberapa tahapan berulang meliputi tahap-tahap: Perencanaan (*Planning*), Pelaksanaan (*Acting*), Pemantauan (*Observing*), Refleksi (*Reflecting*). Kriteria keberhasilan PTK sebagai berikut:

	Kondisi Awal	Siklus 1	Siklus 2
Motivasi	Rendah	Cukup	Tinggi
Hasil Belajar	Rata-rata kelas 58,00	Rata-rata kelas ≥ 65	Rata-rata kelas ≥ 75

4. Hasil Penelitian dan Pembahasan

4.1 Hasil Penelitian

Penelitian yang dilaksanakan di kelas VIII A SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik, Lampung dilakukan dengan penelitian tindakan kelas yang di dalamnya memuat 2 siklus. Siklus I terdiri dari 3 kali pertemuan dan siklus II terdiri dari 3 pertemuan. Berikut ini akan diuraikan mengenai yang diperoleh selama pelaksanaan penelitian.

4.1.1 Siklus I

Siklus I dilaksanakan dalam 3 kali pertemuan yaitu pada tanggal 2 Maret 2016, 4 Maret 2016, dan 7 Maret 2016. Pada awal pembelajaran, peneliti membagikan soal *pretest* kepada 33 siswa kelas VIII A. *Pretest* yang dilakukan bertujuan untuk mengetahui dan mengukur kemampuan awal siswa. Berdasarkan analisis data yang telah dilakukan, diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.1 Hasil Analisis Nilai Pretest Siswa Kelas VIII A

No	Keterangan	Ketercapaian
1	Rata-rata kelas	58,00
2	Nilai tertinggi	79
3	Nilai terendah	25
4	Jumlah siswa yang tuntas belajar	3
5	Jumlah siswa yang tidak tuntas belajar	30
6	Ketuntasan klasikal (dalam %)	9 %

Hasil tersebut menunjukkan bahwa rata-rata kemampuan awal para siswa secara klasikal adalah 58,00. Berdasarkan hasil *pre test*, diperoleh nilai tertinggi 79 dan nilai terendah 25. Dari data yang diperoleh 91% siswa belum mencapai ketuntasan. Hasil

belajar aspek kognitif siswa diukur dengan menggunakan *Posttest* yang dilaksanakan dua kali. *Posttest* I dengan indikator luas permukaan kubus dan balok pada tanggal 7 Maret 2015. Tes ini dikerjakan oleh 33 siswa kelas VIII A dengan materi yang telah dipelajari selama pembelajaran siklus I dan sesudah dilakukan tindakan. Berdasarkan analisis data yang telah dilakukan, berikut ini adalah hasil yang di peroleh:

Tabel 4.2 Hasil Analisis Nilai *Posttest* Siklus I Kelas VIII A

No	Keterangan	Ketercapaian
1	Rata-rata kelas	71,67
2	Nilai tertinggi	100
3	Nilai terendah	25
4	Jumlah siswa yang tuntas belajar	15
5	Jumlah siswa yang tidak tuntas belajar	18
6	Ketuntasan klasikal (dalam %)	45,45%

Hasil yang diperoleh pada tabel 4.2 menunjukkan bahwa nilai rata-rata secara klasikal pada kelas VIII A ialah 71,67. Dengan nilai tertinggi pada kelas VIII A ialah 100 dan nilai terendahnya ialah 25. Berdasarkan hasil tersebut didapat juga jumlah siswa yang telah mencapai ketuntasan sebanyak 15 siswa dan sisanya belum mencapai ketuntasan atau secara klasikal menunjukkan ketuntasan sebesar 45,45%. Dengan demikian, hasil belajar siswa kelas VIII A pada siklus I masih dibawah indikator ketercapaian yang telah ditentukan yaitu 75%.

Motivasi belajar awal merupakan nilai motivasi yang dimiliki oleh siswa sebelum diberi tindakan. Nilai motivasi ini diperoleh dari hasil kuisisioner. Kuisisioner diberikan kepada siswa sebelum pembelajaran dimulai pada tanggal 2 Maret 2015. Kuisisioner diisi oleh 32 siswa dari 33 siswa pada kelas VIII A SMP Negeri 3 Tulang Bawang Udik. Siswa yang tidak hadir nantinya akan mengisi kuisisioner juga.

Tabel 4.3. Hasil Analisis Motivasi Belajar Awal Siswa Kelas VIII A

Interval	Kategori	Jumlah Siswa	Skor Motivasi (%)
84-100	Sangat Tinggi	8	24,24
68-83	Tinggi	20	60,61
52-67	Cukup	5	15,15
36-51	Rendah	0	0
20-35	Sangat Rendah	0	0

Hasil analisis awal motivasi siswa kelas VIII A berdasarkan kuisisioner yang telah diisi, didapat 0% siswa tergolong dalam kategori rendah dengan kata lain tidak ada siswa yang memiliki

motivasi rendah. Siswa yang tergolong dalam kategori cukup sebanyak 5 siswa atau 15,15%. Dua puluh siswa tergolong dalam kategori tinggi atau jika dipresentasikan sejumlah 60,60% siswa dan sisanya tergolong dalam kategori sangat tinggi yaitu sejumlah 8 siswa atau 24,24%. Berdasarkan data tersebut dapat diketahui bahwa sebagian besar siswa kelas VIII A memiliki motivasi belajar awal yang tinggi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa motivasi siswa kelas VIII A tinggi.

4.1.2 Refleksi Siklus 1

Pelaksanaan pembelajaran secara garis besar sudah baik. Dari pelaksanaan pembelajaran pada siklus I, diperoleh data hasil belajar kognitif, dan afektif siswa kelas VIII A. Berdasarkan hasil belajar aspek kognitif didapat sebesar 45,45% dari 33 siswa pada kelas VIII A telah mencapai KKM dengan nilai yang didapat ≥ 75 . Salain itu, berdasarkan data yang telah diperoleh mengenai motivasi awal belajar siswa kelas VIII A, didapat 60,60% siswa memiliki motivasi belajar tinggi.

Hasil yang diperoleh didukung dengan kondisi pembelajaran yang sudah baik. Proses pembelajaran dengan menggunakan alat peraga pada siklus I berjalan sesuai dengan prosedur yang telah direncanakan. Siswa sudah memperhatikan penjelasan dari peneliti ketika mereka bertanya tentang kesulitan yang mereka alami, berusaha menjawab pertanyaan yang diajukan, mengerjakan LKS dengan baik dan bersemangat dalam pembelajaran.

Keberhasilan-keberhasilan yang telah dicapai tidak luput dari kendala dalam pembelajaran. Kendala tersebut membuat pembelajaran menjadi tidak maksimal. Kendala tersebut yaitu tidak sesuai waktu yang telah direncanakan pada Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP). Hal ini dikarenakan siswa tidak bisa dipaksakan untuk segera selesai dalam menemukan rumus luas permukaan kubus serta balok, dan proses penerapan yang ternyata membutuhkan waktu yang lebih lama. Selain itu, ada dua kelompok yang tidak terlibat aktif dalam pembelajaran dikarenakan mereka tidak menyukai anggota kelompoknya. Untuk ketercapaian indikator pada siklus I pada hasil belajar kognitif belum mencapai indikator yang telah ditetapkan sedangkan pada motivasi awal siswa sudah mencapai indikator yang telah ditetapkan.

4.1.3 Siklus 2

Tahap pelaksanaan pada siklus II dilaksanakan dalam 3 kali pertemuan. Tiga pertemuan tersebut dilaksanakan pada tanggal 11 Maret 2016, 16 Maret 2016, dan 18 Maret 2016. Berdasarkan analisis data yang telah dilakukan, berikut ini adalah hasil yang diperoleh:

Tabel 4.4. Hasil Analisis Nilai *Post Test* Siklus II Kelas VIII A

No	Keterangan	Ketercapaian
1	Rata-rata kelas	76,39

No	Keterangan	Ketercapaian
2	Nilai tertinggi	100
3	Nilai terendah	34
4	Jumlah siswa yang tuntas belajar	29
5	Jumlah siswa yang tidak tuntas belajar	6
6	Ketuntasan klasikal (dalam %)	87,87%

Dari tabel 4.5 didapat bahwa ketuntasan belajar siswa kelas VIII A sebesar 87,87% dan sebanyak 6 siswa belum mencapai KKM. Berdasarkan *posttest* II didapatkan nilai tertinggi adalah 100 dan nilai terendah 34 dengan rata-rata kelas secara klasikal sebesar 76,39. Motivasi belajar akhir adalah motivasi belajar siswa setelah mendapatkan tindakan. Hasil motivasi belajar akhir didapatkan dari kuisisioner. Pengisian kuisisioner akhir dilaksanakan pada tanggal 18 Maret 2016 yang dilakukan oleh 33 siswa kelas VIII A.

Berdasarkan kuisisioner yang telah diisi oleh seluruh siswa kelas VIII A diketahui bahwa 0% siswa tergolong dalam kategori sangat rendah, rendah, dan cukup atau dengan kata lain tidak ada siswa yang memiliki motivasi dalam kategori sangat rendah, rendah, dan cukup. Lima siswa tergolong dalam kategori sangat tinggi atau sebesar 15,15% dari 33 siswa, sedangkan sisanya tergolong dalam kategori sangat tinggi dengan jumlah 28 siswa atau 84,84%. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa hasil analisis motivasi akhir siswa kelas VIII A setelah pembelajaran memiliki motivasi belajar dalam kategori tinggi dan sangat tinggi Berikut adalah hasil belajar akhir siswa kelas VIII A.

Tabel 4.5. Hasil Analisis Motivasi Belajar Akhir Siswa Kelas VIII A

Interval	Kategori	Jumlah Siswa	Skor Motivasi (%)
84-100	Sangat Tinggi	28	84, 85
68-83	Tinggi	5	15, 15
52-67	Cukup	0	0
36-51	Rendah	0	0
20-35	Sangat Rendah	0	0

4.1.4 Refleksi

Berdasarkan hasil pelaksanaan pembelajaran siklus II, diperoleh hasil belajar kognitif, dan hasil belajar afektif siswa kelas VIII A. Hasil belajar kognitif didapat sebesar 87,87% siswa kelas VIII A telah mencapai KKM dengan nilai ≥ 75 . Hasil tersebut telah mencapai indikator yang telah ditetapkan pada aspek kognitif di siklus II. Pada motivasi akhir belajar siswa kelas VIII A yang memiliki motivasi belajar tinggi dan sangat tinggi sebesar 15,15% dan 84,84%.

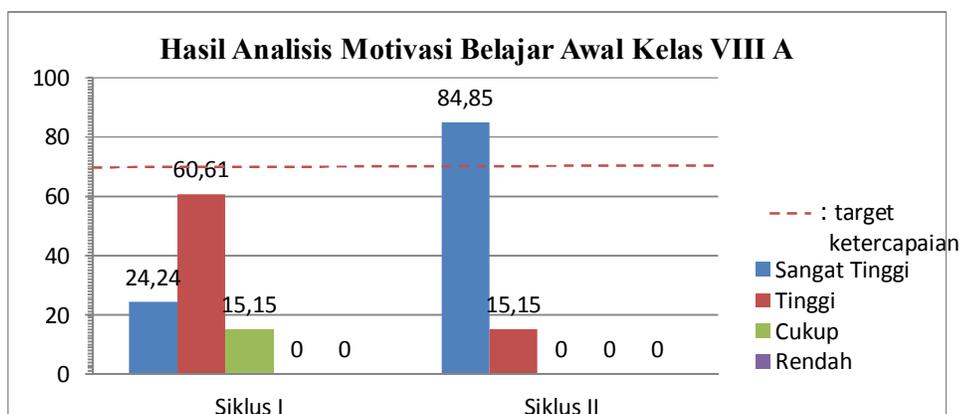
Hasil tersebut menunjukkan seluruh aspek dalam pembelajaran telah mencapai indikator yang ditentukan. Hal ini didukung dengan kondisi pembelajaran yang lebih baik dari pada pembelajaran siklus I, dimana siswa terlibat aktif dalam kelompok untuk menemukan rumus volume balok. Selain itu, siswa juga memperhatikan penjelasan peneliti, berusaha memecahkan masalah, mengajukan pertanyaan, menjawab pertanyaan, dan bersemangat. Akan tetapi, pada siklus II ini kendala yang dirasakan masih sama dengan siklus I yaitu waktu yang digunakan tersita cukup banyak saat siswa menemukan rumus dan volume sehingga siswa tidak sempat untuk berlatih soal dan saat penyampaian penegasan atau kesimpulan dirasa terlalu cepat. Kendala-kendala tersebut yang membuat hasil yang peroleh tidak maksimal. Untuk ketercapaian indikator pada siklus II pada hasil belajar kognitif dan motivasi awal siswa sudah mencapai indikator yang telah ditetapkan.

4.2 Pembahasan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dituliskan pada bagian A hasil belajar yang didapatkan dengan menggunakan alat peraga lebih baik dibandingkan dengan sebelum menggunakan alat peraga. Siswa juga memiliki motivasi yang lebih tinggi dibandingkan dengan sebelumnya.

4.2.1 Peningkatan Motivasi Belajar

Peningkatan motivasi belajar siswa pada penelitian ini didapat dari hasil lembar kuisisioner. Lembar kuisisioner diisi oleh siswa kelas VIII A. Lembar kuisisioner yang peneliti berikan bertujuan untuk mengetahui motivasi belajar siswa sebelum dan sesudah dilaksanakan tindakan.



Gambar 4.4 Hasil Analisis Motivasi Belajar Kelas VIII A

Berdasarkan diagram batang pada gambar 4.4 diatas hasil analisis pencapaian motivasi awal menunjukkan bahwa pada siklus I, siswa yang termasuk dalam kategori sangat tinggi sebanyak 24,24% dan pada siklus II 84,85%. Dengan demikian, dalam kategori sangat tinggi mengalami peningkatan sebesar 60,61%. Berbeda dengan kategori tinggi, kategori

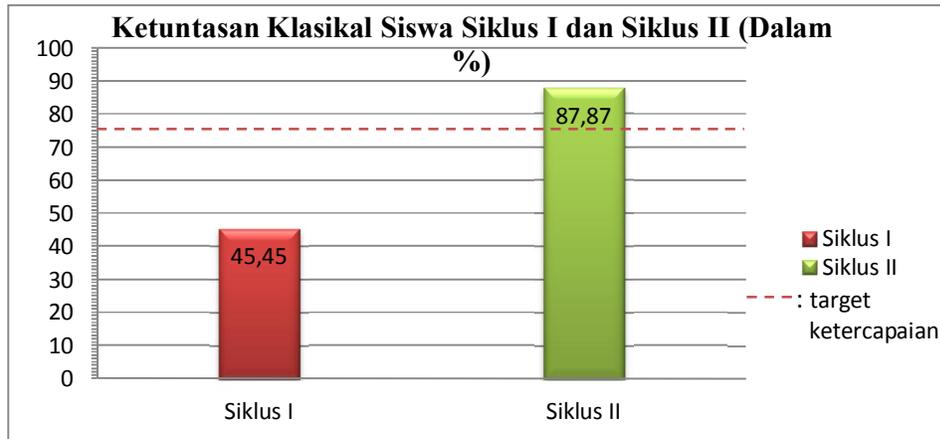
sedang mengalami penurunan dari siklus I sebanyak 60,61% siswa dan pada siklus II menurun menjadi 15,15%. Pada kategori cukup pada siklus I 15,15% menurun menjadi 0% sedangkan tidak ada satupun siswa yang memiliki hasil belajar aspekatif kategori rendah dan sangat rendah. Berdasarkan hasil tersebut pada kategori sangat tinggi mengalami peningkatan yaitu dari 66,67% menjadi 100%, sedangkan pada kategori tinggi dan cukup mengalami penurunan yaitu dari 60,61% menjadi 15,15% dan 15,15% menjadi 0%, sehingga dapat disimpulkan bahwa secara keseluruhan motivasi belajar siswa meningkat.

Tingkat motivasi siswa dipengaruhi oleh beberapa faktor baik secara intrinsik maupun ekstrinsik. Faktor intrinsik dapat dilihat ketika siswa mulai berdiskusi dalam kelompok, yaitu mulai dari siswa bersikap. Sikap siswa saat berdiskusi, secara tidak langsung siswa menunjukkan minat mereka. Antusiasme tersebut menunjukkan bahwa siswa tampak termotivasi untuk belajar lebih giat lagi ditunjukkan dengan rasa ingin tahu yang merupakan salah satu hal yang mendasari kemauan siswa untuk belajar lebih dari sebelumnya. Hal ini sesuai dengan pendapat Hamalik (2003). Faktor-faktor yang terkandung didalam kuesioner mempengaruhi peningkatan hasil motivasi sehingga pada siklus ke II sudah mencapai indikator yang diharapkan. Dengan demikian, pembelajaran pada materi bangun ruang sisi datar dengan indikator luas permukaan dan volume kubus serta balok dengan menggunakan alat peraga membuat siswa lebih termotivasi untuk belajar.

Pembelajaran dengan menggunakan alat peraga merupakan suatu cara yang dapat menarik perhatian siswa untuk meningkatkan motivasi ekstrinsik siswa dalam pembelajaran matematika. Hal ini sesuai dengan fungsi alat peraga yang dikemukakan oleh Ruseffendi (1997) yaitu dengan adanya alat peraga, anak-anak akan lebih banyak mengikuti pelajaran matematika dengan gembira, sehingga minatnya dalam mempelajari matematika semakin besar. Anak senang, terangsang, kemudian tertarik dan bersikap positif terhadap pembelajaran matematika. Selain itu, peneliti juga memberikan bentuk motivasi ekstrinsik yang lainnya yaitu berupa pujian. Pujian diberikan kepada siswa atau kelompok yang mengerjakan Lembar Diskusi Siswa (LDS) serta mempresentasikannya dengan baik. Selain itu, pujian juga diberikan kepada siswa yang menjawab pertanyaan yang diajukan peneliti. Pujian yang diberikan berupa penyampaian verbal seperti ungkapan “iya, tepat sekali, tepuk tangan untuk mbak atau mas (nama siswa)”, dan non verbal berupa acungan ibu jari. Hal di atas sejalan dengan pendapat Hamalik (2003) yang berpendapat pemberian pujian kepada siswa atas hal-hal yang telah dilakukan dengan berhasil, besar manfaatnya sebagai pendorong belajar karena pujian menimbulkan rasa puas dan senang.

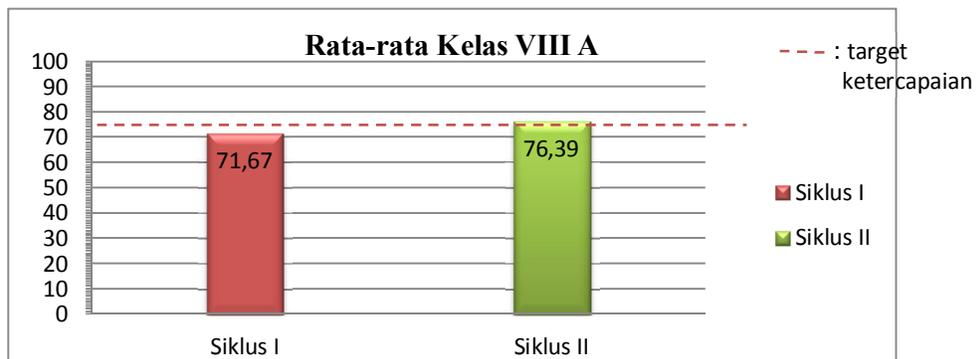
4.2.2 Peningkatan Hasil Belajar Kognitif

Peningkatan hasil belajar diperoleh dari hasil kondisi awal dan *posttest* pada siklus II. *Posttest* tersebut dikerjakan oleh siswa kelas VIII A dan hasil yang diperoleh dari kondisi awal ke siklus II mengalami peningkatan. Peningkatan yang terjadi dapat di lihat dari capaian KKM pada diagram batang gambar 4.5 di bawah ini:



Gambar 4.5. Ketuntasan Klasikal Siklus I dan Siklus II

Pada gambar 4.5 menunjukkan terjadinya peningkatan hasil belajar pada siklus I dan siklus II, dimana hasil belajar siswa yang telah mencapai KKM pada siklus I ialah 45,45% dan siklus II ialah 87,87%. Diagram batang pada gambar 4.5 di atas menunjukkan bahwa presentase jumlah siswa yang mencapai KKM pada siklus II lebih tinggi daripada siklus I. Dengan demikian, hasil ini menunjukkan terjadinya peningkatan presentase jumlah siswa yang telah mencapai KKM yaitu sebesar 42,42%. Pada siklus II siswa yang telah mencapai KKM sudah mencapai target yang peneliti tetapkan yaitu 75%. Selain peningkatan presentase jumlah siswa yang telah mencapai KKM, peningkatan juga dapat terlihat pada nilai rata-rata siswa kelas VIII A. Berikut adalah diagram batang pada gambar 4.6:



Gambar 4.6. Rata-rata Kelas VIII A

Pada gambar 4.6 diagram batang menunjukkan nilai rata-rata kelas VIII A meningkat dari 71,67 pada siklus I dan 76,39 pada siklus II. Peningkatan yang tidak begitu besar yaitu 4,72 akan tetapi pada siklus II

sudah mengalami ketercapaian indikator keberhasilan nilai rata-rata yaitu 75.

Peningkatan hasil belajar aspek kognitif siswa dikarenakan oleh beberapa faktor. Beberapa faktor tersebut ialah situasi pembelajaran, kerjasama dalam kelompok, pemberian penghargaan berupa pujian, dan faktor dari siswa sendiri. Situasi pembelajaran ini berkaitan dengan penerapan penggunaan alat peraga. Penggunaan alat peraga membuat kegiatan pembelajaran lebih menyenangkan dan melibatkan seluruh siswa sebagai pelaksana kegiatan. Kerjasama dalam kelompok merupakan faktor yang mempengaruhi peningkatan hasil belajar. Melalui kerjasama akan timbul hubungan antar personal siswa dalam kelompok belajar. Faktor yang mempengaruhi hasil belajar siswa pada aspek kognitif ialah pemberian penghargaan berupa pujian. Hal ini menyebabkan siswa berlomba-lomba untuk mendapatkan nilai terbaik. Faktor keempat ialah faktor dari siswa sendiri berupa kemampuan-kemampuan pemahaman siswa (Suprijono: 2009). Tinggi rendahnya kemampuan siswa dalam memahami materi berpengaruh terhadap hasil belajar siswa terutama hasil belajar kognitif.

Proses belajar mengajar melibatkan interaksi antara siswa dengan guru maupun siswa dengan siswa. Adanya interaksi membuat hubungan baik antara guru dengan siswa maupun siswa dengan siswa. Hal ini sesuai dengan pendapat Slameto (2010) bahwa hubungan guru dengan siswa merupakan faktor lain yang mendukung peningkatan hasil belajar aspek kognitif. Dari beberapa uraian di atas, penelitian yang telah dilakukan sudah berhasil dalam meningkatkan hasil belajar siswa dalam aspek kognitif. Hal ini terbukti dari hasil *post test* siswa yang telah meningkat pada siklus II, dapat dilihat dari rata-rata kelas maupun dari presentase siswa yang mencapai KKM. Hal tersebut sudah sesuai dengan indikator yang ditetapkan oleh peneliti. Peningkatan ini menunjukkan bahwa kegiatan pembelajaran yang dilakukan selama proses pembelajaran dengan menggunakan alat peraga telah membantu.

Keseluruhan hasil penelitian yang telah dilaksanakan dengan menggunakan alat peraga membantu dalam meningkatkan motivasi dan hasil belajar. Penggunaan alat peraga memberikan pengaruh positif terhadap peningkatan motivasi dan hasil belajar siswa. Hal ini dikarenakan pembelajaran menggunakan alat peraga memiliki keunggulan dalam pembelajaran, sesuai dengan pendapat Russefendi (2001) yaitu membuat siswa lebih aktif dalam melakukan kegiatan belajar, siswa lebih berminat, siswa lebih mudah memahami materi, dan siswa tidak akan mudah bosan. Terdapat kendala yang dialami dalam penelitian ialah siswa baru menggunakan alat peraga dan menemukan sendiri luas dan volum kubus serta balok sehingga membutuhkan waktu yang lama. Dalam penerapannya peneliti berupaya mengatasi kendala tersebut dengan menjelaskan secara perlahan menggunakan kata-kata yang lebih sederhana, sehingga mudah dipahami oleh siswa. Kelemahan dalam penelitian ini ialah proses mengajar dilakukan oleh praktikan bukan guru matematika kelas VIII A SMP N 3 Tulang bawang udik.

Jika di lihat kembali dalam Penelitian Tindakan Kelas (PTK) yang mengajar adalah guru kelasnya sendiri (Suharsimi: 2010). Apalagi jika di lihat dari karakter guru dan praktikan yang berbeda, dan mungkin berpengaruh signifikan terhadap hasil belajar dan motivasi belajar siswa dalam mata pelajaran matematika.

5. Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang telah dilaksanakan dapat disimpulkan bahwa pembelajaran dengan menggunakan alat peraga dapat meningkatkan motivasi belajar siswa kelas VIII A SMP N 3 Tulang Bawang Udik dalam menghitung luas permukaan dan volume kubus serta balok. Hal ini terlihat pada siklus I sebanyak 24,24% siswa yang memiliki kategori sangat tinggi kemudian pada siklus II meningkat sebesar 84,85%, sedangkan dalam kategori tinggi menjadi 15,15%. Selain itu, alat peraga yang digunakan juga dapat meningkatkan hasil belajar siswa kelas VIII A SMP N 3 Tulang Bawang Udik pada indikator luas permukaan dan volume kbus serta balok. Peningkatan terlihat dari presentase ketuntasan belajar aspek kognitif dan nilai rata-rata kelas. Peningkatan presentase ketuntasan kelas dari kondisi awal yaitu sebesar 9% dan pada siklus II meningkat menjadi yaitu sebesar 87,87%, sedangkan peningkatan nilai rata-rata kelas dari 58,00 menjadi 76,39.

Daftar Pustaka

- [1] Daryanto. 2011. *Penelitian Tindakan Kelas dan Penelitian Tindakan Sekolah*. Yogyakarta: Gava Media.
- [2] Nana Sudjana. 2012. *Penilaian Hasil Proses Belajar Mengajar*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- [3] Ruseffendi E. T. 1997. *Pendidikan Matematika 3*. Jakarta : Uniersitas Terbuka: Depdikbud
- [4] Sardiman. 2007. *Interkasi dan Motivasi Belajar mengajar*. Jakarta: PT Raja grafindo Persada.
- [5] Slameto. 2010. *Belajar dan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi*. Jakarta: Rineka Cipta.
- [6] Suprijono, A. 2009. *Cooperative Learning Teori dan Aplikasi PAIKEM*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- [7] Tim MKPBM Jurusan Pendidikan Matematika. 2011. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) 2001.
- [8] Virlina Zuhanisani, Sumardi. 2013. *Peningkatan Hasil Belajar Matematika pada Materi Pecahan dengan Media Alat Peraga Matematika Bagi siswa Kelas VII B SMP Negeri 2 Gatak Tahun Ajaran 2012/2013*.
https://publikasiilmiah.ums.ac.id/bitstream/handle/11617/3228/20_Peningkatkan%20Hasil%20Belajar%20Matematika%20Pada%20Materi%20Pecahan%20Dengan%20Media%20Alat%20Peraga%20Matematika%20Bagi%20Siswa.pdf?sequence=1&isAllowed=y(diakses tanggal 29 Agustus 2016)

Analisis Faktor Minat dan Minat terhadap Ilmu MIPA dalam Memilih Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam pada Siswa Kelas X SMA Negeri yang Menerapkan Kurikulum 2013 di Kabupaten Sleman

Riandika Ratnasari¹, Maria Suci Apriani²

^{1,2} Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia

¹ratnasaririandika@gmail.com

²maria.suci@usd.ac.id

Abstrak

Penelitian bertujuan untuk mengetahui minat siswa terhadap ilmu MIPA pada kelompok PMIIA berdasarkan responden yang terambil dan melihat faktor yang paling mempengaruhi minat siswa serta mengetahui hubungan antara faktor-faktor yang mempengaruhi pemilihan kelompok PMIIA dengan minat siswa.

Penelitian tergolong ke dalam jenis penelitian kuantitatif dengan metode survey. Penelitian dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2015/2016. Subyek penelitian adalah 370 siswa kelas X yang diambil dari 3 SMA di Kabupaten Sleman yang menerapkan Kurikulum 2013. Instrumen penelitian adalah kuesioner yang berisi minat dan faktor-faktor yang mempengaruhi minat. Proses validasi instrumen dilakukan dua tahap yaitu dengan uji pakar dan uji pendahuluan. Data dianalisis menggunakan regresi logistik.

Hasil analisis data menunjukkan bahwa dari sampel penelitian terdapat 348 siswa Kelas X PMIIA yang berada pada kategori minat sedang dengan kata lain masih banyak siswa kelas X PMIIA yang berada pada kategori minat sedang. Faktor yang mempengaruhi minat dibagi menjadi dua yaitu faktor eksternal dan faktor internal. Faktor internal meliputi keinginan, kebutuhan akan berprestasi, bakat pada ilmu eksakta, dan cita-cita. Faktor eksternal meliputi keluarga, pengalaman, teman, guru, dan lingkungan sekolah. Indikator yang paling mempengaruhi siswa memilih kelompok PMIIA adalah indikator bakat pada ilmu eksakta yang termasuk faktor internal. Hubungan antara minat siswa memilih kelompok PMIIA dengan faktor-faktor yang mempengaruhi minat dapat dilihat pada koefisien Negelkerke. Berdasarkan nilai Negelkerke maka siswa memilih kelompok PMIIA dipengaruhi faktor-faktor yang mempengaruhi minat sebesar 31,5% sedangkan 68,5% dipengaruhi oleh faktor-faktor lainnya yang tidak termasuk dalam pengujian model.

Kata Kunci: *Regresi Logistik, Kelompok Peminatan, Minat, dan Faktor Minat.*

1. Pendahuluan

Saat ini, beberapa sekolah di Negara Indonesia tengah menerapkan kurikulum yang baru yaitu Kurikulum 2013. Saat melakukan Program Pengalaman Lapangan (PPL) di salah satu Sekolah Menengah Atas (SMA) yang menerapkan Kurikulum 2013, ada beberapa peserta didik yang mengatakan bahwa kelompok peminatan yang dijalani tidak sesuai dengan yang diinginkan. Ada juga yang mengatakan bahwa ternyata kelompok peminatan yang dia ambil materinya sulit tidak sesuai dengan yang dipikirkan. Peserta didik yang memberikan alasan seperti itu rata-rata sudah berada di kelas XI. Namun, ada juga peserta didik yang mulai dari kelas X kelompok peminatan yang dijalani tidak sesuai dengan minat yang sudah direncanakan. Ini terjadi karena mereka mengetahui kelompok PMIIA hanya

berdasarkan pendapat orang yang ada di sekitarnya dan pengelompokan peminatan dilakukan terlalu dini.

Hal ini mengakibatkan ada beberapa nilai peserta didik jauh dari rata-rata kelas dan minat belajar mereka kurang sebab minat siswa dalam memilih kelompok peminatan sangat mempengaruhi keberlanjutan siswa dalam berproses dalam kelompok peminatan tersebut. Jika siswa dari awal memang sudah tidak berminat terhadap kelompok PMIIA maka konsentrasi selama proses pembelajaran berlangsung akan terganggu sehingga prestasi akademik siswa cenderung rendah. Namun, sebaliknya jika siswa sudah memilih kelompok peminatan berdasarkan minatnya maka konsentrasi selama proses pembelajaran berlangsung tidak akan terganggu sehingga prestasi akademik cenderung bagus/tinggi.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui : (1) Mengetahui minat siswa terhadap ilmu MIPA pada kelompok PMIIA berdasarkan responden yang terambil (2) Mengetahui faktor yang paling mempengaruhi minat siswa kelas X di Kabupaten Sleman memilih kelompok PMIIA (3) Mengetahui hubungan antara faktor-faktor yang mempengaruhi pemilihan kelompok PMIIA dengan minat siswa X di Kabupaten Sleman.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Minat

Minat adalah perasaan senang/suka (kesenangan) pada suatu hal yang disebabkan oleh beberapa faktor yang mempengaruhinya sehingga seseorang akan memiliki kemauan untuk memberikan perhatian dan konsentrasi yang lebih. Pada penelitian ini yang digunakan untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi minat adalah faktor internal dan eksternal. Faktor internal dilihat dari bakat akademik siswa, kebutuhan akan berprestasi, keinginan siswa dari dalam diri, dan cita-cita siswa di masa depan. Sedangkan, faktor eksternal dilihat dari orang tua, saudara, guru, fasilitas sekolah, teman, lingkungan masyarakat, dan pengalaman.

2.2 Regresi Logistik Ordinal

Regresi logistik ordinal merupakan bentuk perluasan dari regresi biner yaitu untuk menganalisa data dengan menggunakan variabel dependen berskala ordinal yang terdiri dari tiga kategori atau lebih. Sedangkan, variabel independennya dapat berskala apa saja (interval, rasio, nominal, ordinal). Pada aplikasi *SPSS 17* untuk variabel independen yang berskala interval atau rasio dimasukkan pada kolom *covariate* dan yang berskala nominal atau ordinal dimasukkan pada kolom faktor. Menurut David G. Kleinbaum dan Mitchel (2010) model regresi ordinal yang terbentuk dari *output SPSS* berbeda dengan model regresi logistik secara umum.

Model yang digunakan untuk regresi logistik ordinal adalah model logit, dimana sifat yang tertuang dalam peluang kumulatif sehingga *cumulative logit models* merupakan model yang dapat dibandingkan dengan peluang kumulatif yaitu peluang kurang dari atau sama dengan kategori respon ke- r pada p variabel prediktor yang dinyatakan dalam vektor x_i adalah $P(Y \leq r|x_i)$, dengan peluang lebih besar dari kategori respon ke- r pada p variabel prediktor $P(Y > r|x_i)$ (Ratna, 2013). Peluang kumulatif $P(Y \leq r|x_i)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$P(Y \leq r|x_i) = \pi(x) = \frac{\exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}{1 + \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}$$

Dimana $x_{ik} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$ merupakan nilai pengamatan ke- i ($i = 1, 2, \dots, n$) dari setiap variabel p dan nilai β_k untuk setiap $k = 1, 2, \dots, p$ pada setiap model regresi logistik ordinal adalah sama.

$$\begin{aligned}
 1 - P(Y \leq r|x_i) &= 1 - \frac{\exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}{1 + \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})} \\
 &= \frac{1 + \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik}) - \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}{1 + \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})} \\
 &= \frac{1}{1 + \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}
 \end{aligned}$$

Cara membentuk model regresi logistik adalah membandingkan antara peluang kumulatif dengan selisih dari satu dikurangi peluang kumulatif. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{P(Y \leq r|x_i)}{1 - P(Y \leq r|x_i)} &= \frac{\frac{\exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}{1 + \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}}{\frac{1}{1 + \exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}} = \frac{\exp(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}{1} \\
 &= \exp\left(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik}\right)
 \end{aligned}$$

Persamaan di atas akan ditransformasikan menggunakan transformasi logit adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{logit}P(Y \leq r|x_i) &= \ln\left(\exp\left(\alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik}\right)\right) \\
 &\text{atau} \\
 g(x) &= \alpha - \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik}
 \end{aligned}$$

Dengan $g(x) = \text{logit}P(Y \leq r|x_i)$.

2.3 Uji Keberatan Model

Uji kesesuaian model digunakan untuk melihat apakah persamaan model yang dibentuk sesuai atau tidak. Hal ini berarti tidak ada perbedaan antara hasil observasi dengan kemungkinan hasil prediksi model. Hipotesis : H_0 : Model logit layak untuk digunakan; H_1 : Model logit tidak layak untuk digunakan. Statistik ujinya adalah sebagai berikut :

$$D = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i \ln\left(\frac{\hat{\pi}_i}{y_i}\right) + (1 - y_i) \ln\left(\frac{1 - \hat{\pi}_i}{1 - y_i}\right) \right]$$

$$\text{dengan } \hat{\pi} = \frac{\exp(g(x_i))}{1 + \exp(g(x_i))}$$

$$g(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Statistik uji *Deviance* mengikuti sebaran *chi-square* dengan derajat bebas $n-p$. Oleh karena itu, untuk memperoleh keputusan pengujian dibandingkan dengan distribusi *chi-square*. Jika : $D_{hitung} > \chi_{\alpha, (n-p)}^2$, maka H_0 ditolak

2.4 Uji Serentak

Pengujian ini digunakan untuk menguji parameter hasil dugaan secara bersama-sama atau dengan kata lain untuk memeriksa keberartian koefisien β secara keseluruhan atau serentak. Hipotesis : H_0 : $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_k$; H_1 : Paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0$. Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$G = -2(L_0 - L_1)$$

$$G = -2 \ln \frac{\left[\frac{n_1}{n}\right]^{n_1} \left[\frac{n_0}{n}\right]^{n_2}}{\sum_{i=1}^n \pi(x_i)^{y_i} [1 - \pi(x_i)]^{1-y_i}}$$

Dimana :

$$n_0 = \sum_{i=1}^i (1 - y_i); n_1 = \sum_{i=1}^i y_i; \text{ dan } n = n_0 + n_1$$

Wilayah kritisnya jika : $G > \chi^2_{(\alpha,p)}$, maka H_0 ditolak atau jika : $p\text{-value} < \alpha$, maka H_0 ditolak (nilai $p\text{-value}$ dalam SPSS dengan melihat nilai sig.)

2.5 Uji Parsial

Hasil dari pengujian secara individual akan menunjukkan apakah suatu variabel prediktor layak untuk masuk dalam model atau tidak. Hipotesis : $H_0 : \beta_i = 0$; $H_1 : \beta_i \neq 0, i = 1,2,3, \dots, k$. Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$W_k = \left[\frac{\hat{\beta}_k}{SE(\hat{\beta}_k)} \right]$$

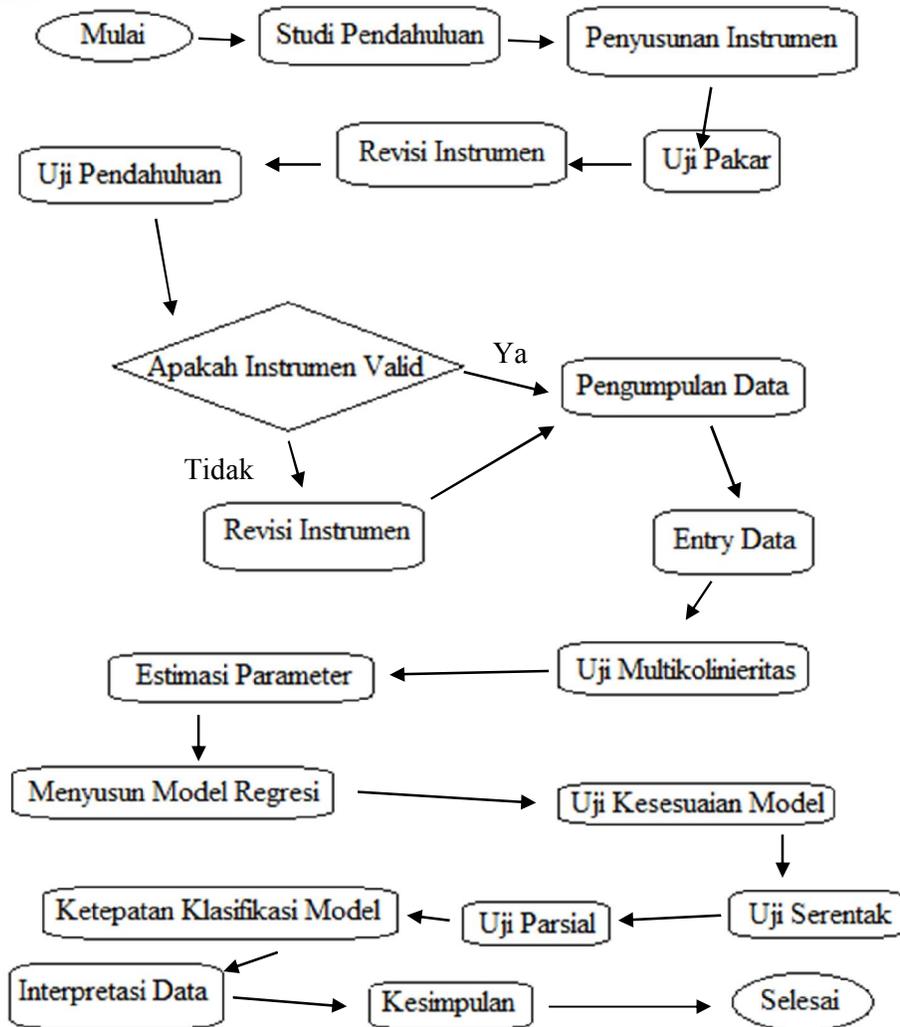
dengan, $k = 1,2,3, \dots, p$; $\hat{\beta}_k$ = koefisien estimasi model logit

$SE(\hat{\beta}_k)$ = standard error of coefficient.

Statistik uji *Wald* mengikuti distribusi *chi-square* dengan derajat kebebasan adalah 1. Oleh karena itu, untuk memperoleh keputusan pengujian dibandingkan dengan distribusi *chi-square*. Jika $W_k > \chi^2_{(\alpha,1)}$, maka H_0 ditolak atau jika $p\text{-value} < \alpha$, maka H_0 ditolak.

3. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kuantitatif dengan metode survey. Pada penelitian ini populasinya adalah siswa SMA kelas X kelompok PMIIA angkatan tahun 2015/2016 di Kabupaten Sleman yang menggunakan kurikulum 2013, meliputi SMA Negeri 1 Prambanan, SMA Negeri 1 Pakem, SMA Negeri 1 Kalasan, SMA Negeri 2 Ngaglik, SMA Negeri 1 Godean, SMA Negeri 1 Sleman, SMA Negeri 1 Seyegan. Sampel yang digunakan pada penelitian ini adalah siswa kelas X PMIIA SMA N 1 Godean, SMA N 2 Ngaglik, SMA N 1 Kalasan. Variabel bebas dalam penelitian ini adalah faktor yang mempengaruhi minat siswa memilih kelompok PMIIA. Faktor yang mempengaruhi minat adalah kebutuhan, cita-cita, bakat, keinginan, saudara, guru dan fasilitas, pengalaman, teman, dan lingkungan masyarakat. Variabel terikat dalam penelitian ini adalah minat siswa terhadap kelompok PMIIA. Minat siswa terhadap kelompok PMIIA dilihat dari perhatian, konsentrasi, kesenangan, dan kemauan. Tahapan teknik analisis data akan disajikan pada *flowchart* di bawah ini :



4. Hasil dan Pembahasan

Penelitian dilaksanakan di tiga sekolah yaitu SMA N 1 Godean, SMA N 2 Ngaglik, dan SMA N 1 Kalasan. Penelitian dilaksanakan diseluruh kelas X MIIA pada setiap sekolah pada tanggal 3, 9, 10, 11, 12 Mei 2016 dan jumlah siswa yang digunakan sebagai sampel sebanyak 370 siswa. Berdasarkan responden yang diambil didapatkan 35% responden berjenis kelamin laki-laki atau sebanyak 128 responden memiliki jenis kelamin laki-laki. Sedangkan, 65% responden berjenis kelamin perempuan atau sebanyak 242 responden memiliki jenis kelamin perempuan. Berdasarkan minat siswa atau variabel dependen terdapat 3 kategori yaitu minat rendah, minat sedang, dan minat tinggi. Hasil dari responden menunjukkan bahwa siswa yang tergolong pada minat rendah terdapat 10 responden, minat sedang 348 responden, dan minat tinggi 12 responden.

4.1 Uji Multikolinieritas

Pengujian ini dilakukan untuk melihat kebebasan antara variabel independen. Model regresi yang baik seharusnya tidak terjadi korelasi di antara variabel independen (Imam Ghozali 2013 : 105).

Coefficients^a

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	Jenis_kelamin	.916	1.092
	Kebutuhan	.647	1.546
	Cita_cita	.650	1.540
	Bakat	.683	1.464
	Keinginan	.561	1.782
	Keluarga	.487	2.054
	Guru	.719	1.390
	Pengalaman	.697	1.434
	Teman	.477	2.096

a. Dependent Variable: Minat

Gambar 4.1 *Output* Nilai VIF Menggunakan SPSS 17

Berdasarkan Gambar 4.1 dapat disimpulkan bahwa nilai VIF hitung adalah $1 < VIF < 3$. Selanjutnya, terlihat bahwa nilai $VIF \leq 10$ maka dapat diambil keputusan tolak H_0 . Jadi dapat disimpulkan bahwa variabel independen tidak terdapat masalah multikolinearitas atau variabel independen tidak bersifat multikolinearitas.

4.2 Pendugaan Parameter

Gambar 4.2 menunjukkan pendugaan parameter regresi logistik ordinal minat siswa memilih kelompok PMIIA berdasarkan faktor-faktor yang mempengaruhi minat dengan menggunakan *software SPSS 17*.

		Estimate
Threshold	[Minat = 0]	4.507
	[Minat = 1]	14.054
Location	Kebutuhan	.048
	Cita_cita	.053
	Bakat	.118
	Keinginan	.013
	Keluarga	-.025
	Guru	-.006
	Pengalaman	-.034
	Teman	.014
	[Jenis_kelamin=1]	.794
[Jenis_kelamin=2]	0 ^a	

Link function: Logit.

a. This parameter is set to zero because it is redundant.

Gambar 4.2 *Output* Pendugaan Parameter

Pada tabel di atas terlihat bahwa minat tinggi dijadikan sebagai referensi dalam membentuk suatu model regresi. Setiap variabel independen di atas akan dimisalkan menjadi X_i , dengan $i = 1, 2, \dots, 9$ dengan rincian sebagai berikut :

Tabel 4.1 Pelabelan Variabel Bebas

Variabel Independen	Bentuk X_{ki}	Makna Variabel Independen
Kebutuhan	X_1	Indikator kebutuhan akan berprestasi siswa ketika berada pada kelompok PMIIA
Cita_cita	X_2	Indikator cita-cita mempengaruhi siswa memilih kelompok PMIIA
Bakat	X_3	Indikator bakat pada ilmu eksakta mempengaruhi siswa memilih kelompok PMIIA
Keinginan	X_4	Indikator keinginan mempengaruhi siswa memilih kelompok PMIIA
Keluarga	X_5	Indikator keluarga mempengaruhi siswa dalam memilih kelompok PMIIA
Guru	X_6	Indikator guru dan fasilitas sekolah mempengaruhi siswa dalam memilih kelompok PMIIA
Pengalaman	X_7	Indikator pengalaman mempengaruhi siswa dalam memilih kelompok PMIIA
Teman	X_8	Indikator teman mempengaruhi siswa dalam memilih kelompok PMIIA
Jenis_kelamin = 1	X_{91}	Jenis kelamin perempuan
Jenis_kelamin = 2	X_{92}	Jenis kelamin laki-laki

Menurut Gambar 4.2 didapatkan dua dugaan model logit, yaitu :

$$g_1(x) = 4,507 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - 0,031X_4 + 0,025X_5 + 0,006X_6 + 0,034X_7 - 0,014X_8 - 0,794X_{91}$$

$$g_2(x) = 14,054 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - 0,031X_4 + 0,025X_5 + 0,006X_6 + 0,034X_7 - 0,014X_8 - 0,794X_{91}$$

Atau model dugaan regresi dapat dibentuk menjadi :

$$\pi_1(x) = \frac{\exp(4,507 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - \dots - 0,794X_{91})}{1 + \exp(4,507 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - \dots - 0,794X_{91})}$$

$$\pi_2(x) = \frac{\exp(14,054 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - \dots - 0,794X_{91})}{1 + \exp(14,054 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - \dots - 0,794X_{91})}$$

4.3 Uji Keberatan Model

Pengujian ini menggunakan uji *Deviance* dan dilakukan untuk melihat apakah model regresi yang terbentuk sudah sesuai/sudah layak,

Goodness-of-Fit

	Chi-Square	df	Sig.
Pearson	925.122	725	.000
Deviance	145.547	725	1.000

Link function: Logit.

Gambar 4.3 Output Nilai Deviance

Berdasarkan tabel di atas diperoleh nilai *Deviance* adalah 145,547 dengan derajat bebas 725 dan nilai *p-value/sig* adalah 1,000. Selanjutnya, nilai *p-value* dengan *alpha* dibandingkan sehingga didapatkan bahwa *p-value* > *alpha*. Oleh karena itu, dapat diputuskan bahwa tidak cukup bukti untuk menolak H_0 . Jadi disimpulkan bahwa model layak untuk digunakan dengan kata lain model regresi logistik yang terbentuk sudah sesuai/ cukup mampu menjelaskan data empiris. Berarti tidak ada perbedaan yang signifikan antara hasil pengamatan dengan prediksi model.

4.4 Uji Serentak

Uji serentak digunakan untuk menguji parameter hasil dugaan secara bersama-sama atau dengan kata lain untuk memeriksa keberartian koefisien β secara keseluruhan atau serentak.

Model Fitting Information

Model	-2 Log Likelihood	Chi-Square	Df	Sig.
Intercept Only	197.170			
Final	145.547	51.623	9	.000

Link function: Logit.

Gambar 4.4 Output Rasio Likelihood G

Gambar 4.4 menunjukkan apakah dengan memasukkan variabel independen ke dalam model hasilnya lebih baik dibandingkan dengan model yang hanya memasukkan intersep saja. Berdasarkan gambar di atas dapat dijelaskan bahwa nilai selisih (- 2log-kemungkinan) model awal (model yang hanya memasukan konstanta) yaitu 197.170 dan nilai selisih model akhir (model dengan konstanta dan variabel independen) yaitu 145,547 sehingga terjadi penurunan *Chi-square* sebesar 51,623 serta nilai *Sig.* 0,000. Selanjutnya, nilai *p-value* dengan *alpha* dibandingkan maka didapatkan bahwa nilai *p-value* < *alpha* ($0,000 < 0,05$). Oleh karena itu, keputusan yang diambil adalah tolak H_0 . Jadi dapat disimpulkan bahwa paling sedikit ada satu $\beta_{ki} \neq 0$ atau dengan kata lain terdapat β yang signifikan terhadap model regresi logistik. Setelah dilakukan pengujian model secara keseluruhan maka perlu dilakukan pengujian secara individu koefisien β .

4.5 Uji Parsial

Uji parsial dilakukan untuk menguji secara individu (satu per satu) koefisien β . Hasil dari pengujian ini adalah untuk menentukan koefisien β yang signifikan terhadap model regresi. Koefisien β yang signifikan berarti menunjukkan bahwa indikator yang diwakili koefisien tersebut paling mempengaruhi variabel dependen.

	Estimate	Std. Error	Wald	df	Sig.

Threshold	[Minat = 0]	4.507	2.150	4.393	1	.036
	[Minat = 1]	14.054	2.665	27.811	1	.000
Location	Kebutuhan	.048	.029	2.760	1	.097
	Cita_cita	.053	.031	2.952	1	.086
	Bakat	.118	.035	11.387	1	.001
	Keinginan	.013	.032	.161	1	.688
	Keluarga	-.025	.034	.534	1	.465
	Guru	-.006	.029	.040	1	.841
	Pengalaman	-.034	.026	1.679	1	.195
	Teman	.014	.034	.159	1	.690
	[Jenis_kelamin=1]	.794	.587	1.831	1	.176
	[Jenis_kelamin=2]	0 ^a	.	.	0	.

Link function: Logit.

a. This parameter is set to zero because it is redundant.

Gambar 4.5 Output Uji Wald

Tabel 4.2 Keputusan Pengujian

β_i	Nilai Sig.	Hasil ketika dibandingkan dengan alpha	Keputusan
β_1	0,097	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0
β_2	0,086	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0
β_3	0,001	Lebih kecil	H_0 ditolak
β_4	0,688	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0
β_5	0,465	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0
β_6	0,841	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0
β_7	0,195	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0
β_8	0,690	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0
β_{91}	0,176	Lebih besar	Tidak cukup bukti untuk menolak H_0

Keputusan yang diambil berdasarkan uji *Wald* akan dirinci pada Tabel 4.2. Berdasarkan Tabel 4.2 terdapat satu nilai *p-value* yang lebih kecil dari pada *alpha* yaitu koefisien β_3 . Jadi dapat disimpulkan bahwa terdapat satu koefisien β yaitu β_3 yang signifikan.

4.6 Model Regresi Logistik

Langkah-langkah dalam menentukan model regresi telah dilakukan. Selanjutnya, ditentukan model regresi untuk memodelkan minat siswa kelas X memilih kelompok PMIIA berdasarkan faktor-faktor yang mempengaruhi minat. Model logit yang terbentuk adalah :

$$g_1(x) = 4,507 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - 0,031X_4 + 0,025X_5 + 0,006X_6 + 0,034X_7 - 0,014X_8 - 0,794X_{91}$$

$$g_2(x) = 14,054 - 0,048X_1 - 0,053X_2 - 0,118X_3 - 0,031X_4 + 0,025X_5 + 0,006X_6 + 0,034X_7 - 0,014X_8 - 0,794X_{91}$$

Model di atas jika dibentuk persamaan regresi logistik ordinal menjadi :

$$\pi_1(x) = \frac{e^{4,507-0,048X_1-0,053X_2-0,118X_3-0,031X_4+0,025X_5+0,006X_6+0,034X_7-0,014X_8-0,794X_9}}{1 + e^{4,507-0,048X_1-0,053X_2-0,118X_3-0,031X_4+0,025X_5+0,006X_6+0,034X_7-0,014X_8-0,794X_9}}$$

$$\pi_2(x) = \frac{e^{14,054-0,048X_1-0,053X_2-0,118X_3-0,031X_4+0,025X_5+0,006X_6+0,034X_7-0,014X_8-0,794X_9}}{1 + e^{14,054-0,048X_1-0,053X_2-0,118X_3-0,031X_4+0,025X_5+0,006X_6+0,034X_7-0,014X_8-0,794X_9}}$$

4.7 Ketepatan Klasifikasi Model

Tabel 4.3 Ketepatan Klasifikasi Model

Observasi	Prediksi			Total	Ketepatan Klasifikasi
	Minat Rendah	Minat Sedang	Minat Tinggi		
Minat Rendah	1	9	0	10	94,05 %
Minat Sedang	1	347	0	348	
Minat Tinggi	0	12	0	12	

Menghitung nilai ketepatan klasifikasi model adalah membandingkan antara nilai sebenarnya dengan nilai prediksi yang diperoleh dari model regresi. Berdasarkan Tabel 4.3 terlihat bahwa terdapat 10 responden yang termasuk kategori minat rendah, 1 responden diprediksi dengan benar oleh model dan sisanya tidak diprediksi dengan benar oleh model. Sedangkan, yang termasuk dalam kategori minat sedang 348 responden dan 347 responden diprediksi dengan benar oleh model serta sisanya diprediksi salah. Berdasarkan tabel juga terlihat bahwa terdapat 12 responden yang termasuk dalam kategori minat tinggi tetapi tidak diprediksi dengan benar oleh model. Oleh karena itu, jika dilihat secara keseluruhan maka model dapat memprediksi dengan benar sebesar 94,05 %.

4.8 Interpretasi Data

Interpretasi model melihat dari koefisien determinasi. Besarnya nilai koefisien determinasi pada model regresi logistik ditunjukkan oleh McFadden, Cox and Snell, dan Nagelkerke. Nilai koefisien determinasi dapat dilihat dibawah ini :

Pseudo R-Square	
Cox and Snell	.130
Nagelkerke	.315
McFadden	.262

Link function: Logit.

Gambar 4.6 Output Koefisien Determinasi

Gambar di atas menunjukkan nilai koefisien determinasi *Cox and Snell* sebesar 0,130 sedangkan koefisien determinasi *Nagelkerke* 0,315 dan koefisien determinasi *McFadden* sebesar 0,262. Melihat dari koefisien determinasi *Nagelkerke* sebesar 0,315 atau sebesar 31,5% memiliki arti bahwa sebesar 31,5% variabel independen dapat menjelaskan variabel dependen.

4.9 Pembahasan

4.9.1 Minat Siswa terhadap MIPA

Berdasarkan responden yang diambil yaitu sebanyak 370 siswa diketahui bahwa terdapat 348 siswa yang berada pada kategori minat sedang, 12 siswa berada pada kategori minat tinggi, dan 10 siswa berada pada kategori minat rendah. Oleh karena itu, dapat disimpulkan dari responden yang diambil bahwa masih banyak siswa yang berada pada kategori minat sedang, sehingga secara tidak langsung ini memiliki arti bahwa masih banyak siswa yang sebenarnya belum mantap berada pada kelompok PMIIA.

4.9.2 Faktor yang Paling Mempengaruhi

Setelah model terbentuk maka terdapat uji serentak yang digunakan untuk melihat apakah ada β yang signifikan terhadap model dan ternyata keputusan yang diambil menunjukkan bahwa terdapat β yang signifikan terhadap model. Selanjutnya, perlu diteliti lagi β mana yang signifikan dengan menggunakan uji *Wald*. Hasil dari pengujian *Wald* didapatkan satu β yang signifikan yaitu bakat pada ilmu eksakta. Berarti indikator bakat pada ilmu eksakta merupakan indikator yang paling mempengaruhi diantara faktor-faktor yang lainnya. Melihat dari teori yang ada, bakat merupakan sikap bawaan sejak lahir dan untuk memaksimalkan bakat yang dimiliki maka perlu dilatih. Hal ini juga diperkuat dengan pendapat Semiawan, dkk (dalam Jahja, 2011 : 68) bakat merupakan kemampuan bawaan yang merupakan potensi yang masih perlu dikembangkan atau dilatih. Bakat pada ilmu eksakta menjadi indikator yang paling mempengaruhi, sebab pada dasarnya setiap siswa memiliki bakat. Pada penelitian ini, terlihat siswa merasa memiliki bakat pada ilmu eksakta dan mereka merasa perlu mengembangkan bakat yang dimiliki sehingga memutuskan untuk memilih kelompok PMIIA. Jika siswa memilih kelompok peminatan yang sesuai dengan bakatnya, maka siswa dapat mengikuti pembelajaran dengan senang dan bersemangat. Menurut Jahja bakat yang dimiliki oleh seseorang dalam bidang tertentu memungkinkannya mencapai prestasi pada bidangnya (Jahja, 2011 : 68). Akibatnya, bakat dapat berkembang secara maksimal dan dapat mempengaruhi prestasi akademiknya. Indikator bakat pada ilmu eksakta termasuk dalam faktor internal dari faktor-faktor yang mempengaruhi minat. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa secara keseluruhan siswa kelas X kelompok PMIIA yang berada di Kabupaten Sleman memilih kelompok PMIIA lebih dipengaruhi oleh bakat pada ilmu eksakta yang termasuk faktor internal atau faktor yang berasal dari dalam diri siswa.

4.9.3 Hubungan Antara Minat Siswa terhadap MIPA dengan Faktor-faktor yang Mempengaruhinya.

Hubungan antara minat siswa kelas X di Kabupaten Sleman memilih kelompok PMIIA dengan faktor-faktor yang mempengaruhi minat dilihat dari koefisien *Nagelkerke*. Melihat dari koefisien determinasi *Nagelkerke* sebesar 0,315 atau sebesar 31,5% memiliki arti bahwa sebesar 31,5% variabel independen dapat menjelaskan variabel dependen dengan kata lain minat siswa memilih kelompok PMIIA dipengaruhi faktor-faktor yang mempengaruhi minat sebesar 31,5% sedangkan 68,5% dipengaruhi oleh faktor-faktor lainnya yang tidak termasuk dalam pengujian model. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa perlu penambahan beberapa variabel independen lain yang tidak termasuk dalam faktor-faktor yang mempengaruhi minat siswa memilih kelompok PMIIA. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat menambahkan faktor-faktor yang mempengaruhi minat antara lain motivasi sebab dalam Dalyono (2010) menyebutkan bahwa motivasi termasuk dalam faktor internal yang mempengaruhi minat.

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan maka terdapat 370 data yang berhasil dikumpulkan oleh peneliti. Data yang terkumpul sebanyak 370 data, berarti terdapat 370 responden yang digunakan untuk penelitian dan responden paling banyak berjenis kelamin perempuan dengan jumlah 242 siswa. Sedangkan yang berjenis kelamin laki-laki sebanyak 128 siswa.

Kategori minat dibagi menjadi tiga yaitu minat rendah, minat sedang, dan minat tinggi. Paling banyak responden berada pada kategori minat sedang dengan jumlah 348 siswa. Sedangkan yang berada dalam kategori minat rendah 10 siswa dan minat tinggi 12 siswa. Oleh karena itu, berdasarkan data dari responden secara keseluruhan minat terhadap mata pelajaran MIPA pada kelompok PMIIA masih berada pada minat sedang yang berarti masih banyak siswa yang sebenarnya belum berminat sepenuhnya pada kelompok PMIIA yang mereka jalani.

Hasil uji *Wald* diketahui bahwa terdapat 1 (satu) indikator dari variabel independen yang signifikan terhadap model persamaan regresi yaitu bakat pada ilmu eksakta. Berarti indikator tersebut dapat dikatakan indikator yang paling mempengaruhi minat siswa Kelas X di Kabupaten Sleman dalam memilih kelompok PMIIA. Indikator bakat pada ilmu eksakta termasuk dalam faktor internal dari faktor-faktor yang mempengaruhi minat. Walaupun indikator yang signifikan hanya satu namun sebenarnya indikator yang lain juga berpengaruh sedikit/kecil terhadap minat siswa Kelas X di Kabupaten Sleman dalam memilih kelompok PMIIA.

Melihat dari koefisien determinasi *Nagelkerke* sebesar 0,315 atau sebesar 31,5% memiliki arti bahwa 31,5% variabel independen dapat menjelaskan variabel dependen dengan kata lain minat siswa memilih kelompok PMIIA dipengaruhi faktor-faktor yang mempengaruhi minat sebesar 31,5% sedangkan 68,5% dipengaruhi oleh faktor-faktor lainnya yang tidak termasuk dalam pengujian model. Oleh karena itu, perlu ditambahkan faktor-faktor lain yang dapat mempengaruhi minat siswa dalam memilih kelompok PMIIA. Saran yang dapat peneliti sumbangkan berdasarkan hasil penelitian adalah sebagai berikut :

5.1 Bagi Siswa

Kepada siswa disarankan agar memilih kelompok peminatan yang memang diminati. Hal ini dikarenakan, jika siswa sudah memiliki minat yang tinggi terhadap kelompok peminatan yang dipilih maka konsentrasi dalam proses pembelajaran akan tinggi sehingga prestasi akademiknya akan baik. Siswa juga perlu mempertimbangkan faktor internal dan faktor eksternal yang mempengaruhi minat agar memiliki minat tinggi pada kelompok peminatan yang sudah.

5.2 Bagi Sekolah

Kepada pihak sekolah perlu memperketat proses seleksi pemilihan kelompok peminatan mungkin dengan menambahkan proses wawancara kepada siswa dan orang tua untuk meyakinkan seberapa besar minat siswa pada kelompok peminatan sehingga pihak sekolah tidak hanya melihat dari angket yang diisi siswa. Sebab, berawal dari kelompok peminatanlah siswa dapat melanjutkan studi ke jenjang yang lebih tinggi untuk meraih cita-cita dan kesuksesannya. Selain itu, sekolah juga harus selalu berkembang dalam menyediakan fasilitas untuk belajar mengajar agar siswa selalu bersemangat dan berminat untuk belajar.

5.3 Bagi Penelitian Selanjutnya

Kepada peneliti selanjutnya yang berminat meneliti bidang yang sama, sebaiknya perlu menambahkan faktor-faktor lain yang mempengaruhi minat seperti kebudayaan, penghasilan orang tua, pendidikan terakhir orang tua, gambaran siswa mengenai hal-hal yang dipelajari.

Daftar Pustaka

- [1] Dalyono, M. 2010. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta : Rineka Cipta.

- [2] Imam Ghozali. 2013. *Aplikasi Analisis Multivariate dengan Program IBM SPSS 21 Update PLS Regresi Edisi-7*. Semarang : Badan Penerbit Universitas Diponegoro.
- [3] Kleinbaum, David G dan Mitchel. 2010. *Logistic Regression A Self-Learning Text Third Edition*. New York : Springer.
- [4] Yudrik Jahja. 2011. *Psikologi Perkembangan*. Jakarta : Kencana.

Analisis Kesulitan Siswa Kelas VII Dalam Menyelesaikan Soal Pada Materi Faktorisasi Bentuk Aljabar SMP Pangudi Luhur Srumbung Magelang Semester Gasal Tahun Ajaran 2016/2017

Almu Noor Romadoni

Abstrak

Matematika merupakan mata pelajaran dianggap sulit sejak pendidikan dasar sampai pendidikan lanjut. Terdapat materi yang dengan mudah dipahami oleh siswa tetapi juga ada materi yang tidak dengan mudah untuk dipahami karena dimungkinkan terdapat beberapa faktor yang menghambat pemahaman pada siswa, baik faktor internal maupun eksternal. Oleh karena itu, peneliti diharapkan dapat menelusuri kesulitan yang dialami siswa dalam memahami materi tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kesalahan apa sajakah yang dilakukan siswa dalam mengerjakan soal operasi pada faktorisasi bentuk aljabar dan faktor penyebab kesulitan belajar siswa ketika mengerjakan soal operasi pada faktorisasi suku aljabar. Penelitian dilaksanakan di SMP Pangudi Luhur Srumbung, Magelang dengan subjek penelitian adalah siswa-siswa kelas VIII. Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif kualitatif. Data penelitian dikumpulkan dengan cara observasi kelas, pemberian tes awal yang juga sebagai tes diagnostik untuk mengetahui kesulitan siswa yang dilihat dari kesalahan-kesalahan yang dilakukan siswa ketika mengerjakan soal faktorisasi bentuk aljabar, wawancara guru dan siswa untuk mengetahui faktor penyebab timbulnya kesulitan belajar pada materi faktorisasi bentuk aljabar. Berdasarkan hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa kesulitan siswa terletak pada kesalahan dalam memahami materi faktorisasi bentuk aljabar dalam pembelajaran. Selain itu, yang menimbulkan kesulitan belajar adalah situasi pembelajaran yang kurang mendukung

Kata Kunci: *faktorisasi bentuk aljabar, Kesulitan Belajar, Jenis Kesulitan*

1. Pendahuluan

Perkembangan peradapan manusia tidak terlepas dari ilmu-ilmu dasar (*Basic Sciences*) sebagai dasar logika berfikir. Manusia telah banyak belajar matematika bagaimana untuk mengenal dan menjelaskan fenomena-fenomena yang terjadi disekelilingnya. Dengan matematika manusia dapat mempelajari dan mendapatkan pengetahuan atas fenomena yang terjadi atau yang diamati (Ensiklopedia Matematika)

Matematika memiliki obyek kajian yang abstrak, matematika merupakan ilmu yang berkaitan dengan hal-hal yang abstrak yang tersusun secara hierarki dan penalaran deduktif, (Herman Hudojo).

Sifat objek matematika yang abstrak pada umumnya membuat materi matematika sulit ditangkap dan dipahami, (Sugeng Mardiyono). Fenomena yang terjadi bahwa banyak dari siswa akan merasakan sesuatu yang tidak menyenangkan

jika mendengarkan kata “Matematika”. Siswa akan membayangkan angka-angka yang rumit dan susah dipecahkan, terbayang rumus-rumus yang sulit dihapal dan dimengerti juga masih banyak siswa yang mengalami kesulitan dalam mempelajari maupun mengerjakan soal matematika.

Pendidikan juga menjadi peranan utama dalam menjadikan sumber daya manusia yang unggul yang mampu bersaing dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, sehingga seharusnya pendidikan dikelola dengan baik. Itu semua dapat dicapai dengan membangun pondasi pendidikan yang tepat sebagai sarana mencapai tujuan pembelajaran yang baik.

Tetapi sebagian besar dari siswa tidak siap untuk bersaing dengan negara-negara lain. Hal ini dilihat dari rata-rata kompetensi matematika yang dimiliki siswa di Indonesia dari negara-negara lain. Hal tersebut dapat dilihat bahwa pada PISA tahun 2012 Indonesia menduduki peringkat 64 dari 65 negara dengan Peru pada posisi juru kunci untuk kategori matematika. (Kemendikbud, OECD)

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti berusaha untuk mengidentifikasi kesulitan yang dominan pada siswa dalam menyelesaikan soal – soal mengenai faktorisasi bentuk aljabar ditandai dengan kesalahan-kesalahan siswa dalam menyelesaikan persoalan aljabar. Berdasarkan dari Wigati Tri Utami jenis-jenis kesulitan belajar matematika meliputi : 1) kesulitan penggunaan konsep, 2) kesulitan penggunaan prinsip, 3) kesulitan dalam mengungkapkan informasi, dan 4) kesulitan berhitung.

Padahal Faktorisasi aljabar penting dikuasai oleh siswa karena sebagai dasar untuk menguasai materi selanjutnya. Untuk menyelesaikan masalah tersebut diperlukan konsep dan karakter masalah yang berkaitan dengan materi tersebut agar tidak terjadi kesalahan konseptual, prosedural, dan teknis dalam menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan memfaktorkan.

Peneliti disini akan mencoba melihat Sejauhmana kesulitan penggunaan konsep dan kesulitan dalam berhitung yang dialami oleh siswa kelas VIII SMP Pangudi Luhur Serumubung Magelang Jawa Tengah dalam menyelesaikan soal matematika pokok bahasan faktorisasi bentuk aljabar.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Belajar-Mengajar

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, Belajar adalah berusaha memperoleh kepandaian atau ilmu membaca, berlatih, berubah tingkah laku atau tanggapan yang disebabkan oleh pengalaman.

Belajar adalah aktivitas mental atau psikis yang berlangsung dalam interaksi aktif dengan lingkungan yang menghasilkan perubahan-perubahan dalam pengetahuan, keterampilan dan sikap (Winkel,1999, dalam Purwanto. 39).

Belajar adalah suatu proses yang ditandai dengan adanya perubahan pada diri seseorang, perubahan sebagai hasil proses belajar dapat ditunjukkan dalam berbagai bentuk seperti perubahan pengetahuan, pemahaman, sikap dan tingkah laku, ketrampilan, kecakapan, kebiasaan, serta perubahan aspek-aspek yang ada pada individu yang belajar(Sudjana, 1996 dalam Asep Jihad dan Abdul Haris. 1).

Dari beberapa pendapat tersebut, dapat disimpulkan bahwa dalam belajar terdapat proses penanaman ilmu pengetahuan, keterampilan serta karakter dan sikap yang tujuan utamanya ialah perkembangan kognitif, afektif dan psikomotor melalui

pengalaman di dalam kelas maupun di luar kelas sehingga ada perubahan positif yang terjadi dalam diri seseorang yang belajar adalah suatu aktivitas yang membuat siswa belajar.

Menurut Dadang Suhardan, mengajar pada dasarnya merupakan kegiatan akademik yang berupa interaksi komunikasi antara pendidik dan peserta didik. Aktivitas mengajar merupakan kegiatan guru dalam mengaktifkan proses belajar peserta didik dengan menggunakan berbagai metode.

Jadi dapat disimpulkan bahwa pembelajaran merupakan proses dari tidak tahu menjadi tahu, dari tidak mengerti menjadi mengerti yang didasarkan pada pengalaman belajar dan dapat merubah tingkah laku seseorang.

2.2. Kesulitan Belajar Matematika

Learner dalam Mulyadi (2010 : 174) menyatakan bahwa kesulitan belajar matematika disebut juga diskalkulia (*dyscalculis*). Istilah diskalkulia memiliki konotasi medis, yang memandang adanya keterkaitan dengan gangguan sistem saraf pusat. Kesulitan belajar matematika yang berat oleh Kirk dalam Mulyadi (2010:174) disebut akalkulia (*acalculia*). Menurut Mulyadi (2010:174) gangguan matematika adalah suatu ketidakmampuan dalam diri seseorang dalam melakukan keterampilan matematika yang diharapkan untuk kapasitas intelektual dan tingkat pendidikan seseorang.

3. Metode Penelitian

Jenis ini penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif. Tujuan dari penelitian ini adalah mengungkap fakta, keadaan, fenomena, variabel dan keadaan yang terjadi saat penelitian berjalan dan menyuguhkan apa adanya. Penelitian deskriptif kualitatif menafsirkan dan menuturkan data yang bersangkutan dengan situasi yang sedang terjadi, sikap serta pandangan yang terjadi di dalam masyarakat, pertentangan 2 keadaan / lebih, hubungan antarvariabel, perbedaan antar fakta, pengaruh terhadap suatu kondisi, dan lain-lain. masalah yang diteliti dan diselidiki oleh penelitian deskriptif kualitatif mengacu pada studi kuantitatif, studi komparatif, serta dapat juga menjadi sebuah studi korelasional 1 unsur bersama unsur lainnya. Biasanya kegiatan penelitian ini meliputi pengumpulan data, menganalisis data, menginterpretasi data, dan diakhiri dengan sebuah kesimpulan yang mengacu pada penganalisisan data tersebut.

Subjek dalam penelitian ini adalah siswa yang mengalami kesulitan belajar dalam mengerjakan soal-soal faktorisasi bentuk aljabar di kelas VIII SMP Pangudi Luhur Srumbung Magelang. Objek dari penelitian ini adalah kesulitan-kesulitan belajar yang dialami siswa dalam materi faktorisasi bentuk aljabar.

Dalam melaksanakan diagnosis kesulitan belajar diperlukan data-data penelitian yang meliputi data hasil observasi kelas, tes, dan hasil wawancara. Data hasil observasi kelas digunakan untuk mengetahui keadaan kelas, guru dan siswa selama proses pembelajaran. Data tes yang juga sebagai tes diagnostik digunakan untuk menentukan siswa-siswa yang mengalami kesulitan belajar. Selain itu, tes ini juga digunakan dalam menganalisis kesulitan-kesulitan yang dialami siswa yang terlihat dari kesalahan-kesalahan yang dilakukannya. Data hasil wawancara yang ditujukan kepada guru dan siswa yang mengalami kesulitan belajar, digunakan untuk mengetahui faktor-faktor yang menjadi penyebab kesulitan

4. Hasil Penelitian dan Pembahasan

4.1. Deskripsi Pelaksanaan Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di VIII SMP Pangudi Luhur Srumbung Magelang tahun pelajaran 2016/2017. Penelitian ini diawali dengan melakukan pengamatan atau observasi secara langsung didalam kelas, kemudian dilanjutkan dengan memberikan tes diagnostik (uraian) kepada siswa. Tes diganostik ini dilaksanakan satu kali berdasarkan pertimbangan peneliti kemudian dilanjutkan dengan wawancara semi terstruktur kepada siswa. Tes diagnostik dan wawancara bertujuan untuk mengetahui letak kesalahan siswa dalam mengerjakan soal, sedangkan pengamatan atau observasi untuk mengetahui apa saja yang menyebabkan siswa melakukan kesalahan-kesalahan saat mengerjakan tes diagnostik.

Pengamatan dilaksanakan beberapa kali pada tahun 2015 dan 2016 pengamatan atau observasi dilakukan secara langsung dikelas dengan cara hadir pada saat pelajaran matematika. Observasi ini bertujuan untuk mengetahui kondisi siswa dan kondisi pembelajaran di kelas serta materi apa yang dijelaskan oleh guru. Selain itu, observasi juga dilakukan terhadap guru berkaitan dengan cara guru menyampaikan materi kepada siswanya. Tes diagnostik dilaksanakan pada tanggal 9 September 2016, tes dilaksanakan pada saat jam pelajaran matematika.. Waktu pelaksanaan tes ini adalah 2 x 35 menit. Setelah pelaksanaan tes kemudian diadakan wawancara dengan siswa. Siswa yang menjadi subjek wawancara dipilih berdasarkan criteria tertentu yang sudah ditetapkan peneliti. Tes wawancara dilakukan untuk menggali lebih dalam kesulitan yang didapat dari tes diagnostic, serta bertujuan untuk mengkonfirmasi dan mempertajam hasil dari jawaban tes yang dikerjakan siswa. Wawancara dengan siswa dilaksanakan juga pada tanggal 9 September 2016 selama satu jam pelajaran, hasil wawancara ini kemudian dianalisis untuk kepentingan triangulasi penelitian. Selain sebagai triangulasi, wawancara ini juga digunakan untuk menjawab permasalahan dalam penelitian.

4.2. Hasil Tes Diagnostik dan Wawancara

Hasil pekerjaan siswa dalam tes diagnostik ini sebagai bahan analisis bagi peneliti. Pertama peneliti harus mengoreksi dibagian mana saja siswa melakukan kesalahan dan menskor jawaban siswa, kemudian disinilah terjadi pengkerucutan siswa yang akan diambil sebagai peserta wawancara.

Berdasarkan data hasil tes diagnostik dan wawancara, ditemukan beberapa kesulitan yang dialami siswa saat menyelesaikan persoalan. berikut peneliti sajikan analisis mengenai kesulitan siswa.

Soal no 1

Tentukanlah hasil perkalian bentuk aljabar berikut $(2x + 3)(x^2 + 2x - 5)$

$$\begin{aligned}
 & (2x+3)(x^2+2x-5) \\
 & = 2x^3 + 4x^2 - 10x + 3x^2 + 6x - 15 \\
 & = 2x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 10x + 6x - 15 \\
 & = 2x^3 + 7x^2 - 4x - 15
 \end{aligned}$$

Gambar 1. Hasil kerja siswa pada soal 1

Berdasarkan hasil dari hasil kerja siswa dan pengamatan peneliti di kelas, sebagian besar siswa sudah memahami tentang perkalian bentuk aljabar dan dengan cepat bisa mengerjakannya.

Hasil wawancara soal nomor 1.

- P : “Apakah ada kesulitan dalam mengerjakan soal perkalian bentuk aljabar?”
 S-01 : “Apa yah, tidak kak, saya sulitnya pada operasi pembagian bentuk aljabar”
 P : “Kalau kamu bagaimana? (*bertanya pada S-02*)”
 S-02 : “Sama kak, susahnya pada operasi pembagian juga”
 P : “berarti kamu sudah paham untuk operasi perkalian, sekarang kalian bias sebutkan atau berikan contoh konstanta, koefisien dan variabel itu yang bagaimana?”
 S-02 : “Angka yang tidak ada x dan y kan kak?”
 P : “Bilangan tetap atau suku yang tidak mengandung peubah” kalau koefisien?
 S-01 : “Angka yang ada didepan variable ya kak? 2x, 2 adalah koefisien dari x”
 P : “Oke berarti kalian sudah paham, sekarang kesulitan apa saja yang dirasain?”
 S-01 : “ Masih bingung operasi pembagian kak, kadang-kadang susah konsentrasi juga ketika belajar kalau kelasnya mulai ribut dan ada teman yang ganggu”
 S-02 : “Sama kak kadang yang buat kurang konsentrasi karena kelasnya ribut kak”
 P : “Berarti tidak suka kelasnya ribut-ribut ya” Oke sudah cukup wawancaranya, terimakasih banyak”.

Berdasarkan cuplikan wawancara di atas, subjek S-01 dan 02 sudah memahami tentang perkalian bentuk aljabar, untuk kesulitannya subjek S-01 dan 02 untuk materi masih pada operasi pembagian bentuk aljabar, dan untuk lingkungan kelas kalau ribut menjadi susah untuk berkonsentrasi

Dari analisis yang dilakukan peneliti terhadap hasil kerja siswa maka peneliti menemukan bahwa ditemukan beberapa kesalahan yang dilakukan siswa untuk soal no 1 atau pada perkalian bentuk aljabar adalah 18 siswa dari 21 siswa atau sekitar 85% yang dapat menyelesaikan dengan benar dan sekitar 15% siswa yang menjawab salah.

Soal no 2

Pemfaktoran dari $15x^2y^2 - 12xy^2$ adalah...

$$\begin{aligned}
 & 15x^2y^2 - 12xy^2 \\
 & = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 3 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot y \\
 & = 3xy(5xy - 4y) \\
 & = 3xy^2(5x - 4)
 \end{aligned}$$

Gambar 2. Hasil kerja siswa pada soal 2

$$15x^2y^2 - 12xy^2$$

$$= 3.5x \cdot y \cdot y - 2.6 \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$= xy(3.5x - 2.6)$$

Gambar 3. Kesalahan pada hasil kerja siswa pada soal 2

Berdasarkan hasil dari hasil kerja siswa dan pengamatan peneliti di kelas, sebagian besar siswa sudah memahami tentang pemfaktoran bentuk aljabar tetapi masih terdapat beberapa kesalahan yang dialami oleh beberapa siswa.

Hasil wawancara soal nomor 2.

P : “Apakah ada kesulitan dalam mengerjakan soal pemfaktoran bentuk aljabar?”

S-03 : “Bingung kak langkah pertamanya bagaimana dulu?”

P : “Biasanya langkah awalnya bagaimana? (bertanya pada S-03)

S-03 : “dijabarkan dulu kak”.

P : “Oke sekarang coba di kerjakan”

Pada langkah ini siswa dapat dengan mudah menjabarkannya, hanya saja untuk memfaktorkan koefisiennya siswa masih sedikit bingung.

P : “kalau untuk perkalian seperti nomer satu bisa tidak?”

S-03 : “Bisa kak”

Memang pada soal nomer satu sebagian besar siswa dapat dengan mudah mengerjakannya, hanya saja untuk soal nomer dua dalam memfaktorkan koefisiennya siswa masih sedikit bingung

P : “Sekarang kesulitan apa saja yang dirasain selain soal nomer dua?”

S-03 : “Masih bingung operasi pembagian kak seperti nomer tiga dan empat kak”.

P : “Selain kesulitan pada operasi pembagian ada tidak kesulitan lain? Tadi ada temennya yang bilang kalau kelasnya ribut susah belajarnya.”

S-03 : kadang-kadang susah konsentrasi juga ketika belajar kalau kelasnya mulai ribut kak tapi kalau ribut ngerjain tugas pelajaran tidak apa-apa kak”.

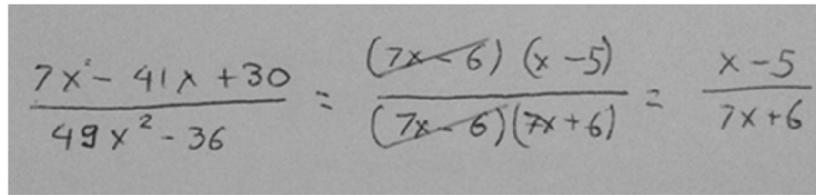
P : “Berarti tidak apa-apa ya kelasnya ribut-ribut kalau bahas pelajaran

” Oke sudah cukup wawancaranya, terimakasih bayak”.

Dari analisis yang dilakukan peneliti terhadap hasil kerja siswa maka peneliti menemukan bahwa kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal no 2 atau pada pemfaktoran bentuk aljabar adalah 14 siswa dari 21 siswa dapat mengerjakan dengan benar atau sekitar 66 % siswa dan 7 siswa yang melakukan kesalahan pada pengerjaannya atau sekitar 34% siswa.

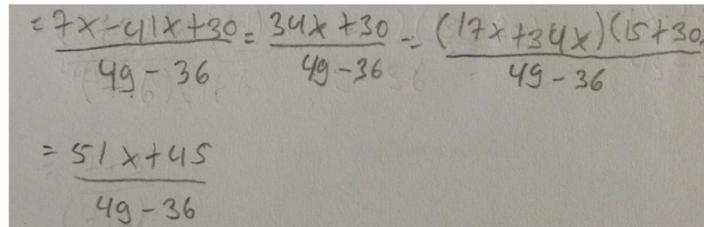
Soal no 3

Bentuk paling sederhana dari $\frac{7x^2 - 41x + 30}{49x^2 - 36}$ adalah...



$$\frac{7x^2 - 41x + 30}{49x^2 - 36} = \frac{(7x-6)(x-5)}{(7x-6)(7x+6)} = \frac{x-5}{7x+6}$$

Gambar 4. Hasil kerja siswa pada soal 3



$$\begin{aligned} \frac{7x-41x+30}{49-36} &= \frac{34x+30}{49-36} = \frac{(17x+34x)(5+30)}{49-36} \\ &= \frac{51x+45}{49-36} \end{aligned}$$

Gambar 5. Kesalahan pada hasil kerja siswa pada soal 3

P : “Apakah ada kesulitan dalam mengerjakan soal pemfaktoran bentuk aljabar?”

S-04 : “Bingung kak untuk operasi pembagian?”

P : “Biasanya langkah awalnya bagaimana?”

S-04 : “Bingung kak ga tau”.

Pada soal nomer 3 ini sebagian besar siswa terlihat kesulitan untuk memahami dan mengerjakannya.

P : “kalau untuk perkalian seperti nomer satu bisa tidak?”

S-04 : “Bisa kak”

P : “Nomer dua?”

S-04 : “Bisa kak”

Memang pada soal nomer satu sebagian besar siswa dapat dengan mudah mengerjakannya, hanya saja untuk soal nomer dua dalam memfaktorkan koefisiennya siswa masih sedikit bingung tetapi masih dapat menalar dan mengerjakannya.

Dari analisis hasil tes dan analisis hasil wawancara di atas, dapat disimpulkan bahwa siswa melakukan kesalahan dalam operasi pembagian bentuk aljabar atau menyederhanakan pecahan bentuk aljabar. Siswa membagi suku pada pembilang dengan suku pada penyebut. Penyebab dari kesalahan tersebut yaitu siswa kurang memahami konsep suku dan faktor, faktor persekutuan dan cara menyederhanakan pecahan.

Kesalahan pada penyederhanaan pecahan aljabar dengan cara pencoretan ini terjadi karena subjek belum paham tentang konsep pencoretan yang dilakukannya, tidak mengetahui alasan dari pencoretan yang telah dilakukannya yang sebenarnya adalah membagi pembilang dan penyebut dengan suatu bilangan yang sama.

Dari analisis yang dilakukan peneliti terhadap hasil kerja siswa maka peneliti menemukan bahwa kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal no 3 atau pada penyederhanaan bentuk aljabar adalah 6 siswa dari 21 siswa dapat mengerjakan dengan benar atau hanya sekitar 28 %, dan 15 siswa yang mengalami kesalahan, atau sekitar 72% siswa, tetapi disini terdapat beberapa siswa yang dapat mengerjakannya hampir benar.

Soal no 4

Bentuk paling sederhana dari $\frac{2x^2-3x-9}{4x^2-9}$ adalah ...

JAWAB : $\frac{2x^2 - 3x - 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x+3)(x-3)}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{(x-3)}{(2x-3)}$

Gambar 6. Hasil kerja siswa pada soal 4

$\frac{2x^2 - 3x - 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x-3)(2x-3)}{(2x-3)} = 2x-3$

Gambar 7. Kesalahan pada hasil kerja siswa pada soal 4

- P : “Apakah ada kesulitan dalam mengerjakan soal nomer 4?”
 S-05 : “Bingung kak untuk operasi pembagian saya belum paham?”.
 P : “Yang belum mengerti yang mana?”
 S-05 : “Semuanya kak, ini juga masih tidak yakin dengan jawabannya”.
- Pada soal nomer 4 ini hanya sebagian kecil siswa yang dapat mengerjakan dengan benar sedangkan sebagian besar siswa terlihat kesulitan untuk memahami dan mengerjakannya.
- P : “kalau untuk perkalian seperti nomer satu bisa tidak?”
 S-05 : “Bisa kak”
 P : “Nomer dua?”
 S-05 : “Bisa kak”
 P : “Nomer tiga?”
 S-05 : “Sudah kak tapi tidak tau benar apa tidak.”

Dari analisis hasil tes dan analisis hasil wawancara , dapat disimpulkan bahwa kesulitan yang sama pada soal nomer tiga, siswa melakukan kesalahan dalam operasi pembagian bentuk aljabar atau menyederhanakan pecahan bentuk aljabar juga terdapat kesalahan sederhana salah penulisan. Siswa membagi suku pada pembilang dengan suku pada penyebut. Penyebab dari kesalahan tersebut yaitu siswa kurang memahami konsep suku dan faktor, faktor persekutuan dan cara menyederhanakan pecahan. Jadi pada soal nomer 4 ini hampir semua siswa tidak dapat mengerjakannya dengan benar, tetapi peneliti berusaha memancing siswa agar dapat menyelesaikan soal.

5. Kesimpulan dan Saran

Dari hasil penelitian ini peneliti menemukan beberapa kesulitan belajar pada materi faktorisasi suku aljabar diantaranya adalah siswa melakukan kesalahan dalam operasi pembagian bentuk aljabar atau menyederhanakan pecahan bentuk aljabar juga terdapat kesalahan sederhana penulisan. Siswa membagi suku pada pembilang dengan suku pada penyebut. Kesalahan yang dilakukan siswa untuk soal no 1 atau perkalian bentuk aljabar adalah sekitar 15% siswa. Kemudian pada soal nomer 2

presentase keberhasilan siswa adalah 66 % yang menjawab dengan benar dan 34% yang mengalami kesulitan. Pada soal nomer 3 hanya 28% siswa yang menjawab dengan benar dan 72% siswa mengalami kesulitan. Pada soal nomer 4 ini hampir semua siswa tidak dapat mengerjakannya dengan benar, tetapi peneliti berusaha memancing siswa agar dapat menyelesaikan soal. Penyebab dari kesalahan tersebut yaitu siswa kurang memahami konsep suku dan faktor, faktor persekutuan dan cara menyederhanakan pecahan. Kesulitan lain yang dialami oleh siswa juga dikarenakan kelas yang kadang-kadang kurang kondusif pada saat pembelajaran.

Saran untuk penelitian selanjutnya hendaknya lebih mempersiapkan instrumen dengan lebih cermat terlebih lagi untuk penyusunan butir soal hendaknya bisa mewakili apa yang hendak diteliti, juga harus lebih sering berkonsultasi dengan guru disekolah untuk menentukan soal atau materi yang ingin digunakan agar tetap sejalan dengan materi yang ada pada sekolah tersebut

Daftar Pustaka

- [1] Asep Jihad dan Abdul Haris., 2013, *Evaluasi Pembelajaran*, Multi Pressindo, Yogyakarta.
- [2] Budiningsih, A. (2005). *Teori belajar dan pembelajaran*. Jakarta: Rineka Cipta
- [3] Mulyadi., 2010. *Diagnosis Kesulitan Belajar dan Bimbingan Terhadap Kesulitan Belajar Khusus*, Nuha Litera, Yogyakarta
- [4] Negoro dan B.Harahap., 2010, *Ensiklopedia Matematika*, Ghalia Indonesia., Bogor.
- [5] Purwanto., 2013, *Evaluasi Hasil Belajar*, Pustaka Pelajar, Yogyakarta.
- [6] Rie Nasti Putri, Asri Kusumaning Maharsari dan Muhammad Irfan., 2013, *Buku paten Matematika*, Laksana, Yogyakarta.
- [7] Rulam Ahmadi.,2014. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Yogyakarta: Ar-Ruzz Media
- [8] Sugiyono. (2011). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Bandung: Alfabeta.

Pengembangan Media Berbasis Flash untuk Mendukung Siswa Kelas VII dalam Menemukan Prinsip-Prinsip Pencerminan

Yosep Dwi Kristanto
Universitas Sanata Dharma
yosepdwikristanto@usd.ac.id

Abstrak

Media berbasis flash dapat dipertimbangkan sebagai media pembelajaran yang efektif untuk mengembangkan pemahaman siswa dalam membangun konsep-konsep matematis. Akan tetapi, masih sedikit penelitian yang ditujukan untuk mengembangkan media semacam ini. Penelitian pengembangan ini bertujuan untuk mengembangkan media berbasis flash sebagai alat bantu guru untuk mendemonstrasikan konsep-konsep pencerminan. Adapun proses pengembangan media berbasis flash ini menggunakan metode pengembangan Luther yang memuat enam tahap, yaitu konsep, rancangan, pengumpulan bahan, pembuatan, pengujian, dan distribusi. Selanjutnya media berbasis flash tersebut diuji cobakan dalam pembelajaran dan kemudian dianalisis kualitas media tersebut. Berdasarkan analisis tersebut diperoleh bahwa media berbasis flash yang dikembangkan telah memenuhi kriteria media yang baik, yaitu validator menyatakan bahwa media yang dikembangkan valid, siswa aktif dalam pembelajaran, dan respon siswa terhadap pembelajaran positif.

Kata Kunci: *media pembelajaran, media berbasis flash, pencerminan.*

1. Pendahuluan

Teknologi komputer memberikan peranan yang sangat besar dalam pendidikan. *Center for Applied Research in Educational Technology* (CARET), suatu proyek yang didanai oleh ISTE (*International Society for Technology in Education*), menjabarkan beberapa keuntungan penggunaan komputer dalam pendidikan.^[10] Keuntungan-keuntungan penggunaan komputer tersebut antara lain dapat (1) meningkatkan hasil belajar siswa; (2) mengembangkan kemampuan memecahkan masalah dan berpikir tingkat tinggi (*higher order thinking*) siswa; (3) meningkatkan minat, sikap, dan motivasi siswa dalam belajar; (4) membantu siswa mempersiapkan diri dalam bursa kerja; dan (5) membantu siswa yang memiliki kekurangan fisik ataupun mental.

Keuntungan-keuntungan penggunaan komputer yang dijabarkan oleh ISTE tersebut diperkuat oleh Gross & Duhon. Gross & Duhon menyatakan bahwa *Computer-Assisted Instruction* (CAI) dapat meningkatkan hasil belajar siswa.^[2] Selanjutnya, Brown, Lewis, & Harcleroad menambahkan bahwa CAI dapat meningkatkan kemampuan penyelesaian masalah siswa.^[1] Sedangkan Hussain & Ali menyatakan bahwa penggunaan CAI dapat meningkatkan minat siswa terhadap pembelajaran.^[6] Selain itu, CAI juga dapat meningkatkan daya ingat siswa terhadap materi pelajaran. Ditambahkan, CAI juga dapat mempersiapkan siswa dalam bursa kerja. Hal ini dikarenakan, ketika siswa belajar untuk menggunakan beberapa

perangkat lunak komputer, secara tidak langsung mereka telah mendapatkan keterampilan prasyarat untuk memasuki dunia kerja.

CAI, yang memiliki banyak keuntungan tersebut, dapat digunakan sebagai alat untuk melakukan proses belajar mengajar matematika di sekolah menengah, khususnya dalam topik geometri. *National Council of Teachers of Mathematics*, mendefinisikan geometri sebagai “suatu cabang matematika yang berhubungan dengan pengukuran, sifat-sifat, dan relasi titik, garis, sudut, bidang, dan bangun ruang; secara umum geometri merupakan studi mengenai sifat-sifat dari elemen-elemen yang diberikan yang tetap invarian apabila dikenakan suatu transformasi tertentu.”^[8] Dalam Kurikulum 2013, terdapat dua puluh dua kompetensi dasar yang berhubungan dengan topik geometri dan tersebar dari kelas VII sampai kelas IX. Jumlah tersebut mendekati sepertiga dari jumlah keseluruhan kompetensi dasar SMP dalam Kurikulum 2013. Sehingga, dapat dikatakan bahwa kompetensi dalam bidang geometri merupakan kompetensi penting yang harus dimiliki siswa SMP.

Dua kompetensi geometri yang harus dikuasai oleh siswa SMP adalah memahami konsep transformasi (dilatasi, translasi, pencerminan, rotasi) menggunakan objek-objek geometri dan menerapkan prinsip-prinsip transformasi (dilatasi, translasi, pencerminan, rotasi) dalam memecahkan permasalahan nyata. Berdasarkan dua kompetensi dasar tersebut, topik pencerminan atau refleksi merupakan salah satu topik yang harus dikuasai dan dipahami siswa. Topik pencerminan tersebut sangat penting bagi topik-topik transformasi geometri lainnya. Hal ini dikarenakan rotasi, salah satu topik transformasi lainnya, dapat dipandang sebagai komposisi beberapa pencerminan dengan syarat sumbu-sumbu pencerminannya berpotongan di satu titik. Demikian juga translasi atau pergeseran dapat dipandang sebagai komposisi pencerminan terhadap dua sumbu yang sejajar.

2. Permasalahan dalam Pembelajaran Geometri

Seiring dengan banyaknya kompetensi-kompetensi geometri yang harus dikuasai oleh siswa, seperti yang telah dijabarkan sebelumnya, hasil penelitian-penelitian menunjukkan bahwa masih banyak siswa yang mengalami kesulitan dalam belajar geometri. Seperti yang diungkapkan Halat, Jakubowski, & Aydin, banyak siswa yang mengalami kesulitan dalam belajar geometri.^[4] Hal ini mengakibatkan hasil belajar siswa dalam topik geometri yang sangat rendah. Selain itu, Ozerem mengungkapkan bahwa banyak siswa yang masih mengalami miskonsepsi terhadap geometri.^[9] Hal ini disebabkan salah satunya karena guru masih mengutamakan teknik presentasi lisan dalam menjelaskan konsep-konsep geometri kepada siswa-siswanya. Akibatnya, siswa harus melihat, mendengarkan, menulis catatan, dan berpikir dalam proses pembelajarannya. Mereka harus memperhatikan banyak sekali elemen pembelajaran dan memasukkannya ke dalam memori mereka. Hal tersebut sering mengakibatkan proses berpikir mereka menjadi berlebihan dan menyebabkan efek negatif terhadap proses belajar yang dilakukan oleh siswa tersebut.

Banyak peneliti telah melakukan eksperimen dengan berbagai macam metode pengajaran dalam pembelajaran geometri dan menemukan beberapa masalah yang dialami oleh siswa. Masalah-masalah tersebut diantaranya adalah adanya kesalahan pemodelan suatu masalah ke dalam simbol-simbol matematisnya, pembuktian yang hanya berdasarkan gambar geometris^[5], tidak ada atau tidak disebutkannya proposisi-proposisi yang mendasari dalam pembuktian suatu pernyataan matematis, dan sebagainya. Permasalahan-permasalahan tersebut bisa muncul karena pengajaran

geometri sering lebih kompleks daripada operasi numerik ataupun aljabar elementer. Sehingga dalam pembelajaran geometri tersebut haruslah digunakan suatu pendekatan pembelajaran yang teruji disertai dengan penggunaan media pembelajaran multimedia yang memadai.

Secara lebih khusus, kesalahan juga sering dilakukan siswa dalam mengerjakan soal-soal transformasi geometri. Ozerem menyatakan bahwa siswa sering melakukan kesalahan dalam mendapatkan informasi dalam soal-soal yang bersifat deskriptif.^[9] Sebagai contoh, ketika siswa diminta untuk mendeskripsikan suatu transformasi, mereka tidak menggunakan kata-kata yang spesifik, seperti translasi, refleksi, rotasi, atau dilatasi. Selain itu, siswa juga mengalami kesalahan ketika diminta untuk memperbesar ataupun memperkecil suatu objek geometris, serta mereka menggunakan bidang koordinat dengan cara yang salah. Selain itu, Ryan & Williams mengungkapkan bahwa siswa juga sering mengalami miskonsepsi dalam materi pencerminan.^[11] Siswa sering mengalami kesalahan ketika mengidentifikasi sumbu pencerminan. Siswa sering menganggap bahwa sumbu pencerminan adalah salah satu dari garis vertikal, garis horizontal, garis yang melalui sisi suatu bangun, atau minimal garis yang sejajar dengan ruas garis pada suatu bangun. Oleh karena itu, Ozerem menyarankan agar digunakannya CAI yang berbasis latihan-latihan agar siswa dapat mendapatkan pemahaman yang lebih baik dalam topik transformasi geometri.^[9]

3. Media Berbasis Flash

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa permasalahan-permasalahan dalam pembelajaran transformasi geometri dapat diatasi dengan menggunakan media pembelajaran komputer. Gulkilik menyebutkan bahwa salah satu jenis media pembelajaran komputer, yaitu *virtual manipulative*, dapat membantu siswa untuk menerapkan representasi transformasi geometri yang berbeda dan mengubah representasi yang satu dengan yang lainnya.^[3]

Menurut Moyer-Packenham dan Bolyard, *virtual manipulative* adalah representasi visual yang interaktif dari objek matematis dinamis, termasuk semua fitur terprogram yang dapat dimanipulasi, sehingga dapat digunakan untuk pembangunan pengetahuan matematis.^[7] Terdapat lima jenis *virtual manipulative* yang sering dijumpai, yaitu representasi tunggal, representasi majemuk, tutorial, *game*, dan simulasi. *Virtual manipulative* representasi tunggal memuat sebuah representasi visual/gambar interaktif dari objek matematis dinamis yang tidak disertai dengan informasi yang berupa teks ataupun numerik. *Virtual manipulative* representasi majemuk memuat representasi visual interaktif dari objek matematis dinamis yang disertai dengan informasi numerik, dan kadang-kadang juga informasi teks. *Virtual manipulative* tutorial memuat representasi visual interaktif dari objek matematis dinamis dan disertai dengan informasi teks dan numerik dalam suatu format yang membimbing pengguna ke dalam suatu tutorial prosedur dan proses matematis yang disajikan. *Gaming virtual manipulative* memuat representasi visual interaktif dari objek matematis dinamis yang ditanam dalam suatu format yang mengizinkan pengguna untuk bermain dengan tujuan tertentu. Terakhir, *virtual manipulative* simulasi memuat representasi visual interaktif dari objek matematis dinamis bersama dengan representasi-representasi lainnya yang ditanam dalam suatu format yang mengizinkan pengguna untuk menjalankan suatu simulasi untuk merepresentasikan

konsep-konsep matematika. *Virtual manipulative* jenis simulasi inilah yang dikembangkan dan dielaborasi oleh penulis dalam artikel ini.

Virtual manipulative simulasi yang dikembangkan berupa software yang berbasis flash. Selanjutnya, software tersebut dinamakan media berbasis flash karena software tersebut pada akhirnya digunakan sebagai media dalam menemukan prinsip-prinsip pencerminan oleh siswa Kelas VII.

4. Metode

Untuk mengembangkan media berbasis flash, digunakan model pengembangan Luther.^[12] Model pengembangan Luther tersebut terdiri dari enam tahap, yaitu konsep (*concept*), perancangan (*design*), pengumpulan bahan (*material collecting*), pembuatan (*assembly*), pengujian (*testing*), dan distribusi (*distribution*). Subjek pada penelitian adalah siswa kelas VII-D SMP Katolik Widyatama Batu. Siswa dalam kelas tersebut terdiri atas 9 siswa laki-laki dan 12 siswa perempuan. Peneliti memilih subjek dalam sekolah tersebut karena kurikulum yang digunakan dalam sekolah ini adalah Kurikulum 2013, yang merupakan landasan peneliti dalam mengembangkan media pembelajaran. Sebagian besar siswa yang menjadi subjek penelitian ini berasal dari keluarga dengan ekonomi rata-rata.

Dalam penelitian ini, instrumen pengumpulan data yang digunakan adalah lembar validasi dan angket. Lembar validasi digunakan untuk memperoleh data tentang hasil validasi ahli mengenai media pembelajaran yang dikembangkan. Lembar-lembar validasi tersebut diisi oleh validator untuk menilai perangkat pembelajaran yang dikembangkan. Penilaian terdiri dari 5 kategori, yaitu tidak baik (nilai 1), kurang baik (nilai 2), cukup baik (nilai 3), baik (nilai 4), dan sangat baik (nilai 5). Lembar pengamatan digunakan untuk memperoleh data tentang proses pembelajaran. Angket digunakan untuk mengumpulkan informasi tentang respon siswa terhadap media pembelajaran dengan cara memberikan tanda cek pada kolom yang tersedia untuk setiap pertanyaan yang diajukan. Angket tersebut diberikan kepada siswa pada akhir kegiatan pembelajaran dengan menggunakan instrumen angket.

Data yang diperoleh dari hasil penilaian para ahli untuk media pembelajaran dianalisis dengan mempertimbangkan skor, saran, masukan, dan komentar dari para validator. Hasil analisis tersebut dijadikan sebagai acuan untuk merevisi media pembelajaran. Perangkat pembelajaran yang telah divalidasi oleh validator dikatakan valid jika skor pada setiap aspek yang diberikan validator berkategori minimal baik, yaitu dengan skor paling kecil 3,50 dari skor maksimal 5,00.

Data angket respon siswa yang diperoleh dianalisis dengan menghitung persentase banyaknya siswa yang memberikan respon positif pada setiap kategori yang dinyatakan dalam lembar angket terhadap banyaknya seluruh siswa yang menjadi subjek uji coba perangkat pembelajaran. Respon siswa dikategorikan positif apabila banyaknya siswa yang memilih pernyataan senang, berminat, atau ya untuk setiap aspek yang tertera pada angket minimal 75%.

5. Hasil dan Pembahasan

Tabel 1 menunjukkan pencapaian kriteria media pembelajaran yang dikembangkan dalam penelitian ini. Aspek-aspek yang dilihat untuk menilai kualitas media pembelajaran tersebut adalah validasi ahli dan respon siswa.

Tabel 1 Pencapaian Kriteria Perangkat Pembelajaran

No.	Aspek Kategori	Pencapaian
1.	Validasi ahli	Valid
2.	Respon siswa	Positif

Validasi media pembelajaran yang dilakukan menghasilkan rata-rata skor minimal 4,0 pada setiap aspek yang dinilai. Validator dalam validasi media ini terdiri dari enam orang, yaitu tiga orang ahli pembelajaran/materi dan tiga orang ahli media. Karena rata-rata skor yang diperoleh lebih dari 3,50, maka dapat dinyatakan bahwa media berbasis flash yang dikembangkan berkategori valid.

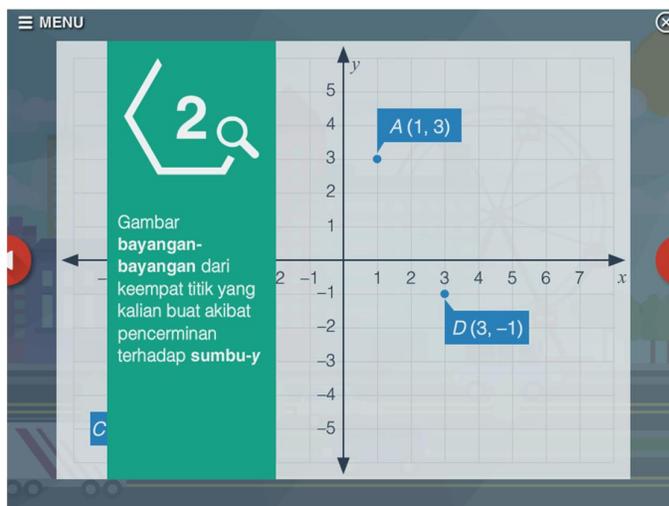
Berdasarkan angket respon siswa, diperoleh bahwa respon siswa terhadap semua aspek berada di antara 85% dan 100%. Sehingga, respon siswa dalam mengikuti pembelajaran yang menggunakan media berbasis flash yang dikembangkan dapat dikatakan positif.

5.1. Deskripsi Media Berbasis Flash

Media pembelajaran berbasis komputer yang dikembangkan ditujukan sebagai alat bantu guru dalam mendemonstrasikan prosedur-prosedur dan konsep-konsep pencerminan kepada siswa. Sehingga dalam proses pembelajaran, siswa memperhatikan ilustrasi yang diberikan oleh media tersebut kemudian melakukannya bersama dengan anggota kelompoknya atau secara individual.

Media pembelajaran ini merupakan multimedia yang dikembangkan dengan menggunakan perangkat lunak Adobe Flash Professional CS6 dan kompatibel dengan sistem operasi Windows. Media ini mencakup materi dan latihan-latihan soal pada materi pencerminan untuk Kelas VII. Materi-materi yang terdapat dalam media ini yaitu: pencerminan terhadap sumbu- x , garis $y = k$, sumbu- y , garis $x = k$, garis $y = -x$, dan titik asal.

Setiap materi pada media ini disusun berdasarkan pendekatan investigatif yang terdiri dari empat tahap, yaitu spesialisasi (*specializing*), pengajuan dugaan (*conjecturing*), pembenaran (*justifying*), dan generalisasi (*generalizing*).



Gambar 1. Tahap Spesialisasi pada Media Pembelajaran

Pada gambar di atas, peran media adalah untuk memandu dan mendemonstrasikan langkah-langkah dalam pengumpulan data. Setelah itu, media

memandu siswa untuk memberikan dugaan mengenai pola data yang diamati. Bagian ini dapat ditunjukkan oleh Gambar 2 berikut.

	Kuadran I	Kuadran II	Kuadran III	Kuadran IV
Titik Asli	$A(1, 3)$	$B(-3, 2)$	$C(-5, -4)$	$D(3, -1)$
Bayangan	$A'(-1, 3)$	$B'(3, 2)$	$C'(5, -4)$	$D'(-3, -1)$

Bagaimana **hubungan** antara unsur-unsur yang berubah?



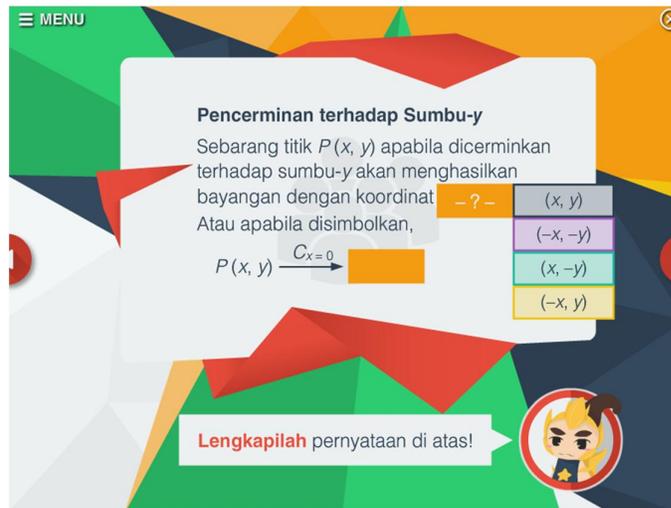
Gambar 2. Tahap Pengajuan Dugaan dalam Media Pembelajaran

Setelah siswa menemukan dugaan, maka guru meminta siswa untuk menguji dugaan siswa tersebut terhadap contoh yang diberikan media dan contoh kritis dari guru.

	Kuadran I	Kuadran II	Kuadran III	Kuadran IV
Titik Asli	$A(1, 3)$	$B(-3, 2)$	$C(-5, -4)$	$D(3, -1)$
Bayangan	$A'(-1, 3)$	$B'(3, 2)$	$C'(5, -4)$	$D'(-3, -1)$

Gambar 3. Tahap Pembeneran dalam Media

Terakhir, jika dugaan siswa sudah teruji melalui tahap pembeneran, maka media dapat memberikan umpan balik mengenai kesimpulan yang telah ditemukan oleh siswa. Tahap ini disebut tahap generalisasi. Tahap generalisasi dalam media dapat ditunjukkan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Tahap Generalisasi pada Media

5.2. Respon Siswa terhadap Pembelajaran

Respon siswa yang diamati dalam penelitian ini adalah respon mengenai presentasi guru, ilustrasi animasi yang digunakan guru dalam presentasi, aktivitas diskusi kelompok, dan bimbingan guru. Pada tahap uji coba pengembangan perangkat pembelajaran di kelas VII-D, diperoleh kesimpulan bahwa respon siswa terhadap pembelajaran berbantuan media berbasis flash persentasenya minimal 100%, artinya respon siswa terhadap pembelajaran berbantuan media tersebut adalah positif.

6. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan hasil penelitian pengembangan media berbasis flash diperoleh kesimpulan sebagai berikut: Berdasarkan pengembangan perangkat pembelajaran dengan menggunakan model Luther, dihasilkan suatu media berbasis flash. Setelah melalui tahap validasi ahli dan uji coba lapangan, media berbasis flash yang dikembangkan dapat dikategorikan memiliki kualitas baik. Oleh karena itu, media yang dikembangkan tersebut dapat digunakan oleh siswa maupun guru dalam menemukan prinsip-prinsip pencerminan.

Daftar Pustaka

- [1] Brown, J. W., Lewis, R. B., Harclerod, F. F., 1977, *AV Instruction: Technology, Media, and Methods*. New York: McGraw-Hill.
- [2] Gross, T. J. and Duhon, G., 2013, "Evaluation of Computer-Assisted Instruction for Math Accuracy Intervention". *Journal of Applied School Psychology*. Vol. 29 No. 3, pp. 246 – 261.
- [3] Gulkilik, H., 2016, The Role of Virtual Manipulatives in High School Students' Understanding of Geometric Transformations. *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 213-243). Springer International Publishing.
- [4] Halat, E., Jakubowski, E., and Aydin, N., 2008, "Reform-Based Curriculum and Motivation in Geometry". *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*. Vol. 4 No. 3, pp. 285 – 292.
- [5] Healy, L. and Hoyles, C., 2000, "A Study of Proof Conceptions in Algebra". *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 31 No. 4, pp. 396 – 428.
- [6] Hussain, L. and Ali, U., 2012, "Role of CAI on The Interest and Retention of Students at Secondary School Level". *Academic Research International*. Vol. 3 No. 2 September 2012, pp. 336 – 344.
- [7] Moyer-Packenham, P. S, Bolyard, J. J., 2016, Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative. *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 213-243). Springer International Publishing.
- [8] National Council of Teachers of Mathematics, 2010, *Geometry Standard*. (online), (<http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=314>, diakses 12 Desember 2014).
- [9] Ozerem, A., 2012, "Misconceptions in Geometry and Suggested Solutions for Seventh Grade Students". *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*. Vol. 1 No. 4, pp. 23 – 35.
- [10] Roblyer and Doering, A., 2009, *Integrating Educational Technology into Teaching (5th Edition)*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- [11] Ryan, J., Williams, J., 2007, *Children's Mathematics 4 – 15: Learning from Errors and Misconceptions*. New York: Open University Press.
- [12] Sutopo, Hadi, A., 2003, *Multimedia Interaktif dan Flash*. Yogyakarta: PT Graha Ilmu.